

Disciplinas de Cálculo

Computação:

- ✓ criada inicialmente para resolver problemas numéricos

Aplicações do cálculo em computação:

- ✓ Usado como ferramenta direta na construção de alguma aplicação: exemplo - uso de equações diferenciais na resolução de problemas de robótica
- ✓ Usado como base para outra técnica matemática que será, por sua vez, usada na construção de alguma aplicação: exemplo - construção de métodos probabilísticos usados em aplicações como filtragem de imagens digitais, simulação de sistemas e na análise de desempenho de sistemas

Previsão de desempenho de um sistema

- ✓ Tarefa de grande importância para o projeto
- ✓ Quanto melhor o desempenho, mais atraente se torna a solução

Previsão de desempenho nas fases iniciais do projeto

Importante para evitar decisões que inviabilizem a obtenção de desempenho ótimo

Problema 1: como obter medidas de desempenho se não temos o sistema funcionando?

Problema 2: como prever o desempenho de um sistema em funcionamento daqui há alguns meses ou anos?

Solução

Uso de ferramentas de análise de desempenho

- ✓ *Benchmarks* – dados para análise são obtidos através de medições fisicamente realizadas sobre o sistema real. Logo, não é possível se o sistema não existe
- ✓ Simulação – um modelo do sistema é criado e, por meio de algum mecanismo de imitação do seu funcionamento, são obtidas medidas do seu desempenho. Logo, pode ser aplicado quando o sistema não existe, mas sua precisão depende da precisão em que o modelo imita o sistema
- ✓ Resolução analítica: medidas de desempenho são obtidas pela resolução analítica de um modelo que representa o sistema real por meio de equações matemáticas. Logo, assim como simulação, pode ser aplicada em qualquer fase do projeto e tem sua precisão determinada pela fidelidade com que as equações representam o sistema.

Técnica que aplica a Resolução Analítica

Teoria das filas

- ✓ Trata o comportamento das filas, usando equações matemáticas
- ✓ Fila é um conjunto de elementos que é constantemente alterado pela inserção de novos elementos e pela remoção de elementos antigos
- ✓ Ordem de inserção e remoção: FIFO first-in first-out

Problema

Como definir as taxas de inserção e de remoção na fila se, em sua maioria, são não-determinísticas, ou seja, não podem ser consideradas fixas?

Isso implica que tais taxas são probabilísticas. Portanto, o problema em teoria das filas é identificar qual função de distribuição de probabilidades melhor representa as taxas de chegada e atendimento do sistema (exponencial, normal, uniforme...)

Quanto melhor a representação, melhores são os resultados

Exemplos de aplicações

Determinar qual a capacidade de transmissão necessária para que uma rede de computadores atenda a uma determinada demanda (tempo médio de espera por atendimento)

Determinar qual volume de serviços um provedor web pode atender com uma dada configuração (tamanho da fila)

Operadores Fundamentais do Cálculo

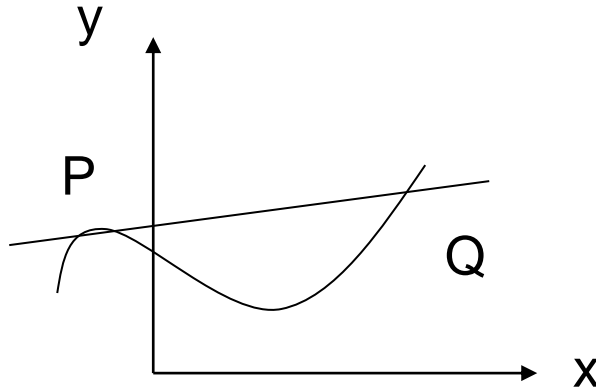
- ✓ Derivada: entendida geometricamente como sendo a inclinação da reta tangente à função calculada ponto a ponto
- ✓ Integral: entendida geometricamente como sendo a área contida entre uma dada função e o eixo sobre o qual está sendo integrado

Derivada

- ✓ Problemas de cálculo podem ser resolvidos se encontrarmos a reta tangente a uma curva, num ponto específico da curva.
- ✓ Se a curva é uma circunferência, a reta tangente ao ponto P da circunferência é definida como uma reta que intercepta a circunferência somente no ponto P. Mas esta definição não é suficiente para curva em geral...

