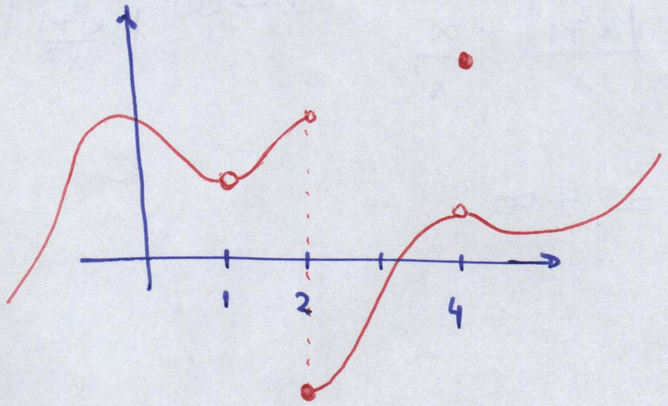
Exemplos: (1) Na figura abaixo, em quais pontos f é descontínua? Por quê?



f é descontínua em $x = 1$, $x=2$ e $x=4$, pois

- $(x=1)$: $f(1)$ não está definida, $1 \notin D_f$.
- $(x=2)$: $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (limites laterais são distintos)
- $(x=4)$: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$.

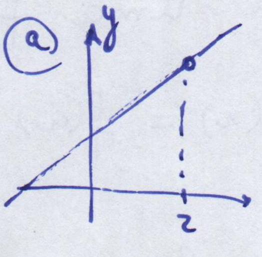
(2) Identifique em quais pontos as funções abaixo são descontínuas.

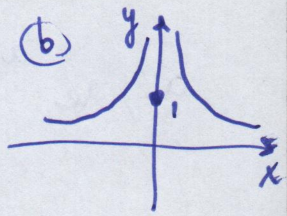
(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{se } x \leq 0 \\ -x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a)


(b)


(a) f não é contínua em $x=2$, pois $2 \notin D_f$;
Se $a \neq 2$ então, $\exists f(a) = \dfrac{a^2-a-2}{a-2}$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou seja f é contínua em a. Logo, f é contínua $\forall x \neq 2$.

(b) f é descontínua em $x=0$, pois $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}_{\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)} \neq \underset{1}{f(0)}$

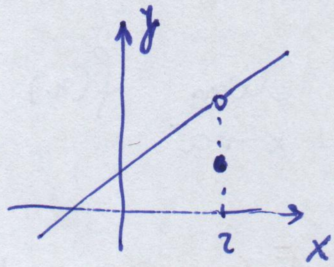
Note que se $a \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} = f(a)$. Logo, f é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$.

ⓒ f é descontínua em $x=2$, pois

ⓘ $f(2)$ está definida,

ⓘⓘ $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} =$

$= \lim_{x \to 2} x+1 = 3$ (limite existe)



ⓘⓘⓘ Agora, $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2) = 1$.

Porém, se $a \neq 2$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2-x-2}{x-2} =$

$= \frac{a^2-a-2}{a-2} = f(a)$. Portanto, f é contínua em todo

$a \neq 2$.

ⓓ f não é contínua em 0, pois $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$,

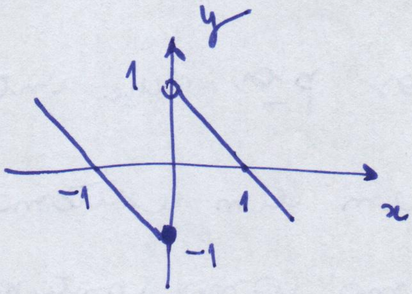
já que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x-1 = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -x+1$

$= 1$.

Porém, se $a > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x-1) = -a-1 = f(a)$

e se $a < 0$ então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x+1) = -a+1 = f(a)$

Portanto, f é contínua em $a \neq 0$.



