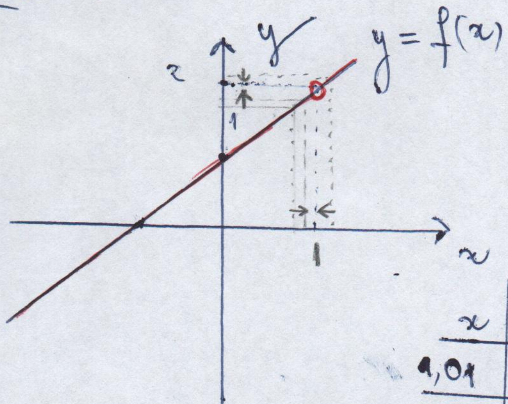
Exemplo: Encontre o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Note que o pto $x = 1$ não está no domínio de f.

Agora observe que $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$.

Portanto, o gráfico de f é a reta $y = x+1$, exceto qdo $x = 1$.



Podemos concluir que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999
1,001	2,001	0,9999	1,9999
	$\downarrow$ 2		$\downarrow$ 2

Definição formal de limite

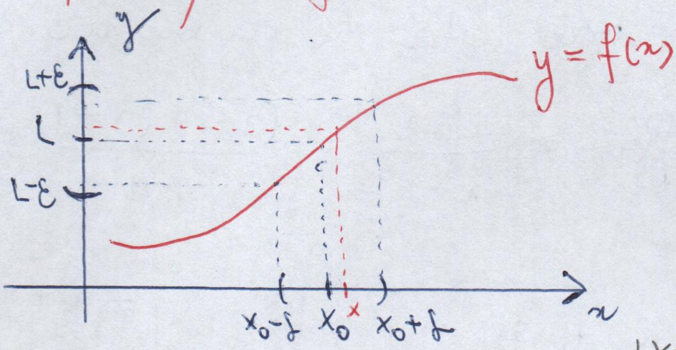
Definição: Seja $f(x)$ uma fç definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que $f(x)$ tem limite L qdo x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para cada nº $\varepsilon > 0$, existir um nº correspondente $\delta > 0$ tq, para todos os valores de x, com $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se $|f(x) - L| < \varepsilon$.

ou ainda, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tq. $0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. (*)

Interpretação geométrica:



$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \overset{x \neq x_0}{\Longrightarrow} \boxed{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \ x \neq x_0} \quad (\mathrm{I})$$

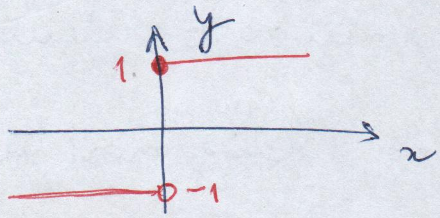
$$|f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Rightarrow \boxed{L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon} \quad (\mathrm{II})$$

(*) significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tq para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, com $x \neq x_0$, sua imagem $f(x)$ pertence ao intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Vejamos à seguir algumas situações em que o limite da fç f não existe, em um determinado pto.

1. Função do tipo salto:

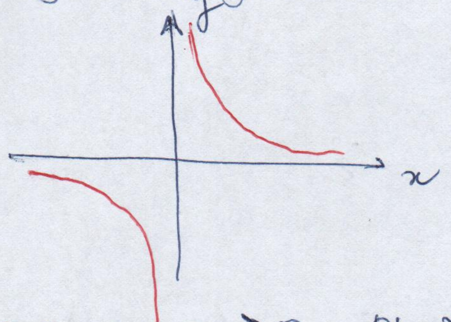
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Note que qdo nos aproximamos de $a = 0$ com valores de $x < 0$ a fç $f(x)$ é sempre igual a -1 e qdo nos aproximamos de $a = 0$ com valores de $x > 0$, $f(x)$ é sempre igual a 1. Portanto, não há um único valor L no qual $f(x)$ se aproxima qdo $x \to 0$.

② Função cuja imagem tende p/ o infinito.

$g(x) = \dfrac{1}{x}$

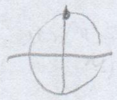


Quando $x \to 0$ e $x > 0$, os valores de $f(x)$ tendem para $+\infty$ e qdo $x \to 0$ e $x < 0$, $f(x)$ tende p/ $-\infty$.

Neste caso, $f(x)$ não se aproxima de um nº real qdo $x \to 0$.

