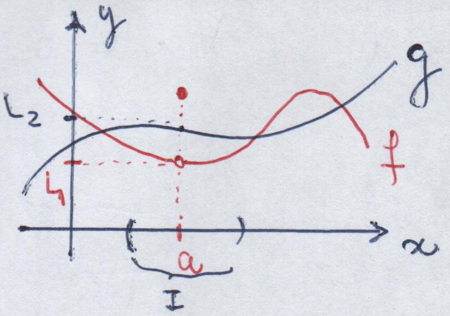
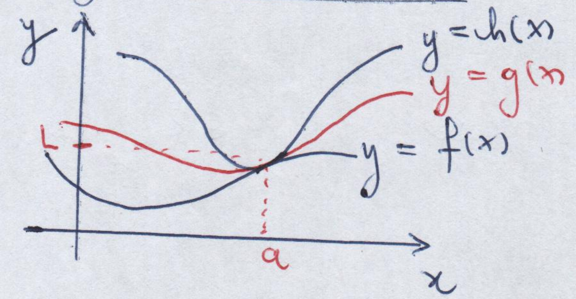


Note que numa viz de a $f(x) \le g(x)$ (exceto em $x = a$) e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \le L_2 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Teorema do Confronto (ou do Sanduíche)

Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ qdo x está próximo de a (exceto possivelmente em $x=a$) e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Geometricamente:



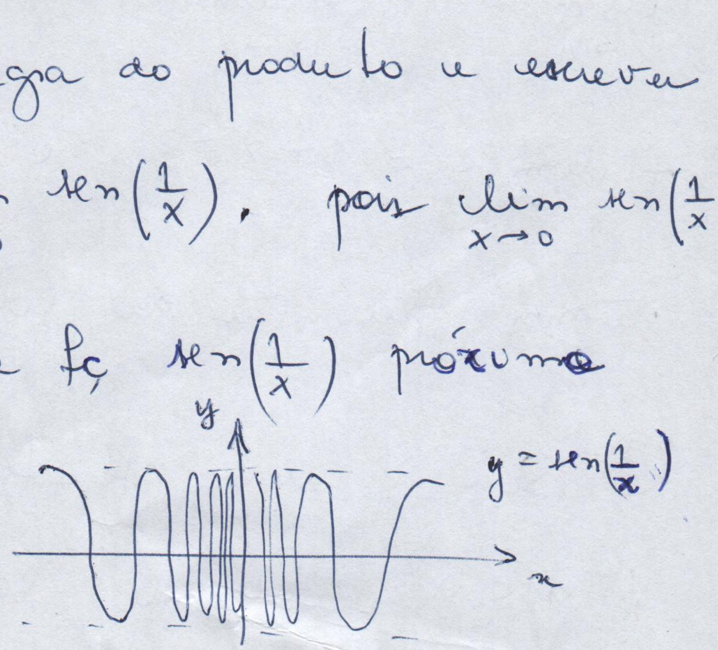
Os gráficos de f e h fazem um "sanduíche" com o gráfico de g e "obrigam" $g(x)$ a ir p/ o mesmo nº L qdo $x \to a$.

Exemplos: (1) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Não podemos usar a regra do produto e escrever

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),$$

pois $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe já que o gráfico da fç $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ próximo da origem fica oscilando.



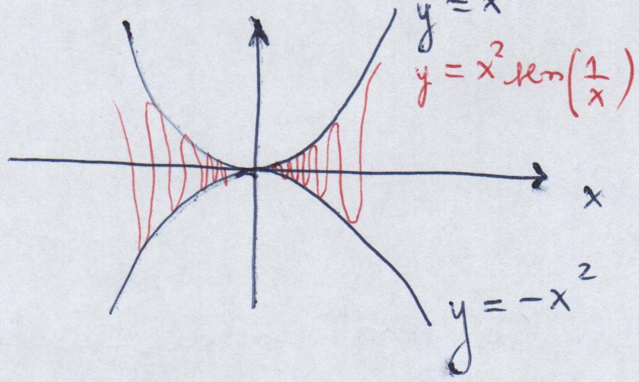
Agora, sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $\forall x \neq 0$.

