GRANDEZAS FÍSICAS E TEORIA DOS ERROS

Introdução

O desenvolvimento do homem deveu-se ao importante fato de que ele procurou OBSERVAR os acontecimentos ao seu redor e ao ver os resultados dos diversos eventos, ele procurou estudá-los e descobrir as causas pelas quais estes acontecem.

Medições

Foi nessa fase do estudo, que surgiu o importante problema da avaliação ou seja da medição da intensidade de uma série de fatos e grandezas, que faziam parte do fenômeno em estudo.

Para medir, foi necessário ao homem recorrer a um critério comparativo, a um critério de relatividade, motivo pelo qual as medidas nunca serão absolutas, sim, relativas, mas em relação a que? – Ora em relação a uma medida fundamental, arbitrariamente escolhida e que geralmente é chamada de UNIDADE,

Qualquer grandeza escalar, ao ser medida, terá como resultado um produto de: um número que representa o resultado da comparação e outro fator que é a unidade por nós adotada. De forma que uma grandeza escalar é o produto de um número por uma unidade, ou seja:

$$G = M \cdot \mu$$

onde: G = Grandeza escalar;
M = Medida;
μ = Unidade.

Observe que, embora varie a medida da unidade, a grandeza permanece inalterada, ou seja, o comprimento do objeto é sempre o mesmo, o que nos permite concluir que:

$$G = m_1 u_1 = m_2 u_2 = m_3 u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Na prática porém nunca conseguiremos determinar o VALOR VERDADEIRO de uma grandeza escalar, mas sim um VALOR MAIS PROVÁVEL o qual está provido de uma INCERTEZA, devida a uma série de fatores que veremos mais adiante.

Com base nesse fato dizemos que a grandeza G será dada por:

$$G = (A \pm \delta A) \cdot \mu$$

onde $A \pm \delta A = m$ é a medida; A é o valor mais provável e δA o número que representa a incerteza, que comumente é chamada desvio padrão.

NATUREZA DO OBJETO DA MEDIDA

Uma medida só tem sentido nos limites de precisão dentro dos quais a grandeza a medir é definida. O comprimento de um bloco de madeira, com extremidades rugosas só pode ser definido com aproximação de cerca de um milímetro. O comprimento de uma boa régua metálica cujas extremidades são de cantos e faces polidas, pode, ao contrário, ser definido com uma aproximação que atinge o micron. Assim, por exemplo, para se obter resultado possível, na medida do comprimento de uma caixa de fósforos, basta que se utilize uma régua comum de madeira, não sendo possível melhorar a precisão, substituindo essa régua por um micrômetro.

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Os instrumentos (ou dispositivos) de medida, quanto a usos se caracterizam pelas qualidades do poder resolutivo ou resolução, fidelidade e justeza.

Um instrumento tem poder resolutivo, ou resolução, tanto maior quanto menores forem as variações da grandeza a medir que podem ser indicadas pelo instrumento.

Na reiteração de medidas da mesma grandeza, repetidas sempre com o mesmo instrumento, quanto mais os resultados se apresentem concordes (pouco dispersos) tanto mais fiel é o instrumento.

Um instrumento é tanto mais justo quanto mais próximos do "valor verdadeiro" forem os resultados fornecidos por ele.

Esta última definição pode parecer conter um circulo vicioso, uma vez que a obtenção do "valor verdadeiro" é justamente o objetivo da medida. Deve-se entender aqui a expressão "valor verdadeiro" como sendo um valor previamente conhecido, ou porque, foi obtido através de trabalho prévio, utilizando outro método de medida ou porque se está procedendo a uma comparação com um padrão.

MÉTODO DE MEDIDA

Em cada caso concreto, a escolha do método de medida é de capital importância.

Nessa escolha deve ser levada em conta a sensibilidade dos dispositivos de medidas, tendo-se presente os limites de precisão em que a grandeza a medir está definida. Assim, a espessura de uma lâmina de vidro plana de boa qualidade, poderá ser medida melhor através de um método que utiliza a interferência luminosa, do que, diretamente com um paquímetro.

HABILIDADE DO OPERADOR

Evidentemente, é grande a influência da habilidade do operador na qualidade da medida. Mesmo quando a medida se resume a efetuar apenas uma leitura de escala, há precauções a tomar como por exemplo para evitar o erro de paralaxe. Quando se visa a um índice que não está situado exatamente no plano da graduação (termômetros e instrumentos com escala e ponteiro), deve-se fazer a linha de visada normal à escala.

