Cálculo Numérico

Solução Aproximada de Equações Não Lineares

Parte 03: Equações Polinomiais

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP, Brasil

Como as equações polinomiais aparecem com mais frequência que outras equações não lineares vamos dar uma atenção mais especial para obtenção das raízes de quações polinomiais, ou seja, zeros de polinômios.

Normalmente, um polinômio de grau n é escrito na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

onde os coeficientes a_j são reais ou complexos.

(Teorema Fundamental da Álgebra)

Seja $n \geq 1$ e

seja $P_n(x)$ é um polinômio de grau exatamente n (isto é $a_n \neq 0$).

Então, $P_n(x)$ tem exatamente n zeros (reais ou complexos), desde que cada zero seja contado de acordo com sua multiplicidade.

Dado $P_n(x)$ um polinômio de grau exatamente n.

- Dizemos que um zero ξ do polinômio $P_n(x)$ tem multiplicidade k $(1 \leq k \leq n)$ se $P_n(\xi) = 0$,

$$P_n'(\xi) = 0, \quad P_n''(\xi) = 0, \quad P_n^{(3)}(\xi) = 0, \quad \ldots, \quad P_n^{(k-1)}(\xi) = 0$$

e

$$P_n^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

Quando $k = 1$, dizemos que ξ é um zero simples de $P_n(x)$.

Exemplo: O polinômio $P_4(x) = (x-2)^3(x+3)$ possui

- o zero $\xi = 2$ de multiplicidade 3
- o zero $\xi = -3$ de multiplicidade 1, ou é um zero simples.

Verifique que

- $P_4(2) = P_4'(2) = P_4''(2) = 0 \quad \text{e} \quad P_4^{(3)}(2) \neq 0$
- $P_4(-3) = 0 \quad \text{e} \quad P_4'(-3) \neq 0.$

Dado $P_n(x)$ um polinômio de grau exatamente n, ou seja $a_n \neq 0$, em

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

- Se $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ são os zeros de $P_n(x)$, então $P_n(x)$ pode ser expresso na forma fatorada

$$P_n(x) = a_n(x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n).$$

- Se ξ é um zero de $P_n(x)$, então existe um polinômio $Q_{n-1}(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$P_n(x) = (x - \xi)Q_{n-1}(x).$$

- Se y é um valor real que não é zero de $P_n(x)$, então existe um polinômio $Q_{n-1}(x)$, de grau $n-1$, tal que

$$P_n(x) = (x - y)Q_{n-1}(x) + b_0, \quad \text{com} \quad b_0 \text{ é real}.$$

Regra de sinal de Descartes. Dado um polinômio com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos, p, desse polinômio não excede o número v de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais, $v - p$ é um inteiro par, não negativo.

Exemplo. $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$. (+, - , +, +, -).

Temos então $v = 3$. Portanto, o número de zeros positivo p não excede 3. Mas, como $v - p$ é um par não negativo, temos $v - p = 0$ ou $v - p = 2$. Assim, $p = 3$ ou 1.
Na verdade, neste exemplo, há 3 zeros positivos, que são $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$ e $\xi_3 = 3$.

Exemplo. $P_5(x) = x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 5x^2 - 16x + 12$. (+, - , +, -, -, +).

Temos então $v = 4$. Portanto, o número de zeros positivo p não excede 4. Mas, como $v - p$ é um par não negativo, temos $p = 0$, $p = 2$ ou $p = 4$.

(Expansão em série de Taylor)

Dado o polynômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ *de grau* n*, e um ponto* α *qualquer no plano complexo, então a expansão de* $P_n(x)$ *em série de Taylor em torno do ponto* α *é dada por*

$$P_n(x) = P_n(\alpha) + (x-\alpha)\frac{P_n'(\alpha)}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{P_n''(\alpha)}{2!} + \ldots + (x-\alpha)^n\frac{P_n^{(n)}(\alpha)}{n!},$$

e em particular, quando $\alpha = 0$ *temos*

$$a_j = \frac{P_n^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Regra de sinal de Descartes (modificada).
Dado um polinômio com coeficientes reais, seja

$$a_j(\alpha) = \frac{P_n^{(j)}(\alpha)}{j!}$$

onde α é um número real.