Multiplicando por $x^2 > 0$, para $x \neq 0$, temos:

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad ; \quad x \neq 0.$$

Agora, $\lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

Portanto, pelo T.C., tem-se $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.



② Se $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leq x \leq 2$, encontre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Como o pto $x = 1$ está no intervalo $[0, 2]$,

$\lim\limits_{x \to 1} 3x = 3 \lim\limits_{x \to 1} x = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 2) = \lim\limits_{x \to 1} x^3 + \lim\limits_{x \to 1} 2 = 1 + 2 = 3$ e como $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$, temos pelo teo. do confronto que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

③ Seja f uma fç tq. para todo x, tem-se $|f(x)| \leq x^2$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Como $|f(x)| \leq x^2$ segue que $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

Agora, $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$.

Logo, pelo teorema do confronto, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Teorema: $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.

Exercício: Sejam f e g duas fçs com o mesmo domínio A e tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in A$, com $M > 0$ um nº real fixo.

Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$.

Ideia: $|f(x) g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)|, \forall x \in A$

Logo, $-M|f(x)| \leq f(x) g(x) \leq M|f(x)|$.

$\downarrow x \to a$ 0 $\qquad$ $\downarrow x \to a$ 0

Daí, pelo T.C. $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$

Sugestão: Use o teorema do confronto.

Obs: Se em um intervalo I do domínio de duas fçs f e g tem-se g ltda e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $a \in I \subset D_f$, então $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Limites infinitos e assíntotas verticais

Nosso objetivo agora é estudar o caso em que o gráfico da função "explode" para $+\infty$ ou $-\infty$ qdo x se aproxima de um determinado valor a, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Definição: Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a, então:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ significa que podemos fazer os valores f(x) ficarem arbitrariamente grandes tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Por exemplo, se $f(x) = \frac{1}{x^2}$, então qdo x está suf. próximo de zero, $f(x)$ fica suf. grande, ou seja $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Propriedades

(1) Suponha que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = 0$ e que existe um intervalo aberto $(p, p+\delta)$ tq. $f(x) > 0$ para todo $x \in (p, p+\delta)$, então $\lim\limits_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

② Suponha que f e g são funções tais que $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$, $L \neq 0$, $\lim_{x \to p^+} g(x) = 0$ e que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (p, p+\delta)$, então

$$\text{ou } \lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

③ Se $\lim_{x \to p^+} f(x) = 0$ e $f(x) < 0$ se $x \in (p, p+\delta)$, então $\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Obs: As propriedades anteriores podem ser enunciadas trocando "$x \to p^+$" por "$x \to p^-$" e trocando o intervalo $(p, p+\delta)$ por $(p-\delta, p)$.

Exemplo: Calcule

ⓐ $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$; ⓑ $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$. ⓒ $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

ⓓ $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x-1}{x}$.

ⓐ Denote por $f(x) = x-2$, então observe que qdo $x > 2$ $(x \to 2^+)$ temos $x-2 > 0$, ou seja, $f(x) > 0$.

Agora, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2) = 0$.

Portanto, pelo item ⓐ das propriedades acima tem-se $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

(b) Quando $x \to 3^+$, temos $x > 3$, e assim, $x-3>0$.

Além disso, $\lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0$.

Agora, $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x = 6$ e, portanto, qdo $x \to 3^+$

o numerador do quociente $\dfrac{2x}{x-3}$ tende para o nº $6>0$ e o denominador tende para zero positivamente $(x-3>0)$. Assim,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{2x}^{\to 6>0}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^+}} = +\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

Denote por $f(x) = x^3-1$ e $g(x) = x^2-2x+1$ e note que

$\begin{cases} f(1) = 1^3-1 = 0 \\ g(1) = 1^2 - 2.1 + 1 = 0 \end{cases}$, logo, $x=1$ é raiz de x^3-1 e de x^2-2x+1.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ x^2-1 & \\ -x^2+x & \\ x-1 & \\ -x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

$\therefore x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Fatorando esses polinômios, temos

$$\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2+x+1}{x-1},$$

daí,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} \cdot (x^2+x+1).$$

Note que $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ e que quando $x \to 1$ tem-se $x < 1$, isto é, $x-1<0$.

