МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция №8

Предел функции (часть 3)

ТОП-ИТ

ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Определение 4. *Бесконечно малые величины* α *и* β *называют эквивалентными* ($\alpha \sim \beta$)*, если их разность* $\delta = \alpha - \beta$ *является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем каждая из бесконечно малых* α *и* β:

$$\delta = o(\alpha), \qquad \delta = o(\beta).$$

На самом деле, достаточно, чтобы δ была бесконечно малой более высокого порядка, чем любая из этих величин.

Действительно, пусть $\delta = o(\beta)$. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\delta}{\alpha} = \lim_{x \to a} \frac{\delta}{\delta + \beta} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{\delta}{\beta}}{1 + \frac{\delta}{\beta}} = 0,$$

то есть, $\delta = o(\alpha)$.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Теорема 4 (Критерий эквивалентности). *Для того, чтобы две бесконечно малые величины* α *и* β *были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Доказательство. По условию

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \to 0.$$

Тогда

$$\delta = \alpha - \beta = \gamma\beta$$

будет величиной более высокого порядка, чем β, так как

$$\lim_{x \to a} \frac{\delta}{\beta} = \lim_{x \to a} \gamma = 0.$$

Обратно, пусть α и β эквивалентны, т.е. $\delta = \alpha - \beta$ является величиной бесконечно малой более высокого порядка, чем β. Тогда имеем

$$\frac{\alpha}{\beta} - 1 = \frac{\delta}{\beta} + 1 - 1 = \frac{\delta}{\beta} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} \to 1.$$

Теорема доказана.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Используя этот критерий, можно сразу сказать, что при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, \qquad \mathrm{tg} x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x, \qquad \mathrm{arctg} x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Также эти эквивалентности можно представить в виде следующих равенств:

$$\sin x = x + o(x), \qquad \mathrm{tg} x = x + o(x), \qquad \arcsin x = x + o(x),$$

$$\mathrm{arctg} x = x + o(x), \qquad e^x - 1 = x + o(x),$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x), \qquad \ln(1+x) = x + o(x), \qquad \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x).$$

Полученное свойство эквивалентных бесконечно малых величин облегчает нахождение пределов отношений этих величин. Каждая из них при этом может быть заменена на любую эквивалентную ей величину без изменения предела.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Примеры. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$$

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Часто бывают ситуации, что в качестве аргумента одной функции выступает другая функция.

Например, пусть $y = 1 + x^2$ и $z = \sqrt{y}$. Подставим во второе равенство вместо y выражение $1 + x^2$ и получим новую функцию

$$z = \sqrt{1 + x^2},$$

где z уже посредством y зависит от x.

Полученная функция $z = z(y(x))$ и называется композицией функций $z(y)$ и $y(x)$.

Определение 1. *Пусть функция $z = g(y)$ определена на множестве Y, а функция $y = f(x)$ определена на множестве X, причем <u>все значения функции f содержатся в Y</u>. Тогда их композицией или сложной функцией называется функция $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.*

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Обратим внимание на один существенный момент в определении сложной функции. А именно на то, что все значения функции f обязательно должны содержаться в области определения функции g, иначе, в противном случае, функция g может быть просто не определена. Рассмотрим пример.

Пусть $z = \ln y$ и $y = \cos x$. Сложная функция $z\big(y(x)\big) = \ln\cos x$ будет определена только для тех x, для которых выполнено неравенство $\cos x > 0$, поскольку область определения функции $z = \ln y$, как мы знаем, есть промежуток $(0, +\infty)$.

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, a – предельная точка множества X. Пусть функция $g(y)$ определена на множестве $Y \subseteq \mathbb{R}$, b – предельная точка множества Y, при этом все значения функции $f(x)$ образуют множество Y. Предположим, что существуют пределы*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \qquad \lim_{y \to b} g(y) = c.$$

Пусть, кроме того, существует такая окрестность точки a, что для любого $x \in X$, попавшего в эту окрестность, справедливо $f(x) \neq b$.

Тогда в точке a существует и равен c предел композиции функций f и g:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c.$$

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Доказательство. Возьмём произвольную последовательность $x_n \to a$ при $n \to \infty$, $x_n \neq a$. По условию теоремы и определению Гейне, получаем, что соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to b$ при $n \to \infty$. Поскольку, по условию, существует такая окрестность точки a, что для любого $x \in X$, попавшего в окрестность, справедливо $f(x) \neq b$, то существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что как только $n > N$, будет выполнено $f(x_n) \neq b$. Тогда последовательность

$$f(x_{N+1}), f(x_{N+2}), \dots, \dots$$

также сходится к числу b, а значит, сходится и последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots., \dots$$

(отбрасывание конечного числа элементов последовательности не влияет на её сходимость). Далее, поскольку $f(x) \in Y$ для любого $x \in X$, то, по условию и определению Гейне, $g\big(f(x_n)\big) \to b$ при $n \to \infty$. Таким образом, получено, что для любой последовательности $x_n \to a$ при $n \to \infty$, $x_n \neq a$ справедливо $g\big(f(x_n)\big) \to b$ при $n \to \infty$. В соответствие с определением Гейне предела функции, получаем требуемое. Теорема доказана.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Условие, выделенное красным в условии теоремы, существенно. Без него утверждение теоремы в общем случае становится неверным, как видно из нижеследующего примера.

Рассмотрим пример:

$$g(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В данном случае:

$$\lim_{y \to 0} g(y) = 1, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Однако у композиции $g(f(x))$ при $x \to 0$ предела не существует.

ТОП-ИТ

ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРЕДЕЛ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ)

Учитывая доказанную теорему о пределе композиции функций, мы можем переписать приведённые ранее эквивалентности в следующем (более общем) виде:

1. $\sin u = u + o(u)$;
2. $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$;
3. $\operatorname{tg} u = u + o(u)$;
4. $\operatorname{acrtg} u = u + o(u)$;
5. $\arcsin u = u + o(u)$;
6. $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u), \alpha \in \mathbb{R}$ – любое число;
7. $\ln(1+u) = u + o(u)$;
8. $b^u - 1 = u \ln b + o(u)$;
9. $e^u - 1 = u + o(u)$.

Во всех данных равенствах под u бесконечно малая функция в точке a:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0,$$

и для которой существует такая окрестность точки a, что в ней функция $u(x)$ не обращается в нуль.

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Пример. Вычислить следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\cos x}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$