Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP.

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em substituir essa função por uma outra função $g(x)$ que assume os mesmos valores de $f(x)$ em pontos distintos x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Isto é, obter uma função $g(x)$ tal que

$$g(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

É aconselhavel, por exempo:

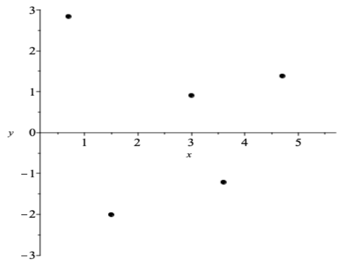
- *a*) quando são conhecidos somente os valores numéricos da função $f(x)$ para um conjunto de pontos x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ e é necessário calcular o valor de $f(x)$ em um outro ponto.
- *b*) quando a função $f(x)$ em estudo tem uma expressão tal que operações como diferenciação e integração são difíceis de serem realizadas.

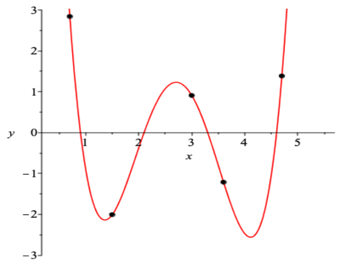
A escolha mais usada para $g(x)$, que apresenta uma teoria extensa, é forma polinomial.

Exemplo. Considere a tabela de valores obtidos a partir de experimentos.

x	0.7	1.5	3.0	3.6	4.7
$f(x)$	2.8292	-2.0088	0.9072	-1.215	1.3832

Gráficos dos pontos e
gráfico dos pontos com o polinômio que interpola a função $f(x)$ nos 5 pontos dados





No caso de *interpolação polinomial* o procedimento é:

Dados os $n + 1$ pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n)),$$

obter um polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

- Veremos que este polinômio existe e é unico.

Seja $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Então, de $P_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, obtemos

$$\begin{array}{rcccccccccc} P_n(x_0) = & a_0 & + & a_1 x_0 & + & \cdots & + & a_n x_0^n & = & f(x_0), \\ P_n(x_1) = & a_0 & + & a_1 x_1 & + & \cdots & + & a_n x_1^n & = & f(x_1), \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ P_n(x_n) = & a_0 & + & a_1 x_n & + & \cdots & + & a_n x_n^n & = & f(x_n). \end{array}$$

Estas equações representam o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Podemos obter os valores de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ resolvendo este sistema.

A matriz $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix},$$

é chamada a matriz de Vandermonde, associada aos pontos $x_0, x_1, \ldots x_n$. Temos para esta matriz

$$det(\mathbf{A}) = \prod_{k=1}^{n} \left[\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \right] = \prod_{0 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j).$$

Se os pontos $x_0, x_1, \ldots x_n$ são distintos então $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e assim, o sistema $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ tem uma solução e esta solução é única.

Se os pontos $x_0, x_1, \dots x_n$ são distintos então $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e assim, o sistema $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ tem uma solução e esta solução é única.

Isto mostra que:

Dados os $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e dados os valores

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n),$$

o polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

existe e é unico.

Este polinômio, $P_n(x)$, é conhecido como polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Seja $f(x)$ dada pela tabela

x	1	2	3	4
$f(x)$	-16	-13	-4	17

Determinar o polinômio interpolador $P_3(x)$ de $f(x)$ nos 4 pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

Para obter o polinômio interpolador $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, temos $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -16 \\ -13 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a decomposição LU, sem pivoteamento parcial, na matriz de Vandermonde $\mathbf{A}$, obtemos $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, onde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então, primeiramente a partir do sistema $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ obtemos:

$$y_1 = -16, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 6 \quad \text{e} \quad y_4 = 6.$$

Continuando, a partir do sistema $\mathbf{Uz} = \mathbf{y}$ obtemos:

$$z_4 = 1 = a_3, \quad z_3 = -3 = a_2, \quad z_2 = 5 = a_1 \;\; \text{e} \;\; z_1 = -19 = a_0.$$

Assim, o polinômio interpolador desejado é:

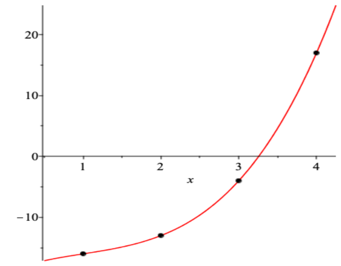
$$P_3(x) = -19 + 5x - 3x^2 + x^3.$$

Pontos dados

x	1	2	3	4
$f(x)$	-16	-13	-4	17

Polinômio interpolador

$$P_3(x) = -19 + 5x - 3x^2 + x^3.$$



Seja $f(x)$ dada pela tabela

x	-2	1	3.5
$f(x)$	-1.0	2.0	4.5

Determinar o polinômio interpolador $P_2(x)$ de $f(x)$ nos 3 pontos $x_0 = -2$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3.5$.

