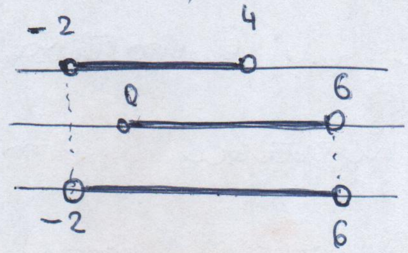
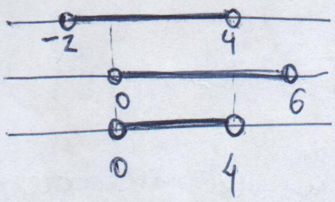
Exemplos: 1) $\{x;\ -2 < x < 4\} \cup \{x;\ 0 < x < 6\} =$

$= \{x;\ -2 < x < 6\}$.



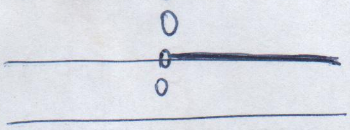
Em notação intervalar: $(-2,4) \cup (0,6) = (-2,6)$

2) $\{x;\ -2 < x < 4\} \cap \{x;\ 0 < x < 6\} = \{x;\ 0 < x < 4\}$



Notação intervalar: $(-2,4) \cap (0,6) = (0,4)$

3) $\{x;\ x < 0\} \cap \{x;\ x > 0\} = \emptyset$



Notação intervalar: $(-\infty, 0) \cap (0, +\infty) = \emptyset$

Propriedades Algébricas das Desigualdades.

Teorema: Sejam a, b, c e d nºs reais

(a) $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$

(b) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ e $a - c < b - c$.

(O sentido de uma desig. não muda se somarmos ou subtrairmos o mesmo nº a ambos os lados.)

(c) $a < b \Rightarrow ac < bc$ qdo c for positivo e $ac > bc$ qdo c for negativo.

(O sentido de uma desig. não muda se multiplicarmos ambos os lados por um mesmo nº positivo e muda se multiplicarmos ambos os lados por um mesmo nº negativo).

d) $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

As desigualdades do mesmo sentido podem ser somadas membro a membro. Obs: $a<b$ e $c<d \not\Rightarrow a.c < b.d$.
De fato, temos $-4<2$ e $-2<3$, porém, não é verdade que $8<6$.

e) a e b são ambos positivos ou negativos e $a<b$

$\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(Se ambos os lados da desig. tiverem o mesmo sinal então o sentido da desig. será revertido se tomarmos os recíprocos de cada lado.

Obs: Estas propriedades permanecem verdadeiras se os símbolos $<$ e $>$ forem substituídos por $\leq$ e $\geq$, respectivamente.

Exemplo:

Desig. inicial	Operação	Desig. resultante
$-1 < 4$	+ 3 ambos os lados	$2 < 7$ item b
$-1 < 4$	− 7 ambos os lados	$-8 < -3$ item b
$-1 < 4$	· ambos os lados por 2	$-2 < 8$ item c
$-1 < 4$	· ambos os lados por −2	$2 > -8$ item c
$2 < 3$, $-6 < 2$	+ lados corresp.	$-4 < 5$ item d
$2 < 3$	Tomar recíprocos amb. lados	$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ item e
$-3 < -2$	Tomar recíproco amb. lados	$-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ item e

Resolução das desigualdades

Uma solução de uma desig. em uma incógnita x é um valor que torne a desig. verdadeira.

Ex: $x < 11$.

$x = 1$ é uma solução, mas $x = 12$ não é.

O conj. solução de uma desig. é o conj. de todas as suas soluções.

Obs: Se não houver a multiplicação de ambos os lados de uma desig. por zero ou por uma expressão envolvendo a incógnita, então as operações do último teorema não irão alterar o conj. sol. de uma desig.