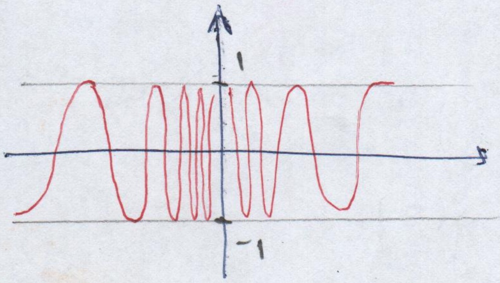
③ Função cujo gráfico oscila infinitas vezes próximo de um pto.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1 \iff \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi + 4k\pi}{2} = \frac{\pi(4k+1)}{2}$$



$$\iff \boxed{x = \frac{2}{4k+1},\ k \in \mathbb{Z}}$$

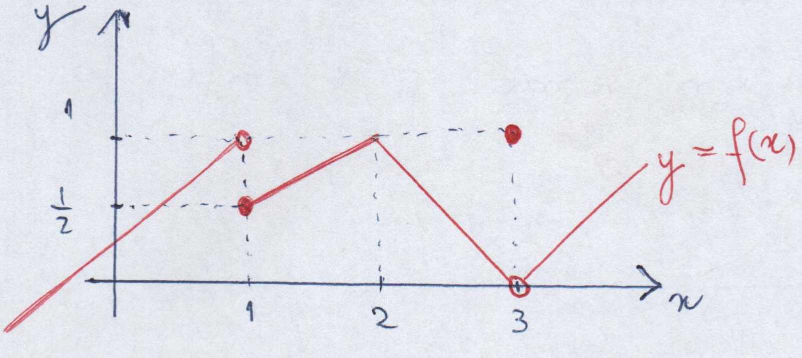
$h(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.



Quando $x \to 0$, o gráfico de h oscila infinitas vezes, logo h não se aproxima de nenhum pto.

Exemplo: Para a fç $g(x)$ cujo gráfico é ilustrado abaixo, encontre os seguintes limites, caso existam, ou explique pq eles não existem.

a) $\lim_{x \to 1} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2} g(x)$ c) $\lim_{x \to 3} g(x)$



ⓐ O $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois qdo nos aproximamos de 1 com valores $x < 1$ temos $g(x) \longrightarrow 1$, já qdo nos aproximamos de 1 com valores de $x > 1$, temos $g(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$.

ⓑ Claramente vemos que $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$, pois qdo nos aproximamos de 2 (tanto p/ $x > 2$ ou $x < 2$) temos $g(x) \longrightarrow 1$.

ⓒ Analogamente, temos $\lim_{x \to 3} g(x) = 0$. Note que $g(3) = 1$, logo $\lim_{x \to 3} g(x) \neq g(3)$.

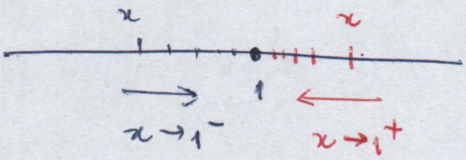
Limites Laterais

Quando calculamos $\lim_{x \to a} f(x)$ sempre olhamos para os valores de x à direita de a $(x > a)$ e à esquerda de a $(x < a)$. Por exemplo, no item ⓐ anterior $g(x)$ tende a $\frac{1}{2}$ qdo x tende a 1 pela direita e $g(x)$ tende a 1 qdo x tende a 1 pela esquerda.

Simbolizamos essa situação da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1.$$

O símbolo "$x \to 1^+$" significa que estamos nos aproximando de 1 com valores de x à direita de 1, ou seja, com valores maiores do que 1. Da mesma forma, "$x \to 1^-$" indica que estamos considerando valores de $x < 1$.



Comparando a definição de limite em um pto e limite lateral, temos o seguinte resultado:

Teorema: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

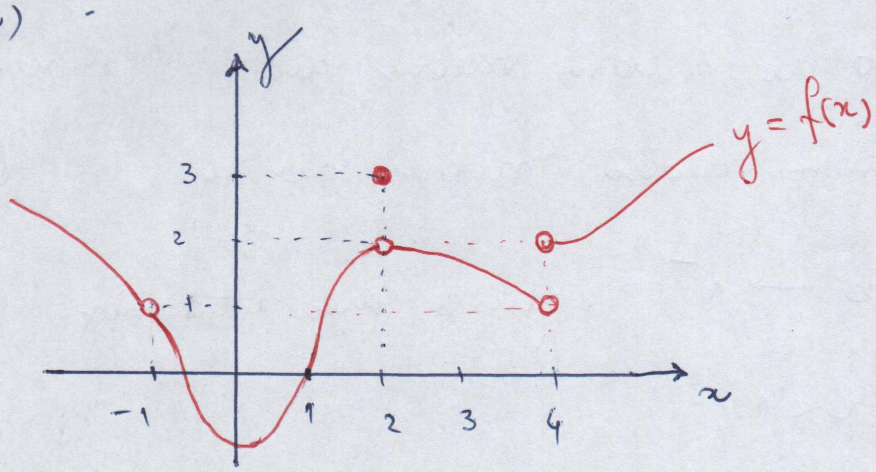
Em outras palavras, o limite de uma fç em um pto existe $\Leftrightarrow$ os limites laterais existem e são iguais.

