(2) Interseções com os eixos coordenados (eixo x e eixo y).

(3) Simetrias;

(i) Se f é par ($f(-x)=f(x)$), então o gráfico é simétrico com relação ao eixo y.

(ii) Se f é ímpar ($f(-x)=-f(x)$), então o gráfico é simétrico com relação a origem.

(iii) Se f é periódica de período K (isto é $f(x+k)=f(x)$, $\forall x \in D_f$), então seu gráfico se repete a cada intervalo de comprimento K.

(4) Assíntotas Verticais e Horizontais;

(5) Intervalos de Crescimento e Decrescimento;

(6) Valores Máximo e Mínimo locais;

(7) Concavidade e Pontos de Inflexão;

(8) Esboço da curva.

Exemplo: Use o roteiro para esboçar o gráfico das funções: (a) $f(x) = \dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

(1) Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x^2-4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pm 2\}$.

(2) Interseção com o eixo y:

$f(0) = \frac{2(-9)}{-4} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$.

Portanto, o gráfico de f intersecta o eixo y em $\boxed{y = \frac{9}{2}}$.

Intersecção com o eixo x:

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = 0 \Rightarrow 2(x^2-9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = -3 \text{ ou } x = 3}$

(3) Simetria.

$f(-x) = \frac{2((-x)^2-9)}{(-x)^2-4} = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow f$ é par,

logo simétrica com relação ao eixo y. Portanto, basta analisar o gráfico de f para $x > 0$ e em seguida refletir com relação ao eixo y.

(4) Assíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2(x^2-9)}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}} =$$

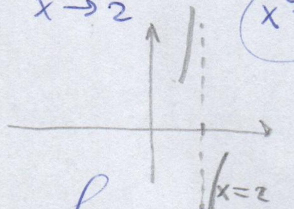
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(1-\cancelto{0}{\frac{9}{x^2}}\right)}{1-\cancelto{0}{\frac{4}{x^2}}} = 2$$

Da mesma forma, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Logo, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal para o gráfico de f.

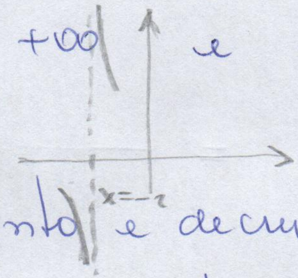
Assíntota vertical:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{2(x^2-9)}^{<0}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0 \text{ positivamente}}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{2(x^2-9)}^{<0}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0 \text{ negativo.}}} = +\infty.$$



Como f é simétrica com relação ao eixo y,

temos $$\lim_{x \to -2^+} \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2^-} \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = -\infty.$$



⑤ Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f(x) = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = \frac{2x^2-18}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x^2-4)-(2x^2-18)2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} - 16x - \cancel{4x^3} + 36x}{(x^2-4)^2} = \frac{20x}{(x^2-4)^2}.$$

Como $(x^2-4)^2 > 0$, o sinal de f' será dado pelo sinal de $20x$. Logo,

$f'(x) > 0$ se $20x > 0$, ~~ou~~ seja, $\boxed{x > 0}$ $(x \neq 2)$.

$f'(x) < 0$ se $20x < 0$, ou seja $\boxed{x < 0}$ $(x \neq -2)$.

Portanto, f é crescente nos intervalos $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(-2, 0)$.

⑥ Valores de Máximo e Mínimo local

$$f'(x) = 0 \iff \frac{20x}{(x^2-4)^2} = 0 \iff 20x = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

pto crítico!

$$f''(x) = \frac{20(x^2-4)^{\cancel{2}\,1} - 20x \cdot 2\cancel{(x^2-4)} \cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{20(x^2-4) - 80x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{20x^2 - 80 - 80x^2}{(x-4)^3} = -\frac{60x^2+80}{(x-4)^3} = -\frac{20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

Note que f'' é contínua numa viz. de 0.

$f'(0)=0$ e $f''(0) = -\dfrac{20 \cdot 4}{(-4)^3} = \dfrac{-80}{-64} = \dfrac{80}{64} > 0.$

Portanto, 0 é pto de mínimo local de f e

$f(0) = \dfrac{9}{2}$ é o valor mínimo local de f.

(7) Concavidade e ptos de Inflexão

Sinal de $f''(x)$:

Como $3x^2+4 > 0$ temos que $-20(3x^2+4) < 0$

para todo $x \in D_f$.