Seja p o número de zeros reais maiores do que α desse polinômio.

Então p não excede o número v de variações de sinal dos coeficientes $\{a_0(\alpha), a_1(\alpha), \ldots a_n(\alpha)\}$. E ainda, $v - p$ é um inteiro par, não negativo.

Sequência de Sturm:

Dada o polinômio $P_n(x)$ e um ponto real α, seja $\tilde{v}(\alpha)$ o número de variações de sinal em $\{g_i(\alpha)\}_{i=0}^{n}$, onde

$$g_0(x) = P_n(x), \quad g_1(x) = P_n'(x),$$

e, para $k \geq 2$, obtemos $g_k(x)$ como o resto da divisão de $g_{k-2}(x)$ por $g_{k-1}(x)$, com sinal trocado.

(Teorema de Sturm)

Seja $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Se $P_n(\alpha) \neq 0$ e $P_n(\beta) \neq 0$, então o número de zeros de P_n no intervalo $[\alpha, \beta]$ é exatamente $\tilde{v}(\alpha) - \tilde{v}(\beta)$.

Exemplo. $P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$

Obtemos,

$$g_0(x) = x^3 + x^2 - x + 1, \quad g_1(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$
$$\frac{g_0(x)}{g_1(x)} = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}) + \frac{-g_2(x)}{g_1(x)} \quad \rightarrow \quad g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9},$$
$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = (\frac{27}{8}x + \frac{207}{32}) + \frac{-g_3(x)}{g_2(x)} \quad \rightarrow \quad g_3(x) = -\frac{99}{16}.$$

Assim,

$$g_0(0) = 1 > 0, \ \ g_1(0) = -1 < 0, \ \ g_2(0) = -\frac{10}{9} < 0, \ \ g_3(x) = -\frac{99}{16} < 0.$$

$$g_0(-2) = -1 < 0, \ g_1(-2) = 7 > 0, \ g_{-2}(2) = -\frac{28}{9} < 0, \ g_3(x) = -\frac{99}{16} < 0.$$

Portanto, $\tilde{v}(-2) = 2$ e $\tilde{v}(0) = 1$. Como $\tilde{v}(-2) - \tilde{v}(0) = 1$, o polinômio $P_3(x)$ tem exatamente um zero no intervalo $[-2, 0]$.

Seja $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Então, o método de Newton para obter um zero ξ de $P_n(x)$ é escolher uma aproximação x_0 para ξ e efetuar a iteração

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Para encontrar os valores de $P_n(x_k)$ poderíamos apenas fazer

$$P_n(x_k) = a_n x_k^n + a_{n-1}x_k^{n-1} + \ldots + a_1 x_k + a_0,$$

porém este cálculo requer $\dfrac{n(n-1)}{2}$ multiplicações e n adições.
Quando n é grande, isto acarreta um esforço computacional muito grande.
Analogamente para o cálculo de

$$P_n'(x_k) = n a_n x_k^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_k^{n-2} + \ldots + 2a_2 x_k + a_1.$$

Vamos aprender uma técnica eficiente para efetuar o cálculo dos valores de $P_n(x_k)$ e $P'_n(x_k)$ utilizando um número de operações aritméticas menor.

Esta técnica é conhecida como algoritmo de Briot-Ruffini

- Dado

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

queremos calcular $P_n(y)$ e $P'_n(y)$ para algum valor y real.

Sabemos que existe $Q_{n-1}(x)$, um polinômio de grau $n-1$, tal que

$$P_n(x) = (x-y)Q_{n-1}(x) + b_0.$$

Note que

$$P_n(y) = (y-y)Q_{n-1}(x) + b_0 = b_0.$$

Assim, queremos encontrar o valor de $b_0 = P_n(y)$.

Seja $Q_{n-1}(x)$ um polinômio de grau $n-1$ tal que

$$P_n(x) = (x-y)Q_{n-1}(x) + b_0.$$

Observe que $P_n(y) = b_0$.

