Exercícios de Matrizes e Determinantes

1. Seja $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ tal que $C = A + B$ sendo $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$, $\forall\ i, j \in \{1, 2, 3\}$. Determine o elemento $c_{12} + c_{23} + c_{32}$.

2. Determinar α, β, γ e $\delta \in \mathbb{R}$ de modo que se tenha:
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

3. Determinar uma matriz A quadrada de ordem 2 tal que $A \neq 0$ e $A^2 = 0$.

4. Obter todas as matrizes B que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $AB = BA$.

5. Mostrar que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ então $AB = BA$.

6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $A^2, A^3, \ldots, A^n$.

7. Se A e B são matrizes invertíveis, então a matriz AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$. Se B é a inversa de A, calcule o valor de $x + y$.

9. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{pmatrix}$ uma matriz invertível, determine os valores de x para os quais $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível e, se o for, determinar sua inversa.

11. Uma matriz quadrada A é ortogonal se A é invertível e $A^{-1} = A^t$. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

12. Verificar se as matrizes abaixo são invertíveis e, quando for o caso, determinar a inversa.
$$(a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b)\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)\ \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. Existe alguma matriz invertível A tal que $A^2 = 0$? Justifique.

14. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, definida por $a_{ij} = -1 + 2i + j$, para $1 \leq 1 \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2$. Calcule o determinante de A.

15. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e B é tal que $B^{-1} = 2A$, calcule o determinante de B.