Ex: 1 Resolva $2+3x \leq 2x-3$

$2+3x \leq 2x-3 \iff$

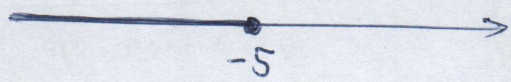
$\overset{(b)}{\iff} 2+3x-2 \leq 2x-3-2$

$\iff 3x \leq 2x-5$

$\overset{(b)}{\iff} 3x-2x \leq 2x-5-2x$

$\iff \boxed{x \leq -5}$

Conj. solução: $(-\infty, -5]$

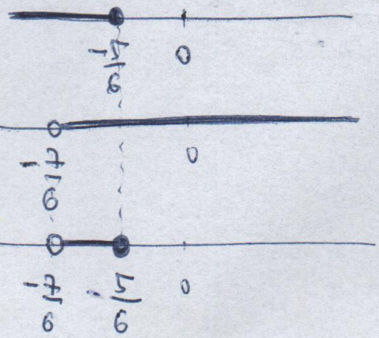


2 $8 \leq 3-6x < 10$

Forma I:

- $8 \leq 3-6x \overset{(b)}{\iff} 8-3 \leq 3-6x-3 \iff 5 \leq -6x \underset{\cdot\frac{1}{6}}{\overset{(c)}{\iff}} \frac{5}{6} \leq -x \underset{\cdot(-1)}{\overset{(c)}{\iff}} \boxed{-\frac{5}{6} \geq x}$

- $3-6x < 10 \iff 3-6x-3 < 10-3 \iff -6x < 7 \iff -x < \frac{7}{6} \iff \boxed{x > -\frac{7}{6}}$



Sol: $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right]$.

forma II: Também é possível trabalhar com as desigualdades combinadas.

$$8 \leq 3-6x < 10 \iff 8-3 \leq 3-6x-3 < 10-3 \iff 5 \leq -6x < 7$$

$$\iff \frac{5}{6} \leq -\frac{6}{6}x < \frac{7}{6} \iff -\frac{7}{6} < x \leq -\frac{5}{6}$$

Solução: $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right]$.

3) $x^2-2x > 8 \iff$

$$\iff x^2-2x-8 > 8-8 \iff x^2-2x-8 > 0 \overset{*}{\iff} (x+2)(x-4) > 0$$

$*$ $x^2-2x-8=0$

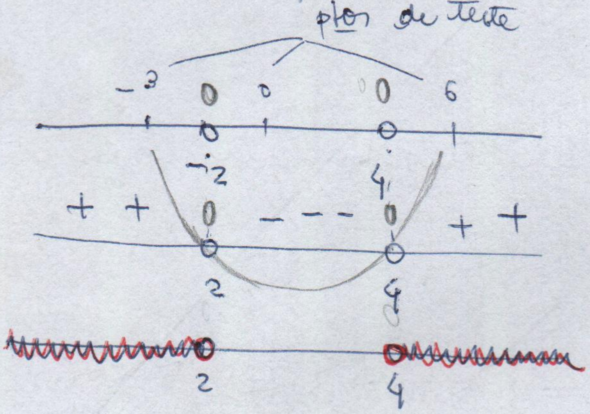
$\Delta = 4-4.1.(-8) = 4+32 = 36$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$$

Note que os valores de x para os quais $x+2=0$ ou $x-4=0$ são $x=-2$ e $x=4$. Estes pontos dividem o eixo coordenado em 3 intervalos: $(-\infty,-2)$, $(-2,4)$, $(4,+\infty)$ em cada um dos quais $(x+2).(x-4)$ tem sinal constante.

Determinemos o sinal em cada intervalo.