As descontinuidades ⓐ e ⓒ são ditas removíveis. A descontinuidade ⓑ é dita do tipo infinito e a ⓓ é do tipo salto.

Definição: Uma fç f é dita contínua à direita em a se $a \in D_f$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

f é contínua à esquerda em a se $a \in D_f$ e

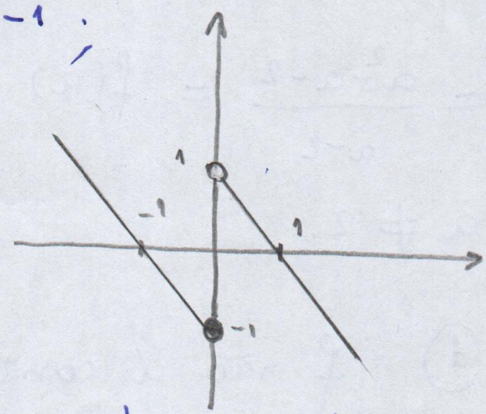
$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo: A função $f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{se } x \leq 0 \\ -x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é contínua

à esquerda em zero, pois • $f(0) = -1$;

• $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x-1) = -1$ e

• $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.



Note que a fç não é contínua à direita, pois

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x+1) = 1 \neq f(0)$.

Obs: f é contínua em a se, e somente se, f for contínua à direita e à esquerda em a.

Definição: Uma fç f é contínua em um intervalo, se ela for contínua em todos os ptos desse intervalo. Se esse intervalo for fechado em um extremo, entendemos a continuidade nesse extremo como continuidade à direita ou à esquerda.

Exemplo: Mostre que $f(x) = \sqrt{4-x^2} - 1$ é contínua no intervalo $[-2, 2]$.

Note que $D_f = [-2,2]$, pois $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Consideremos primeiramente $a \in (-2, 2)$. Temos:

- $a \in D_f$, ou seja $\exists\, f(a)$ e $f(a) = \sqrt{4-a^2} - 1$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\sqrt{4-x^2} - 1\right) = \lim\limits_{x \to a} \sqrt{4-x^2} - \lim\limits_{x \to a} 1 =$

$$= \sqrt{\lim_{x \to a} 4 - \lim_{x \to a} x^2} - 1 = \sqrt{4-a^2} - 1$$

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sqrt{4-a^2} - 1 = f(a)$.

Portanto, f é contínua em qualquer pto $a \in (-2,2)$.

Agora, para $x=-2$ e $x=2$, temos:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(\sqrt{4-x^2} - 1\right) = -1 = f(-2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\sqrt{4-x^2} - 1\right) = -1 = f(2)$$

Portanto, f é contínua à direita em -2 e à esquerda em 2.

Assim, concluímos que f é contínua em $[-2,2]$.

Teorema: Sejam f e g duas funções contínuas em a e $c \in \mathbb{R}$, então as seguintes funções tb são contínuas em a:

① $f+g$; ② $f-g$; ③ cf; ④ fg; ⑤ $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$.

Corolário: (i) Segue do Teorema acima que todo polinômio é contínuo em $\mathbb{R}$.

(ii) Toda fç racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são polinômios é contínua em seu domínio.

(iii) Além disso, as funções raízes e trigonométricas são contínuas em todo seu domínio.

Exemplo: Encontre os pts de continuidade de

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{3 - 2x}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 3 - 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \neq \tfrac{3}{2}\}.$$

Pelo corolário $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{3 - 2x}$ é contínua em D_f.

Sem usar o corolário: Seja $a \in D_f$.

- $\exists\, f(a) = \frac{a^3 - 2a + 1}{3 - 2a}$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - 2x + 1}{3 - 2x} = \frac{\lim_{x \to a} x^3 - 2x + 1}{\lim_{x \to a} 3 - 2x} = \frac{a^3 - 2a + 1}{3 - 2a}$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{a^3 - 2a + 1}{3 - 2a} = f(a)$.

Portanto, f é contínua em D_f.