Exemplos: Determine, caso exista, o valor do limite à partir do gráfico dado e justifique caso o limite exista.

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; (b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

(d) $\lim_{x\to -1} f(x)$; (e) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$; (f) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$;

(g) $\lim_{x\to 4} f(x)$.



(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$; (b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

(c) Pelo teorema ant., como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$,

segue que $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

(d) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 1 \xRightarrow{\text{teo}} \lim_{x\to -1} f(x) = 1$.

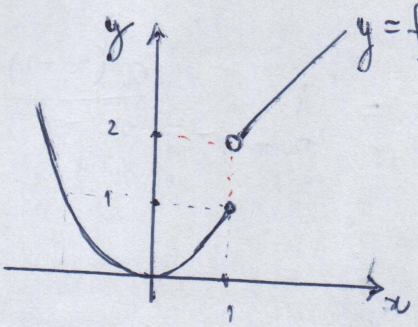
(e) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$; (f) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$.

(g) Como $\lim_{x\to 4^+} f(x) \neq \lim_{x\to 4^-} f(x)$, segue do teorema

ant. que $\lim_{x\to 4} f(x)$ não existe.

(2) Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$



Note que:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2$$

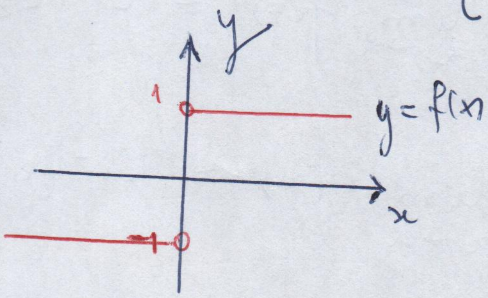
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1.$$

③ Verifique se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ existe.

Sabemos que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, daí como

$0 \notin D_f$, temos:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$



Logo, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Pelo teorema ant., temos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

não existe

④ Calcule o limite, caso exista, ou justifique caso não exista:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, em que $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$

Para calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ vamos calcular os limites laterais, pois em $x = 1$ a $f_ç$ muda de expressão.

$\underline{x > 1}$ $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1.$

$\underline{x < 1}$ $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} =$

$\displaystyle= \lim_{x \to 1^-} 2 = 2.$

Como os limites laterais são distintos, pelo teorema 3.1, segue que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ não existe.

Propriedades: Seja $c \in \mathbb{R}$ e suponha que $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Então:

1. $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

2. $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2.$

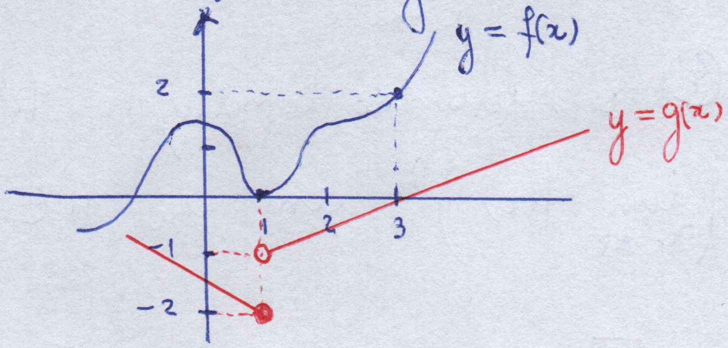
3. $\displaystyle\lim_{x \to a} (c f(x)) = c \lim_{x \to a} f(x) = c L_1.$

4. $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2.$

5. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Obs: As propriedades continuam válidas se substituirmos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" (ou por "$x \to a^-$").

Exemplo: Suponha que os gráficos de f e g são dados por:



Calcule: ⓐ $\lim_{x \to 1} f(x)\,g(x)$, ⓑ $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{3\,f(x) - g(x)}$.

ⓐ Note que $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$. Porém, não existe $\lim_{x \to 1} g(x)$, pois $\lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$ e $\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2$.

Logo, não é possível usar a Propriedade ④, já que $\nexists \lim_{x \to 1} g(x)$. Porém, podemos utilizá-la para os limites laterais.

