Taylor series

岡林

2018/7/31

1 Abstract

テイラー展開は，式の形は覚えているものの，収束半径やら導出等をいちいち忘れてしまうので，メモ．

2 1変数のテイラー展開

2.1 冪級数

今，ある任意の関数 $f(x)$ を無限次元多項式で表そうとする．つまり，$f(x)$ は以下のように表すことができるとする．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

[1] P98 より，ある任意の関数 $f(x)$ の接線は以下のように表すことができる．

曲線の接線

微分可能な曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は，次式で表される．

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \tag{2}$$

これは任意の点 a の周りの x について，関数 $f(x)$ を1次多項式で近似していることを表している．次に2次多項式で近似してみることを考える．

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + p(x-a)^2 \qquad (x \fallingdotseq a \text{ の時}) \tag{3}$$

ここで，p はある定数であるとする．この時，p がどんな値をとるか調べる．3の両辺を x で二回微分し，係数比較を行うと

$$p = \frac{f^{(2)}(a)}{2} \tag{4}$$

となることがわかる．同様に3次多項式，4次多項式で表そうとする．これを続け，無限次元多項式で関数を近似すると

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}(x-a)^n \qquad (x \fallingdotseq a \text{ の時}) \tag{5}$$

となる．これを $f(x)$ の点 a 周りでのテイラー展開と呼ぶ．

2.2 テイラー展開

前節でテイラー展開による関数近似

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}(x-a)^n \qquad (x \fallingdotseq a \text{ の時}) \tag{6}$$

を見てきた．ここで，右辺の $n \leqq k$ の部分和を考える．

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^n}{n!}(x-a)^n \qquad (x \fallingdotseq a \text{ の時}) \tag{7}$$

上式と関数 $f(x)$ のテイラー展開との差を考える．この差は近似式の関数 $f(x)$ との誤差と考えることができる．

参考文献

[1] 馬場敬之
微分積分 キャンパス・ゼミ マセマ出版

[2] EMAN の物理学 (テイラー級数) : http://eman-physics.net/math/taylor.html

[3] Martin Arjovsky and L'eon Bottou.
Towards principled methods for training generative adversarial networks. I
https://arxiv.org/abs/1701.04862