Intervalo	pto de teste	sinal de $\underbrace{(x+2)(x-4)}_{x^2-2x-8}$ no pto teste
$(-\infty,-2)$	-3	$(-)\cdot(-) = +$
$(-2,4)$	0	$(+)\cdot(-) = -$
$(4,+\infty)$	6	$(+)\cdot(+) = +$

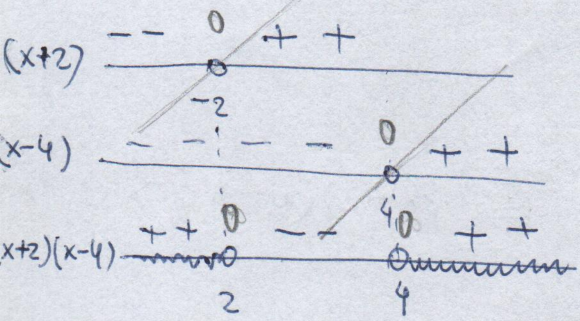


Sinal de $(x+2)(x-4)$

Conj. sol. de $(x+2)(x-4) = x^2-2x-8 > 0$

Sol: $(-\infty,-2) \cup (4,+\infty)$

Outra forma: $x^2-2x > 8 \iff (x+2)(x-4) > 0$. Estudaremos o sinal de cada parcela da fatoração.



Sol: $(-\infty,-2) \cup (4,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} ; \ x < -2 \text{ ou } x > 4\}$.

④ $\dfrac{2x-3}{x-1} < 8$.

Poderíamos começar multiplicando ambos os lados por $x-1$ para eliminar a fração, mas para isso, deveríamos examinar os casos em que $x-1>0$ e $x-1<0$ separadamente, pois no 2º caso o sinal da desigualdade deve ser revertido e no 1º caso não.

Abordagem mais simples:

$$\frac{2x-3}{x-1} < 8 \iff \frac{2x-3}{x-1} - 8 < 0 \iff \frac{2x-3-8(x-1)}{x-1} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x-3-8x+8}{x-1} < 0 \iff \frac{-6x+5}{x-1} < 0.$$

Vamos estudar o sinal do nº e do denominador:

- $-6x+5=0$ se $x=\frac{5}{6}$
- $x-1=0$ se $x=1$

x		$\frac{5}{6}$		1	
$(-6x+5)$	$+\,+$	0	$-$	$-$	$-\,-$
$(x-1)$	$-\,-$	$-$	$-$	0	$+\,+$
$\frac{(-6x+5)}{(x-1)}$	$-\,-$	0	$+\,+$	$\nexists$	$-\,-$

Conj. solução: $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right) \cup (1, +\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x < \frac{5}{6} \text{ ou } x > 1 \right\}$.

Valor Absoluto

Definição: O valor absoluto ou magnitude de um nº real a é denotado por $|a|$ e definido por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Exemplos: 1

- $|7| = 7$, pois $7 \geq 0$
- $\left|-\frac{5}{3}\right| = -\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$, pois $-\frac{5}{3} < 0$
- $|0| = 0$, pois $0 \geq 0$.

Propriedades: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então

(i) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(ii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, se $b \neq 0$.

(iii) $|a^n| = |a|^n$.

(iv) $|x| = a$; com $a \geq 0$ se, e somente se, $x = a$ ou $x = -a$.

(v) $|x| < a$, com $a > 0$ se, e somente se, $-a < x < a$.

(vi) $|x| > a$; com $a > 0$ se, e somente se, $x > a$ ou $x < -a$.

(vii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triang).

(viii) $|a-b| \leq |a| + |b|$;

(ix) $|a| - |b| \leq |a-b|$

Exemplo: Resolva as eq. e ineq. e represente a solução na forma de conj. ou intervalo.

(a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 3$

Temos $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 3 & \text{se } x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ -\left(x - \frac{1}{2}\right) = 3 & \text{se } x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$ ié, $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 3 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} = 3 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

• $x - \frac{1}{2} = 3$ (se $x \geq \frac{1}{2}$)

$x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{7}{2}}$

ok!

• $-x + \frac{1}{2} = 3$ (se $x < \frac{1}{2}$)

$-x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}$

ok.

