Cálculo Numérico
Lista de Exercícios nº2

1. Localizar, graficamente, as raízes das equações abaixo e isolá-las em intervalos.

(a) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$
(b) $2^x - 3x = 0$
(c) $2\ \ln(x) + 0.4x - 2 = 0.$
(d) $x^2 - 1 - sen\, x = 0$;
(e) $1/x - 2^x = 0$

2. Justifique que a função:

$$f(x) = \cos\frac{\pi\,(x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062 = 0$$

possui uma raiz no intervalo $(-1, 0)$ e outra no intervalo $(0, 1)$.

3. Seja $x_{i+1} = \phi(x_i)$ um método iterativo para obter aproximações para uma raiz da equação $f(x) = 0$.

   (a) Sabendo-se que $f(x) = 0$ tem uma raiz no intervalo $(1.5, 2.5)$, quais dos métodos iterativos abaixo convergirão para essa raiz? Justifique analiticamente sua resposta.
      - $x_{i+1} = x_i^2 - 2$;
      - $x_{i+1} = \sqrt{2 + x_i}$;
      - $x_{i+1} = 1 + \dfrac{2}{x_i}$.

   (b) Dado $x_0 > 2$, escolha um dos métodos dados acima e determine, graficamente, x_1 e x_2.

4. Sabe-se que a equação $cos(x) - e^{-x} = 0$ tem uma raiz ζ no intervalo $(1.1, 1.5)$.

   (a) Verifique este fato graficamente.
   (b) Use o Método da Bissecção e determine um intervalo de comprimento ≤ 0.1 que contenha ζ.
   (c) Tome o centro deste intervalo como aproximação inicial para o Método de Newton e calcule uma aproximação para a raiz ζ com erro $< 10^{-3}$. Use, pelo menos, 06 dígitos significativos.

5. Dada a função $f(x) = 2^x - 5x + 2$,

   (a) determine um intervalo que contenha um zero desta função;
   (b) determine este zero, pelo método da bissecção, até que o erro absoluto seja menor que 10^{-1}.

6. Seja $p(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$.

   a) Determine um intervalo que contenha a raiz positiva de $p(x)$;
   b) Use o método bissecção para calcular uma aproximação inicial para o método de Newton com precisão $\varepsilon \leq 0.1$.
   c) Calcule a raiz positiva de $p(x)$, pelo método de Newton com $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

7. A função $f(x) = e^{-x^2}$ possui um ponto fixo (isto é, existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$). Determine uma aproximação deste ponto, pelo método de Newton, com $\varepsilon < 10^{-3}$.

8. Calcule o zero de $f(x) = x^3 - 5$ que está no intervalo $[1.5, 2]$, pelo método de Newton, até que $|f(x_i)| < 10^{-2}$.

9. Seja $f(x) = e^x - 4x^2$ e $\bar{x}$ sua raiz no intervalo $(0, 1)$. Tomando $x_0 = 0.5$, encontre $\bar{x}$ com erro relativo $< 10^{-3}$, usando:

   (a) o MPF com a função de iteração $\varphi(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$;

   (b) o método de Newton.

   Compare a rapidez de convergência.

10. (a) Usando o método de Newton, mostre que a raiz p-ésima de a, $a \geq 0$, pode ser calculada pela fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right), \text{ com } x_0 > 0.$$

   (b) Calcule uma aproximação de $\sqrt{5}$, usando a fórmula do item (a), com $x_0 = 2$.

11. Dada a equação $x \log x - 1 = 0$ que possui uma raiz p no intervalo $[2, 3]$ e tomando $\varepsilon = 10^{-7}$:

   (a) Calcule o número de iterações necessárias para se obter uma aproximação para p, com a precisão dada, pelo método da bissecção ;

   (b) Calcule uma aproximação pelo MPF tomando a função de iteração

$$g(x) = x - 1.3(x \log{(x-1)}) \quad \text{e} \quad x_0 = 2.5;$$

   (c) Idem pelo método de Newton com $x_0 = 2.5$;

12. A equação $f(x) = e^x - 3\,x^2 = 0$ tem tres raízes reais. Considere o método iterativo definido por:

$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}.$$

   (a) Verifique que, começando com $x_0 = 0$, haverá convergência:

      i. para a raiz próxima de -0.5, se o valor negativo for usado, e

      ii. para a raiz próxima de 1.0, se o valor positivo for usado.