Exemplo

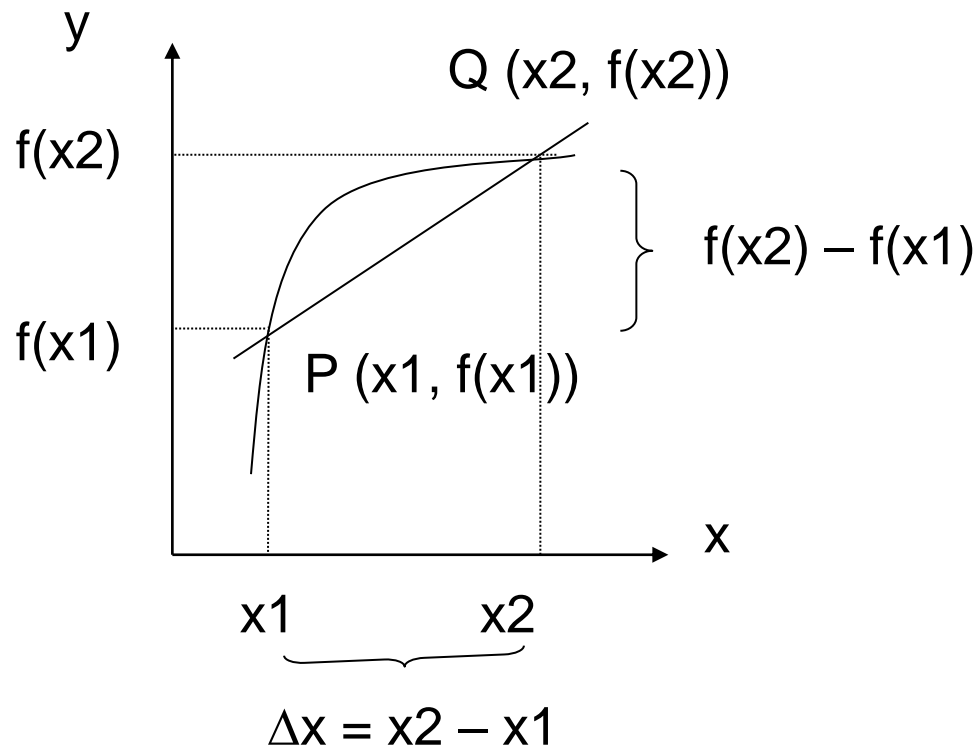
A reta tangente à curva no ponto P, intercepta a curva também no ponto Q



Para definir a reta tangente ao gráfico de uma função, num ponto sobre o gráfico, devemos ver de que modo definiríamos a inclinação da reta tangente num ponto, pois conhecendo a inclinação da reta e um ponto sobre a reta, a reta está determinada.

EXEMPLO

Seja uma função f , queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto sobre o gráfico de f . Traçar reta secante passando por P e Q



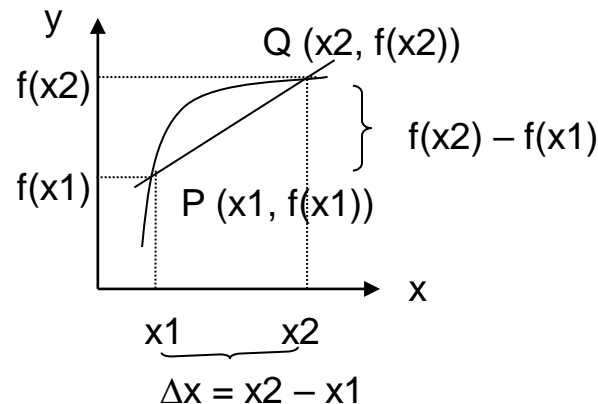
- Imaginar P como um ponto fixo e o ponto Q movendo-se ao longo da curva na direção de P (Δx tende a zero): a reta secante gira sobre o ponto fixo P. Se a reta secante tem uma posição limite, desejamos que esta posição limite seja a reta tangente ao gráfico P.

