

Quinta Lista de Matemática Discreta - 2022

1. Mostre por indução que $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, para todo $n \geq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 1$.
2. Mostre por indução que $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.
3. Mostre por indução que $2^{n+1} \geq n + 2$, para todo $n \geq -1$.
4. Mostre por indução que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.
5. Mostre por indução que $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$, para todo $a \geq 1$ e para todo $n \geq 1$.
6. Mostre por indução que $(n + 1)^n \geq 3^n$, para todo $n \geq 4$.
7. Mostre por indução que $8 \mid 3^{2n} + 7$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
8. Mostre por indução que 9 divide $n4^{n+1} - (n + 1)4^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
9. Mostre por indução que $8 \mid 3^{2n} - 1$, para todo $n \geq 0$.
10. Mostre por indução que $7 \mid n^7 - n$, para todo $n \geq 1$.
11. Mostre por indução que $3^{2n+1} + 2^{m+2}$ é divisível por 7, para todo $n \in \mathbb{N}$.
12. Mostre por indução que $2^{2n} + 15n - 1$ é divisível por 9, para todo $n \geq 0$.
13. Mostre que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, para todo $n \geq 1$.
14. Seja a função $f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$ definida por $f(n) = (7n + 18)(\text{mod } 26)$.
 - (a) Mostre que f é bijetora.
 - (b) Determine a inversa de f .
15. Fazendo uso da função f do exercício anterior, pré-codifique, codifique e decodifique às seguintes frases:
 - (a) Moro em uma cidade maravilhosa.
 - (b) Feliz dia dos namorados.
16. Pré-codifique, codifique e decodifique às seguintes mensagens, usando o algoritmo RSA.
 - (a) Eu gosto de matemática.
 - (b) Hoje está fazendo sol.
 - (c) Minha família está viajando.
17. Fazendo uso do algoritmo RSA.
 - (a) Construa uma tabela de pré-codificação.
 - (b) Pré-codifique, codifique e decodifique a frase: eu gosto de matemática.
 - (c) Pré-codifique, codifique e decodifique a frase: hoje está fazendo sol.
 - (d) Pré-codifique, codifique e decodifique a frase: minha casa está reformando.
18. Determine o dígito verificador c dos seguintes RGs.
 - (a) 11.786.234 - c .
 - (b) 33.221.321 - c .
 - (c) 12.321.332 - c .
 - (d) 65.324.322 - c .
19. Determine os dígitos verificadores c_1c_2 dos seguintes CPFs.
 - (a) 212.785.254 - c_1c_2 .
 - (b) 143.111.224 - c_1c_2 .
 - (c) 412.331.322 - c_1c_2 .
 - (d) 210.321.456 - c_1c_2 .
20. Determine a solução geral das seguintes equações: $3x + 5y = 6$ e $x \equiv 2(\text{mod } 5)$.