Números Reais Os nºs que estamos acostumados a trabalhar em nosso cotidiano são classificados segundo algumas propriedades, sendo divididos em determinados conjuntos. São eles:

(i) conj. dos nºs naturais: também conhecido como conj. dos inteiros positivos. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

(ii) conj. dos nºs inteiros: formado pelos inteiros positivos negativos e o zero. $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

(iii) conj. dos nºs racionais: formado pelos nºs da forma $\frac{m}{n}$, em que m e n são inteiros ($m, n \in \mathbb{Z}$) e $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} ;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Obs: É essencial que n seja diferente de zero para evitar divisão por zero.

(iv) conj. dos nºs irracionais; formado pelos nºs que não podem ser representados na forma de fração $\frac{m}{n}$.

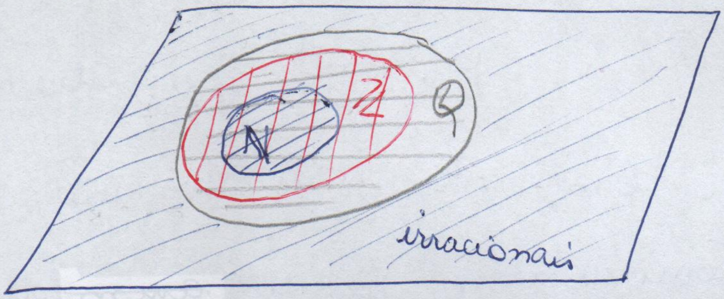
Por exemplo, $\sqrt{2} = 1,414\dots$ e $e = 2,71\dots$.

Obs: Note que valem as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, isto é, todo nº natural é tb um nº inteiro que por sua vez é tb um nº racional.

Exemplo: $7 = \frac{7}{1}$.

Porém, os conjuntos dos irracionais e dos racionais são disjuntos, isto é, não possuem elementos em comum.

Diagrama :



(V) conj. dos nºs reais : constituído pelos nºs racionais e pelos nºs racionais.

$\mathbb{R} = \{x \; ; \; x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$.

Todo nº real tem uma representação decimal. No caso em que o nº é um racional, então temos uma dízima periódica. Por exemplo:

$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0}$

$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}\overline{6}$

$\frac{157}{495} = 0{,}3171717\ldots = 0{,}3\overline{17}$

$x = 0{,}31717\ldots$

Devemos deixar depois da vírgula somente a parte que se repete

$10x = 3{,}1717\ldots$ (I)

$1000x = 317{,}1717\ldots$ (II)

Fazendo II − I temos:

$990x = 314 \Rightarrow x = \frac{314}{990}$

$\xRightarrow{\div 2} \boxed{x = \frac{157}{495}}$

No caso em que o nº é irracional, a dízima não é periódica. Por ex:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309 5\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358979 3\ldots$

Se pararmos a expansão decimal de qualquer nº em uma certa casa decimal, teremos uma aproximação desse número. Por exemplo,

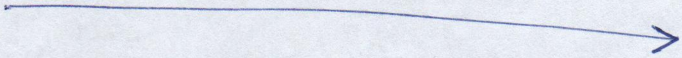
$$\pi \cong 3,1415 = \frac{6283}{2000} \qquad x = 3,1415$$

$$10000x = 31415 \Rightarrow x = \frac{31415}{10000} \Rightarrow$$

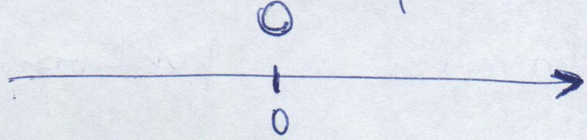
$$\div 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6283}{2000}}$$

Note que quanto mais casas decimais forem mantidas melhor será a aproximação obtida.