	$x<-2$	-2	$-2<x<2$	2	$x>2$
sinal de $-20(3x^2+4)$	$- \, -$		$- \, -$		$- \, -$
sinal de $(x^2-4)^3$	$+ \, +$	0	$- \, -$	0	$+ \, +$
sinal de $f''(x) = \dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$	$- \, -$	0	$+ \, +$	0	$- \, -$

Portanto, $f''(x) < 0$ nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$

e $f''(x) > 0$ no intervalo $(-2, 2)$. Portanto, f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, 2)$.

Note que $x = 2$ e $x = -2$ não são ptos de inflexão para f, pois f não está definida nesses pontos, isto é, $\pm 2 \notin D_f$.

⑧ Esboço do gráfico de f.

Resumo (dos itens de 1 a 7)

① $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \neq \pm 2\}$; ② Intersecção c/ eixo y : $\boxed{y = \frac{9}{2}}$

" " " x : $\boxed{x = \pm 3}$

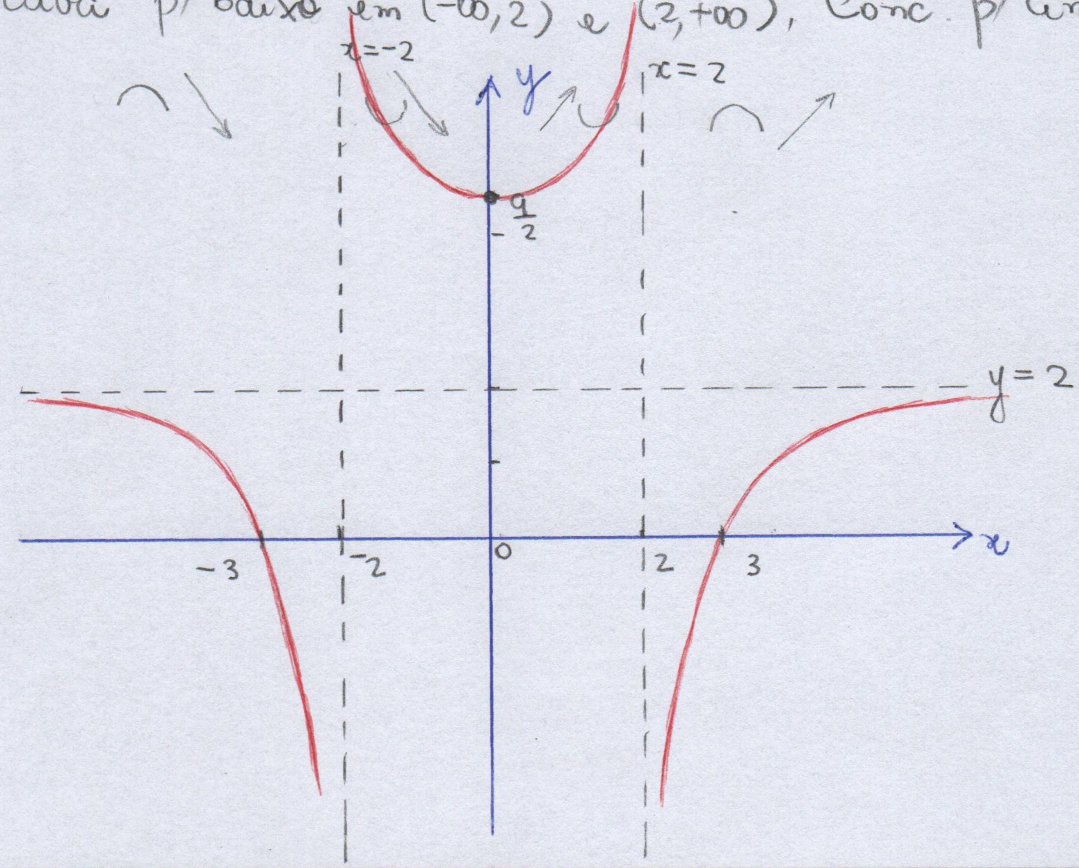
③ Simetria : f é par (simétrica c/ relação ao eixo y).

④ Assint. horiz : $y = 2$, Assint. vertical : $x = -2$ e $x = 2$.

⑤ Crescimento $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$, Decresc. $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$.

⑥ 0 é pto de mínimo local $(f(0) = \frac{9}{2})$.

⑦ Côncava p/ baixo em $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, Cônc. p/ cima em $(-2, 2)$.



Problemas de Otimização:

1. Ao preço de R$ 1,50 um vendedor ambulante vende 500 unidades de uma certa mercadoria que custa R$ 0,70 cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida aumenta 25 unidades. Que preço de venda maximizará o lucro?

Denote por x o nº de unidades monetárias (centavos) que o vendedor abaixa no preço.

O lucro de cada mercadoria será $80-x$ centavos e a quantidade vendida será $500+25x$ unidades.

