Disciplina: Lógica Matemática

Aula 10: Identidades da Combinação e Triângulo de Pascal

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Identidades da Combinação

Propriedade 1: Dado n inteiro não negativo, para todo inteiro não negativo k e $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

De fato:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Desta forma, observa-se que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$$

Propriedade 2: Dado n inteiro não negativo, para todo inteiro não negativo k e $k < n$,

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Obs: Não vale para $k = 0$ e para $k = n$.

De fato:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!(n-1-k)!\,(n-k)} + \frac{(n-1)!\,k}{(k-1)!(n-k)!\,k}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,[(n-k)+k]}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal: A Propriedade 2 nos leva a um algoritmo gráfico, chamado Triângulo de Pascal,
que para um valor inteiro não negativo l, determina todos os valores da combinações $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, para $n = 0, 1, 2, ..., l$ e $0 \leq k \leq n$, da forma (exemplo com $l = 5$):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Triângulo de Pascal

Os valores das combinações no Triângulo de Pascal acima, produz

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Observações:

1) Observe a simetria dos valores nas linhas do Triângulo de Pascal, que é consequência da Propriedade 1.

2) Qualquer elemento no meio de uma linha (a partir da segunda linha) do Triângulo de Pascal é soma dos 2 elementos adjacentes da linha anterior, pois pela Propriedade 2,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\tbinom{2}{1} &= \tbinom{1}{0} + \tbinom{1}{1}, \\
\tbinom{3}{1} &= \tbinom{2}{0} + \tbinom{2}{1}, \\
\tbinom{3}{2} &= \tbinom{2}{1} + \tbinom{2}{2}, \\
\tbinom{4}{1} &= \tbinom{3}{0} + \tbinom{3}{1}, \\
\tbinom{4}{2} &= \tbinom{3}{1} + \tbinom{3}{2}, \\
\tbinom{4}{3} &= \tbinom{3}{2} + \tbinom{3}{3}.
\end{aligned}$$

Facilmente podemos determinar as próximas linhas do Triângulo de Pascal, e obtemos, por exemplo

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

3) Observe que soma dos elementos de cada linha do Triângulo de Pascal é

linha 1) $1 = 1 = 2^0$.

linha 2) $1+1 = 2 = 2^1$.

linha 3) $1+2+1 = 4 = 2^2$.

linha 4) $1+3+3+1 = 8 = 2^3$.

linha 5) $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.

linha 6) $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

linha 7) $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$.

Esta observação nos leva à seguinte propriedade.

Propriedade 3: Dado n inteiro não negativo,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Propriedade 3: Dado n inteiro não negativo,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

De fato: Pelo princípio de indução matemática

i) Para $n = 0$ a propriedade vale, pois

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

ii) Suponhamos que a propriedade vale para $n - 1$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

iii) Vamos mostrar para n:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= \binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}+\binom{n}{n} \\
&\stackrel{Prop.2}{=} 1+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]+1 \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}+1 \\
&= \binom{n-1}{0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{n-1}
\end{aligned}
$$

Triângulo de Pascal

até aqui temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-1}.$$

No segundo somatório vamos tomar $k = s+1$, ou seja, $s = k-1$. Logo, $k = 1 \Rightarrow s = 0$ e $k = n-1 \Rightarrow s = n-2$ e temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &\overset{s=k-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} + \sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-1}{s} + \binom{n-1}{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} + \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s} \\
&\overset{hip.\ ind.\ ii)}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} \\
&= (2)2^{n-1} \\
&= 2^{n}
\end{aligned}$$

1) Dado $n \geq 0$ e $0 \leq k < n$. Mostre que

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}.$$

Resposta: Vamos desenvolver cada combinação, veja

$$\begin{aligned}
(n-k)\binom{n}{k} &= \frac{(n-k)\,n!}{k!\,(n-k)!} &= \frac{(n-k)\,n!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} \\
(k+1)\binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} &= \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)\,k!\,(n-k-1)!} &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} \\
n\binom{n-1}{k} &= \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}.
\end{aligned}$$

Logo, as três expressões são iguais.

2) Mostre que

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

3) Mostre que

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}.$$

Resposta do 3):

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{j!\,(n-k-j)!} = \frac{n!}{k!j!\,(n-k-j)!}\,\frac{(n-j)!}{(n-j)!} =$$

$$= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{(n-j)!}{k!\,(n-k-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}.$$

4) Mostre que

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k+j}\binom{k+j}{k}.$$

Exercícios

Lembre-se que

$$A_{n,k} = k!C_{n,k} = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

5) Mostre que

$$\binom{n}{k}A_{n-k,j} = \binom{n-j}{k}A_{n,j}.$$

Resposta do 5):

$$\binom{n}{k}A_{n-k,j} = \binom{n}{k}j!\binom{n-k}{j} \overset{exerc.\ 3)}{=} \binom{n}{j}j!\binom{n-j}{k} = \binom{n-j}{k}A_{n,j}.$$

6) Mostre que

$$A_{n,k} = nA_{n-1,k-1}.$$

7) Mostre que

$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + kA_{n-1,k-1}.$$

8) Mostre que

$$A_{n,k}A_{n-k,j} = A_{n,j}A_{n-j,k}.$$

Lembre-se que o número de permutações dos elementos de um conjunto com n elementos, onde n_1 são repetidos e n_2 são repetidos, com $n_1 + n_2 = n$ é dado por

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}.$$

ou ainda, o número de permutações dos elementos de um conjunto com n elementos, onde n_i são repetidos e $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$ é dado por

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_s!}.$$

9) Mostre que, para $n_1 + n_2 = n$

$$P_n^{n_1,n_2} = \binom{n}{n_1}$$

e também que

$$P_n^{n_1,n_2} = \binom{n}{n_2}.$$