МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция № 10

Дифференциальное исчисление
функции одной переменной (часть 1)

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть по дороге движется автомобиль и через $s(t)$ обозначим расстояние, пройденное этим автомобилем к моменту времени t. Пусть $\Delta t -$ некий промежуток времени, прошедший после момента t. Тогда, очевидно, что разность

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

есть длина пути, который автомобиль преодолел за время Δt. Если Δt достаточно мало, то скорость автомобиля за этот промежуток существенно не изменилась. А, значит, то, что можно было бы назвать скоростью автомобиля в данный момент времени, приближенно равно средней скорости его движения за время Δt, т.е. величине

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Чем Δt меньше, тем это приближение лучше, и тогда естественно определить скорость $v(t)$ движения автомобиля в момент времени t как предел величины $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если известна функция $s(t)$, описывающая расстояние, пройденное некоторым телом к моменту времени t, то можно вычислить скорость движения этого тела в каждый момент времени t.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X.
Возьмем на множестве X точку $x = x_0$ и придадим этому значению приращение Δx: $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда значение $y = f(x_0)$ заменится новым значением $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, т.е. получит приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 1. *Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

если этот предел существует и конечен.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Замечание. Возвращаясь к задаче о движущемся теле, можно сказать, что *скорость* v есть *производная от пройденного пути* s по времени t.

Если слово «скорость» понимать в более общем смысле, то можно было бы производную всегда трактовать, как некую скорость: именно, имея функцию y от независимой переменной x, можно поставить вопрос о скорости изменения переменной y по сравнению с переменной x.

Вычисление производных, изучение и использование их свойств и составляет главный предмет дифференциального исчисления.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Примеры. Вычислите производные указанных функций:

а) $y = C = \mathrm{const}$,

б) $y = x^n$,

в) $y = \sin x$,

г) $y = e^x$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x$ $y = e^x$	$y' = a^x \ln a$ $y' = e^x$
$y = \log_a x$ $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$ $y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

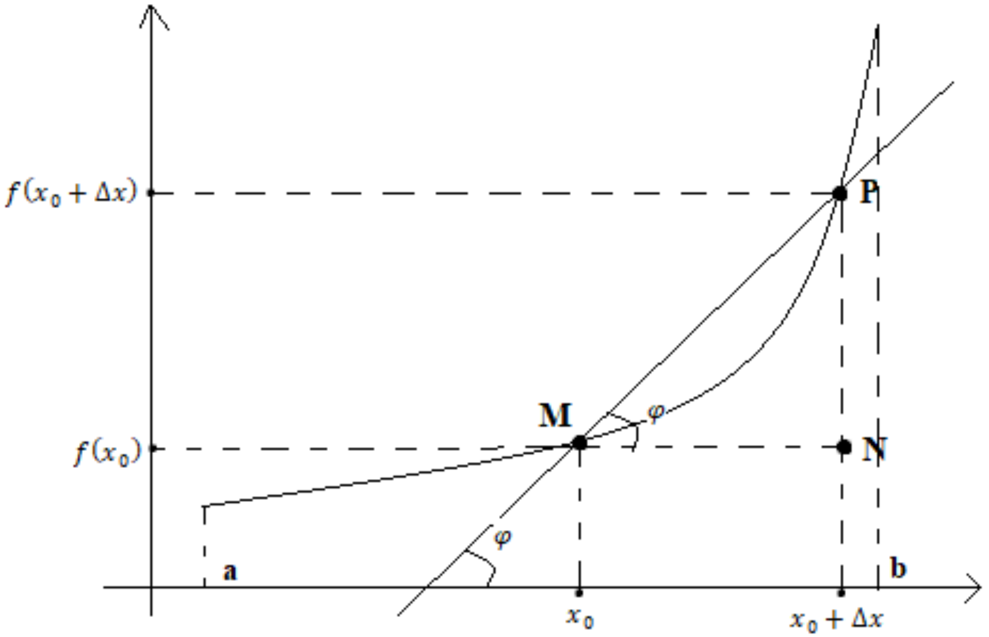
Рассмотрим график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$ и придадим приращение Δx аргументу так, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

Обозначим $M(x_0, f(x_0))$ *и* $P\big(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\big)$. Прямая MP называется секущей к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Её положение однозначно определяется угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ – угол наклона секущей MP к оси Ox.
По определению угла наклона φ – тот угол между прямыми MP *и* Ox, *который удовлетворяет условию*

$$0 \le \varphi < \pi.$$

Заметим, что угол φ зависит от Δx, то есть можно писать $\varphi = \varphi(\Delta x)$.



ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение 2. *Если существует предельное положение секущей при* $\Delta x \to 0$ *(т.е. существует* $k_0 \coloneqq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x)$*), то прямая с таким предельным положением называется касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0.