Portanto, o lucro total (em centavos) é:

$$L(x) = (80-x)(500+25x) = 40.000 + 1.500x - 25x^2.$$

$$\frac{dL}{dx} = 1.500 - 50x = 0 \iff 50x = 1.500 \iff \boxed{x = 30}$$

Portanto, $x = 30$ é um pto crítico p/ L.

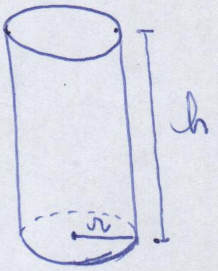
$\frac{d^2L}{dx^2} = -50$. Assim, $\left.\frac{d^2L}{dx^2}\right|_{x=30} = -50 < 0.$

Portanto, $x = 30$ é um pto de máximo local e o lucro máximo é $L(30) = 40.000 + 1.500 \cdot 30 - 25 \cdot 30^2$

$= 40.000 + 45.000 - 22.500 = 85.000 - 22.500 = 62.500$ centavos (ou seja R$ 625 reais)

O preço de venda mais vantajoso é, portanto, R$ 1,50 − 0,30 = R$ 1,20.

2) Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 L de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.



Para minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lados).

Os lados são feitos de uma folha retang. com dimensões $2\pi r \times h$. E a tampa e a base são feitos de um círculo de raio r.

Área $2\pi r . h$

Logo a área da superfície é $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.

Para eliminar h usamos o fato de que o volume da lata é dado por $1L = 1.000 cm^3$.

Área πr^2

Assim, $\underbrace{\pi r^2 . h}_{\text{volume da lata}} = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.

Subst. $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ em A temos:

$$A = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\left(\frac{1000}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Portanto, a fç que queremos minimizar é:

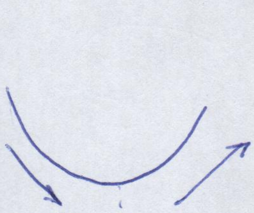
$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0.$$

Ptos críticos: $A'(r) = 4\pi r - \frac{\overset{4\times 500}{2000}}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$

Então, $A'(r) = 0 \iff \pi r^3 - 500 = 0 \iff r^3 = \frac{500}{\pi} \iff$

$\iff \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.}$

Uma vez que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, tem-se que A está decrescendo para todo r à esquerda de $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ e está crescendo para todo r à direita de $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.



$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é um mínimo local. Porém, $A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) \leq A(r), \forall r \in D_A = (0,\infty)$ portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é um mínimo global.

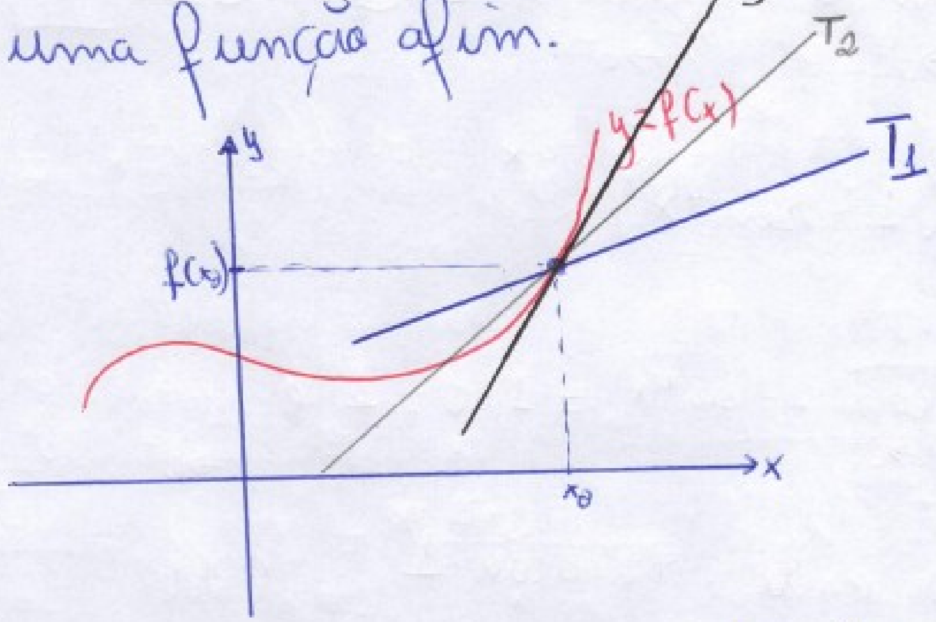
Assim, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm e a altura deve ser igual a duas vezes o raio, ou seja, o diâmetro. $h = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2}$ cm

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\cancel{1000} \cdot \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}{\cancel{\pi}\left(\frac{\cancel{500}}{\cancel{\pi}}\right)} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \Rightarrow \boxed{h = 2 \cdot r}$$

Fórmula de Taylor

Objetivo: Aproximar localmente uma função derivável por uma função afim.



