

Definice. Doplňek grafu $G = (V, E)$ je $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$, tedy graf, který má přesně opačné hrany.

Definice. Mějme graf $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$. Posloupnost $(\deg(v_1), \dots, \deg(v_n))$ nazveme *skóre* grafu G .

Příklad 1 (Odhadujeme kamufláž).

Uvažujme „standardní“ grafy K_n , P_n , C_n a $K_{m,n}$ z přednášky. Které z nich jsou isomorfní?

Příklad 2 (Já a já se perfektně doplňujeme).

Najděte nějaký graf, který je izomorfní svému doplňku. Co musí platit pro jeho počet vrcholů a hran?

Příklad 3 (Tudy most nevede).

Dokažte, že graf G , jehož každý vrchol má sudý stupeň, neobsahuje most. Jako most považujeme hranu e takovou, že $G - e$ má více komponent souvislosti než G .

Příklad 4 (Stejné skóre není vše).

Najděte dvojici neizomorfních grafů, jež mají stejné skóre:

- a) libovolnou,
- b) kde oba grafy jsou souvislé,
- c) a navíc mají co nejmenší počet vrcholů.

Příklad 5 (Někdy skóre není nic).

Rozhodněte, zda existuje graf, jehož skóre je:

- a) $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- b) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$
- c) $(0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$

Příklad 6 (Cesta tam a zase zpátky).

Nechť G je souvislý graf, který neobsahuje žádný cyklus a u, v dva jeho vrcholy, které nejsou spojené hranou. Ukažte, že $G + \{u, v\}$ již cyklus obsahovat bude.

Příklad 7 (Skóre z jedniček či dvojek).

Jak vypadají grafy, které obsahují jen vrcholy stupně:

- a) 1,
- b) 2,
- c) 1 nebo 2.

Příklad 8 (Doplňek nesouvislého).

Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý (ale opačně to obecně neplatí).

Příklad 9 (Bipartitní grafy).

Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnice liché délky.

Příklad 10 (Nedokonalý isomorfismus).

Připomeňme si definici isomorfismu:

$$G \cong H \iff (\exists f : G \rightarrow H \text{ bijekce} : \forall u, v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)).$$

Co se stane, když:

- a) místo bijekce vyžadujeme jen prostou funkci?
- b) místo bijekce si vystačíme s jakoukoliv funkcí?
- c) místo druhé ekvivalence uvažujeme implikaci?