Logo, pela Prop. 3 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, então

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to -\infty} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\to 3} = -\infty \cdot 3 = -\infty.$$

ⓓ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \underbrace{(2x-1)}_{\to -1} = +\infty\,(-1) = -\infty.$$

Exercício: Calcule os limites

ⓐ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2-x}$; ⓑ $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

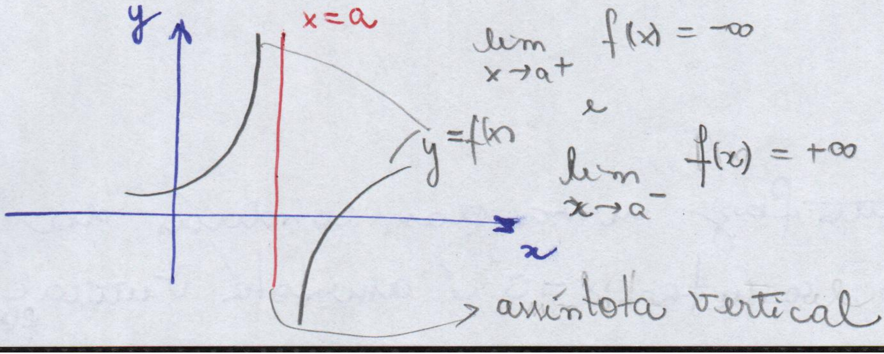
Assíntotas Verticais

Uma assíntota de uma fç f é uma curva (no nosso caso nos restringiremos à retas) da qual o gráfico de f se aproxima. Mais precisamente:

Definição: A reta vertical de eq. $x=a$, $a\in\mathbb{R}$ é chamada de assíntota vertical da curva $y=f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita

ⓐ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ⓑ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ⓒ $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$;

ⓓ $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$; ⓔ $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$. ⓕ $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.



$\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

e

$\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

Obs.: ① Se f possuir assíntota vertical, ela geralmente ocorrerá em pontos $x = a$ que não pertencem ao domínio de f, contudo f está definida em pontos suficientemente próximos de a.

② Geometricamente, se $x = a$ é uma assíntota vertical para f, então o gráfico de f fica cada vez mais próximo dessa reta quando x está próximo de a. (pela esquerda ou pela direita ou por ambos os lados).

Exemplos: ① Verifique se as funções $f(x) = \frac{2}{x-3}$ e $g(x) = tg(x)$ possuem assíntotas verticais.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Portanto, se f possuir uma assíntota vertical, ela será a reta $x = 3$.

Para isso, verifiquemos os limites de f no ponto 3.

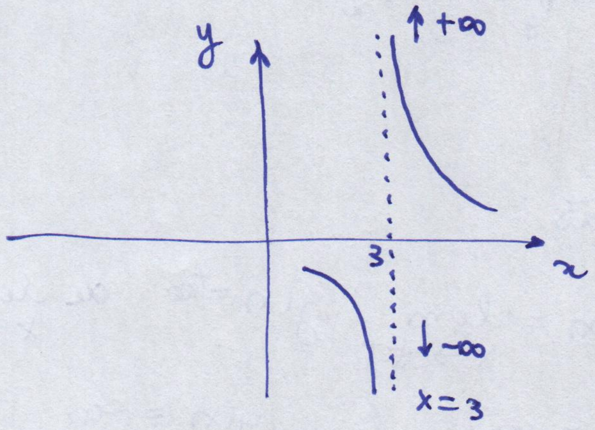
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$, pois $\lim_{x \to 3^+} 2 = 2 > 0$

e $\lim_{x \to 3^+} x-3 = 0$. ($x-3>0$ quando $x>3$, ou seja, $x-3 \to 0$ positivamente, quando $x \to 3^+$).