Лемма 1. *Если в точке* x_0 *производная функции* $y = f(x)$ *существует и конечна, то касательная к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *также существует и ее угловой коэффициент* $k_0 = f'(x_0)$.

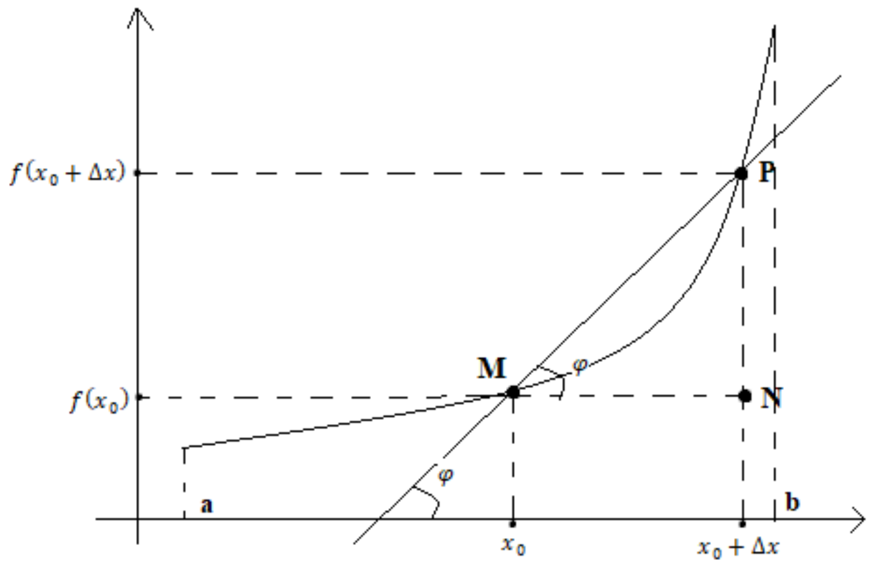
Доказательство. Пусть $N\big(x_0 + \Delta x, f(x_0)\big)$. Тогда из прямоугольного треугольника MPN имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x)$$

существует и равен $f'(x_0)$. Лемма доказана.



ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ТОЧКЕ

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на множестве X и непрерывная в точке $x_0 \in X$. Тогда приращению Δx аргумента соответствует приращение функции

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx.

Возникает вопрос: существует ли для Δy такая линейная относительно Δx бесконечно малая $A\Delta x$ $(A = \text{const})$, что их разность оказывается, по сравнению с Δx, бесконечно малой высшего порядка

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

При $A \neq 0$ имеем, что бесконечно малая $A\Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy.

Определение 3. *Если указанное равенство выполняется, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = x_0$.*

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ТОЧКЕ

Итак, дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x_0 означает, что существует некоторая бесконечно малая функция $\alpha = \alpha(x, \Delta x)$ и число $A \in \mathbb{R}$ такие, что справедливо равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x, \Delta x)\Delta x \tag{2}$$

или

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x, \Delta x)\Delta x \tag{2'}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее существовала конечная производная $y' = f'(x_0)$. При этом равенство (2) выполняется при значении A равной именно $f'(x_0)$:*

$$\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x) \tag{2''}$$

Доказательство. Вначале докажем необходимость. Пусть выполнено (2), тогда, поделив обе части этого равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Теперь, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A.$$

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ В ТОЧКЕ

Теперь докажем достаточность.
Так как, по определению производной, имеем при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_x,$$

то, полагая,

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

видим, что и $\alpha \to 0$. Выражая из последнего равенства Δy, получим

$$\Delta y = y'_x \Delta x + \alpha \Delta x,$$

что и является формулой (2’’), учитывая определение символа о-малое. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную, то она непрерывна в этой точке.*
Доказательство. Из формулы

$$\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x)$$

следует, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, а это и означает непрерывность функции в точке x_0.

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Итак, рассмотрим некоторую дифференцируемую в точке x_0 функцию $y = f(x)$. По определению, для неё выполнено равенство:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x)$$

Определение 4. *Линейная часть приращения функции, а именно, выражение*

$$f'(x_0)(x - x_0)$$

называется дифференциалом функции в точке x_0 *и обозначается символом* dy *или* $df(x_0)$.

То есть

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

дифференциал функции в точке x_0.

Замечание. Подчеркнем, что под Δx в этом выражении мы имеем ввиду произвольное приращение независимой переменной, т.е. произвольное число (которое можно считать независимым от переменной x). При этом *не обязательно считать*, что Δx бесконечно мало.

Но если $\Delta x \to 0$, то дифференциал dy тоже будет бесконечно малым. При этом можно приближенно полагать

$$\Delta y \approx dy$$

с тем большей точностью, чем меньше Δx.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала dy и его связь с приращением Δy функции $y = f(x)$.

