МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция № 11

Дифференциальное исчисление
функции одной переменной (часть 2)

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРОИЗВОДНЫМИ

Теорема 1. *Пусть функции* $u = f(x)$ *и* $v = g(x)$ *имеют в некоторой точке* x *производные* u' *и* v'*. Тогда*

1) функция $y = u \pm v$ *также имеет производную в той же точке, равную* $y' = u' \pm v'$*;*

2) функция $y = u \cdot v$ *также имеет производную в той же точке, равную* $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$*;*

3) если функция v *отлична от нуля, то функция* $y = \frac{u}{v}$ *также имеет производную в той же точке, равную* $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРОИЗВОДНЫМИ

Доказательство. Придадим x приращение Δx, тогда функции u, v и y тоже получат приращения $\Delta u, \Delta v$ и Δy. Их новые значения

$$u + \Delta u, \quad v + \Delta v \quad \text{и} \quad y + \Delta y.$$

Тогда имеем

1)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

так что производная y' существует и равна

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРОИЗВОДНЫМИ

2) Рассмотрим приращение произведения:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

так что

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Так как при $\Delta x \to 0$, и $\Delta v \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т.е. существует производная y' и равна

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРОИЗВОДНЫМИ

3) Рассмотрим приращение частного

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

выражая отсюда Δy и записывая $\frac{u}{v}$ вместо y, получим

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Устремляя в последнем равенстве $\Delta x \to 0$ (при этом одновременно $\Delta v \to 0$), имеем

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Теорема доказана.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Пусть*

1) *функция* $u = g(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x = g'(x_0)$,
2) *функция* $y = f(u)$ *имеет в соответствующей точке* $u_0 = g(x_0)$ *производную* $y'_u = f'(u)$.

Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ *в точке* x_0 *также будет иметь производную, равную*

$$\left(f\left(g(x_0)\right)\right)' = f'_u\left(g(x_0)\right) \cdot g'(x_0).$$

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Доказательство. Пусть $\Delta x -$ произвольное приращение x_0, $\Delta u -$ это соответствующее приращение функции $u = g(x)$ и $\Delta y -$ приращение функции $y = f(u)$, вызванное приращением Δu. Тогда по определению дифференцируемости

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α зависит от Δu и вместе с ним стремится к нулю). Разделим это равенство почленно на Δx и получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Если теперь здесь Δx устремить к нулю, то будет стремиться к нулю и Δu, а тогда, как мы уже знаем, к нулю будет стремиться и зависящая от Δu величина α. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

Теорема доказана.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Примеры. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 + 5}$;

б) $y = x^x$.

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X и имеет своей областью значений множество Y . Возьмем какое-нибудь конкретное значение $y_0 \in Y$. Тогда существует хотя бы одно значение $x_0 \in X$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Таким образом, каждому $y \in Y$ соответствует одно или несколько значений $x \in X$. Так на множестве Y определяется однозначная или многозначная функция $x = \varphi(y)$. Ее называют ***обратной функцией*** к функции $f(x)$ и обозначают $f^{-1}(y)$.

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна на некотором множестве X. Пусть также функция f в точке x_0 имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Придадим $y = y_0$ произвольное приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x = g(y)$. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, в <u>силу однозначности самой функции $y = f(x)$,</u> и <u>$\Delta x \neq 0$.</u> Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если Δy устремим к нулю, то, в силу непрерывности функции $x = g(y)$, и приращение $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части будет стремится к $f'(x_0) \neq 0$, а, следовательно, существует предел левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$, который и представляет собой производную функции $g'(y_0)$. Теорема доказана.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Примеры. Вычислить производные указанных функций:

а) $y = \ln x$,

б) $y = \arcsin x$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет конечную производную в точке* x_0. *Если* $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, *то для значений* x, *достаточно близких к* x_0 *справа, будет* $f(x) > f(x_0)$ $\big(f(x) < f(x_0)\big)$, *а для значений* x, *достаточно близких к* x_0 *слева, будет* $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

Доказательство. По определению производной и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если $f'(x_0) > 0$, то найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой (при $x \neq x_0$)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Пусть сначала $x_0 < x < x_0 + \delta$, так что $x - x_0 > 0$. Тогда из предыдущего неравенства следует, что и $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$.

Если же $x_0 - \delta < x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и имеем $f(x) < f(x_0)$. Лемма доказана.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема 4 (Ферма). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором промежутке* X *и во внутренней точке с из этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует конечная производная* $f'(c)$ *в этой точке, то* $f'(c) = 0$.

