# Terceira Lista de Matemática Discreta - 2022

1. Em cada uma das operações abaixo verifique se é fechada, associativa, comutativa, tem elemento neutro, encontre os elementos simetrizáveis e os elementos regulares.

   (a) $E = \mathbb{R}_+$ e $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (b) $E = \mathbb{R}$ e $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

   (c) $E = \mathbb{Z}$ e $x * y = xy + 2x$

   (d) $E = \mathbb{Q}$ e $x * y = x + xy$

   (e) $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$.

   (f) $E = \mathbb{R}$ e $x * y = x^2 + y^2 + xy$.

   (g) $E = \mathbb{R}_+$ e $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

   (h) $E = \mathbb{Z}$ e $x * y = x + xy$.

2. Em cada uma das operações abaixo sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, verifique se é fechada, associativa, comutativa, tem elemento neutro, encontre os elementos simetrizáveis e os elementos regulares.

   (a) $(a, b) * (c, d) = (ac, 0)$.

   (b) $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$.

   (c) $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$.

   (d) $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

   (e) $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$.

3. Verifique se é fechada, associativa, comutativa, tem elemento neutro, encontre os elementos simetrizáveis e os elementos regulares da operação $(a, b, c) * (d, e, f) = (ad, be, cf)$ sobre $\mathbb{Z}^3$.

4. Em cada uma das operações abaixo verifique se é fechada, associativa, comutativa, tem elemento neutro, encontre os elementos simetrizáveis e os elementos regulares, com a operação de adição (e multiplicação).

   (a) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par}\} \subseteq \mathbb{Z}$

   (b) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é impar}\} \subseteq \mathbb{Z}$

   (c) $E = m\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} : m \text{ divide } x\} \subseteq \mathbb{Z}$

   (d) $E = \{\begin{pmatrix} cos(a) & sen(a) \\ -sen(a) & cos(a) \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$.

   (e) $A = \{z \in \mathbb{C} : z = cos(\theta) + isen(\theta)\} \subseteq \mathbb{C}$.

5. Determine os elementos neutros a esquerda no conjunto $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com a operação de multiplicação.

6. Construir a tábua de operação do conjunto $E = \{a, b\}$ com uma operação $*$.

7. Construir a tábua de operação do conjunto $E = \{a, b, c\}$ com uma operação $*$.

8. Construir as tábuas de operações do conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ com uma operação $*$.

9. Verifique se a operação dada por $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$ é distributiva em relação a operação $(a, b) \triangle (c, d) = (a + c, b + d)$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

10. Verifique se $G = \{z \in \mathbb{C} : z = cos(\theta) + isen(\theta)\} \subseteq \mathbb{C}$ com relação ao produto é fechada, comutativa e associativa. Determine o elemento neutro e os elementos simetrizáveis.

11. Se $(G, \star)$ é fechada, associativa, possui elemento neutro e todo elemento é simetrizável, para todo $x, y, z \in G$, mostre que $(x * y * z)^{-1} = z^{-1} * y^{-1} * x^{-1}$.

12. Seja $G = \mathbb{Z}_m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Mostre que $g \in G$ é simetrizável em relação ao produto se, e somente se, $mdc(g, m) = 1$.

13. Determine uma operação sobre um conjunto $E$ tal que todo elemento é regular, possui elemento neutro $e$ e $e$ é o único elemento simetrizável.

14. Encontro uma operação sobre um conjunto $E$ que possui elemento neutro e todos os elementos de $E$, com excessão do elemento neutro, tem dois simétricos.