Exemplo: $A = \begin{pmatrix} \overset{=a_{11}}{1} & \overset{=a_{12}}{-1} \\ 0 = a_{21} & 2 = a_{22} \\ \underset{a_{31}}{2} & \underset{a_{32}}{4} \end{pmatrix}_{3\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} \overset{=b_{11}}{2} & \overset{=b_{12}}{5} & \overset{=b_{13}}{0} \\ \underset{b_{21}}{-1} & \underset{b_{22}}{1} & \underset{b_{23}}{3} \end{pmatrix}_{2\times 3}$

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)(-1) & 1.5 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 3 \\ 0.2 + 2.(-1) & 0.5 + 2.1 & 0.0 + 2\cdot 3 \\ 2.2 + 4.(-1) & 2.5 + 4.1 & 2.0 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Propriedades: (a) Associativa $(AB)\cdot C = A\cdot(B.C)$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$

(b) Distributiva à direita em relação à adição: $(A+B)C = AC + BC$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$.

(c) Distributiva à esquerda: $C(A+B) = CA + CB$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$.

(d) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$, para k um nº real qualquer.

Observação: A comutativa da multiplicação não é válida. Note que se A é do tipo $m\times n$ e B é do tipo $n\times p$, então é possível obter $A.B$ (pois $A_{m\times n} B_{n\times p}$), mas não é possível obter BA, pois $p \neq m$. ($B_{n\times p} \neq A_{m\times n}$). Além disso, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, temos $A.B = \begin{bmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3+16 & 9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$ e $B.A = \begin{bmatrix} -1+9 & -2+12 \\ 4+6 & 8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$, ou seja $AB \neq BA$.

Definição (Transposta): Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ tq $a'_{ji} = a_{ij}$, $\forall\, i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, ou seja, as linhas de A são ordenadamente iguais às colunas de A^t.

Exemplos: ① $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

② $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

$a'_{11} = a_{11}$, $d = a'_{12} = a_{21}$, $b = a'_{21} = a_{12}$, $e = a'_{22} = a_{22}$, $c = a'_{31} = a_{13}$, $f = a'_{32} = a_{23}$

$i = 1,2$
$j = 1,2,3$

Propriedades da transposta: Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$ matrizes e $k \in \mathbb{R}$:

ⓐ $(A^t)^t = A$

ⓑ $(A+B)^t = A^t + B^t$

ⓒ $(kA)^t = kA^t$

ⓓ $(AC)^t = C^t A^t$.

ⓑ $\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\right]^t =$

$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots \end{pmatrix}$

Matriz simétrica e matriz anti-simétrica.

Definição: Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $A = A^t$, ou seja se $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Exemplo: As seguintes matrizes são simétricas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}.$$

Note que os elementos das matrizes estão simetricamente dispostos em relação à diagonal principal.

Definição: Chama-se matriz anti-simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = -A$, ou seja, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\, i,j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplos: As seguintes matrizes são anti-simétricas

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Note que os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos. Daí p/ $i=j$, temos $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$, o que justifica a diagonal principal de uma matriz anti simétrica ser nula.

Matrizes Inversíveis

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema: Se A é invertível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Dem: Suponhamos que exista uma outra matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Assim, temos:

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Portanto, $C = B$.

Definição: Dada uma matriz invertível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única), tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, pois

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -3+3 \\ 14-14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & 21-21 \\ -2+2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Exercício: Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ex: Determine a inversa de $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$A^{-1} \cdot A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+4b & 6a+5b \\ 5c+4d & 6c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devemos ter:

$$\begin{cases} 5a+4b=1 \\ 6a+5b=0 \end{cases} \Rightarrow 5a = 1-4b \Rightarrow \boxed{a = \frac{1-4b}{5}}$$

$$\begin{cases} 5c+4d=0 \\ 6c+5d=1 \end{cases} \Rightarrow 5c = -4d \Rightarrow \boxed{c = -\frac{4d}{5}}$$

