Disciplina: Lógica Matemática

Aula 03: Cálculo Proposicional (Predicados e Quantificadores)

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Revisão: Implicação Lógica

Implicação Lógica:

Dizemos que a proposição $P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$ implica logicamente a proposição $Q = Q(p_1, p_2, ..., p_n)$, se, toda atribuição de valores lógicos de $p_1, p_2, ..., p_n$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Em outras palavras:
P implica logicamente Q se, e somente se, a proposição condicional $P \to Q$ for uma tautologia.

Notação:

$$P \Rightarrow Q$$

Revisão: Implicação Lógica

Exemplo: Considere as proposições P e Q dadas por

$$P:\ p \qquad \text{e} \qquad Q:\ p \vee q.$$

Verifique que $P \Rightarrow Q$, ou seja, verifique que $p \Rightarrow (p \vee q)$, p implica logicamente em $(p \vee q)$.

• Vamos mostar que $P \Rightarrow Q$ usando a definição “P implica logicamente Q se, e somente se, a proposição $P \to Q$ for uma tautologia”.

p	q	$P:\ p$	$Q:\ p \vee q$	$P \to Q$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Como $P \to Q$ é Tautologia, então $P \Rightarrow Q$.

• lembre-se que P implica logicamente Q, se, toda atribuição de valores

Importante: Dadas duas proposições A e B, então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $A \Rightarrow B$ (isto é, A implica logicamente B, $A \rightarrow B \equiv T$)

ii) $\sim A \vee B$ é tautologia

iii) $A \wedge \sim B$ é contradição

Pois,

• se $A \rightarrow B \equiv T$ e pela propriedade da condicional $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$, então podemos concluir que $\sim A \vee B \equiv T$.

• se $\sim A \vee B \equiv T$ então $\sim (\sim A \vee B) \equiv \sim T$, ou seja, $A \wedge \sim B \equiv C$.

Funções Proposicionais

Definição: Funções Proposicionais (ou Sentenças Abertas) são proposições que envolvem pelo menos uma variável

Exemplo:

$$\text{“}x > 0\text{”} \quad , \quad \text{“}x = y + 3\text{”}$$

são sentenças abertas, são funções proposicionais.

- As funções proposicionais não possuem valores lógicos, a menos que as variáveis assumam valores.

Definição: A variável x na primeira sentença (e as variáveis x e y na segunda sentença aberta) é chamada de sujeito da sentença aberta. E a expressão “>0” (“maior do que zero”) é chamado de predicado da sentença aberta.

- “Predicado” é o que se diz do “sujeito”.

Funções Proposicionais

Exemplos:

1) Se “ele é o governador”, então “ele governa por 4 anos”.

- “ele” é o sujeito “ser governador” é o predicado
- “ele” é o sujeito “governar por 4 anos” é o predicado

2) “$x > 0$”

- “x” é o sujeito
- “> 0” é o predicado

3) “$x = y + 3$”

- “x” e “y” são os sujeitos
- “um ser igual ao outro + 3” é o predicado

Notação:

$P(x)$: “$x > 0$”

$P(x)$: “x é governador”

$Q(x)$: “x governa 4 anos”

$Q(x, y)$: “$x = y + 3$”

- Sempre temos que estabelecer a priori o conjunto universo do discurso (denotando por U) dos possíveis valores que o sujeito (variável) pode assumir.

Exemplos:

1) Em 'Se "ele é o governador", então "ele governa por 4 anos", o conjunto universo pode ser U = conjunto dos cidadãos maiores de 18 anos.

2) Em $P(x)$: "$x > 0$", o conjunto universo U pode ser

$\mathbb{N} =$ conjunto dos números inteiros não negativos,
$\mathbb{N}^* =$ conjunto dos números inteiros positivos,
$\mathbb{Z} =$ conjunto dos números inteiros,
$\mathbb{Q} =$ conjunto dos números racionais,
$\mathbb{R} =$ conjunto dos números reais, etc...

- Para um elemento a do universo U, por $P(a)$ entende-se "o predicado P aplicado no elemento a.
- E $P(x)$ é o predicado aplicado a um elemento genérico x do universo U.
- Assim, $P(x)$ é o próprio predicado.