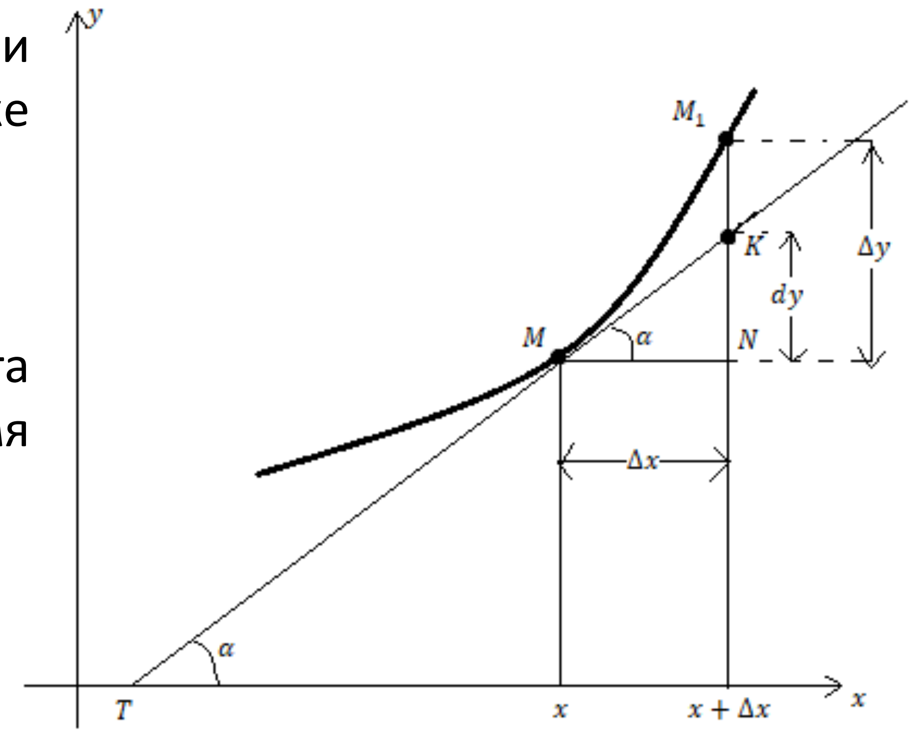
Точкой M на графике определим значение аргумента x и функции y в этой точке. Проведем к кривой в этой точке касательную MT.
Как мы уже знаем, ее угловой коэффициент $\mathrm{tg}\alpha = y'_x$.

Придадим абсциссе x приращение Δx, тогда и ордината кривой y получит приращение $\Delta y = NM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение NK.

Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника MNK, найдем:

$$NK = MN \cdot \mathrm{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

Итак, если Δy есть приращение ординаты кривой, то dy ***является соответственным приращением ординаты касательной.***



ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Итак, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $f(x)$, то, как мы знаем, справедливы равенства

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x),$$

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + o(\Delta x),$$

откуда следует приближённое равенство

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

– с точностью до бесконечно малой высшего порядка, чем Δx. Это значит, что относительная погрешность этого равенства становится сколь угодно малой при достаточно малом Δx.

Пример. Вычислите приближённо значение функции

$$y = \sqrt{1 + \sin x}$$

в точке $x = 0{,}02$.

ЕЩЕ ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

В заключение рассмотрим дифференциал самой независимой переменной x, то есть рассмотрим функцию $y = x$.

Ее дифференциал:

$$dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Таким образом, формулу для дифференциала можно переписать:

$$dy = y'_x dx.$$

Отсюда уже получаем

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть значение x является одним из концов промежутка X, на котором определена функция $y = f(x)$.

Тогда при вычислении предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ придется ограничиться приближением Δx к нулю лишь справа (если x — левый конец промежутка) или слева (если x — правый конец промежутка). В таком случае говорят, об односторонней производной, справа или слева.

Определение 5. *Производной слева (справа) функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число*

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

если этот предел существует и конечен.

В соответствующих точках график функции имеет одностороннюю касательную.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Может быть такое, что и для внутренней точки промежутка существуют только односторонние пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (при $\Delta x \to +0$ или $\Delta x \to -0$), которые не равны друг другу. Их также называют односторонними производными.

Для графика функции в соответствующей точке будут существовать лишь односторонние касательные, составляющие угол. В этом случае точку называют *угловой*.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пример. Вычислим производную функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.
Решение. Имеем

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

Если $\Delta x > 0$, то

$$\Delta y = \Delta x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$\Delta y = -\Delta x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Так как пределы слева и справа не равны, следовательно, в точке $x = 0$ у функции $y = |x|$ нет производной, только односторонние производные. Начало координат будет являться угловой точкой для графика этой функции.