Universidade Federal do Ceará - Campus Crateús
Disciplina: Projeto e Análise de Algoritmos
Professor: Rennan Dantas

Nome do Aluno(a):
Matrícula:

Lista de exercícios para o teste 3

Questão 01 Responda e explique cada um dos itens abaixo:

a) O que é a Classe P?

b) O que é um certificado de um problema de decisão? O que é a classe NP e qual a relação dela com os certificados?

c) O que é um algoritmo não-determinístico? (Faça uma rápida pesquisa)

d) O que é uma redução polinomial entre dois problemas e para que serve?

e) O que é a classe NP-Completa

f) Dê um exemplo de como podemos usar a solução de um problema para resolver outro problema.

g) Explique porque, caso algum dia alguém encontre uma solução polinomial para um problema NP-completo, todos os problemas NP-completos estarão teoricamente resolvidos em tempo polinomial.

h) "Se $A \leq_P B$ e A é NP-completo, então B é NP-completo". Faça uma justificativa técnica e uma justificativa informal para essa afirmativa. Considere que B está em NP.

Questão 02 Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é verdadeira, falsa, verdadeira se P $\neq$ NP ou falsa se P $\neq$ NP. Dê uma justificativa curta para cada resposta.

(1) Não há problemas em P que são NP-Completos

(2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada

(3) Existem problemas em P que estão em NP

(4) Existem problemas em NP que não estão em P

(5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo

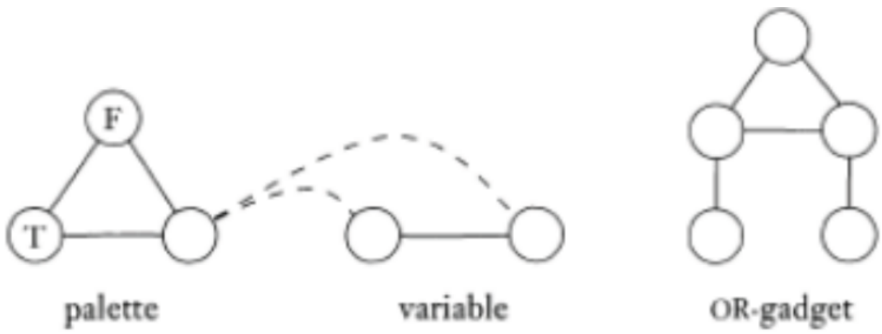
(6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B $\in$ P, então A $\in$ P

(7) O problema de obter um percurso mínimo do Caixeiro Viajante é NP-Completo

(8) O problema SAT não pertence a classe P

Questão 03 Mostre que se P=NP, existe um algoritmo de tempo polinomial que recebe um grafo direcionado G, uma fonte s e um destino t como entrada e encontra um caminho hamiltoniano de s a t contido no grafo (suponha que só exista um caminho). Perceba que o algoritmo deve retornar o conjunto de arestas que compõe o caminho hamiltoniano, se houver caminho hamiltoniano. **Mostre** o algoritmo.

Questão 04 Dado um grafo G, uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.



Questão 05 Dizemos que um grafo G esta parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G, seja r(v)o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamente r(v) vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. Dica: Imagine rótulos negativos como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

Questão 06 No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro n x n. Em cada uma das suas n^2 posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra. Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possıvel ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possıvel vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inócuas para que o tabuleiro fique quadrado.

Questão 07 Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro k > 0, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D.

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura de vértices.

Questão 08 Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção C = $C_1, ..., C_k$ de subconjuntos de S, onde k > 0, é possível colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S. Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F .

Questão 09 Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento s ∈ S possui um peso p(s) e um valor v(s), existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V . Prove que MOCHILA é NP-Completo. Dica: Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

Questão 10 Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma coleção de subconjuntos C_1,...,C_m de um conjunto S, existe um subconjunto S^* com K elementos de S tal que, para todo subconjunto C_i, C_i contém algum elemento de S^*. Prove que HITTING-SET é NP-Completo. Dica: Cobertura de vértices.