Para obter o polinômio interpolador $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, temos $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$, onde

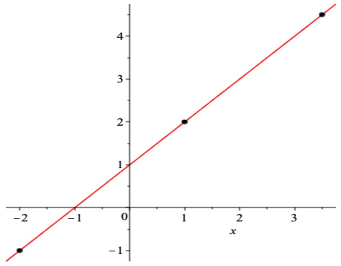
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2.0 & 4.0 \\ 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1 & 3.5 & 12.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 2.0 \\ 4.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$z_3 = 0 = a_2, \quad z_2 = 1.0 = a_1 \text{ e } z_1 = 1.0 = a_0.$$

Assim, o polinômio interpolador desejado é:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 + x.$$



Como acabamos de ver, o polinômio interpolador $P_n(x)$ de $f(x)$ é único.

Porém, existem várias maneiras de obter este polinômio.

Uma das formas é a resolução do sistema linear obtido anteriormente.

Entretanto, do ponto de vista numérico e prático, há outras formas melhores para obter este polinômio.

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n+1) pontos distintos e sejam $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Podemos representar o polinômio interpolador $P_n(x)$ na forma

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x),$$

onde $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Isto é,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})(x_1 - x_n)},$$

Forma de Lagrange para o Polinômio Interpolador

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n. \qquad \text{Isto é,}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})(x_1 - x_n)},$$

$$\vdots$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

- $L_k(x)$ é um polinômio de grau EXATAMENTE n;
- $$L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j, \\ 1, & \text{se } k = j. \end{cases}$$
- Como $L_k(x)$ é um polinômio de grau exatamente n, a soma $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$.
- Além disso,

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0 L_0(x_0) + \ldots + y_j L_j(x_0) + \ldots + y_n L_n(x_0) = y_0 L_0(x_0) = y_0 = f(x_0), \\ &\vdots \\ P_n(x_j) &= y_0 L_0(x_j) + \ldots + y_j L_j(x_j) + \ldots + y_n L_n(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j = f(x_j), \\ &\vdots \\ P_n(x_n) &= y_0 L_0(x_n) + \ldots + y_j L_j(x_n) + \ldots + y_n L_n(x_n) = y_n L_n(x_n) = y_n = f(x_n), \end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$.

Assim, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos x_j, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Observação: Pela unicidade, chegamos o mesmo polinômio que foi obtido pela resolução do sistema linear dado anteriormente.

Forma alternativa de escrever $L_k(x)$ é:

Seja $Q(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, o polinômio mônico de grau $n + 1$ cujos zeros são $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Então

$$L_k(x) = \frac{Q(x)}{(x - x_k)Q'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Os polinômios $L_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ são chamados os polinômios de Lagrange associados aos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Considere de novo $f(x)$ dada pela tabela

x	1	2	3	4
$f(x)$	-16	-13	-4	17

Vamos determinar o polinômio interpolador $P_3(x)$ de $f(x)$ nos 4 pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$, pelo método de Lagrange.

Temos,

$$y_0 = f(x_0) = -16, \;\; y_1 = f(x_1) = -13, \;\; y_2 = f(x_2) = -4 \;\text{ e }\; y_3 = f(x_3) = 17,$$

$$\begin{aligned} L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= \frac{-1}{6}[x^3 - 9x^2 + 26x - 24], \\ L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &= \frac{1}{2}[x^3 - 8x^2 + 19x - 12], \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$
$$= \frac{-1}{2}\left[x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right],$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$
$$= \frac{1}{6}\left[x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right].$$

Portanto, de $P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$,

$$\begin{aligned} P_3(x) \;&= (-16) \times \tfrac{-1}{6}\left[x^3 - 9x^2 + 26x - 24\right] \\ &\quad +(-13) \times \tfrac{1}{2}\left[x^3 - 8x^2 + 19x - 12\right] + \\ &\quad +(-4) \times \tfrac{-1}{2}\left[x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right] + \\ &\quad + 17 \times \tfrac{1}{6}\left[x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right] \\ &= x^3 - 3x^2 + 5x - 19. \end{aligned}$$

Considere de novo $f(x)$ dada pela tabela

x	-2	1	3.5	4.0
$f(x)$	-1.0	2.0	4.5	5.0

Obter uma aproximação para $f(x)$ no ponto $x = -1$ pelo método de Lagrange e polinômios interpolador de ordem 2.