- A inclinação da reta tangente ao gráfico de $y=f(x)$ no ponto P, é dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}, \quad \text{se existir limite, a inclinação da reta tangente ao gráf. deve ser o limite da inclinação da reta}$$

Caso contrário

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty \quad \text{a reta } x = x_1 \text{ é paralela ao eixo } y. \text{ Portanto, a reta tangente ao gráfico em P é a reta } x = x_1$$

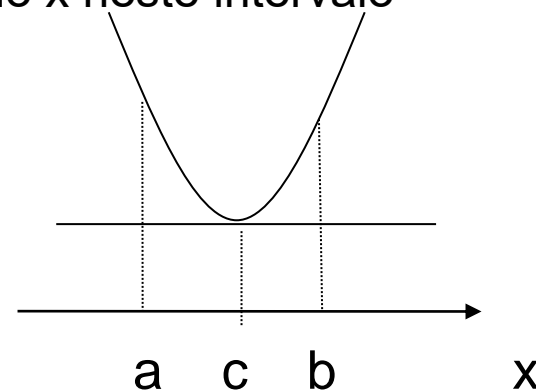
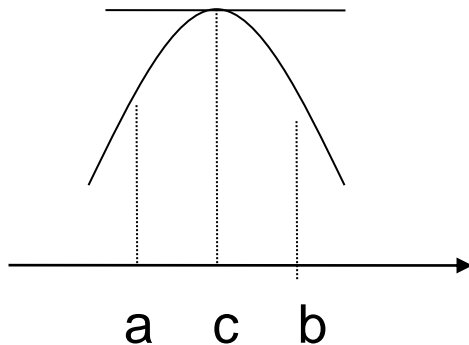


Aplicação

- ✓ Determinação dos pontos em que a reta tangente é horizontal: $f'(x_2) = f'(x_1)$ (pontos onde a derivada é zero)

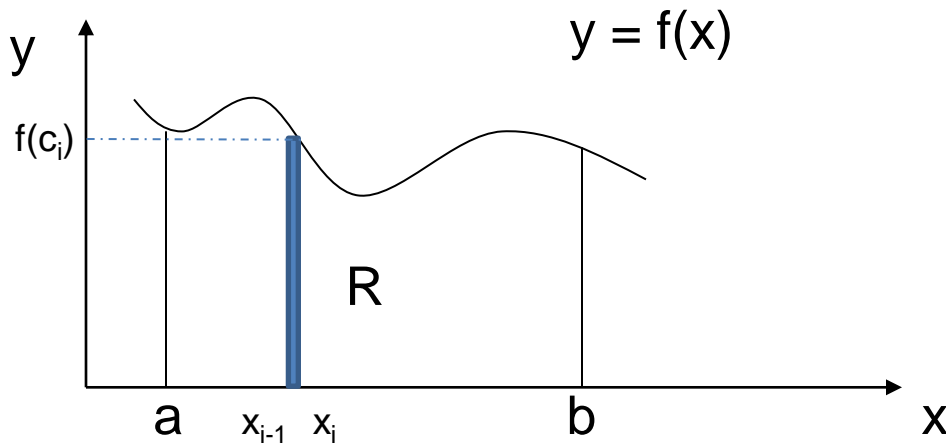
Cálculo de pontos de máximo e/ou mínimo de uma determinada função -
Encontrar intervalos para os quais o gráfico de uma função está abaixo da reta tangente e os intervalos para os quais o gráfico está acima da reta tangente

- 1) Função f tem valor máximo relativo em c se existir um intervalo contendo c , onde f é definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x neste intervalo
- 2) Função f tem valor mínimo relativo em c se existir um intervalo contendo c , onde f é definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x neste intervalo



Integral

- ✓ Tamanho da região compreendida por uma figura
- ✓ Como definir a área de uma região no plano se a região é limitada por uma curva?