Tomando, $Q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
& a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \\
&\quad = (x-y)\big[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1\big] + b_0 \\
&\quad = \Big[b_n x^n + \big(b_{n-1} - y b_n\big)x^{n-1} + \big(b_{n-2} - y b_{n-1}\big)x^{n-2} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \ \big(b_1 - y b_2\big)x - y b_1\Big] + b_0 \\
&\quad = \Big[b_n x^n + \big(b_{n-1} - y b_n\big)x^{n-1} + \big(b_{n-2} - y b_{n-1}\big)x^{n-2} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \ \big(b_1 - y b_2\big)x + \big(b_0 - y b_1\big)\Big].
\end{aligned}$$

Assim, igualando os coeficientes correspondentes obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= b_n & \Leftrightarrow \quad & b_n = a_n, \\
a_{n-1} &= b_{n-1} - y\, b_n & \Leftrightarrow \quad & b_{n-1} = a_{n-1} + y\, b_n,
\end{aligned}$$

Novamente,

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_n & \Leftrightarrow \quad & b_n = a_n, \\
a_{n-1} &= b_{n-1} - y\, b_n & \Leftrightarrow \quad & b_{n-1} = a_{n-1} + y\, b_n, \\
a_{n-2} &= b_{n-2} - y\, b_{n-1} & \Leftrightarrow \quad & b_{n-2} = a_{n-2} + y\, b_{n-1}, \\
&\vdots & & \vdots \\
a_1 &= b_1 - y\, b_2 & \Leftrightarrow \quad & b_1 = a_1 + y\, b_2, \\
a_0 &= b_0 - y\, b_1 & \Leftrightarrow \quad & b_0 = a_0 + y\, b_1.
\end{aligned}
$$

Resumindo,

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_n & \Leftrightarrow \quad & b_n = a_n, \\
a_i &= b_i - y\, b_{i+1} & \Leftrightarrow \quad & b_i = a_i + y\, b_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1, 0.
\end{aligned}
$$

Note que para encontrar o valor $b_0 = P_n(y)$ efetua-se apenas n multiplicações e n adições.

Para obter o valor de $P_n'(y)$, temos de $P_n(x) = (x-y)Q_{n-1}(x) + b_0$,

$$P_n'(x) = (x-y)Q_{n-1}'(x) + Q_{n-1}(x).$$

Portanto, $P_n'(y) = Q_{n-1}(y)$.

Assim, tomando $Q_{n-1}(x) = (x-y)R_{n-2}(x) + c_1$, onde

$$R_{n-2}(x) = c_n x^{n-2} + \ldots c_3 x + c_2,$$

obtemos $c_1 = Q_{n-1}(y)$ a partir de

$$\begin{aligned} & b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots b_2 x + b_1 \\ & \quad = (x-y)\left[c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} + \ldots + c_3 x + c_2\right] + c_1. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo raciocínio, encontramos a seguinte sequência de cálculos que resulta em $c_1 = P_n'(y)$:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n, \\ c_i &= b_i + y\, c_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Assim, dados o polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e uma aproximação x_0 para o zero ξ, efetuamos método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Para cada valor x_k, calculamos $P_n(x_k)$ e $P_n'(x_k)$ fazendo

$$y = x_k, \quad b_n = a_n, \quad c_n = b_n$$

$$\text{Para } i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$b_i = a_i + y\, b_{i+1}$$

$$c_i = b_i + y\, c_{i+1}$$

$$b_0 = a_0 + b_1\, y.$$

E obtemos $b_0 = P_n(x_k)$ e $c_1 = P_n'(x_k)$.

Algoritmo para obter um zero ξ_j de $P_n(x)$.
Seja $y(=x_0)$ a aproximação inicial, ϵ_1 e ϵ_2 precisões desejadas, e *imax* o número máximo de iterações que serão permitidas.

$teste = 0; \quad k = 0$

Enquanto $teste = 0$ faça

  $b_n = a_n; \quad c = b_n$

  Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ faça

    $b_i = a_i + y * b_{i+1}$

    $c \Leftarrow b_i + y * c$ # $c_i = b_i + c_{i+1}\, x_k$

  $b_0 = a_0 + y * b_1$

  Se $abs(c) \leq \epsilon_2$ então $teste = 2$

  $\delta = b_0/c$ # $x_{k+1} - x_k = -\delta = -P_n(x_k)/P_n'(x_k)$

  $y \Leftarrow y - \delta$ # $x_{k+1} = x_k - \delta$

  Se $abs(\delta) \leq \epsilon_1$ então $teste = 1$

  $k \Leftarrow k + 1$

  Se $k = imax$ então $teste = 3$

$\xi_j = y$

Podemos imprimir o resultado obtido de acordo com o valor de teste.

