

$$|-a \cdot x| \neq -a \quad (a \circ b) \circ c = ||ab|c| = |a|b|c| = (a \cdot b \cdot c)$$

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2022/2023):

(5-6) Grupy a tělesa

Cv. 1. Zjistěte, zda je grupou:

- (a)  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ , NE - neexistuje inverzní prvek pro 0, null  
 (b)  $(\mathbb{Q}, -)$ , NE - není asociativní  
 (c)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ , kde  $a \circ b = |ab|$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ , NENÍ neut. pr. pro násob. úř.  
 (d)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ , NENÍ ASOCIATIVNÍ  
 (e)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = a + b + 3$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ , neut. = -3, inv. = -a-6  
 (f)  $(\mathcal{F}, +)$ , tj. množina  $\mathcal{F}$  všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí, neut. pr.  $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0(x) = 0 \quad 0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 (g) množina rotací v  $\mathbb{R}^2$  kolem počátku s operací skládání zobrazení, ANO  
 (h) množina posunutí v  $\mathbb{R}^2$  s operací skládání zobrazení, ANO

Cv. 2. Vyplňte tabulku pro binární operaci  $\circ$  na  $\mathbb{G}$  tak aby  $(\mathbb{G}, \circ)$  byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

(b)

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

(c)

$\circ$	0
0	0

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$(3 \circ 1) \circ 1 = 3 \quad 1 \circ (1 \circ 2) = 0$   
 $3 \circ (1 \circ 1) = 3 \circ 0 = 3 \quad (1 \circ 1) \circ 2 = 2$   
 $(2 \circ 1) \circ 1 = 0 \quad 2 \circ (1 \circ 1) = 2$

to musí být 0, aby měla tato grupa inv. pr.

NENÍ GRUPOU!  $a \circ b$

TOTO JE GF(4)

$(2 \circ 2) \circ 3 = 3 \quad (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $2 \circ (2 \circ 3) = 3$   
 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$   
 $10(2 \circ 3) = 0$   
 $(1 \circ 2) \circ 3 = 0$

všechny tříprvkové grupy jsou izomorfní s  $\mathbb{Z}_3$

Cv. 3. Nechť  $(\mathbb{G}, \circ)$  je grupa a  $x \in \mathbb{G}$ . Rozhodněte, zda  $(\mathbb{G}, *)$  je grupou s operací definovanou  $a * b = a \circ x \circ b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{G}$ .

Cv. 4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

- (a) množina  $\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z} \}$  s maticovým součinem, ✓  
 (b) množina  $\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$  s maticovým součinem, ✓

Cv. 5. Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

- (a)  $((2^{-1} + 1)4)^{-1}, 4/3$  v  $\mathbb{Z}_5$ , ✓  $4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 3$   
 (b)  $6 + 7, -7, 6 \cdot 7, 7^{-1}, 6/7$  v  $\mathbb{Z}_{11}$ , ✓  
 $2 \quad 4 \quad 9 \quad 8 \quad 4$