МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция №9

Предел функции (часть 4)

Непрерывность функции

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на множестве X, и точку $x_0 \in X$, которая является предельной точкой этого множества.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε) такое, что выполнено неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

как только выполняется неравенство $|x - x_0| < \delta$.

Вспоминая определение предела функции в точке, можно переписать следующим образом:

Определение 1*. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0, если правое (левое) предельное значение этой функции в точке x_0 существует и равно значению функции в этой точке, т.е. равно $f(x_0)$.*

Символические обозначения непрерывности справа (слева):

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad f(x_0+0) = f(x_0)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad f(x_0-0) = f(x_0)\right).$$

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X.*

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пример 1. Докажем, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x_0, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Возможные типы точек разрыва функции.

1) Устранимый разрыв.

Определение 4. *Точка a называется точкой устранимой разрыва функции $y = f(x)$, если предел у функции в этой точке существует, но в точке a функция $f(x)$ или не определена, или ее значение $f(a)$ в точке a не равно предельному значению.*

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Функция не определена в точке $x = 0$, но мы знаем, что ее предел в этой точке равен 1. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва.

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Этот разрыв можно устранить. Достаточно определить значение функции в точке устранимого разрыва равным ее предельному значению в этой точке.

Доопределим значение функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ единицей, т.е.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

И уже функция $\tilde{f}(x)$ будет непрерывной в точке $x = 0$.

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

2) Точки разрыва первого рода.

Определение 5. *Точка a называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция $y = f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правое и левое предельные значения, т.е.*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Точки разрыва первого рода также называют «скачками».

Пример 2. Для функции

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, так как

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

3) Точки разрыва второго рода.

Определение 6. *Точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $y = f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или если хотя бы один из односторонних пределов равен $\pm\infty$ (в этом случае точку разрыва иногда называют точкой бесконечного разрыва).*

Пример 3. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не имеет ни правого, ни левого предельного значения. Следовательно, $x = 0 -$ точка разрыва второго рода.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и обе непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке будут также непрерывны функции*

$$f(x) \pm g(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)},$$

последняя при условии, что $g(x_0) \neq 0$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* X *и монотонно возрастает (убывает). Тогда* $f(x)$ *может иметь на* X *только разрывы первого рода, т.е. скачки.* (в формулировке теоремы $f(x)$ может быть также неубывающей (невозрастающей)).

Доказательство. Рассмотрим случай монотонно возрастающей функции. Пусть x_0 – любая точка множества X, не являющаяся левым концом этого промежутка. Рассмотрим промежуток, лежащий левее точки x_0. Поскольку для $x < x_0$, очевидно, $f(x) \leq f(x_0)$, то по теореме о монотонной и ограниченной функции существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0).$$

Если этот предел совпадает с $f(x_0)$, то $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 (т.е. разрывов нет), в противном случае имеем разрыв первого рода.

Таким же образом можно убедиться, что в каждой точке x_0 промежутка X (не являющейся его правом концом) справа либо имеет место непрерывность, либо имеем скачок. Теорема доказана.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ

Теорема 3. *Пусть функция $\varphi(y)$ определена на множестве Y, а функция $y = f(x)$ – на множестве X, причем значения $f(x)$ не выходят за пределы Y, когда $x \in X$.*
Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет непрерывной в точке x_0.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Так как $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0, то по ε найдется число $\sigma > 0$ такое, что

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad |y - y_0| < \sigma.$$

В свою очередь, так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то по σ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma \quad \text{как только} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Тогда из последних двух утверждений получаем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon$$

как только $|x - x_0| < \delta$. Теорема доказана.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 4 (об обращении функции в нуль). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда найдется точка c: $a < c < b$ и*

$$f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < 0,\ \ f(b) > 0$. Рассмотрим множество $X = \{x' \in [a,b]: f(x') < 0\}$. Понятно, что множество X будет содержать также точку a и близлежащие к ней точки. Множество X ограничено сверху, например, числом b. Пусть $c = \sup X$. Докажем, что $f(c) = 0$.

Допустим противное. Тогда либо $f(c) < 0$, либо $f(c) > 0$. Пусть $f(c) < 0$, тогда $c < b$, так как $f(b) > 0$, и правее c найдутся значения x', для которых $f(x') < 0$, а это противоречило бы определению c, как верхней грани для X.

Случай $f(c) < 0$ приводит к аналогичному результату. Получили противоречие. Теорема доказана.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 5 (о промежуточном значении). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X. Если в двух точках $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ этого промежутка функция принимает неравные значения*

$$f(a) = A \quad \text{и} \quad f(b) = B,$$

То каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется точка $x = c$ $(a < c < b)$ такая, что $f(c) = C$.

Доказательство. Пусть для определенности $A < B$, тогда $A < C < B$. Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и на его концах имеет разные знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда между a и b найдется точка c: $f(c) = 0$, т.е.

$$\varphi(c) = f(c) - C = 0 \quad \text{или} \quad f(c) = C.$$

Теорема доказана.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 6 (I теорема Вейерштрасса). *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она ограничена на нем, т.е. существуют такие числа* m *и* M, *что*

$$m \leq f(x) \leq M \ \text{ при } \ a \leq x \leq b.$$

Доказательство. Докажем от противного. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не ограничена. Тогда для каждого натурального n найдется на $[a, b]$ такое значение $x = x_n$, что

$$|f(x_n)| \geq n.$$

Из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (\text{при } k \to +\infty),$$

причем, очевидно, $a \leq x_0 \leq b$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$f\left(x_{n_k}\right) \to f(x_0),$$

а это невозможно, так как

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \to \infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему. Теорема доказана.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 7 (II теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней граней.*

Доказательство. Докажем существование верхней грани. Пусть

$$M = \sup\{f(x)\},$$

тогда по свойству точной верхней грани, для любого n найдется такое $x = x_n$ на отрезке $[a,b]$, что

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Тогда из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу $x_0 \in [a,b]$: $x_{n_k} \to x_0$, так что, в силу непрерывности функции имеем

$$f\left(x_{n_k}\right) \to f(x_0).$$

В то же самое время имеем

$$f\left(x_{n_k}\right) > M - \frac{1}{n_k}$$

и при $k \to +\infty$ имеем $f(x_0) \geq M$. Но $f(x_0)$ не может быть больше верхней границы M множества значений функции и, следовательно, $f(x_0) = M$. Теорема доказана.