

## Exercícios 05 e 06 para praticar de Lógica Matemática

1. Mostre, pelo princípio de indução matemática, que a seguinte fórmula vale

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad n \geq 1.$$

2. Mostre, pelo princípio de indução matemática, que a seguinte fórmula vale

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1.$$

3. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes, onde  $n$  é um número inteiro:

- (a) “ $3n + 1$  é um inteiro ímpar”
- (b) “ $n + 4$  é um inteiro par”
- (c) “ $n^2$  é um inteiro par”.

4. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes, onde  $x$  é um número real:

- (a) “ $x$  é racional”
- (b) “ $x/2$  é racional”
- (c) “ $3x - 1$  é racional”.

5. Mostre que “ $n$  é par se, e somente se,  $n^2$  é par”, onde  $n$  é um número inteiro.

6. Use a contra-recíproca para mostrar que “se  $x + y \geq 2$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}$ , então  $x \geq 1$  ou  $y \geq 1$ ”.

7. Use a prova por casos e mostre que

$$\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y, \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{Z}.$$

8. Mostre que de 78 dias escolhidos ao acaso, pelo menos 12 caem em um mesmo dia da semana. (VER PESPOSTA ABAIXO)

9. Mostre que o último dígito do quadrado de um número inteiro é 0, 1, 4, 5, 6, ou 9. Dica: escreva  $n = 10k + l$ , onde  $l$  é um natural entre 0 e 9 inclusive.

10. Faça os exercícios das páginas 76 e 77 do Livro

A.F. da Silva e C.M. dos Santos, “Aspectos Formais da Computação”.

Resposta de “Mostre que de 78 dias escolhidos ao acaso, pelo menos 12 caem em um mesmo dia da semana”

Considere  $U = \{\textit{domingo}, \textit{segunda}, \textit{terca}, \textit{quarta}, \textit{quinta}, \textit{sexta}, \textit{sabado}\}$  e a função proposicional  $P(x) : x$  foi escolhido pelo menos 12 vezes.

Assim, a tese que queremos mostrar, “pelo menos 12 dias escolhidos caem em um mesmo dia da semana” pode ser escrita simbolicamente como  $Q : \exists x \in U \mid P(x)$ .

Vamos supor, por absurdo que  $\sim Q$  vale, ou seja, que “nenhum dia da semana foi escolhido pelo menos 12 vezes” ou ainda, “todos os dias da semana foram escolhidos no máximo 11 vezes”.

Assim o número de vezes que um dia da semana foi escolhido é  $n \leq 11$ . E  $7n \leq 77$ , isto é o número total de escolhas é menor ou igual a 77.