- ✓ Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subsistemas, cada um de comprimento Δx , sendo $\Delta x = (b - a) / n$. Se $f(c_i)$ for o valor mínimo da função no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, a medida da área de região R é dada por: (quanto maior n , melhor representação da área)

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$$

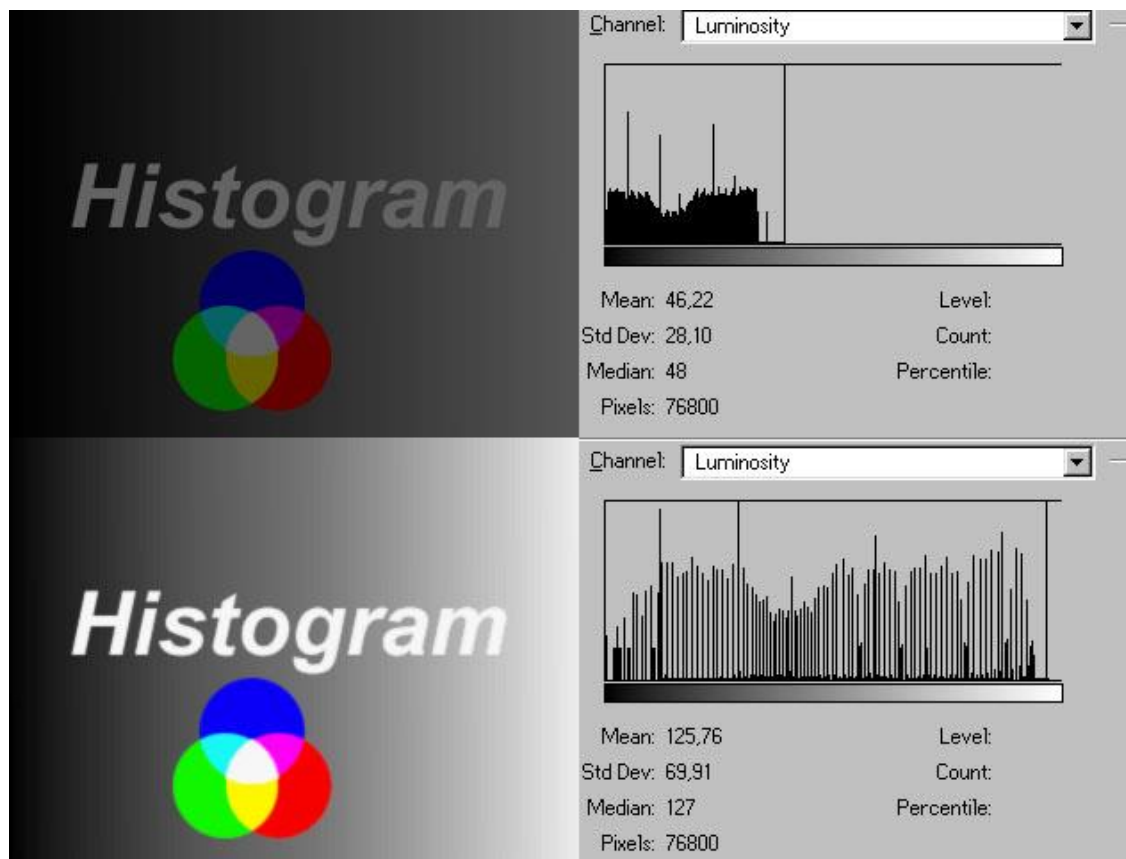
Aplicação

- ✓ Integral em computação gráfica: uso de filtros baseados em equalização de histogramas para a melhoria de imagens

Histograma é um gráfico constituído pela justaposição de retângulos de mesma base, colocados lado a lado, e cujas alturas são proporcionais às quantidades a representar

EXEMPLO

- * Em um eixo tem-se os diferentes valores possíveis para uma variável, como os tons de cinza, e no outro tem-se as quantidades de elementos da amostra que possuem um dado valor. No exemplo superior, a maioria dos pixels está em um dos extremos do eixo de tons de cinza. Parte inferior: após equalização do histograma (melhor distribuição de pixels ao longo do eixo), tem-se uma imagem mais clara e nítida.