$-x = \frac{5}{2}$

$\boxed{x = -\frac{5}{2}}$

Sol: $x = -\frac{5}{2}$ e $x = \frac{7}{2}$.

b) $|2x-1| = |4x+3|$ (Note que $x = -\frac{3}{4}$ não é solução).

$$|2x-1| = |4x+3| \overset{\substack{x \neq -\frac{3}{4} \\ \text{mult. ambos os lados} \\ \text{por } \frac{1}{|4x+3|} > 0}}{\iff} \frac{|2x-1|}{|4x+3|} = 1 \overset{(ii)}{\iff} \left|\frac{2x-1}{4x+3}\right| = 1$$

$$\overset{(iv)}{\iff} \begin{cases} \frac{2x-1}{4x+3} = 1 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{4x+3} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1 = 4x+3 \\ \text{ou} \\ 2x-1 = -4x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 4 \\ \text{ou} \\ 6x = -2 \end{cases} \iff$$

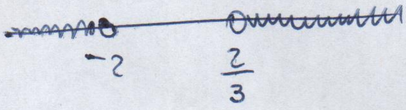
$$\iff \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Portanto, $S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$

c) $|3x+2| \geq 4$

$$|3x+2| \geq 4 \overset{(vi)}{\iff} 3x+2 \geq 4 \text{ ou } 3x+2 \leq -4$$

- $3x+2 \geq 4 \iff 3x \geq 2 \iff \boxed{x \geq \frac{2}{3}}$
- $3x+2 \leq -4 \iff 3x \leq -6 \iff x \leq -\frac{6}{3} \iff \boxed{x \leq -2}$



Sol: $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq \frac{2}{3}\right\}.$

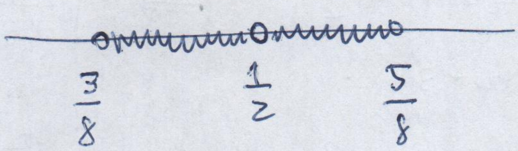
d) $\frac{1}{|2x-1|} > 4$

Note que se $x = \frac{1}{2}$ então $2x-1 = 0$ e, portanto, teríamos divisão por 0. Logo, $x = \frac{1}{2} \notin S$ = conj. solução.

$$\frac{\overset{>0}{1}}{|2x-1|} > \overset{>0}{4} \iff |2x-1| < \frac{1}{4} \iff \left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{4} \overset{(i)}{\iff} \overset{2}{|2|}\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$

$$\iff \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{8} \overset{(v)}{\iff} -\frac{1}{8} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{8} \iff -\frac{1}{8}+\frac{1}{2} < x < \frac{1}{8}+\frac{1}{2} \iff$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+4}{8} < x < \frac{1+4}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{8} < x < \frac{5}{8}$$



Como $\frac{1}{2} \notin S$, temos $\frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}$.

Daí, $S = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} ;\ \frac{3}{8} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}\right\}$.

e) $|x+3| < |2x+1|$

Como $|2x+1| > 0$ podemos multip. ambos os lados da desigualdade por $\frac{1}{|2x+1|}$ sem nos preocuparmos com o sinal da desigualdade, lembrando que $2x+1 \neq 0$, ou seja $\boxed{x \neq -\frac{1}{2}}$. Daí,

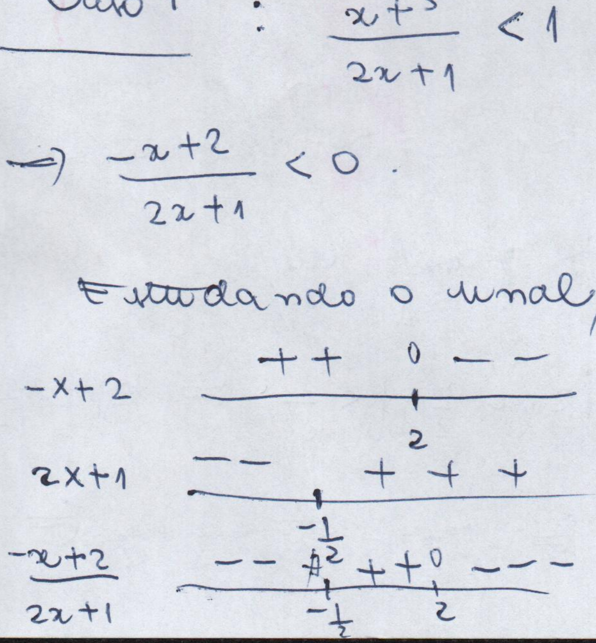
$$|x+3| < |2x+1| \Rightarrow \frac{|x+3|}{|2x+1|} < \frac{|2x+1|}{|2x+1|} = 1 \overset{(ii)}{\Rightarrow} \left|\frac{x+3}{2x+1}\right| < 1.$$