No caso de uma escala crescente da esquerda para a direita, se a visada é oblíqua, com o observador à direita em relação ao ponteiro, sua leitura dará um valor errado por falta. Se o observador estiver à esquerda, a leitura será errada. por excesso.

Erros

Devemos ainda voltar nossa atenção para o fato de que não existem e nem poderiam existir instrumentos que nos permitem medir sem erro algum uma grandeza física.

Nessas condições, com as restrições que cada caso exige, necessitamos do conceito de VALOR VERDADEIRO de uma grandeza, ao menos, como hipótese de trabalho. O que importa no nosso caso, é destacar que media de uma grandeza física, difere sempre de algo do valor verdadeiro da mesma.

Dar simplesmente um número como medida de uma grandeza, sem aquilatar o erro de que está afetado, seja aproximadamente, seja em termos de probabilidade, não significa muito.

Uma medida tem sentido, somente quando se pode determinar de uma forma ou de outra o erro de uma medição é o objetivo de teoria dos erros.

CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS

Erros Grosseiros

São aqueles provenientes de falhas do experimentador, podendo ser eliminados por medidas mais cuidadosas.

Por exemplo: engano na leitura de um componente na leitura de um instrumento qualquer.

Erros Sistemáticos

São aqueles que resultam de causas constantes que alteram de modo uniforme os resultados das medidas. Geralmente podem ser corrigidos, através das equações ou tabelas que se colocam no instrumento para saber de quanto é o erro. Se tais erros se devem ao aparelho de medida, são ditos instrumentais.

Exemplo: uma trena de aço que encolheu-se ao invés de um comprimento de um metro possui apenas 98 cm; isso irá acarretar um erro sistemático na medida de um outro comprimento.

Se os erros sistemáticos se devem a falhas do experimentador, eles são ditos PESSOAIS.

Os erros pessoais são devidos à maneira peculiar de lidar com o instrumento, diferença de avaliações de frações de divisão, etc.

Erros Acidentais ou Fortuitos

São aqueles que resultam de causas indeterminadas, que alteram de forma variável os resultados das medidas. Não podem ser eliminados e decorrem de variações de pressão atmosférica, tremores, poeiras, oscilações da temperatura, unidade, etc.

Definições

Daremos agora algumas definições que são de grande importância para o fim que objetivamos:

"Valor Médio" ou **"Valor mais provável"** $(\overline{X})$ de uma série de n medidas é a média aritmética dessas medidas.

Logo:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

onde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são os valores encontrados na n medidas.

$\overline{x}$ representa a melhor estimativa que podemos efetuar de grandeza que estamos avaliando.

"Desvio Absoluto" (Δx_i) da i-ésima medida, é a diferença entre o valor x_i obtido nessa medição e o valor médio $\overline{x}$ das diversas medidas efetuadas.

Portanto:

$$\Delta x_i = |x_i - \overline{x}|$$

"Desvio Relativo" – $D_r(x)$ – de uma medida é a razão entre o módulo do desvio absoluto pelo valor médio.

$$D_r(x) = \frac{|\Delta x|}{\overline{x}}$$

O desvio relativo pode ser expresso em porcentagem, e será chamado desvio percentual. Representando o desvio percentual de medida x por D_p (x) teremos:

$$D_p(x) = \frac{(100 . |\Delta x|)}{\overline{x}} \%$$

"Desvio Médio" (Δ x) de uma série de medidas, é a média aritmética dos módulos dos desvios absolutos.

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n}(x_i - \bar{x})$$

"Desvio Padrão" : Define-se desvio-padrão de uma amostra (pequena série de medidas) como a raiz quadrada da razão entre a soma dos quadrados dos desvios absolutos e o número de medidas realizadas menos uma.