Questão 11 O problema do caixeiro é fortemente relacionado ao problema do ciclo hamiltoniano. Modelando esse problema como um grafo completo não-direcionado com n vértices, nós podemos dizer que o caixeiro deseja fazer uma viagem, ou um ciclo hamiltoniano, visitando cada cidade apenas uma vez e terminando na cidade em que ele começou. O caixeiro tem um custo não-negativo c(i,j) para viajar da cidade i para a cidade j e o caixeiro deseja fazer a viagem cujo custo total seja o mínimo, onde o custo total é a a soma dos custos individuais das arestas da viagem.

TSP=$< G, c, k >$: G= (V,E) é um grafo completo não direcionado, c é uma função de V × V → $\mathbb{Z}$, k ∈ $\mathbb{Z}$ e G tem uma viagem do caixeiro viajante de custo no máximo k.

Mostre que o TSP é NP-Completo.

Dica: Use o fato conhecido de que o problema HAM-CYCLE (não direcionado) é NP-completo. Para a construção da sua redução, note que a entrada do TSP é um grafo completo e as arestas possuem um custo. Então você deve completar o grafo e ponderar as arestas de alguma forma.

Dica 2: Na sua ponderação, pondere com peso 0 as arestas que já existiam e com peso 1 as arestas que você terá de adicionar para completar o grafo.

Questão 12 Seja MEIO-CLIQUE=$\{< G >$ | G é um grafo não-direcionado que tem um subgrafo completo com exatamente m/2 nós, onde m é o número de nós em G$\}$. **Mostre que MEIO-CLIQUE é NP-Completo**.

Dica: Use o fato conhecido de que o problema CLIQUE é NP-completo.

Dica da construção: Seja $< G, k >$ a entrada do problema CLIQUE. G tem m nós. Se k for igual a m/2, então G=H (entrada do problema MEIO-CLIQUE). Se k for menor do que m/2, então adicione ao grafo H (entrada do problema MEIO-CLIQUE) j=m-2k vértices, onde esses j nós estão ligados aos nós originais e entre si. Se k for maior do que m/2, então adicione ao grafo H (entrada do problema MEIO-CLIQUE) j=2k-m nós, onde esses j nós não se ligam a ninguém.

Questão 13 O problema do SET-PARTITION recebe como entrada um conjunto X de números. A questão é se os números podem ser particionados em dois conjuntos A e $\overline{A}$=$X - A$ tal que

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in \overline{A}} x$$

Mostre que SET-PARTITION é NP-Completo.

Dica 1: Utilize o SUBSET-SUM. O SUBSET-SUM é definido como a seguir: Dado um conjunto X de inteiros e um alvo t, encontrar um subconjunto Y $\subseteq$ X tal que os membros de Y somados resultam em t. Seja s a soma dos membros de X. Faça X'=X $\cup \{s - 2t\}$ como entrada do SET-PARTITION.

Dica 2: Note que se o SET-PARTITION retorna verdadeiro, existem dois subconjuntos cuja soma é $s - t$.

Questão 14 Um conjunto de vértices S é considerado independente em um grafo G, se não existe aresta para qualquer par de vértices de S no grafo G (você pode pensar como sendo o completamente oposto de uma clique). O problema do CONJ-INDEP consiste em saber se em um grafo G existe um conjunto independente de tamanho k (G e k são passados por parâmetro). **Mostre que o problema CONJ-INDEP é NP-completo.**

Dica: Use o 3SAT. Como engrenagem de cláusulas, use uma clique (isso força a escolher no máximo um vértice da clique, ou, em outras palavras, um literal da cláusula). Você não precisa de engrenagem de variável. Ou seja, a única coisa que você precisa fazer nessa redução é conectar as cláusulas.

Questão 15 Se P=NP, os problemas em NP-Completo podem ser resolvidos em tempo polinomial. Suponha que você tem uma subrotina "caixa-preta" que resolve o problema de decisão da questão 14. Construa um algoritmo para encontrar o conjunto independente máximo de um grafo não-direcionado dado como entrada. O tempo de execução do **seu algoritmo deve ser polinomial em** $|V|$ **e** $|E|$.