ⓓ Neste caso, temos duas situações que devemos analisar:

① o denominador da função não pode se anular, isto é,

$$x^2-2x-3 \neq 0 \iff x \neq \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \iff x \neq \frac{2 \pm 4}{2} \iff \boxed{x \neq 3 \text{ e } x \neq -1 \quad (*)}$$

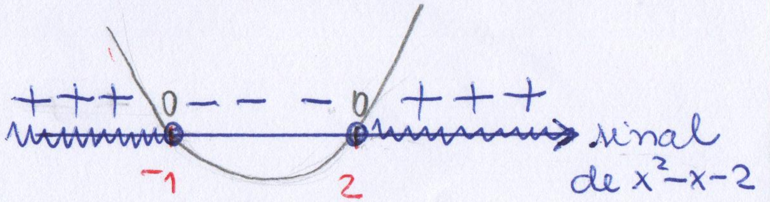
② A expressão dentro da raiz quadrada tem que ser maior ou igual a zero, isto é, $x^2-x-2 \geq 0$.

Fatorando, temos:

$$x^2-x-2=0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \iff x=2 \text{ ou } x=-1,$$

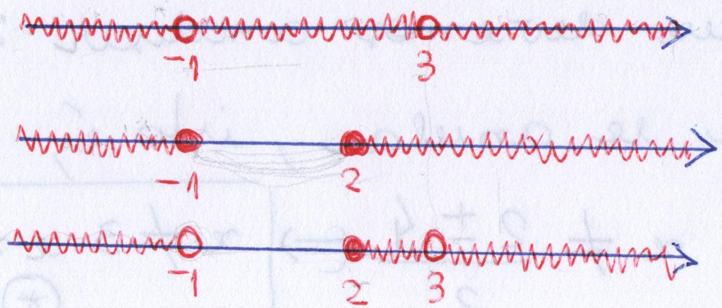
ou seja, $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$.

Estudemos o sinal de x^2-x-2:



Logo, $x^2-x-2 \geq 0 \iff \boxed{x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \quad (**)}$

Como ① e ② devem ocorrer, precisamos fazer a intersecção de (*) e (**):



(*) (solução de (1))

(**) (solução de (2))

$\mathcal{D}(m)$

Portanto, $\mathcal{D}(m) = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\} =$

$= (-\infty, -1) \cup [2, +\infty) \setminus \{3\} = (-\infty, -1) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty).$

Igualdade entre funções

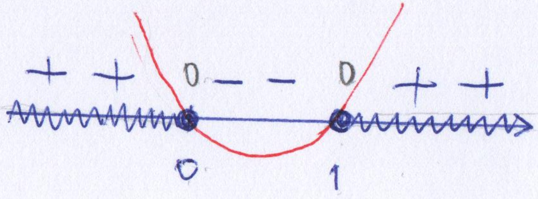
Definição: Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : A' \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

Dizemos que $f = g$ se os domínios de f e g forem iguais, isto é, $A = A'$, e se para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Exemplo: As funções $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{x \cdot (x-1)}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ não são iguais, pois $\mathcal{D}(f) = [1, +\infty)$ e $\mathcal{D}(g) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, ou seja $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$.

Calculo de $\mathcal{D}(g)$:

$\underset{\substack{\shortparallel \\ x(x-1)}}{x^2 - x} \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

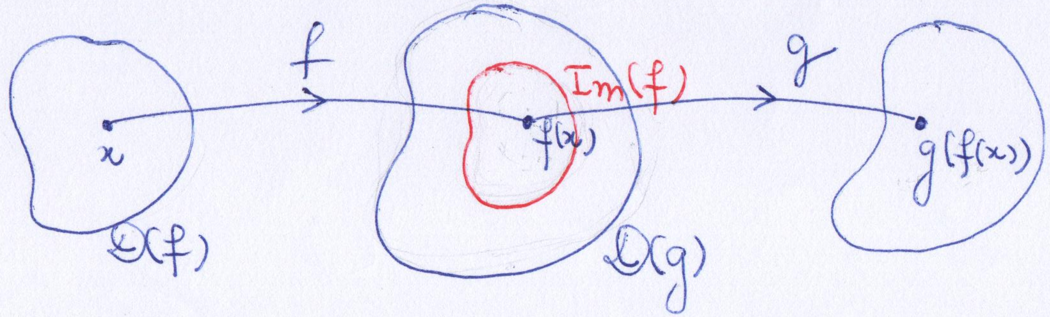


sinal de $x^2 - x$

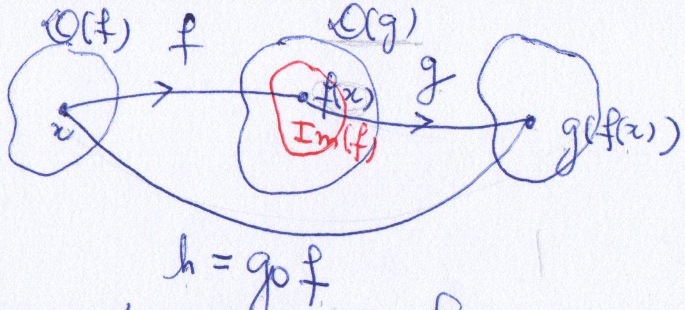
Composição de funções

A composição de funções é uma maneira peculiar de obter novas funções a partir de outras duas funções conhecidas.

Para isso, é necessário alguns cuidados. Suponhamos que f e g são duas funções dadas, tais que o domínio da g, $\mathcal{D}(g)$, contém a imagem da f. Assim, dado um pto $x \in \mathcal{D}(f)$, a imagem $f(x)$ pertence a $\mathcal{D}(g)$ e, portanto, podemos calcular a função g no pto $f(x)$, obtendo $g(f(x))$.



O resultado obtido, $g(f(x))$, é uma nova função $h(x)$, isto é, $h(x) = g(f(x))$ que será chamada de composição de g e f e denotada por $h = g o f$



$$h(x) = (g o f)(x) = g(f(x)) \, , \quad x \in D(f)$$

Obs: Note que $h = g o f$ tem o mesmo domínio que f.

Exemplos: ① Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^2 + 1$. Calcule as composições abaixo, caso possível ou justifique caso não seja possível.

ⓐ $f o g$; ⓑ $g o f$; ⓒ $f o h$.

Solução: Note que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$, $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$, $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = \mathbb{R}$, $D(h) = \mathbb{R}$, $Im(h) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty)$

ⓐ Para que $f \circ g$ esteja bem definida precisamos ter $Im(g) \subset D(f)$, pois $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Logo, $f \circ g$ não está bem definida, pois $Im(g) = \mathbb{R} \not\subset \underset{\mathbb{R}^+}{\overset{\|}{D(f)}}$.

ⓑ $g \circ f$ está bem definida, pois $Im(f) = \mathbb{R}^+ \subset D(g) = \mathbb{R}$, daí, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3 = x^{\frac{3}{2}} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^3}$.

ⓒ $f \circ h$ está bem definida, pois $Im(h) = [1, +\infty) \subset D(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Assim, $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \sqrt{h(x)} = \sqrt{x^2+1}$.

② Determine o maior conjunto A tal que $Im(f) \subset D(g)$, com $f: A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 3$ e $g(x) = \frac{2}{x+2}$, e em seguida construa a composta $g \circ f$.

<u>Solução</u>: Note que se $Im(f) \subset D(g)$, então é possível