

Definice. Říkáme, že číslo n dělí číslo m beze zbytku a píšeme $n \mid m$, když existuje celé číslo k takové, že $n \cdot k = m$.

Definice. Definujeme Fibonacciho posloupnost jako $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro každé $i \geq 2$: $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.

1 Důkazy

Příklad 1 (Suma mocnin dvojky).

Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Příklad 2 (Dělitelnost).

Indukcí dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $4 \mid (6n^2 + 2n)$.

Příklad 3 (Šachovnice).

Mějme šachovnici o rozměru $2^n \times 2^n$, ve které chybí jedno libovolné políčko. Dokažte, že ji lze zcela pokrýt kostičkami tvaru písmene **L** (zabírající tři políčka).

Příklad 4 (Sudé \times liché).

Dokažte, že pro každou neprázdnou n -prvkovou množinu platí, že počet všech jejích podmnožin sudé velikosti se rovná počtu všech jejích podmnožin liché velikosti.

Příklad 5 (Teleskopický součin).

Dokažte, že platí $\prod_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = n+1$ pro každé $n \geq 1$.

Příklad 6 (Nuly vedle sebe nechceme).

Ukažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n takových, že neobsahují dvě nuly bezprostředně vedle sebe, je roven F_{n+2} .

Příklad 7 (Suma Fibonacciho čísel).

Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$.

Příklad 8 (Neexistence cyklů).

O jisté množině států E jsme zjistili, že splňují:

1. $\forall x \in E \forall y \in E : V(x, y) \Rightarrow \neg V(y, x)$
2. $\forall x \in E \forall y \in E \forall z \in E : V(x, y) \wedge V(y, z) \Rightarrow V(x, z)$

Dokažte, že v E neexistuje posloupnost států x_0, \dots, x_n t.ž. $V(x_0, x_1) \wedge V(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge V(x_{n-1}, x_n)$ kde $x_0 = x_n$.

Příklad 9 (Prvočísla).

Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

2 Hádanky

Příklad 10 (Rovnoramenná váha).

Máme k dispozici rovnoramennou váhu a 9 mincí. Jedna z mincí je ovšem falešná, což se pozná tak, že je lehčí než ostatní mince, které váží všechny stejně. Na kolik nejméně vážení dokážeme zjistit, která z mincí je falešná?

Příklad 11 (Topinky).

Jakožto chudý student nemající dost peněz na topinkovač si smažíme topinky na pánvi. Opéci jednu stranu topinky trvá 5 minut. Na pánev se vejdou současně nejvýš dva krajíce. Jak dlouho bude trvat opečení tří krajíců chleba? Jak dlouho bude trvat opéct n krajíců chleba?