$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta {x_i}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} |(x_i - \bar{x})|^2}{n-1}}$$

Exemplo: dada a tabela de valores abaixo, calcule o desvio padrão das medidas.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	100,2	100,4	100,3	100,2	100,5	100,3	100,1	100,4	100,2	100,3

Solução:
Bem, coloquemos em forma de tabela, para maior facilidade:

n	x_i	Δx_i	$\mid \Delta x_i \mid$	$\mid \Delta x_i \mid^2$
1	100,2	-0,09	0,09	0.0081
2	100,4	0,11	0,11	0.0121
3	100,3	0,01	0,01	0.01
4	100,2	-0,09	0,09	0.0081
5	100,5	0,21	0,21	0.0441
6	100,3	0,01	0,01	0.01
7	100,1	-0,19	0,19	0.0361
8	100,4	0,11	0,11	0.0121
9	100,2	-0,09	0,09	0.0081
10	100,3	0,01	0,01	0.01

Σ 10   1002,9 Σ 0,92 Σ 0.1487

Logo o desvio padrão δx = 0.128

OBS.: Para nós o erro deve conter apenas um dígito (no. diferente de zero)

A razão de ter apenas um digito será exposta mais adiante.

Logo o desvio médio será:

δx = 0,1

Assim, $\bar{x} = 100.3 \pm 0{,}1$

"Desvio Avaliado"

Os instrumentos da medida são graduados de melhor maneira possível pelos seus fabricantes; estas tomam o cuidado de não marcar mais divisões do que àquelas que corresponderão a indicações corretas do instrumento quando em uso; razões óbvias, os fabricantes devem estar interessados em levar as subdivisões das escalas até quase o limite de precisão inerente ao aparelho. É isso o que geralmente ocorre.

Por esse motivo admitir como regra geral (porém não absoluta) que o erro introduzido pelo instrumento na leitura é de aproximadamente metade do menor intervalo de escala deste valor recebe o nome de desvio avaliado do instrumento.

A regra fornecida não é, como já dissemos absoluta isto é, não pode ser aplicada indistintamente a todos os instrumentos. Assim por exemplo temos o caso de instrumento de precisão como alguns termômetros, em que é permitida a prática da "avaliação" de valores compreendidos entre dois traços consecutivos, e para os quais o desvio é menor do que metade da menor divisão.

Outro exemplo é encontrado nas determinações de massa, por meio de uma balança. Neste caso pode-se determinar diretamente o desvio avaliado procurando o valor mínimo da massa que deve ser adicionado a um dos pratos da balança para modificar sensivelmente o equilíbrio antes realizado para a pesagem (com a balança ainda carregada). A metade dessa massa pode ser tomada como sendo o desvio avaliado da balança.

O desvio avaliado (erro do instrumento) é definido como sendo metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado.

Sempre que se fizer uma só medida de uma grandeza, deve-se acrescentar a medida o desvio avaliado do instrumento utilizado.

Precisão de Medidas

Algarismos Significativos

Uma medida será tanto mais exata quanto mais próximo o valor encontrado estiver do valor real. A precisão está relacionada com os erros acidentais e a exatidão está ligada, sobretudo aos erros sistemáticos. Se tivermos um processo de medida sem erros sistemáticos, então os dois conceitos se identificariam isto é, a medida exata seria também a mais precisa.

Porém, ao medirmos uma grandeza com um instrumento de medida qualquer, o valor dessa medida nos será dado pelos algarismos efetivamente gravados na escala do aparelho e quando possível, por mais um algarismo avaliado a critério do operador, das frações não gravadas.

Suponhamos que uma pessoa não muito experiente tenha realizado uma série de medidas de comprimento e obtido o seguinte resultado:

Comprimento médio = 925,47 mm

Desvio médio = 3 mm

Os algarismos 9 e 2 do valor médio, são exatos, mas o 5 é duvidoso, uma vez que o desvio médio absoluto é 3mm. O 4 e o 7 não têm significado algum, no valor médio acima.

Os algarismos corretos e o <u>primeiro</u> algarismo duvidoso são chamados <u>algarismos significativos</u> da medida. No valor médio acima, os algarismos 9, 2 e 5 são significativos. Como o próprio nome indica, eles possuem um significado, fornecem uma informação importante a respeito do valor da grandeza considerada.

No exemplo acima os algarismos 4 e 7, situados em casos decimais posteriores à cada decimal ocupada pelo desvio médio absoluto são, por assim dizer, "ofuscados" por este último.

<u>Observações</u>. Os desvios médios são obtidos geralmente por cálculo; pode-se usar dois algarismos significativos para efeito de aproximação.

As aproximações devem obedecer sempre as seguintes regras:

1. O segundo algarismo significativo do desvio médio é menor que 5.
   A aproximação é feita abandonando-se este algarismo.

Ex. $\delta x = 0{,}044 \rightarrow \delta x = 0{,}04$.