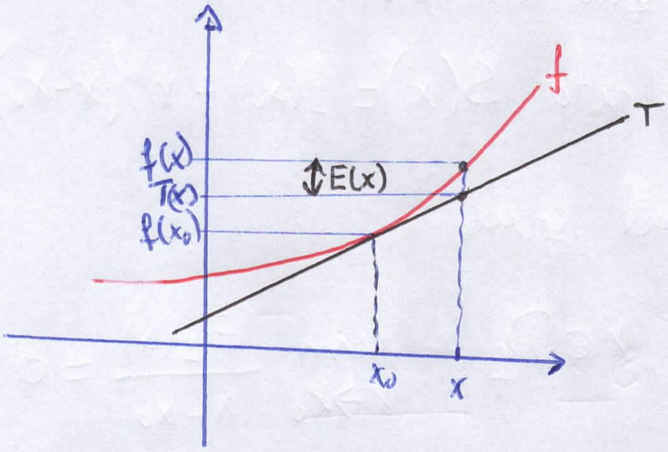
Para f dada acima, e as três retas (fςs afins) T_1, T_2 e T_3, qual delas é a melhor aproximação p/ f em torno do pto $(x_0, f(x_0))$ de seu gráfico?

Resp.: Na aula!

Sejam f derivável em x_0 e T dada por

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Note que $T(x)$ é a reta tangente a f no pto $(x_0, f(x_0))$



Para cada $x \in D_f$, considere $E(x)$ o erro na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$.

$$f(x) = T(x) + E(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x), \quad x \in D_f.$$

Assim,

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \text{ isto é,}$$

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Note que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E(x)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0) =$

$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E(x)}{x - x_0} = 0$ e isto significa que $E(x) \to 0$ mais rápido que $(x - x_0) \to 0$ qdo $x \to x_0$.

<u>Observação</u>: $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a única função afim tq $f(x) = T(x) + E(x)$, com $E(x) \to 0$ mais rápido que $(x - x_0) \to 0$ qdo $x \to x_0$.

De fato, suponha que a reta $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ que passa por $(x_0, f(x_0))$ é tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + m(x - x_0)}_{S(x)} + E_1(x), \; x \in D_f \text{ e } \lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Assim,

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} m = f'(x_0) - m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = f'(x_0)}$$

Logo $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T(x)$.

<u>Definição</u>: O polinômio $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ denomina-se <u>polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de x_0</u>.

<u>Obs</u>: P é o polinômio de grau no máximo 1, que melhor aproxima f localmente em torno de x_0.

Teorema: Seja f derivável até 2^a ordem em I e sejam $x, x_0 \in I$. Então, $\exists!$ $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{E(x)}.$$

Exemplo ①: Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 p/ a fç $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $x_0 = 0$.

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)(x - 0)$$
$$= x$$

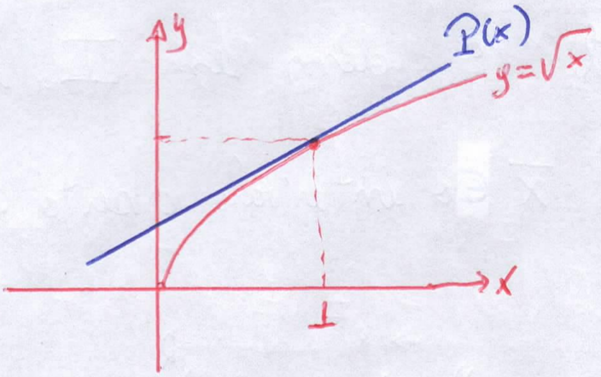
Numa vizinhança de $x_0 = 0$ a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é aproximadamente a função $g(x) = x$, isto é, $\operatorname{sen} x \approx x$ p/ $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

② Calcule um valor aproximado para $\sqrt{1,2}$.

Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 1$, assim o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $x_0 = 1$ é

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



Assim,

$$f(1,2) \approx P(1,2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} = \boxed{1,1}$$

(Por curiosidade o valor real $\sqrt{1,2} = 1,095445\ldots$).

Definição: Sejam f derivável até a ordem n em I e $x_0 \in I$. O polinômio $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ denomina-se polinômio de Taylor, de ordem n de f em torno de x_0.

Ex: Calcule o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

Note que se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$, assim $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$