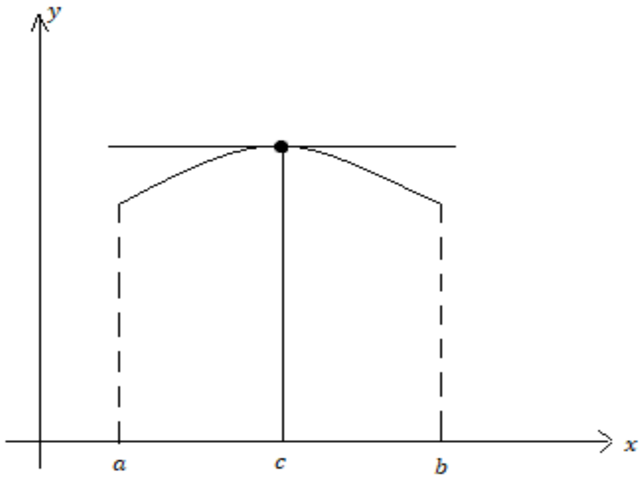
Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке с наибольшее значение.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что $f'(c) \neq 0$. Тогда возможны два варианта: либо $f'(c) > 0$, либо $f'(c) < 0$.

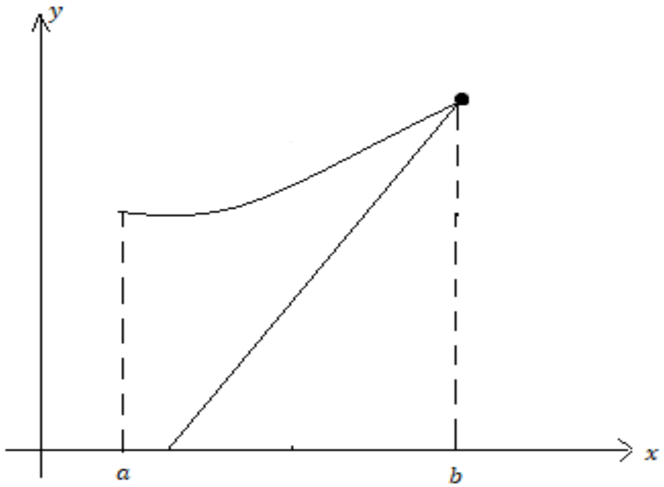
Пусть $f'(c) > 0$, тогда по лемме 1 $f(x) > f(c)$, если $x > c$ и достаточно близко к c. Если $f'(c) < 0$, и тогда опять $f(x) > f(c)$, если $x < c$ и достаточно близко к c. В обоих случаях $f(c)$ не может быть наибольшим значением функции $f(x)$ на X. Получили противоречие, следовательно, $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Замечание 1. Мы знаем, что производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$. Обращение в нуль производной $f'(c)$ геометрически означает, что в соответствующей точке этой кривой касательная параллельна оси Ox.



Замечание 2. В доказательстве теоремы существенно было использован тот факт, что c является внутренней точкой промежутка, так как нам пришлось рассматривать точки промежутка, лежащие и левее точки c, и правее. Без этого предположения теорема становится неверной: если функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке и достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на одном из концов этого промежутка, то производная $f'(x)$ на этом конце (если существует) может и не равняться нулю.



ТОП-ИТ

ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема 5 (Ролля). *Пусть выполнены три условия:*
1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$;
2) существует конечная производная $f'(x)$, в (a, b);
3) на концах промежутка функция принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.
Тогда найдется точка с между a и b, что $f'(c) = 0$.

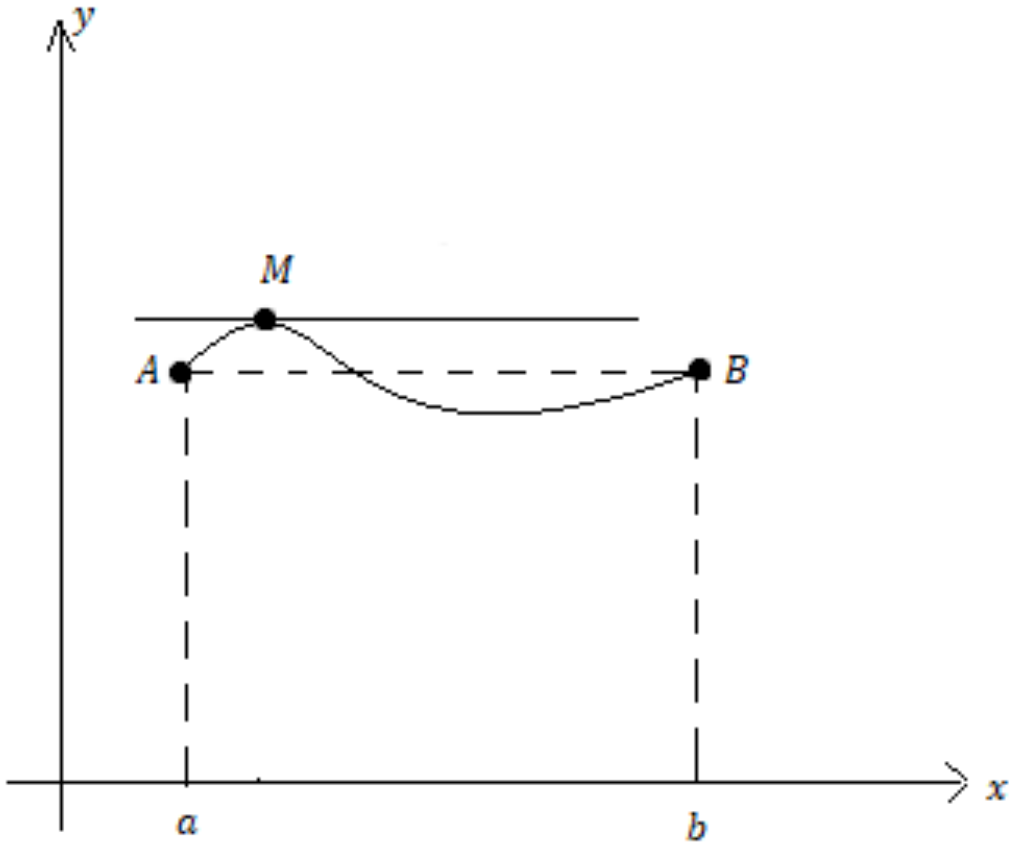
Доказательство. По условию теоремы функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, по II теореме Вейерштрасса, она принимает в этом промежутке наибольшее M и наименьшее m значения. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $M = m$. Тогда $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ постоянна, т.е. неравенство $m \leq f(x) \leq M$ в этом случае дает $f(x) = M$ для всех x из $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Поэтому $f'(x) = 0$ на всем промежутке, тогда в качестве точки с можно взять любую точку промежутка $[a, b]$.