Para obter um polinômio interpolador de ordem 2 (isto é, de grau ≤ 2), precisamos 3 pontos. É ideal, o ponto que precisamos approximar esteja no menor intervalo que contem estes três pontos.

Assim, vamos escolher os três pontos de interpolação como sendo $x_0 = -2$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3.5$.

Temos,

$$y_0 = f(x_0) = -1.0, \quad y_1 = f(x_1) = 2.0 \;\text{ e }\; y_3 = f(x_2) = 4.5,$$

e

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3.5)}{(-2-1)(-2-3.5)},$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-3.5)}{(1+2)(1-3.5)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(3.5+2)(3.5-1)}.$$

Portanto,

$$L_0(-1) = \frac{(-1-1)(-1-3.5)}{(-2-1)(-2-3.5)} = \frac{9.0}{16.5},$$
$$L_1(-1) = \frac{(-1+2)(-1-3.5)}{(1+2)(1-3.5)} = \frac{-4.5}{-7.5},$$
$$L_2(-1) = \frac{(-1+2)(-1-1)}{(3.5+2)(3.5-1)} = \frac{-2.0}{13.75}.$$

Então, de $P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} P_2(-1) &= y_0L_0(-1) + y_1L_1(-1) + y_2L_2(-1) \\ &= (-1.0) \times \tfrac{9.0}{16.5} + 2.0 \times \tfrac{-4.5}{-7.5} + 4.5 \times \tfrac{-2.0}{13.75} = 0.0 \end{aligned}$$

Considere de novo $f(x)$ dada pela tabela

x	-2.5	-2	1	3.5
$f(x)$	13	6.5	1.625	1.0

Obter uma aproximação para $f(x)$ no ponto $x = -1$ pelo método de Lagrange e polinômios interpolador de ordem 2.

Para obter um polinômio interpolador de ordem 2 (isto é, de grau ≤ 2), precisamos 3 pontos. É ideal, o ponto que precisamos aproximar esteja no menor intervalo que contem estes três pontos.

Assim, vamos escolher os três pontos de interpolação como sendo $x_0 = -2$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3.5$.

Temos,

$$y_0 = f(x_0) = 6.5, \quad y_1 = f(x_1) = 1.625 \ \text{ e } \ y_3 = f(x_2) = 1.0$$

e, como os três pontos x_0, x_1 e x_2 são iguais ao do exemplo anterior,

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad = \frac{(x-1)(x-3.5)}{(-2-1)(-2-3.5)},$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad = \frac{(x+2)(x-3.5)}{(1+2)(1-3.5)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad = \frac{(x+2)(x-1)}{(3.5+2)(3.5-1)}.$$

Portanto,

$$L_0(-1) = \frac{(-1-1)(-1-3.5)}{(-2-1)(-2-3.5)} \quad = \frac{9.0}{16.5},$$
$$L_1(-1) = \frac{(-1+2)(-1-3.5)}{(1+2)(1-3.5)} \quad = \frac{4.5}{7.5},$$
$$L_2(-1) = \frac{(-1+2)(-1-1)}{(3.5+2)(3.5-1)} \quad = \frac{-2.0}{13.75}.$$

Então, de $P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} P_2(-1) &= y_0L_0(-1) + y_1L_1(-1) + y_2L_2(-1) \\ &= 6.5 \times \tfrac{9.0}{16.5} + 1.625 \times \tfrac{4.5}{7.5} + 1.0 \times \tfrac{-2.0}{13.75} = 4.375 \end{aligned}$$

A forma de Newton para polinômio P_n que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $(n+1)$ pontos distintos é

$$\begin{aligned} P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ \ldots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} d_0 &= f[x_0] = f(x_0), \\ d_1 &= f[x_0, x_1] = \tfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}, \\ d_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = \tfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \\ &\vdots \\ d_n &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \tfrac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}, \end{aligned}$$

- A quantidade $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}]$ é uma m-êsima diferença dividida de $f(x)$.