Subst. $a = \frac{1-4b}{5}$ na 2^a eq. e $c = -\frac{4d}{5}$ na 4^a eq. temos:

$$6 \cdot \left(\frac{1-4b}{5}\right) + 5b = 0 \Rightarrow \frac{6-24b}{5} + 5b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-24b+25b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

e

$$6 \cdot \left(-\frac{4d}{5}\right) + 5d = 1 \Rightarrow -\frac{24d}{5} + 5d = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24d + 25d = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

Daí, $a = \frac{1-4\cdot(-6)}{5} = \frac{1+24}{5} = \frac{25}{5} = 5 \Rightarrow \boxed{a=5}$ e

$$c = -\frac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}} \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Note que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & - \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 25-24 & -30+30 \\ 20-20 & -24+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Observe que para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, temos que obter n^2 incógnitas, resolvendo n sistemas de n equações com n incógnitas cada um. Isto não é nada prático. ~~Mais adiante~~ agora, veremos um método + prático para obter a inversa de uma matriz.

Procedimento para a inversão de matrizes:

Operações Elementares: São 3 as operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

① Permutar 2 linhas

② Multiplicar uma linha por um escalar não-nulo

③ Substituir uma linha pela soma da mesma com uma outra linha multiplicada por um escalar não-nulo.

Exemplos: ① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -3.L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & 3 & -9 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrrl} & -3 & 4 & 2 \to L_3 \\ + & 2 & 0 & 2 \to 2L_1 \\ \hline & -1 & 4 & 4 \end{array}$$

Teorema: Se uma matriz quadrada de ordem n $A=(a_{ij})_{n\times n}$ pode ser reduzida à matriz identidade I_n por uma seq. de operações elementares com linhas, então A é invertível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade I_n, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes A e I_n, através de operações elementares até chegarmos à matriz I_n na posição correspondente à matriz A. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz I_n será a inversa de A.

$$(A \,\vdots\, I_n) \xrightarrow{\text{op. elem.}} (I_n \,\vdots\, A^{-1}).$$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determine A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_4 \to L_4 + 1.L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to -L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + 2L_4 \\ L_1 \to L_1 - L_4}]{L_3 \to L_3 + 3L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{L_1 \to L_1 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I_n} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Determinantes

Definição (de determinante, $n \leq 3$): Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Obtemos o determinante de M da seguinte forma:

1. $n = 1$; $M = (a_{11}) \Longrightarrow \det M = a_{11}$.

2. $n = 2$; $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. $n = 3$; $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \det M = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Este dispositivo prático é conhecido como regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de ordem 3.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det M = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{array} = 0 - 12 - 10 + 0 + 10 + 3 =$$

$0 \quad 10 \quad 3 \qquad 0 \quad -12 \quad -10$

$= -22 + 13 = -9.$

Propriedades dos determinantes

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Temos

(a) Se M^t é a matriz transposta de M, então $\det M^t = \det M$.

- $\underline{n=1}$: $M = (a_{11}) = M^t$

  $\det M = a_{11} = \det M^t$.

- $\underline{n=2}$: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $M^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

Assim, $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} =$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det M^t$.

- $n = 3$: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e $M^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Então, $\det M^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{matrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - \boxed{a_{11}a_{32}a_{23}} -$
$- a_{21}a_{12}a_{33}$. (I)

Por outro lado, $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \boxed{a_{11}a_{23}a_{32}}$
$- a_{12}a_{21}a_{33}$ (II)

Comparando (I) e (II), obtém-se $\det M^t = \det M$.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10$.

$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M^t = -10$, ou seja $\det M = \det M^t$
$= -10$.

(b) Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de M forem todos nulos, então $\det M = 0$.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{matrix} = 0$ e

0 0 0 0 0 0

$\det M' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0$.

(c) Se multiplicarmos uma fila qualquer de M por um nº K, o determinante da nova matriz M' obtida será o produto de K pelo determinante de M, isto é, $\det M' = K \cdot \det M$.

Exemplo: $K = 2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M' = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| =$$

$-12 \quad 0 \quad 0 \qquad 2 \quad -8 \quad 0$

$$= 2 - 8 - 12 = 2 - 20 = -18$$

Agora, $\det M = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| = 1 - 4 - 6 = -9$.

$-6 \quad 0 \quad 0 \qquad 1 \quad -4 \quad 0$

Portanto, $\det M' = -18 = 2 \cdot (-9) = 2 \cdot \det M$.