2. Пусть теперь $M > m$. Оба этих значения достигаются функцией, но так как по условию теоремы выполняется равенство $f(a) = f(b)$, то хоть одно из них достигается в некоторой точке с между a и b. Тогда по теореме Ферма в этой точке с производная равна нулю. Теорема доказана.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox.



Теорема 6 (Лагранжа/о среднем значении). *Пусть*
1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$;
2) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, в (a, b).
Тогда между a и b найдется такая точка c, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Доказательство. Введем вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$ следующим образом:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, как разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В промежутке (a, b) она имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

И, наконец, непосредственной подстановкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$, т.е. $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка. Тогда к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля, т.е. утверждать, что существует точка $c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$. Таким образом, имеем

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда получаем

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема доказана.

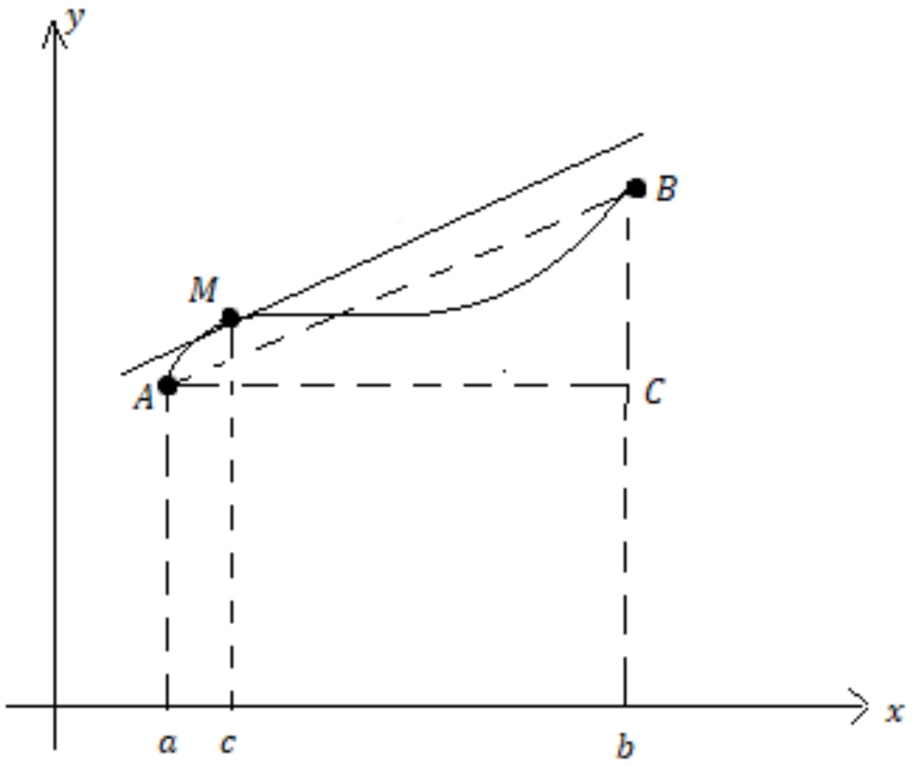
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теперь рассмотрим геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=c$.



Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

Теорема 7 (Коши).

Пусть

1) функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *определена и непрерывна на* $[a, b]$;

2) существуют конечная производная $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *по крайней мере, в* (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ *в промежутке* (a, b).

Тогда между a *и* b *найдется такая точка* c*, что выполняется равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$