Por exemplo, dada $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, x_2 e x_3 as diferenças divididas podem ser construidas sistemáticamente da seguinte maneira:

x_i	ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

onde

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0, 1, 2,$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \qquad i = 0, 1,$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}, \qquad i = 0.$$

Considere $f(x)$ dada pela tabela

x	-2	1	3.5	4.0
$f(x)$	-1.0	2.0	4.5	5.15

As diferenças divididas são dadas por

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-2.0	-1.0			
		1.0		
1.0	2.0		0.0	
		1.0		0.01666667
3.5	4.5		0.1	
		1.3		
4.0	5.15			

x	-2	1	3.5	4.0
$f(x)$	-1.0	2.0	4.5	5.15

Logo, o polinômio interpolador é construído da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_3(x) &= d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= -1.0 + (1.0)(x-(-2)) + (0.0)(x-(-2))(x-1) \\ &\quad + 0.01666667(x-(-2))(x-1)(x-3.5) \\ &= 0.01666667x^3 - 0.41666667x^2 + 0.90833333x + 1.116666667 \end{aligned}$$

Para uma aproximação para $f(x)$ no ponto $x = 2$, podemos fazer

$$\begin{aligned} f(2) \simeq P_3(2) &= -1.0 + (1.0)(2-(-2)) + (0.0)(2-(-2))(2-1) \\ &\quad + 0.01666667(2-(-2))(2-1)(2-3.5) = 2.8999999 \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$ *e* $f(x)$ *é função contínua e derivável até ordem* $n+1$ *em* $[a, b]$. *Seja* $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, *para todo* x *em* $[a, b]$. *Então,*

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Demonstração: O resultado é óbvio quando $x = x_k$, pois

$$f(x_k) - P_n(x_k) = 0$$

e

$$(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_k)\cdots(x_k - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} = 0.$$

Então, tomamos x tal que $x \in (a, b)$ e $x \neq x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Consider a função em t dada por

$$H(t) = E_n(t)Q_{n+1}(x) - E_n(x)Q_{n+1}(t),$$

onde $Q_{n+1}(t) = (t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$.

Temos, para $t = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} H(x_k) &= E_n(x_k) \times Q_{n+1}(x) - E_n(x) \times Q_{n+1}(x_k) \\ &= 0 \times Q_{n+1}(x) - E_n(x) \times 0 = 0. \end{aligned}$$

E, ainda, para $t = x$

$$H(x) = E_n(x) \times Q_{n+1}(x) - E_n(x) \times Q_{n+1}(x) = 0.$$

Então, a função $H(t)$ tem pelo menos $n+2$ zeros distintos em $[a, b]$.
Pela aplicação sucessiva do Teorema de Rolle:

- $H'(t)$ tem pelo menos $n+1$ zeros no intervalo (a, b).
- $H''(t)$ tem pelo menos n zeros no intervalo (a, b).

" "

- $H^{(j)}(t)$ tem pelo menos $n - j + 2$ zeros no intervalo (a, b).

" "

- $H^{(n+1)}(t)$ tem 1 zero no intervalo (a, b).

Seja ξ_x este zero de $H^{(n+1)}(t)$.

Como

$$H(t) = E_n(t)Q_{n+1}(x) - E_n(x)Q_{n+1}(t),$$

derivando $H(t)$, $n+1$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
H^{(n+1)}(t) &= E_n^{(n+1)}(t)Q_{n+1}(x) - E_n(x)Q_{n+1}^{(n+1)}(t) \\
&= [f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t)]Q_{n+1}(x) - E_n(x)Q_{n+1}^{(n+1)}(t) \\
&= [f^{(n+1)}(t) - \quad 0 \quad]Q_{n+1}(x) - E_n(x)\ (n+1)! \\
&= f^{(n+1)}(t)Q_{n+1}(x) - E_n(x)(n+1)!
\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = H^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x)Q_{n+1}(x) - E_n(x)(n+1)!$$

e

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}Q_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Corolário

Se $f^{(n+1)}(x)$ é contínua em $[x_0, x_n]$, temos

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

para $x \in [x_0, x_n]$, onde $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Corolário

Se $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, então

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)},$$

para $x \in [x_0, x_n]$, onde $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.