$$\overset{(v)}{\Rightarrow} -1 < \frac{x+3}{2x+1} < 1.$$

Caso 1: $\frac{x+3}{2x+1} < 1 \Rightarrow \frac{x+3}{2x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+3-2x-1}{2x+1} < 0$

$$\Rightarrow \frac{-x+2}{2x+1} < 0.$$

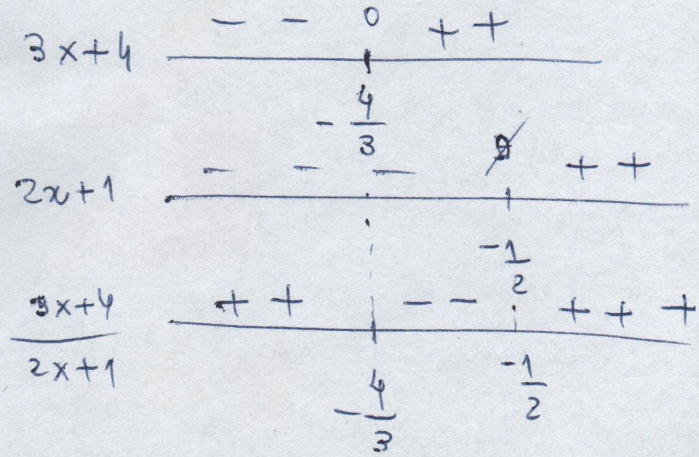
Estudando o sinal, temos

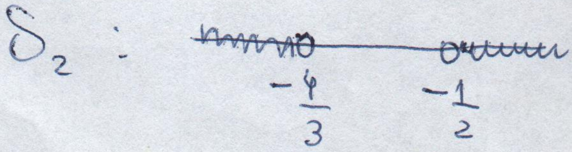


Caso 2: $-1 < \frac{x+3}{2x+1} \iff \frac{x+3}{2x+1} + 1 > 0 \iff \frac{x+3+2x+1}{2x+1} > 0$

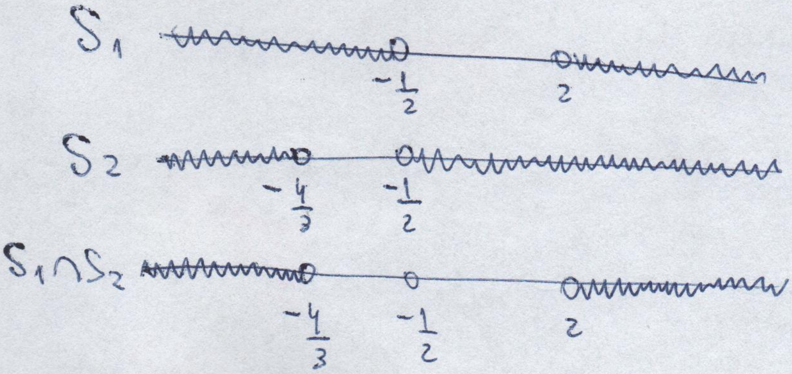
$\iff \frac{3x+4}{2x+1} > 0.$

Estudando o sinal do quociente, temos:





Queremos que ocorra as duas desig. logo temos que fazer a interseção das soluções.