(d) Se trocarmos de posição duas filas paralelas de M, obteremos uma nova matriz M' tal que $\det M' = -\det M$.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M' = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| =$$

$+4 \quad 0 \quad -1 \qquad 0 \quad 6 \quad 0$

$$= 6 + 4 - 1 = 10 - 1 = 9.$$

Já vimos que $\det M = -9$.

Portanto, $\det M' = 9 = -(-9) = -\det M$!

(e) Se M tem duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente iguais ou múltiplos, então det M = 0.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 3 - 3 = 0.$$

$0 \quad -3 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 3$

(f) Se os elementos da j-ésima coluna de M são tais que

$$a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}, \quad a_{2j} = b_{2j} + c_{2j}; \; \cdots; \; a_{nj} = b_{nj} + c_{nj},$$

isto é,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & (b_{3j} + c_{3j}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então $\det M = \det M' + \det M''$, onde

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & c_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obs: A propriedade é válida também se tivermos uma linha cujos elementos se decompõe em soma.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2^{=1+1} & 3 \\ -1 & 5^{=2+3} & 7 \\ 0 & 3^{=2+1} & 1 \end{pmatrix}$

$$\det M = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 5-9-21+2 = 7-30 = -23$$

$0 \quad -21 \quad 2 \quad 5 \quad 0 \quad -9$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M' = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} =$$

$0 \quad -14 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad -6$

$$= 2-6-14+1 = 3-20 = -17.$$

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M'' = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$0 \quad -7 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad -3$

$$= \cancel{3} - \cancel{3} - 7 + 1 = -6.$$

Portanto, $\det M = -23 = -17 + (-6) = \det M' + \det M''$

g) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é matriz triangular

e $\det M = \left|\begin{matrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 2 = 1.2.1$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0$

h) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det AB = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +2$ e $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -4$

Portanto, $\det AB = -8 = 2.(-4) = \det A . \det B$.

Teorema: Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Então M é inversível $\Longleftrightarrow \det M \neq 0$.

Exercícios: ① Determine x tal que $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

$2x^2 - (3x+2) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4.2.(-2) = 9 + 16 = 25$

$x = \dfrac{3 \pm 5}{4}$ < $x = 2$. ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

② Prove que o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{pmatrix}$ é múltiplo de 12 (sem desenvolvê-lo):

Note que $A = \begin{pmatrix} 1 & 12.1 & 11 \\ 5 & 12.2 & 13 \\ 7 & 12.3 & 17 \end{pmatrix}$, ou seja a matriz

A é obtido de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{pmatrix}$ multiplicando-se a $2^{\underline{a}}$ coluna de B por 12.

Assim $\det A = 12 . \det B$, ou seja, $\det A$ é um múltiplo de 12.

③ Demonstre a identidade:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix}$$

Por propriedades de determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2c & c \\ x & 2z & z \\ m & 2p & p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + 2 . \begin{vmatrix} a & c & c \\ x & z & z \\ m & p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$+ 2.0$, pois a matriz no último determinante tem 2 colunas iguais.

Portanto, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix}$.

④ Determine a para que a matriz

$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ seja inversível. Além disso, determine k para que a matriz $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ não seja inversível

Devemos ter $\det M \neq 0$. Assim, verifiquemos para quais valores de a

$$\left|\begin{matrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & a \\ a & 1 \\ a & a \end{matrix} = 1 + 2a^3 - 3a^2 \neq 0$$

Vamos resolver a eq. $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$. Claramente $a=1$ é raiz desse polinômio

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)(2a^2 - a - 1)$$

Portanto, devemos resolver $2a^2 - a - 1 = 0$.

$$\Delta = 1 - 4.2(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$a = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, M é inversível, qdo $a \neq 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$.

Agora, vamos determinar k para que M' não seja inv.

Devemos ter $\det M' = 0$, ou seja,

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & k \end{matrix} = 3 - k^2 + 1 - 3k = 0 \iff -k^2 - 3k + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25$$

$$k = \frac{-3 \pm 5}{-2} \begin{cases} k = -1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Assim M' não é inversível, qdo $k = -1$ ou $k = 4$.