Disciplina: Lógica Matemática

Aula 09: Binômio de Newton

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Vamos utilizar as técnicas de contagem/combinatória aprendidas para desenvolver a fórmula

$$(x+a)^n, \quad \text{onde} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad x, a \in \mathbb{R},$$

conhecido como Binômio de Newton. Observe que

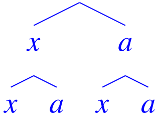
$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1, \quad \text{para } x \neq -a \\
(x+a)^1 &= x+a \\
(x+a)^2 &= x^2+2xa+a^2 \\
(x+a)^3 &= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3 \\
&\vdots \\
(x+a)^n &= ?
\end{aligned}$$

Binômio de Newton

Podemos utilizar a árvore de decisão para observar $(x+a)^2$, pois

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = (x)(x) + (x)(a) + (a)(x) + (a)(a)$$

soma dos produtos de cada elemento por cada elemento. Assim,



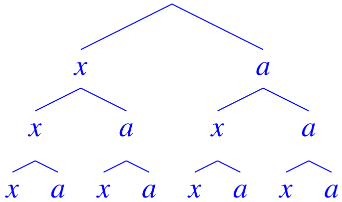
Logo,

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2xa + a^2.$$

Também $(x+a)^3$ pode ser desenvolvido como

$$
\begin{aligned}
(x+a)^3 &= (x+a)(x+a)(x+a)\\
&= (x)(x+a)(x+a)+(a)(x+a)(x+a)\\
&= (x)(x)(x+a)+(x)(a)(x+a)+(a)(x)(x+a)+(a)(a)(x+a)\\
&= (x)(x)(x)+(x)(x)(a)+(x)(a)(x)+(x)(a)(a)+(a)(x)(x)+(a)(x)(a)\\
&\quad +(a)(a)(x)+(a)(a)(a)\\
&= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3.
\end{aligned}
$$

Binômio $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$



Note que

- no primeiro nível da árvore há duas escolhas x e a,
- no segundo nível da árvore também há duas escolhas x e a e...
- no último nível da árvore também há duas escolhas x e a.

Logo, estamos falando de "permutação com elementos repetidos" de elementos.

Vamos contar quantas vezes cada termo aparece na soma:

- o termo $x^3 = (x)(x)(x)$ aparece 1 vez. Isto é o número de permutações das 3 letras $\{x, x, x\}$

$$P_3^{3,0} = \frac{3!}{3!0!} = \binom{3}{3} = \binom{3}{0} = 1.$$

- analogamente, o termo $a^3 = (a)(a)(a)$ aparece 1 vez. Isto é o número de permutações das letras $\{a, a, a\}$, veja que o conjunto de letras tem repetição,

$$P_3^{3,0} = \frac{3!}{3!0!} = \binom{3}{3} = \binom{3}{0} = 1.$$

- o termo x^2a aparece 3 vezes, das possibilidades $(x)(x)(a)$, $(x)(a)(x)$ e $(a)(x)(x)$.
Isto é o número de permutações das letras $\{x, x, a\}$, o conjunto de letras tem repetição, logo

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3.$$

- o termo xa^2 aparece 3 vezes, das possibilidades $(x)(a)(a)$, $(a)(x)(a)$ e $(a)(a)(x)$.
Isto é o número de permutações das letras $\{x, a, a\}$, o conjunto de letras tem repetição, logo

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3.$$

Vamos agora desenvolver $(x+a)^4$ e verificar quais são os coeficentes de cada termo

$$(x+a)^4 = ..?..x^4 + ..?..x^3a + ..?..x^2a^2 + ..?..xa^3 + ..?..a^4.$$

- o coeficiente de x^4 é o número de permutações dos elementos de $\{x,x,x,x\}$: $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$.
- o coeficiente de a^4 é o número de permutações dos elementos de $\{a,a,a,a\}$: $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$.
- o coeficiente de x^3a é o número de permutações dos elementos do conjunto $\{x,x,x,a\}$:

$$P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4.$$

- o coeficiente de xa^3 é o número de permutações dos elementos do conjunto $\{x,a,a,a\}$:

$$P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4.$$

- o coeficiente de x^2a^2 é o número de permutações dos elementos do conjunto $\{x, x, a, a\}$:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \binom{4}{2} = 6.$$

Logo,

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4.$$

Lembre-se que, para $n_1 + n_2 = n$,

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Por exemplo,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!2!}, \ \ldots$$

Podemos assim mostrar o seguinte resultado

Teorema Binomial (Newton). Para $n \in \mathbb{N}$, e $x,\ a \in \mathbb{R}$,

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n,$$

com $0 \leq p \leq n$.

De fato:

Não é difícil ver que o coeficiente de x^n é $1 = \binom{n}{0}$ e que o coeficiente de a^n é $1 = \binom{n}{n}$.

