Disciplina: Lógica Matemática

Aula 06: Métodos de Provas(continuação)

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Estamos estudando técnicas para mostrar que um argumento $P \Rightarrow Q$ é válido.

• Demonstração por Casos: Se o teorema $P \Rightarrow Q$ a ser provado é tal que $P = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, ou seja

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Rightarrow Q$$

podemos mostrar $p_i \Rightarrow Q$ individualmente, pois se mostramos que

$$(p_1 \to Q) \wedge (p_2 \to Q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to Q)$$

então

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to Q$$

também vale.

Exemplo: Mostre que $|x|\,|y| = |xy|$, onde x e $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: hip.: P : "$x, y \in \mathbb{R}$" e tese: Q : "$|x|\,|y| = |xy|$".

Vamos demonstrar por casos, pois podemos dividir a hipótese $x, y \in \mathbb{R}$ em 4 casos.

Vamos demonstrar por casos, pois podemos dividir a hipótese $x, y \in \mathbb{R}$ em 4 casos:

p_1 : "$x \geq 0$ e $y \geq 0$",

p_2 : "$x \geq 0$ e $y < 0$",

p_3 : "$x < 0$ e $y \geq 0$",

p_4 : "$x < 0$ e $y < 0$", logo, P : "$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$".

Vamos mostrar que $(p_1 \rightarrow Q) \wedge (p_2 \rightarrow Q) \wedge (p_3 \rightarrow Q) \wedge (p_4 \rightarrow Q)$.

De fato,

- suponhamos que p_1 vale, $|x| = x$, $|y| = y$ e $|xy| = xy$. Então, $|x|\,|y| = |xy|$.
- suponhamos que p_2 vale, $|x| = x$, $|y| = -y$ e $|xy| = -xy$. Então, $|x|\,|y| = |xy|$.
- suponhamos que p_3 vale, $|x| = -x$, $|y| = y$ e $|xy| = -xy$. Então, $|x|\,|y| = |xy|$.
- suponhamos que p_4 vale, $|x| = -x$, $|y| = -y$ e $|xy| = xy$. Então, $|x|\,|y| = |xy|$.

- Demonstração por Vacuidade:

Dizemos que a demonstração é por vacuidade quando a hipótese P (da implicação $P \Rightarrow Q$) é falsa.

Como $F \to V$ ou $F \to F$ são verdadeiras, segue que $P \to Q$ é sempre verdadeira, para qualquer que seja o valor verdade da proposição Q.

Assim, se P é falsa, então a demonstração de $P \Rightarrow Q$ é chamada de Prova por Vacuidade.

Note que não estamos afirmando que Q é verdadeira, afirmamos apenas que $P \Rightarrow Q$.

Ex: Se $2 > 5$ então $2^2 > 5^2$.
hipótese P : "$2 > 5$",
tese Q : "$2^2 > 5^2$"

Como P é falsa, por vacuidade $P \Rightarrow Q$.

- Demonstração de Equivalência:
- Quando o teorema é do tipo $P \Leftrightarrow Q$, devemos demonstrar $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Exemplo: Mostre que "n é ímpar se, e somente se, n^2 é ímpar".

$P \Rightarrow Q$, basta demonstrar que "n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar" (feito anteriormente).

$Q \Rightarrow P$, basta demonstrar que "n^2 é ímpar $\Rightarrow n$ é ímpar" (exercício).

Exercício: Mostre que "n é par se, e somente se, n^2 é par".

- Quando o teorema é do tipo $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n$, ou seja, P_i para $i = 1, 2, \ldots n$, são equivalentes, podemos demonstrar

$$(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_3) \wedge \cdots \wedge (P_n \rightarrow P_1).$$

Ou algum outro "ciclo" de equivalências como fizemos no Teorema 5.1.

Teoremas e Quantificadores:

• Demonstração Existencial: Quando o teorema afirma que existe (ou existe único) objeto que satisfaz determinada propriedade.

• Podemos usar a Prova Construtiva

Exemplo: Mostre que "existe um inteiro positivo que pode ser escrito de duas formas, como soma de dois quadrados".

Demonstração: Neste caso temos que testar os inteiros positivos e encontramos, por exemplo,

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$$

Como o teorema é existencial, basta um exemplo para mostrar que vale. Temos ainda outros exemplos, $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$.

• Dizemos que a prova é construtiva, pois exibimos um objeto (ou objetos) que satisfazem a propriedade.

- Podemos usar a Prova Não Construtiva

Exemplo: Mostre que "existem números irracionais x e y tais que x^y é racional".

Demonstração: Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional (já provamos). Podemos ter dois casos

- Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racional, neste caso escolhendo $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$, o teorema já está provado.
- Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irracional, neste caso escolhendo $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, temos

$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$, e o teorema já está provado.

Dizemos que a prova é não construtiva, pois não exibimos um objeto que satisfaz a propriedade. Veja que do raciocínio acima, exibimos dois pares $(x,y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ou $(x,y) = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ tal que apenas um deles satisfaz a propriedade.

• Existência e Unicidade: Quando o teorema afirma que existe um único objeto que satisfaz determinada propriedade $\exists!\, x, P(x)$.
Temos que provar que um objeto existe (existência) e que ele é único (unicidade).

Exemplo: Mostre que "dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$, $\exists!\, x$ tal que $ax + b = 0$".
Demonstração:

• Existência: se tomarmos $x = -\frac{b}{a}$, temos $ax + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.

Assim, por prova construtiva exibimos que existe $x = -\frac{b}{a}$ que satisfaz a propriedade.

• Unicidade: Vamos supor por contradição que existem x e y, com $y \neq x$, que satisfazem a propriedade, ou seja, $ax + b = 0$ e $ay + b = 0$. Mas

$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$

$ay + b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}$, ou seja $y = x$. Portanto, $x = -\frac{b}{a}$ é único.

- Contra exemplo: Quando o teorema é do tipo $\forall\, x, P(x)$. Porém, $P(x)$ é falsa para algum elemento (exemplo) a do universo.

Neste caso, exibimos a tal que $P(a)$ é falsa e esta técnica é chamada de contra-exemplo.

Exemplo: Mostre que "$\forall n \in \mathbb{N},\ n = a^2 + b^2 + c^2$, com $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$", ou dê um contra-exemplo que mostre que a proposição não vale.

Demonstração: Contra-exemplo: $7 \neq a^2 + b^2 + c^2, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$, pois observando a soma $a^2 + b^2 + c^2$ vemos que

$$\begin{array}{lll} 0^2+0^2+0^2=0, & 0^2+0^2+1^2=1, & 0^2+1^2+1^2=2, \\ 1^2+1^2+1^2=3, & 0^2+0^2+2^2=4, & 0^2+1^2+2^2=5, \\ 1^2+1^2+2^2=6, & 0^2+2^2+2^2=8, & 1^2+2^2+2^2=9, \end{array}$$

e todas as outras combinações produzem números maiores do que 7.
Logo, a afirmação é falsa, pois existe o elemento 7, tal que $P(7)$ é falsa.

Exercícios: Encontre outros contra-exemplos para o exemplo acima.

Exercícios:

Faça todos os exercícios das páginas 76 e 77 do Livro
A.F. da Silva e C.M. dos Santos, “Aspectos Formais da Computação”.