Observe que $\lim_{x \to 1^+} f(x)\,g(x) \overset{④}{=} \lim_{x \to 1^+} f(x) \cdot \lim_{x \to 1^+} g(x) =$

$= 0 \cdot (-1) = 0$ e

$\lim_{x \to 1^-} f(x)\,g(x) \overset{④}{=} \lim_{x \to 1^-} f(x) \cdot \lim_{x \to 1^-} g(x) = 0 \cdot (-2) = 0.$

Como os limites laterais existem e são iguais a zero, então $\lim_{x \to 1} f(x)\,g(x) = 0$.

ⓑ Como $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 3} g(x) = 0$, tem-se

$\lim_{x \to 3} \left(3f(x) - g(x) \right) = 3 \lim_{x \to 3} f(x) - \lim_{x \to 3} g(x) = 3 \cdot 2 - 0 =$

$= 6 \neq 0$. Logo, $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{3f(x) - g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to 3} f(x)}{\lim_{x \to 3} \left(3f(x) - g(x) \right)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Obs: Note que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, então pela Propriedade ④ e, usando indução finita, temos $\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$, em que $n \in \mathbb{N}$.

Limites de algumas funções

Para algumas fç especiais, temos:

(i) $\lim_{x\to a} c = c$ (Aqui, $f(x) = c$, isto é, f é uma fç constante)

(ii) $\lim_{x\to a} x = a$.

(iii) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$.

(iv) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, para $n \in \mathbb{N}$ e se n for par devemos supor que $a > 0$.

(v) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, para $n \in \mathbb{N}$ e se n é par então devemos supor que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.

Exemplo: Calcule o limite: $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^3+x-1}}{x^2-2x}$.

Primeiramente, verifiquemos se o limite do denom. é $\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3} (x^2-2x) \underset{\text{prop ③}}{\overset{\text{prop ②}}{=}} \lim_{x\to 3} x^2 - 2\lim_{x\to 3} x \underset{\text{(ii)}}{\overset{\text{(iii)}}{=}} 3^2 - 2.3 = 9-6 = 3 \neq 0.$$

Agora, verifiquemos se o limite do termo dentro da raiz é positivo:

$$\lim_{x\to 3} (x^3+x-1) \underset{③}{\overset{②}{=}} \lim_{x\to 3} x^3 + \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 1 \underset{\text{(iii)}}{\overset{\text{(i),(ii)}}{=}} 3^3 + 3 - 1 = 27+2 = 29 > 0.$$

Logo, $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^3+x-1}}{x^2-2x} = \dfrac{\lim_{x\to 3} \sqrt{x^3+x-1}}{\lim_{x\to 3}(x^2-2x)} = \dfrac{\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^3+x-1)}}{\lim_{x\to 3}(x^2-2x)} =$

$= \dfrac{\sqrt{29}}{3}$.

Obs: Note que no ex. anterior $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^3+x-1}}{x^2-2x} = \dfrac{\sqrt{29}}{3} = f(3)$, em que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+x-1}}{x^2-2x}$.

Isso só ocorreu, pois f satisfaz uma propriedade que veremos mais adiante (f é contínua no pto 3).

Em geral isso não ocorre. Por exemplo, considere a f; $g(t) = \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}$, Quando calcularmos o seu limite qdo $t\to 0$, não é possível fazermos a substituição direta, isto é, $\lim_{t\to 0} g(t) \neq g(0)$, pois $0 \notin D_g$ (e está é uma das cond. p/ que valha a cont. de g em 0).

Pergunta: É possível calcular $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}$?

Resp: Sim. Para isso é preciso efetuar primeiramente alguma "operação" em $g(t) = \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}$ a fim de eliminar o termo "t" que aparece no denominador e que tende a zero qdo $t\to 0$.

Multiplicando e dividindo $g(t)$ pelo conj. do numerador, i.e., por $\sqrt{t+1}+1$, tem-se

$$g(t) = \frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \frac{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}{t(\sqrt{t+1}+1)} = \frac{\cancel{t}\cancel{+1}\cancel{-1}}{\cancel{t}(\sqrt{t+1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}.$$

Logo, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t+1}+1} = \frac{\lim\limits_{t\to 0} 1}{\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1)} =$

$$= \frac{1}{2}.$$

Propriedade da Substituição Direta: Se f for uma fç polinomial, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, em que $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e se $a \in D_f$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exercício: Calcule $\lim\limits_{x\to 2} (5x^4 - 2x^2 + x - 3)$.

Vejamos agora, dois resultados sobre limites:

Teorema: Se $f(x) \leq g(x)$ qdo x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g existem qdo x tende p/ a, então

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$