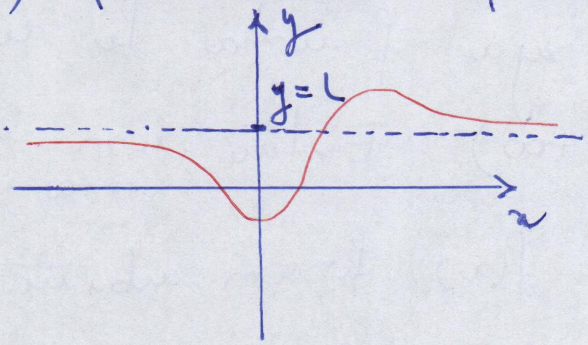
Assíntota Horizontal

Definição: A reta horizontal de equação $y=L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y=f(x)$ se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Obs: Geometricamente, estes limites significam que o gráfico de f fica cada vez mais próximo da reta $y=L$, qdo x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.



Exemplos: ① A reta $y=-1$ é uma assíntota horizontal da fç $f(x)=\dfrac{-x+1}{x}$, pois como vimos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-1) + \lim_{x\to+\infty}\overbrace{\frac{1}{x}}^{\nearrow 0} = -1.$$

② A reta $y=1$ é assíntota da fç $y=\dfrac{x+1}{x}$, pois

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}_{=0} = 1.$$

Apresentaremos agora, um processo para calcular o limite no infinito de uma função racional, isto é, uma fç da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são polinomiais e de algumas outras envolvendo polinomios e raízes n-ésimas.

Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Teorema: (i) Se $r > 0$ é um nº racional, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{x^r} = 0$, em que k é um nº real.

(ii) Se $r > 0$ é um nº racional tal que x^r está definida para todo x, então $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{k}{x^r} = 0$, em que k é um nº real.

Observação: As propriedades de limite, vistas anteriormente, continuam válidas, substituindo-se "$x \to a$" por "$x \to \pm\infty$", exceto as propriedades $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ e $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Como veremos, no próximo exemplo, para calcularmos limites no infinito de fçs racionais, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador e, em seguida, aplicamos o teorema anterior.

Exemplos: (1) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

• Maior potência de x que ocorre no denominador: x^2.

• Dividindo o numerador e o denominador por x^2 temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 3 - \cancel{\lim_{x\to+\infty}}^{0} \frac{1}{x} - \cancel{\lim_{x\to+\infty}}^{0} \frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 5 + \cancel{\lim_{x\to+\infty}} \frac{4}{x} + \cancel{\lim_{x\to+\infty}} \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5}.$$

$\searrow 0 \qquad \searrow 0$

Neste caso, a reta $y=\frac{3}{5}$ é uma assíntota horizontal.

(2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$$

• Maior potência de x que ocorre no denominador: x.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}}{\frac{4+x}{x}} \underset{\text{(pois } x\to+\infty)}{\overset{\text{como } x>0 \text{ então } x=\sqrt{x^2}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{4}{x}+\frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}}}{\frac{4}{x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)} =$$

$$\overset{*}{=} \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 4 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2.$$

(*) Obs: A propriedade $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}$ continua válida. >0 se n é par

Agora, para calcularmos o limite qdo $x\to-\infty$, devemos lembrar que estamos considerando x negativo, logo $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, ou seja, $x=-\sqrt{x^2}$.

Então, qdo dividimos por x o numerador, obtemos:

$$\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{\frac{1+4x^2}{x^2}} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}}{\frac{4+x}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{\frac{4}{x}+1} =$$

$$= -2.$$

Logo, as retas $y=2$ e $y=-2$ são assíntotas horizontais da função $\frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$.

3. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$.

Note que ambos os termos da diferença tendem para o infinito qdo $x\to+\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+x} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}9x^2+\lim_{x\to+\infty}x} = +\infty$$

e $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

Contudo, não podemos prever o que ocorre qdo fazemos a diferença. A expressão "$+\infty-(+\infty)$" $(\infty-\infty)$ é uma indeterminação.

$h(x)=x^2-x$

Exemplo: Sejam $f(x)=x^2$ e $g(x)=x$. Note que $\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty}x^2-x = +\infty$

Agora, sejam $f(x)=x$ e $g(x)=x^2$. Assim $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty}x-x^2 = -\infty$

Para resolver este problema, vamos multiplicar e dividir $(\sqrt{9x^2+x} - 3x)$ pelo conjugado $(\sqrt{9x^2+x} + 3x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right)\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(9x^2+x) - 9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}.$$

Agora, dividimos pela maior potência de x do denominador, ou seja, por x.

Assim, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+x}}{\underbrace{x}_{=|x|=\sqrt{x^2}\ (\text{pois } x>0)}} + \frac{3x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{9x^2+x}{x^2}}+3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.$$

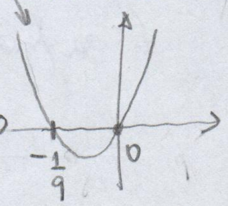
Portanto, a reta $y = \frac{1}{6}$ é uma assíntota horizontal.

Agora, para o limite para $x \to -\infty$ não temos indeterminação, pois $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x} - \lim_{x\to-\infty} 3x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left((-x)\sqrt{9+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

Portanto, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x} - 3x = +\infty$ $\quad \sqrt{9}=3 \quad +\infty$



$9x^2+x = x(9x+1) = 0 \iff x=0$ ou $x = -\frac{1}{9}$

4. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{x}{x}} \overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+1}$$

$x = |x| = \sqrt{x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{x}+\overset{1}{1}-\overset{0}{\frac{1}{x}}}{\underset{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\underset{1}{1}} = +\infty .$$

Teorema:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ L \text{ real} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \text{ se } L>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty \text{ se } L<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$

d) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ L \text{ real} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty, \text{ se } L>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = +\infty, \text{ se } L<0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases}$

Observações: ① O Teorema continua válido se substituirmos "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$" ou "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$", ou "$x \to a$".

② O Teorema acima sugere-nos como operar os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, porém, temos algumas indeterminações:

$$(+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),\ 0.\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Continuidade

Definição: Uma fç f é contínua em um ponto a, se $a \in D_f$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Caso a função não seja contínua em a, dizemos que f é descontínua em a.

Note que para f ser contínua em a, devemos ter:

① $\exists\, f(a)$, ou seja, $a \in D_f$.

② $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.