Portanto, f satisfaz uma das condições da definição anterior. Logo, a reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{2}{x-3}$.

Além disso, $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\overset{\to 2}{2}}{\underset{\to 0 \text{ negativamente}}{x-3}} = -\infty$.

Logo, em uma vizinhança de $x = 3$, o gráfico de f é da forma.



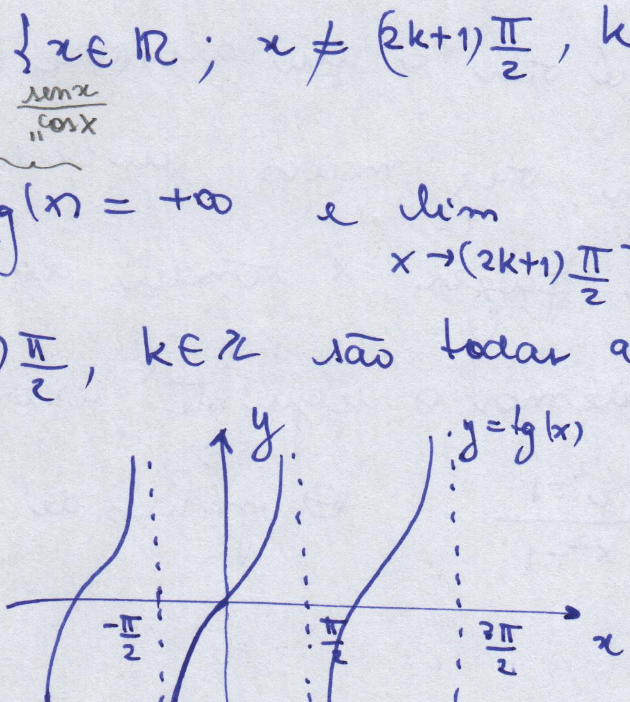
$g(x) = tg(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Os pts que não estão no domínio de g são os pts que anulam o cosseno.

Temos, $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = \pm \dfrac{1\pi}{2}, \pm \dfrac{3\pi}{2}, \pm \dfrac{5\pi}{2}$ (ímpar), ..., ou seja, $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

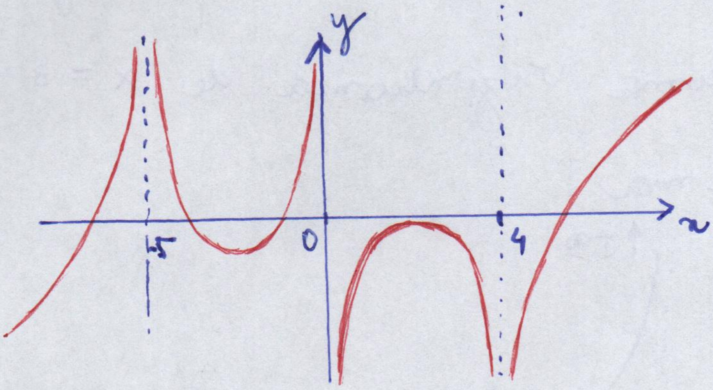
Assim, $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} ;\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Como $\lim\limits_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \overbrace{tg(x)}^{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \overbrace{tg(x)}^{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = -\infty$

as retas $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ são todas assíntotas verticais para a fç g.



(2) Para a função g cujo gráfico é dado, determine as equações das assíntotas verticais e explique porque é assíntota.



As assíntotas de $g(x)$ são:

(i) A reta $x=-5$, pois $\lim_{x \to -5^-} g(x) = \lim_{x \to -5^+} g(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to 5} g(x) = +\infty$.