Em outras palavras:

Definição: Uma função proposicional (sentença aberta) sobre um conjunto não vazio U, é uma sentença que contém variáveis e que se torna uma proposição quando substituímos as variáveis por elementos de U

$$P(x) \text{ é sentença aberta} \quad \Leftrightarrow \quad P(a) \text{ é proposição para } a \in U$$

Conjunto Verdade ou Conjunto Solução

Definição: O Conjunto Verdade (ou Conjunto Solução) de uma sentença aberta $P(x)$ é o subconjunto de U constituído pelos elementos $a \in U$ que tornam a sentença aberta $P(x)$ verdadeira.

Notação: $V(P(x))$ ou V_P. Assim,

$$V_P = \{a \in U | P(a) \text{ é verdadeira}\}$$

ou apenas

$$V_P = \{a \in U | P(a)\}$$

Lê-se: V_P é o conjunto dos elementos a pertencentes a U tal que a proposição $P(a)$ é verdadeira.
ou
V_P é o conjunto dos elementos $x \in U$ que satisfazem a sentença aberta $P(x)$.

Conjunto Verdade ou Conjunto Solução

Exemplos: 1) $U = \mathbb{R}$ e $P(x)$: "$x^2 + 2 < 0$"

Como $x^2 + 2 < 0 \Rightarrow x^2 < -2$ então não existe x real tal que $x^2 < -2$.

$V(P(x)) = V_P = \emptyset$, pois $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $x^2 + 2 < 0$.

2) $U = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ou seja, $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, e $P(X) = P(x, y)$: "$x^2 + y^2 = 4$"
(Aqui denotamos $X = (x, y)$ e $X \in U = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.)

Para construir o conjunto verdade, vamos procurar todos os elementos $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tal que "$x^2 + y^2 = 4$", começando com $x \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
x = 0 \ &\Rightarrow\ 0^2 + y^2 = 4 \ \Rightarrow\ y^2 = 4 \ \Rightarrow\ y = \pm 2 \\
x = 1 \ &\Rightarrow\ 1^2 + y^2 = 4 \ \Rightarrow\ y^2 = 3 \ \Rightarrow\ y = \pm\sqrt{3} \\
x = 2 \ &\Rightarrow\ 2^2 + y^2 = 4 \ \Rightarrow\ y^2 = 0 \ \Rightarrow\ y = 0 \\
x = 3 \ &\Rightarrow\ 3^2 + y^2 = 4 \ \Rightarrow\ y^2 = -5 \ \Rightarrow\ \nexists\, y \in \mathbb{R} \\
x \geq 3 \ &\Rightarrow\ y^2 \leq -5 \ \Rightarrow\ \nexists\, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Logo, $V_P = \{(0, 2), (0, -2), (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (2, 0)\}$.

- Vimos que atribuindo valores para as variáveis (sujeitos) transforma-se uma sentença aberta em proposição.
- Podemos também transformar uma sentença aberta em proposição fazendo uso dos quantificadores universal e existencial.

Ex:

1) U = conjunto dos polígonos. $P(x)$: "a soma dos ângulos internos é 180^o."
Usando o quantificador universal (para todo) podemos escrever a proposição:
"Para todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180^o."

2) Usando o quantificador universal podemos escrever a proposição:
"Para qualquer $x \in \mathbb{N}$, $x^2 \geq x$".

3) Usando o quantificador existencial podemos escrever a proposição:
"Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 \geq x$".

4) "Todo triângulo é equilátero".

5) "Existe triângulo equilátero".

• As expressões "para todo", "qualquer que seja", "existe", "existem" chamam-se quantificadores.

Definição: A quantificação universal da sentença aberta $P(x)$ é a proposição: "Para todos os valores de x no universo do discurso, $P(x)$ é verdadeira".
Notação: $\forall x,\ P(x)$ ou $\forall x \in U,\ P(x)$ é verdadeira.
O símbolo $\forall$ (para todo) chama-se quantificador universal.
Importante: A proposição "$\forall x,\ P(x)$" é verdadeira apenas quando o conjunto verdade da sentença aberta $P(x)$ satisfaz $V_P = U$.

Definição: A quantificação existencial da sentença aberta $P(x)$ é a proposição: "Existe x no universo do discurso, tal que $P(x)$ é verdadeira".
Notação: $\exists x,\ P(x)$ ou $\exists x \in U |\ P(x)$ é verdadeira.
O símbolo $\exists$ (existe) chama-se quantificador existencial.
Importante: A proposição "$\exists x,\ P(x)$" é verdadeira quando o conjunto verdade da sentença aberta $P(x)$, V_P é não vazio.