2. O segundo algarismo significativo do desvio médio é 5.
   A aproximação é feita somando-se 5 unidades ao segundo algarismo significativo.
   Ex. $\delta x = 0{,}85 \rightarrow \delta x = 0{,}9$
3. O segundo algarismo significativo do desvio médio é maior que 5.
   A aproximação é feita somando-se ao segundo algarismo significativo no número de unidades faltante para dez.
   Ex. $\delta x = 0{,}0037 \rightarrow \delta x = 0{,}004$

Operações com Grandezas Físicas

Muitas grandezas físicas não podem ser medidas diretamente, mas são obtidas por meio de operações com outras medidas.

A seguir apresentamos uma lista de operações com sua respectiva propagação de erros.

- Adição: $V \pm \delta V = (x \pm \delta x) + (y \pm \delta y) = (x + y) \pm (\delta x + \delta y)$
- Subtração: $V \pm \delta V = (x \pm \delta x) - (y \pm \delta y) = (x - y) \pm (\delta x + \delta y)$
- Multiplicação: $V \pm \delta V = (x \pm \delta x) \,.\, (y \pm \delta y) = (x \,.\, y) \pm (x \,.\, \delta y + y \,.\, \delta x)$
- Multiplicação por uma constante: $V \pm \delta V = c \,.\, (x \pm \delta x) = c \,.\, x \pm c \,.\, \delta x$
- Potência: $V \pm \delta V = (x \pm \delta x)^n = x^n \pm n \,.\, x^{n-1} \,.\, \delta x$
- Divisão: $V \pm \delta V = \dfrac{(x \pm \delta x)}{(y \pm \delta y)} = \dfrac{x}{y} \pm \dfrac{1}{y^2} \,.\, (x \,.\, \delta y + y \,.\, \delta x)$

Exercícios

1) Calcular a área de uma placa em forma de trapézio, sabendo-se que as medidas obtidas foram base maior = 12,06 cm e com desvio = 0,03 cm, base menor = 4,53 cm e com desvio = 0,06 cm e altura = 5,72 com desvio de 0,08 cm.

$$A = \frac{(B + b)}{2} \,.\, h$$

2) Numa série de 10 medidas do comprimento de uma mesa foram obtidos os seguintes valores em centímetros: 100,2; 100,4; 100,3; 100,2; 100,5; 100,3; 100,1; 100,5; 100,2; 100,3. Pode-se calcular o valor médio do comprimento, seu desvio médio e o escrever sob a forma correta.

3) Na tabela a seguir encontram-se registrados as medidas de comprimento, largura e espessura de uma folha de papel. Pode-se calcular o valor médio, o desvio padrão e escrevê-los sob a forma correta.

(valores em cm)

largura:	20,2	20,1	20,3	20,4	20,1	20,2	20,3	20,3	20,3	20,2
comprimento:	30,3	30,5	30,4	30,6	30,4	30,5	30,6	30,4	30,5	30,3
espessura:	0,31	0,043	0,31	0,32	0,31					

Após ter calculado os valores acima sob a forma correta, calcule a área da face da folha e a escreva corretamente. Calcule o volume da folha a partir da área calculada anteriormente. Escreva o volume sob a forma correta.

Bibliografia

1. AXT, R. & GUIMARÃES, V.H. Física Experimental I e II. Porto Alegre, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1981, 91p.

2. HENNIES, C.E. et alli. Problemas Experimentais em Física. Campinas, Editora da UNICAMP, 1986, v. 1, 221p.

3. MAIA, L.P.M. Introdução à Física. Rio de Janeiro. Nacionalista, 1961, 143p.

4. MARTINS, N. et. alli. Física para a Universidade: análise dimensional. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária, 1979, v.1, 133p.

5. MORENO, M.O. Iniciação à Análise de Dados Experimentais. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1986, 97p.

6. NUSSENZVEIG, H.M. Curso de Física Báscia: Mecânica, vol. 1, São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 1981.

7. REGO, G.B. e Cunha, W.A. Mecânica, vol. 1, São José dos Campos, Institutio Tecnológico de Aeronáutica, 1959.

8. SQUIRES, G.L. Practical Physics. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

9. TIMONER, A.; MAJORANA, F.S. e HAZOFF, W. Manual de Laboratório de Física: Mecânica, Calor e Acústica, São Paulo, Edgard Blücher Ltda., 1973.

10. Manual de Laboratório de Física Experimental I, Faculdade de Física, Universidade Federal de Uberlândia.