Probabilidade e Estatística

Função de densidade de probabilidade (fdp):

✓ Indica qual a probabilidade de ocorrência de um certo evento dentro de um espaço amostral

Exemplo

→ se jogarmos 2 dados, a somatória dos valores obtidos nos dados é definida conforme a tabela

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fdp	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Função de distribuição de probabilidade (FDP):

- ✓ Apresenta o valor cumulativo das probabilidades de ocorrência dos eventos quando estes são ordenados
- ✓ Usada quando a função de densidade de probabilidade (fdp) não produz informações suficientes, ou não apresenta tais informações de forma direta

→ A FDP pode ser calculada a partir da fdp: para o exemplo usando os 2 dados, se for considerada a somatória dos valores obtidos nos dados quando o resultado for menor ou igual a seis, a FDP resultante seria a soma dos valores da fdp para 2,3,4,5,6, resultando em 15/36

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fdp	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

→ O valor máximo da FDP é UM, indicando que a probabilidade de ocorrência de algum evento é TOTAL (100%)

Média ou esperança:

- ✓ Valor representativo de um conjunto de dados. Tais valores tendem a se localizar em um ponto central dentro de um conjunto de dados ordenados.
- ✓ Podemos ter: média aritmética considerando a frequência de ocorrência dos números e os pesos atribuídos aos números.

Problema

Não considera a existência de poucos casos com valores muito extremos que acabam prejudicando a sensibilidade da mesma.

Mediana:

✓ Relativa a um conjunto de números ordenados, representa o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo

Dado o conjunto 3,4,4,5,6,8,8,8,10 – a mediana é 6

Dado o conjunto 5,5,7,9,11,12,15,18 – a mediana é 10 $((9+11)/2)$

Por ser menos suscetível a valores excepcionalmente altos ou baixos, a mediana pode ser uma melhor indicação de tendência central que a média aritmética. Exemplo:

Seja o conjunto 1, 2, 2, 2, 3, 20, tem-se mediana = 2 e média = 5

Moda:

- ✓ A moda de um conjunto de números é o valor que ocorre com a maior frequência, ou seja, o valor mais comum.
- ✓ No caso de dados agrupados para os quais foi construída uma curva de frequência, a moda será o valor ou valores correspondente ao ponto de ordenada máxima da curva

Exemplo

Dado o conjunto 2,2,5,7,9,9,9,10,10,11,12,18 – tem moda 9

Dado o conjunto 3,5,8,10,12,15,16 – não tem moda

Dado o conjunto 2,3,4,4,4,5,5,7,7,7,9 - tem duas modas: 4 e 7

Especialmente útil quando os valores ou as observações não são numéricos, casos em que a média e a mediana não podem ser definidas. Exemplo:

A moda da amostra {maçã, banana, laranja, laranja, laranja, pêssago} é laranja

Momentos centrais:

- ✓ Útil para saber se as observações feitas em um dado experimento possuem ou não uma boa qualidade. Se em um dado experimento os dados estiverem muito dispersos, então os momentos centrais terão um valor grande, indicando que ou a experiência foi mal conduzida ou o problema não possui um comportamento que possa ser reproduzido através de um valor médio
- ✓ Tipos:

Variância

- ✓ Apresenta uma referência da distância entre cada ponto e o seu valor médio, sendo definida como um momento central de ordem 2.
- ✓ Problema: não possui a mesma dimensão da média, ou seja, enquanto a média é um momento de primeira ordem, a variância é de segunda ordem (ou quadrática)

Desvio padrão

- ✓ Medida de primeira ordem que tem o mesmo significado da variância.
- ✓ Representa o valor positivo da raiz quadrada da variância

Conclusão

- ✓ Uso de cálculo dentro da computação existe em diversas aplicações (robótica, computação gráfica, etc).
- ✓ Uso de cálculo na construção de ferramentas da teoria de probabilidades.

Nem sempre o que aprendemos tem uma aplicação direta no que faremos

Cálculo é útil para criar modelos para a teoria de probabilidades, a qual, por sua vez, é que nos serve para que possamos fazer simulações, análises de desempenho ...