Disciplina: Lógica Matemática

Aula 01: Introdução e Cálculo Proposicional

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Introdução

O que é Lógica?

É parte da ciência que trata das formas de pensamento em geral (dedução, indução, hipótese, inferências, etc...) e das operações intelectuais que visam a classificação ou a determinação do que é verdadeiro ou falso.

O que é Lógica Matemática?

É uma sub-área da Matemática que explora as aplicações da lógica formal na matemática, que estuda os tipos de tipos de relações que possam existir entre as premissas e a conclusão.

• Na lógica Matemática usa-se simbolismo criando uma linguagem própria, de modo que os argumentos sejam analisados sem a intervenção do "conteúdo", buscando se uma sentença (declaração ou afirmação) é verdadeira ou falsa.

Exemplos de sentenças declarativas:

1) Está chovendo.
2) Santos Dumont é inglês.
3) Você é médico ou é enfermeiro.
4) Maria é magra e Carla é alta.
5) $25 > 13$.
6) Se eu ler esta notícia, eu vou ficar triste.

Exemplos de sentenças não declarativas:

7) Bom dia! 8) Que horas são? 9) Volte aqui!

Introdução

- A lógica é o estudo dos argumentos (premissas e conclusão), é o estudo de métodos e princípios que permitam distinguir argumentos corretos e incorretos.
- Podemos dizer que um argumento é válido (legítimo) quando a conclusão é consequência das premissas. E o argumento é inválido (ilegítimo) caso contrário.

Exemplo de argumento válido

premissa: Todos os animais são mortais.
premissa: O gato é um animal.
conclusão: O gato é mortal.
`(a conclusão é consequência das premissas)`

Exemplo de argumento inválido

premissa: Todos os homens são mortais.
premissa: Alguns animais são mortais.
conclusão: Todos os animais são mortais.
`(a conclusão não é consequência das premissas)`

Introdução

- O que a lógica procura é estudar os tipos de relações que possam existir entre as premissas e a conlusão, ou seja, responder:

a) Supondo verdadeira as premisssas, a conclusão é verdadeira?
b) As premisssas constituem evidências para a conclusão?

- Proposição:

Uma proposição é uma oração declarativa (uma afirmação) que pode ser classificada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambas.

- Valor lógico:

Uma proposição é uma afirmação que pode assumir o valor lógico (valor verdade) verdadeiro (V) ou falso (F).

- Para atribuirmos o valor lógico a uma proposição, adotamos os seguintes Princípios do Cálculo Proposicional.
  - Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
  - Princípio do terceiro excluído: toda proposição é verdadeira ou falsa, isto é, não há outra possibilidade.

Cálculo Proposicional

- Proposição simples ou composta:

Uma proposição é uma proposição simples ou atômica se ela não contém outra proposição como parte integrante de si mesma. Caso contrário é dita proposição composta ou molecular, isto é, quando é formada por duas ou mais proposições.

Exemplos de proposição simples

- Todos os homens são mortais.
- O papa é brasileiro.
- Não vou sair de casa.

Exemplos de proposição composta

- Paula é brasileira e Sandro é professor.
- Paula é paulista ou Mario é carioca.
- Ou José vai a São Paulo ou Maria vai a Campinas.
- Se chover, então eu não irei ao jardim.
- Comprarei um carro se, e somente se conseguir um emprego.

- Conectivos lógicos:

Note que as proposições compostas fazem uso de conectivos lógicos:

conectivo	**símbolo**	**significado**
e	$\wedge$	conjunção
ou	$\vee$	disjunção (inclusiva)
ou ... ou	$\underline{\vee}$	disjunção exclusiva
se ... então	$\rightarrow$	condicional
se, e somente se	$\leftrightarrow$	bicondicional
não	$\sim$	negação

Cuidado, não confunda os símbolos:

$\rightarrow$ (da condicional) com $\Rightarrow$ (da implicação lógica, que será visto mais tarde)

$\leftrightarrow$ (da bicondicional) com $\Leftrightarrow$ (da equivalência lógica, que será visto mais tarde).

Tabela verdade:

A tabela verdade de uma proposição composta é uma tabela que apresenta o valor lógico de uma proposição para todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições simples que a compõe. Se a proposição composta tem n proposições simples, então a tabela verdade tem 2^n linhas.

1) Conjunção, símbolo $\wedge$ (conectivo e)

Exemplo da proposição composta com conectivo e:

Maria é médica e José é dentista.

Nesta proposição composta há duas proposições simples:

p: "Maria é médica"
q: "José é dentista"

Representamos a proposição composta apenas por

$$p \wedge q$$

Regra para atribuição do valor lógico da proposição conjuntiva: Uma conjunção só é verdadeira, se ambas as proposições componentes foram verdadeiras.