Observações:

Se teste $= 1$: Convergência atingido e ovalor aproximado do zero é y.

Se teste $= 2$: O valor de $P_n'(x_k)$ ficou muito próximo de zero.

Se teste $= 3$: Não há convergência.

Observe que no algoritmo anterior, quando $b_0 = P_n(y) = 0$ (na prática bem próximo de 0), o polinômio $Q_{n-1}(x)$ é tal que

$$P_n(x) = (x - y)Q_{n-1}(x) = (x - \xi_j)Q_{n-1}(x).$$

Então para obter um novo zero, seja ξ_{j+1} de $P_n(x)$, podemos procurar este zero como um zero do polinômio $Q_{n-1}(x)$ que tem grau $n - 1$.

Para que possamos usar o algoritmo dado anteriormente, podemos tomar $n \Leftarrow n - 1$, e definir o novo polinômio $P_n(x)$ ($= Q_n(x)$) por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_{i+1} x^i.$$

Isto é, fazer

$$a_i = b_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Após disso, o algoritmo anterior pode ser aplicado com o novo polinômio $P_n(x)$.

Encontre os zeros do polinômio

$$P_3(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$$

pelo método de Newton usando o algoritmo de Briot-Ruffini para calcular $P_n(x_k)$ e $P'_n(x_k)$ com a aproximação inicial $x_0 = 3$.

• Aqui $n = 3$, $a_3 = 1, a_2 = -8, a_1 = 17$ e $a_0 = -10$.
Para $k = 0$ e $x_0 = 3$, vamos calcular $b_0 = P_3(x_0)$

$$\begin{array}{lcccc} b_3 = a_3 & = & 1 & & \\ b_2 = a_2 + x_0 b_3 & = & -8 + (3)(1) & = & -5 \\ b_1 = a_1 + x_0 b_2 & = & 17 + (3)(-5) & = & 2 \\ b_0 = a_0 + x_0 b_1 & = & -10 + (3)(2) & = & -4 \end{array}$$

logo $b_0 = P_3(x_0) = P_3(3) = -4$.

Vamos calcular $c_1 = P_3'(x_0)$

$$\begin{array}{rcl} c_3 = b_3 & = & 1 \\ c_2 = b_2 + x_0 c_3 & = & -5 + (3)(1) = -2 \\ c_1 = b_1 + x_0 c_2 & = & 2 + (3)(-2) = -4 \end{array}$$

logo $c_1 = P_3'(x_0) = P_3'(3) = -4$.

$$x_1 = x_0 - \frac{P_n(x_0)}{P_n'(x_0)} = 3 - \frac{-4}{-4} = 2$$

Assim, encontramos outra aproximação para o zero que é $x_1 = 2$.

Para $k = 1$ e $x_1 = 2$, vamos calcular $b_0 = P_3(x_1)$

$$\begin{array}{lcccc} b_3 = a_3 & = & 1 & & \\ b_2 = a_2 + x_1 b_3 & = & -8 + (2)(1) & = & -6 \\ b_1 = a_1 + x_1 b_2 & = & 17 + (2)(-6) & = & 5 \\ b_0 = a_0 + x_1 b_1 & = & -10 + (2)(5) & = & 0 \end{array}$$

logo $b_0 = P_3(x_1) = P_3(2) = 0$.

Como $P_3(2) = 0$, isto significa que encontramos um zero!!!

Usando agora a técnica de deflação

$$P_3(x) = (x-2)Q_2(x) + 0 = (x-2)(x^2 - 6x + 5),$$

ou seja, $Q_2(x) = x^2 - 6x + 5$

Agora, como o grau do polinômio é 2, podemos usar o algoritmo de Báscara para encontrar os últimos 2 zeros, que são 1 e 5.

Portanto, os zeros de $P_3(x)$ são 1, 2 e 5.