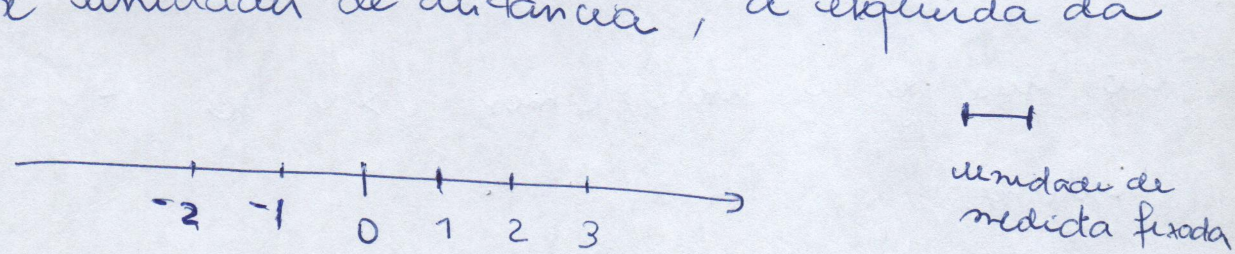
Os nºs reais podem ser representados por pontos sobre uma reta. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha.



Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado origem que corresponde ao nº zero.

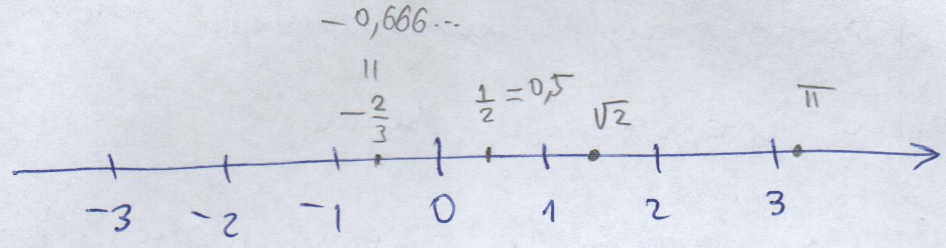


Fixada uma unidade qualquer de medida, cada nº positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita da origem e cada nº neg. $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está a x unidades de distância, à esquerda da origem.



Assim, todo nº real é representado por um ponto sobre a reta e todo ponto P sobre a reta corresponde a um único nº real. O nº real associado ao pto P é chamado coordenada de P.

Frequentemente, identificamos o pto com sua coordenada e pensamos em um nº como um pto na reta real.



O conj. dos nºs reais é um conj. ordenado, isto é, dados dois nºs quaisquer, podemos compará-los e dizer qual deles é "maior" ou "menor".

Dizemos que x é menor do que y e escrevemos $x < y$ se $y - x$ for um nº positivo.

Por exemplo:

$$\frac{5}{9} < \frac{2}{3}, \quad \text{pois} \quad \frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{6-5}{9} = \frac{1}{9} \ \text{nº positivo.}$$

De maneira equivalente, dizemos que y é maior do que x e escrevemos $y > x$ se $y - x$ for um nº positivo.

O símbolo $x \leq y$ (lê-se: x é menor ou igual a y) significa que $x < y$ ou $x = y$.

Analogamente, $y \geq x$ (lê-se: y é maior ou igual a x) se $y > x$ ou $y = x$.

Revisão de Conjuntos

Na discussão a seguir, iremos tratar de certos nºs reais. Sendo assim, vamos revisar as ideias básicas sobre conjuntos.

Definição: Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados elementos ou membros do conjunto. Denotaremos os conjuntos usando letras maiúsculas e os elementos usando letras minúsculas.

Escreveremos $a \in A$ (a pertence a A) para indicar que a é um elemento do conjunto A e escreveremos $a \notin A$ (a não pertence a A) para indicar que a não é um elemento do conjunto A.

Exemplo: Se $A = \mathbb{R}$, então $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definição: Um conjunto com nenhum elemento é chamado de conjunto vazio ou conjunto nulo e é denotado por ϕ.

Notação: Alguns conjuntos podem ser descritos fazendo-se uma lista de seus elementos entre chaves. A ordem da lista não importa.

Seja A o conjunto dos nºs inteiros não-negativos menores do que 4.

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ ou $A = \{1, 3, 0, 2\}$.

Também podemos escrever A como:

$A = \{x \,;\, x \text{ é um inteiro e } 0 \le x < 4\}$ Notação construtora de conjuntos.