Desta regra podemos construir a tabela verdade da conjunção $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ex: Um pai promete ao para o filho:

"Te darei uma bola **e** te darei uma bicicleta."

Obs: A promessa só será cumprida (verdadeira) se o filho ganhar os 2 presentes, caso contrário a promessa é falsa.

Obs. Para construir a tabela verdade de uma proposição composta com n proposições simples coloque 2^n linhas e preencha a primeira coluna com metade V e metade F. Nas colunas seguintes onde a coluna anterior tem V preencha com metade V e metade F e onde a coluna anterior tem F também preencha com metade V e metade F. Veja, por exemplo a tabela verdade da conjunção $p \wedge q \wedge r$:

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

2) Disjunção, símbolo $\vee$ (conectivo ou)

Exemplo da proposição composta com conectivo ou:

Maria é médica ou José é dentista.

Nesta proposição também há duas proposições simples:

p: “Maria é médica”
q: “José é dentista”

Assim podemos representar a proposição composta apenas por

$$p \vee q$$

Regra para atribuição do valor lógico da proposição disjuntiva: Uma disjunção só é falsa, se ambas as proposições componentes foram falsas.

No exemplo, a proposição “Maria é médica ou José é dentista” só será falsa se Maria não for médica e José não for dentista. Nos outros casos é verdadeira.

Da regra podemos construir a tabela verdade da disjunção $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex: O pai promete: “Te darei uma bola **ou** te darei uma bicicleta.”
Obs: Neste caso, basta o filho ganhar um presente que a promessa está cumprida (verdadeira).

Exercício:

Construa a tabela verdade para a proposição $p \vee q \vee r$.

Observem as tabelas verdade das proposições:

a) $(p \wedge q) \vee r$ (exemplo: Eu vou a SP e ao RJ, ou vou a MG.)

b) $p \wedge (q \vee r)$ (exemplo: Eu vou a SP e, vou ao RJ ou vou a MG.)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

O que podemos concluir?

3) Disjunção exclusiva, símbolo $\veebar$ (conectivo ou ... ou)

Proposição composta com conectivo ou ... ou:

Ou Maria é médica ou José é dentista.

Nesta proposição também há duas proposições simples:

p: "Maria é médica"
q: "José é dentista"

Assim, representamos a proposição composta apenas por

$$p \veebar q$$

Regra para atribuição do valor lógico da proposição disjuntiva exclusiva: Uma disjunção exclusiva só é verdadeira, se uma proposição for verdadeira e a outra for falsa.

No exemplo, a proposição “Ou Maria é médica ou José é dentista” só será verdadeira se Maria for médica e José não for dentista, ou ainda se Maria não for médica e José for dentista.

Da regra podemos construir a tabela verdade da disjunção exclusiva $p \underline{\vee} q$:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex: O pai promete: “**Ou** te darei uma bola **ou** te darei uma bicicleta.”
Obs: Se o filho ganhar 0 presente ou 2 presentes a promessa não está cumprida (falsa). A promessa só é cumprida se ele ganhar um único presente.

Exercícios:

1)

a) Construa a tabela verdade para a proposição $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$. Faça primeiro o que está entre parênteses.

b) Construa a tabela verdade para a proposição $(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$.

c) A última coluna das duas tabelas verdade são iguais?

4) Condicional, símbolo $\rightarrow$ (conectivo se ... então)

Exemplo da proposição composta com conectivo se ... então:

Se Maria é médica então José é dentista.

Nesta proposição também há duas proposições simples:

p: “Maria é médica”
q: “José é dentista”

Representamos a proposição composta apenas por

$$p \rightarrow q$$

Regra para atribuição do valor lógico da proposição condicional: Uma condicional só é falsa, se a primeira parte for verdadeira e a segunda parte for falsa.

Conectivos Lógicos

No exemplo, a proposição condicional “Se Maria é médica então José é dentista” só será falsa se Maria for médica e José não for dentista.
Se Maria for médica e José for dentista claramente, a condicional é verdadeira. Se Maria não for médica, independente da profissão de José a condicional é verdadeira.

Da regra podemos construir a tabela verdade da condicional $p \to q$:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ex: O pai promete: “Se te darei uma bola, então te darei uma bicicleta.”
Obs: A promessa **só não** será cumprida se o filho ganhar a bola e não ganhar a bicicleta. Se ele não ganhar a bola, não importa o que acontecer sobre a bicicleta, a promessa foi cumprida.