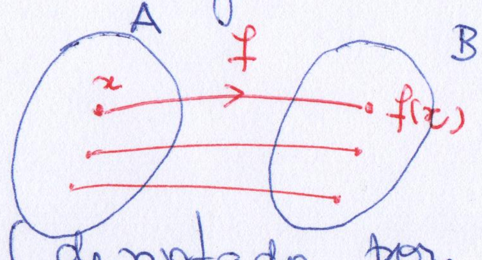


Portanto, $|x+3| < |2x+1|$ se $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > 2$.

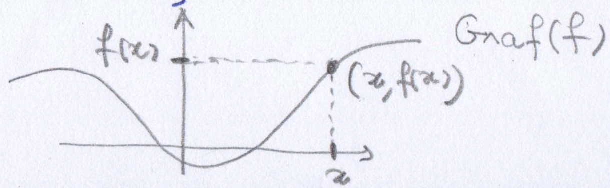
Funções de uma variável real a valores reais

Recordemos: Uma função f é uma lei que associa a cada elemento x em um conjunto A, exatamente um elemento chamado $f(x)$ em um conjunto B.

Notação: $f: A \longrightarrow B$



- O conjunto A é o domínio de f (denotado por $\mathcal{D}(f)$ ou $\mathcal{D}_f$)
- O conjunto B é o contradomínio de f (denotado por $C\mathcal{D}(f)$ ou $C\mathcal{D}_f$).
- O subconjunto de B, dado por $\{f(x);\ x \in \mathcal{D}(f)\}$ é a imagem de f (denotado por $Im(f)$).
- O conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x \in \mathcal{D}(f) \text{ e } y = f(x)\}$ é o gráfico de f (denotado por $Graf(f)$)



Exemplo: Determine o domínio das funções e a imagem de f e g.

a) $f(x) = x^2 - 2$, b) $g(x) = \sqrt{x^2-4}$, c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2-2x}$ d) $m(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2-2x-3}$.

Solução:

a) Note que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é possível calcular seu quadrado e subtrair 2. Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

Note que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, ou seja, $\underbrace{x^2-2}_{\substack{f(x)\\ \| \\ y}} \geq -2$.

Portanto, $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq -2\}$.

b) Para calcular $g(x)$ devemos extrair a raiz quadrada do nº x^2-4, porém, só existe a raiz quadrada desse nº se ele for positivo ou zero.

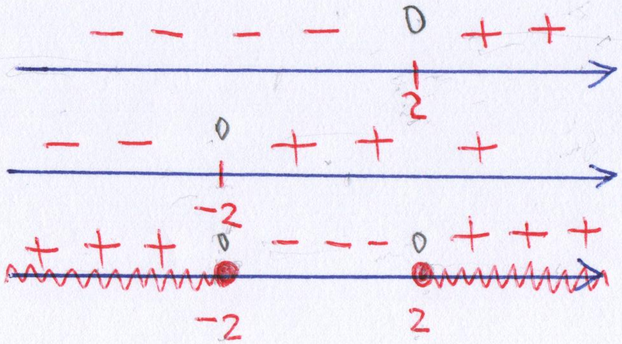
Logo, $x^2 - 4 \geq 0 \iff (x-2)(x+2) \geq 0$

Vamos então estudar o sinal do produto $(x-2)(x+2)$.

$x^2-4=0 \iff x^2=4$

$\iff x=2$ ou $x=-2$.

Logo, $x^2-4=(x-2)(x+2)$



sinal de $x-2$

sinal de $x+2$

sinal de $(x-2)(x+2)$

Portanto, $x^2-4 \geq 0$ se, e somente se, $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

Daí, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\} = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

Agora, observe que se $x \in D(g)$, então $\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{f(x) = y} \geq 0$.

Logo, $Im(g) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq 0\} = [0,+\infty)$.

ⓒ A função h pode ser calculada, desde que o denominador da função não se anule, isto é,

$x^2-2x \neq 0 \iff x(x-2) \neq 0 \iff x \neq 0$ e $x \neq 2$.

Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \neq 0 \text{ e } x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.