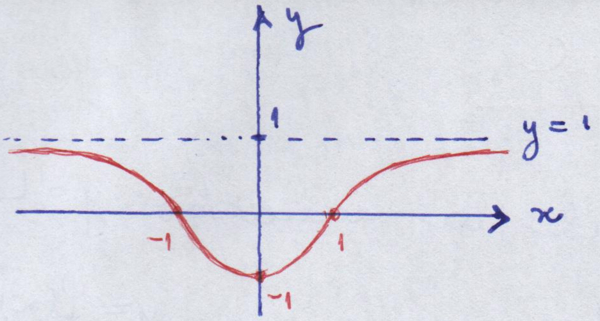
(ii) A reta $x=0$, pois $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$.

(iii) A reta $x=4$, pois $\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^+} g(x) = -\infty$.

Limites no Infinito e Assíntotas Horizontais

Nas seções anteriores, estudamos o limite de uma fç qdo x se aproximava de um nº real. Nosso objetivo agora é ver o que acontece com a função qdo x fica cada vez maior, ou cada vez menor, ou seja, iremos fazer x tender ao infinito. Para isso, analisemos o seguinte exemplo:

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. O gráfico de f é da forma:

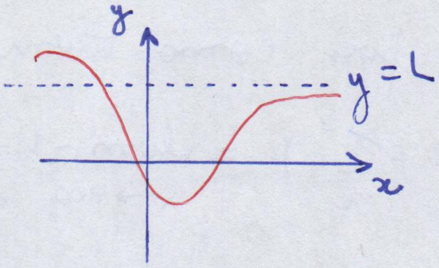


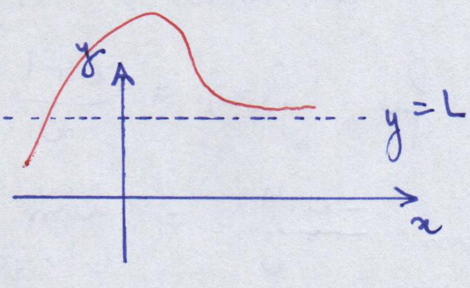
x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,6
± 4	0,8823...
± 6	0,9459...
± 10	0,9801...
± 100	0,9992...
± 1000	0,99998...

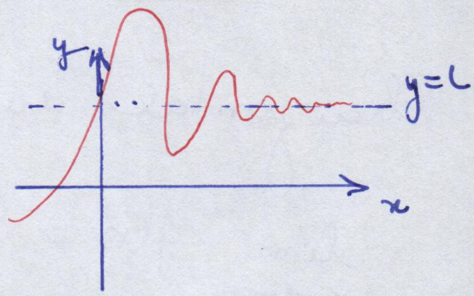
Note que qdo $x \to \pm\infty$, temos $f(x) \to 1$.

Ou seja, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$.

Definição: Seja f uma fç definida em um intervalo $(a, +\infty)$ $((-\infty, b))$. Então $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando-se x suficientemente grande (pequeno).

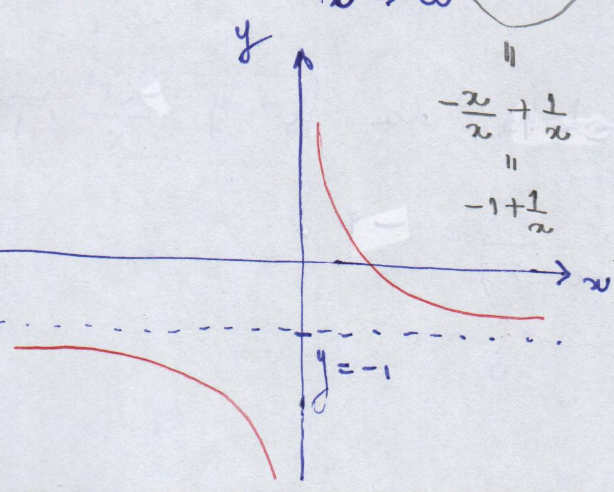






Exemplo: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = -1.$

$$\frac{-x+1}{x} = -\frac{x}{x} + \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{x}$$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = -1$