Conectivos Lógicos

Exercício:

a) Construa a tabela verdade para a proposição $p \to (q \to r)$.
b) Construa a tabela verdade para a proposição $(p \to q) \to r$.
c) A última coluna das duas tabelas verdade são iguais?

Outras maneiras de ler $p \to q$:

p é condição suficiente para q

q é condição necessária de p

p somente se q

q sempre que p

Exemplos: Se nasce em São Paulo então é paulista.

p: “nasce em São Paulo” q: “é paulista”

Nascer em São Paulo é condição suficiente para ser paulista.
Ser paulista é condição necessária de nascer em São Paulo.
Nasce em São Paulo semente se é paulista.
É paulista sempre que nasce em São Paulo.

5) Bicondicional, símbolo $\leftrightarrow$ (conectivo se, e somente se)

Exemplo da proposição composta com conectivo se, e somente se:

Maria é médica se, e somente se José é dentista.

Nesta proposição também há duas proposições simples:

p: "Maria é médica"
q: "José é dentista"

Representamos a proposição composta apenas por

$$p \leftrightarrow q$$

Regra para atribuição do valor lógico da proposição bicondicional: Uma bicondicional é verdadeira, se ambas as componentes forem verdadeiras ou se ambas forem falsas.

No exemplo, a proposição bicondicional “Maria é médica se, e somente se José é dentista” é verdadeira se Maria for médica e José for dentista, ou se Maria não for médica e José não for dentista. Caso contrário é falsa.

Da regra podemos construir a tabela verdade da bicondicional $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Outra maneiras de le $p \leftrightarrow q$:
p é condição necessária e suficiente para q

6) Negação, símbolo $\sim$ (conectivo não)

Exemplo da proposição composta com conectivo não:

Não é verdade que Maria é médica.

Nesta proposição há uma proposição simples:

p: "Maria é médica"

Representamos a negação da proposição p apenas por

$$\sim p$$

Regra para atribuição do valor lógico da negação: Uma negação recebe o valor lógico contrário.

Da regra podemos construir a tabela verdade da negação $\sim p$:

p	$\sim p$
V	F
F	V

No exemplo

$$p: \text{ Maria é médica,}$$

a negação $\sim p$ em linguagem escrita pode ser dada por

Maria não é médica.
Não é verdade que Maria é médica.
É falso que Maria é médica.

Equivalência entres proposições

Dizemos que duas proposições P e Q são equivalentes se a última coluna das suas respectivas tabelas verdade forem iguais.

Ou ainda, se P e Q assumem valores lógicos iguais, para os mesmos valores lógicos atribuídos às proposições simples envolvidas.

Se a proposição P é equivalente à proposição Q, podemos escrever

$$P \equiv Q \qquad \text{ou ainda} \qquad P \Leftrightarrow Q.$$

Exemplo: A negação de p e q é equivalente à negação de p ou negação de q: $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$.
Veja que as últimas colunas das tabelas verdades são iguais:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Assim, a negação da proposição conjuntiva

"Maria é médica e José é dentista" $p \wedge q$,

pode ser dada por

"Não é verdade que Maria é médica e José é dentista" $\sim (p \wedge q)$.

"Maria não é médica ou José não é dentista" $(\sim p) \vee (\sim q)$.

Exercício:

Verifique que para a negação da disjuntiva temos a equivalência

$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

Assim, a negação da proposição disjuntiva

"Maria é médica ou José é dentista",

pode ser dada por

"Não é verdade que Maria é médica ou José é dentista".

"Maria não é médica e José não é dentista".

Exercícios

Vimos que

a) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$ b) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

Exercícios: Verifique as seguintes equivalências:

1. $p \to q \equiv (\sim p) \vee q$
2. $\sim (p \to q) \equiv p \wedge (\sim q)$
3. $p \to q \equiv (\sim q) \to (\sim p)$
4. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
5. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
6. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$
7. Verifique que $p \to q$ não é equivalente a $(\sim p) \to (\sim q)$
8. Verifique que $p \leftrightarrow q \not\equiv (\sim q) \to (\sim p)$
9. Verifique que $(p \to q) \to r \not\equiv p \to (q \to r)$
10. "Não é verdade que se chover, então eu levo chapéu"
    é equivalente a
    "Chove e não levo chapéu".

Exercícios:

11. Escreva a seguinte proposição usando símbolos lógicos:

"Você não tem o e-mail unesp.br se você não for estudante da Unesp, a menos que você trabalhe na Unesp."

Dica: Primeiro identifique as proposições simples, por exemplo,
p: tem e-mail unesp.br
q: estuda na Unesp
r: trabalha na Unesp

Agora monte a proposição simbolicamente. Observe que há várias maneiras equivalentes de se montar esta proposição simbolicamente.