O coeficiente do termo $x^{n-p}a^p$ com $p = 1, 2, \ldots, n-1$ é o número de permutações de $n - p + p = n$ elementos, onde a letra x aparece $n-p$ vezes e a letra a aparece p vezes, logoé igual a

$$P_n^{n-p,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

De maneira compacta, em forma de somatório, podemos escrever o desenvolvimento do binômio de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n \tag{1}$$

como

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}a^k \,. \tag{2}$$

1) Vamos mostrar que

$$(x-a)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xa^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}a^n.$$

De fato: Para mostrar esta igualdade, tomamos $a = -a$ em (1) ou em (2), ou seja,

$$(x-a)^n = (x+(-a))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-a)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-1)^k(a)^k.$$

Sabemos que $(-1)^k = 1$ quando k é par e que $(-1)^k = -1$ quando k é ímpar, logo

$$(x-a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 - \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xa^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}x^0a^n.$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}(x-a)^3 &= \binom{3}{0}x^3a^0 - \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 - \binom{3}{3}x^0a^3 \\ &= x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-a)^4 &= \binom{4}{0}x^4a^0 - \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 - \binom{4}{3}x^1a^3 + \binom{4}{4}x^0a^4 \\ &= x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-a)^5 &= \binom{5}{0}x^5a^0 - \binom{5}{1}x^4a^1 + \binom{5}{2}x^3a^2 - \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}x^1a^4 - \binom{5}{5}x^0a^5 \\ &= x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5\end{aligned}$$

2) Vamos mostrar que
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad n \geq 0.$$

De fato: Precisamos mostrar que
$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Sabemos que
$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Do lado esquerdo $(1+x)^n$ é uma função na variável x, e do lado direito
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

também é uma função na variável x. Então podemos usar derivação (do Cálculo Diferencial e Integral).

Como

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n, \qquad (3)$$

derivando ambos os lados da equação (3) com relação a x temos

$$n(1+x)^{n-1} = 0 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}2x + \binom{n}{3}3x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}(n-1)x^{n-2} + \binom{n}{n}nx^{n-1}.$$

Agora substituímos $x = 1$ na igualdade acima, obtemos o resultado desejado

$$n2^{n-1} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

3) No desenvolvimento de $(x+y)^{100}$ qual é o quinto termo (considerando o desenvolvimento do Binômio de Newton com as potências de x em ordem decrescente)?

Resposta: Considerando o desenvolvimento com as potências de x em ordem decrescente, temos

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

De maneira geral, vemos que o quinto termo é $\binom{n}{4}x^{n-4}y^4$.

Como $n = 100$ o quinto termo de $(x+y)^{100}$ é $\binom{100}{4}x^{96}y^4$.

Exercícios

4) Mostre que

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n.$$

5) Utilizando o exercício 4), mostre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

6) Encontre a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$.

Resposta: O valor é 2^n, pois sabemos que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

e fazendo $x=1$ e $y=1$ obtemos

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

A expressão $\sum_{k=i}^{n} k$ é igual à soma dos valores de k, com k variando de i até n (de 1 em 1).

Assim, por exemplo

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Por convenção, se $i > n$, o valor do somatório $\sum_{k=i}^{n}$ é igual a 0. Por exemplo,

$$\sum_{k=1}^{0} k\binom{n}{k} = 0,$$

pois 0 é o elemento neutro da adição.

A expressão $\prod_{k=i}^{n} k$ é igual ao produto dos valores de k, com k variando de i até n (de 1 em 1).
Assim, por exemplo

$$\prod_{k=1}^{4} k = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

e

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \left(\frac{1}{1^2}\right) \times \left(\frac{1}{2^2}\right) \times \left(\frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Por convenção, se $i > n$, o valor do produtório $\prod_{k=i}^{n}$ é igual a 1. Por exemplo,

$$\prod_{k=10}^{9} k^2 = 1,$$

pois 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Sobre $\sum$ (somatório) e $\prod$ (produtório)

O cálculo do valor da soma S em

$$S = \sum_{k=1}^{5} \sqrt{k},$$

pode ser implementado em linguagem C como

```
S = 0;
for (k=1; k <= 5; k++)
    S = S + sqrt(k);
printf("%f ", S);
```

ou como

```
S = 0;
for (k=1; k <= 5; k++)
    S += sqrt(k);
printf("%f ", S);
```

Sobre $\sum$ (somatório) e $\prod$ (produtório)

Para um valor conhecido de $n \geq 0$, cálculo do produto de P em

$$P = \prod_{k=1}^{n} k,$$

(note que $P = n!$), pode ser implementado em linguagem C como

```
P = 1;
for (k=1; k <= n; k++)
    P = P * k;
printf("%f ", P);
```

ou como

```
P = 1;
for (k=1; k <= n; k++)
    P *= k;
printf("%f ", P);
```