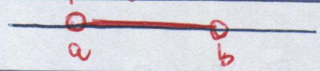
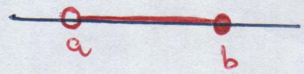
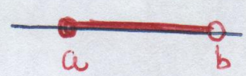
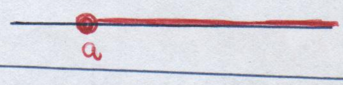
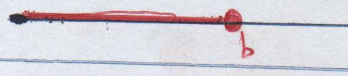
lê-se: A é o conj. de todos os x, ~~tais~~ que x é um inteiro e x é maior ou igual a 0 e menor do que 4.

Intervalos

Chamamos de intervalos, conjuntos de números reais que correspondem geometricamente a segmentos de reta.

Semirretas ou reta (reta real).

A seguir ilustraremos todos os possíveis tipos de intervalos:

Descrição	Notação	Definição como conj.	Rep. geométrica
Intervalo aberto	(a, b)	$\{x \,;\, a < x < b\}$	
Intervalo fechado	$[a, b]$	$\{x \,;\, a \le x \le b\}$	
Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda	$(a, b]$	$\{x \,;\, a < x \le b\}$	
Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda	$[a, b)$	$\{x \,;\, a \le x < b\}$	
Intervalos infinitos	$[a, +\infty)$	$\{x \,;\, x \ge a\}$	
	$(a, +\infty)$	$\{x \,;\, x > a\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x \,;\, x \le b\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x \,;\, x < b\}$	
	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

Observações:

① Os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não são números.

Por exemplo, em $(-\infty, b]$, $-\infty$ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção negativa e em $[a, +\infty)$, $+\infty$ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

② Os intervalos que se estendem entre dois nº reais são chamados intervalos finitos e os que se estendem indefinidamente em uma ou em ambas direções são chamados de intervalos infinitos.

$[a, +\infty)$

③ Por convenção, os intervalos da forma $(a, +\infty)$

ou $(-\infty, b]$

ou $(-\infty, b)$ são considerados abertos (fechados), pois excluem (incluem) os seus extremos reais.

④ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ pode ser considerado aberto ou fechado, conforme seja conveniente.

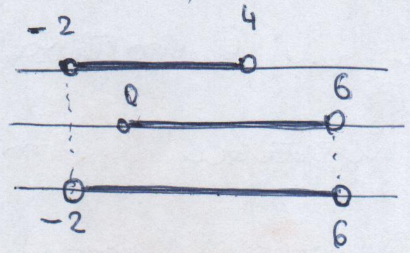
União e Interseção de Intervalos.

Definição: Sejam A e B conjuntos, A união de A e B (denotada por $A \cup B$) é o conjunto cujos elementos pertencem a A ou a B (ou a ambos).

A interseção de A e B (denotada por $A \cap B$) é o conj. cujos elementos pertencem a ambos A e B.

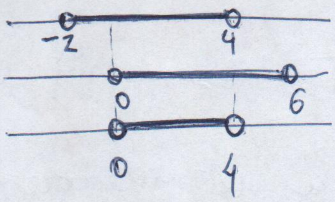
Exemplos: ① $\{x; -2 < x < 4\} \cup \{x; 0 < x < 6\} =$

$= \{x; -2 < x < 6\}$.



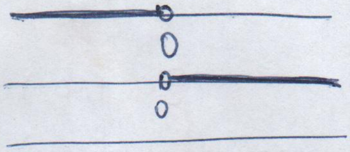
Em notação intervalar: $(-2,4) \cup (0,6) = (-2,6)$

② $\{x; -2 < x < 4\} \cap \{x; 0 < x < 6\} = \{x; 0 < x < 4\}$



Notação intervalar: $(-2,4) \cap (0,6) = (0,4)$

③ $\{x; x < 0\} \cap \{x; x > 0\} = \phi$



Notação intervalar: $(-\infty, 0) \cap (0, +\infty) = \phi$

Propriedades Algébricas das Desigualdades.

Teorema: Sejam a, b, c e d nºs reais

(a) $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$

(b) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ e $a - c < b - c$.

(O sentido de uma desig. não muda se somarmos ou subtrairmos o mesmo nº a ambos os lados.)

(c) $a < b \Rightarrow ac < bc$ qdo c for positivo e $ac > bc$ qdo c for negativo.

(O sentido de uma desig. não muda se multiplicarmos ambos os lados por um mesmo nº positivo e muda se multiplicarmos ambos os lados por um mesmo nº negativo).