Ex: 1) $U = \mathbb{N}$. A sentença aberta $P(x)$: $x^2 \geq x$",

• usando o quantificador universal torna-se a proposição
$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$, que significa "para todo x natural, $x^2 \geq x$ vale".
Esta proposição é verdadeira, pois $V_P = \mathbb{N}$.

• usando o quantificador existencial torna-se a proposição
$\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$, que lê-se "existe x natural, tal que $x^2 \geq x$".
Esta proposição é verdadeira, pois V_P não é vazio, por exemplo $0 \in V_P$, $2 \in V_P$.

2) $U = \{1,2,3,4\}$ e "$P(x) : x^2 < 10$", note que $V_P = \{1,2,3\}$

• $\forall x, P(x)$ equivale a $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ que é falsa, pois $P(4)$ é falsa.
• $\exists x, P(x)$ equivale a $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ que é verdadeira.

3) U conjunto dos triângulos. Com predicado $P(x)$: x é equilátero

A quantificação existencial "$\exists x, P(x)$" que significa "Existe triângulo equilátero" é verdadeira, pois o triângulo de lados iguais é equilátero e então V_P não é vazio.

A quantificação universal "$\forall x, P(x)$" que significa "Todo triângulo é equilátero" é falsa, pois há triângulos não equilátero (triângulos com lados diferentes), ou seja, $V_P \neq U$.

Quantificadores

Observação: A quantificação de uma proposição é a própria fórmula da proposição.

Exemplo:
Qualquer que seja x, D. Pedro II foi imperador do Brasil.
é equivalente a
D. Pedro II foi imperador do Brasil.

$\forall x, Q$ equivale a Q.

$\exists x, Q$ equivale a Q.

Exemplo de Dupla Quantificações:

$$\forall x,\ \forall y,\ P(x,y)$$

$$\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$$

$$\exists x,\ \forall y,\ P(x,y)$$

$$\exists x,\ \exists y,\ P(x,y)$$

Muitas vezes as sentenças abertas contém 2 ou mais variáveis, então temos que quantificar cada variável.

Exemplo: 1) "Para todo $x \in \mathbb{Z}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, $x+y=4$." Tomando $P(x,y)$: "$x+y=4$", escrevemos

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$$

que é falsa, pois $P(0,0)$ é falsa, e $V_P \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Dupla Quantificação

Exemplo: 2) “Para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $x+y=4$.” Tomando $P(x,y)$: “$x+y=4$”, escrevemos

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$$

que é verdadeira, pois basta tomar $y = 4-x$, temos que $P(x, 4-x)$ é verdadeira.

3) “Existe inteiro x, tal que para y real, $x+y=4$.” Tomando $P(x,y)$: “$x+y=4$”, escrevemos

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$$

que é falsa, pois não existe x inteiro de forma que $x+y=4$ quando $y=\sqrt{2}$, por exemplo. Veja se $y=\sqrt{2}$ então $x+\sqrt{2}=4$ implica que x não é inteiro.

4) "Existe inteiro x e existe real y tal que $x+y=4$." Tomando $P(x,y)$: "$x+y=4$", escrevemos

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$$

que é verdadeira, pois $P(0,4)$ é verdadeira e V_P é não vazio.

Para negar uma proposição quantificada, trocam-se os quantificadores (universal e existencial) e nega-se a sentença aberta $P(x)$, ou seja

$$\text{“} \sim [\forall x, P(x)]\text{”} \quad \text{é a proposição} \quad \text{“}\exists x, \sim P(x)\text{”},$$

$$\text{“} \sim [\exists x, P(x)]\text{”} \quad \text{é a proposição} \quad \text{“}\forall x, \sim P(x)\text{”}.$$

Exemplo:

$$\begin{array}{rrcl}
i) & \sim [\exists x \in \mathbb{N},\ x+1=7] & \equiv & \forall x \in \mathbb{N},\ x+1 \neq 7 \\
ii) & \sim [\forall x \in \mathbb{N},\ x+1=7] & \equiv & \exists x \in \mathbb{N},\ x+1 \neq 7 \\
iii) & \sim [\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y=4] & \equiv & \exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \neq 4 \\
iv) & \sim [\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y=4] & \equiv & \exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y \neq 4
\end{array}$$

Verifique se as proposições acima são verdadeiras ou falsas.

Exercícios:

Faça todos os exercícios das, páginas 72 e 73 do Livro
A.F. da Silva e C.M. dos Santos, “Aspectos Formais da Computação”.