

Segunda Lista de Matemática Discreta - 2022

1. Determine.

- (a) Todas as funções de $E = \{0, 1, 2\}$ em $F = \{3, 4\}$.
- (b) Todas as funções injetoras de $E = \{1, 2\}$ em $F = \{3, 4, 5\}$.
- (c) Todas as funções sobrejetoras de $E = \{1, 2, 3\}$ em $F = \{4, 5\}$.

2. Determine uma função $f : A \rightarrow B$, onde

- (a) $A = \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, f é injetora e não é sobrejetora.
- (b) $A = \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, f é sobrejetora e não é injetora.

3. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 + 2$ e $h(x) = x + 1$, onde $x \in \mathbb{R}$. Determine

- (a) $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ h$, $g \circ f$, $h \circ f$ e $h \circ g$.
- (b) $(f \circ g) \circ h$ e $f \circ (g \circ h)$.

4. Mostre que f é bijetora e determine f^{-1} .

- (a) $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por $f(x, y) = (x + 3, 2 - y)$.
- (b) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = (x + 2)/x$.
- (c) $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$.
- (d) $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por $f(x) = (b - 1)x + a$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 1$.

- (a) Determine $f([1, 2])$, $f([-2, 4])$ e $f(\{0, 2, 4\})$.
- (b) Determine $f^{-1}([-3, 4])$, $f^{-1}([4, 8])$ e $f^{-1}(\{2, 4, 8\})$.

6. Sejam as aplicações $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{se } n < 0 \end{cases}$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

- (a) Mostre que f e g são bijetoras.
- (b) Calcule $g \circ f$ e $f \circ g$.

7. Sejam as aplicações $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ definida por $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- (a) Mostre que f e g são bijetoras.
- (b) Calcule $g \circ f$ e $f \circ g$.

8. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = 3x - 2$.

- (a) Determine $D(f)$, $Im(f)$, $D(g)$ e $Im(g)$.
- (b) Verifique se f e g são injetoras e sobrejetoras.
- (c) Determine f^{-1} e g^{-1} .
- (d) Determine $f \circ g$, $g \circ f$, $D(f \circ g)$, $D(g \circ f)$, $Im(f \circ g)$ e $Im(g \circ f)$.

9. Sejam $f : E \rightarrow F$ uma função e $A, B \subseteq E$ subconjuntos.

- (a) Se $A \subseteq B \subseteq E$, mostre que $f(A) \subseteq f(B) \subseteq F$.
- (b) Mostre que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
- (c) Mostre que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

10. Sejam $f : E \rightarrow F$ uma função e $A, B \subseteq F$ subconjuntos.

- (a) Se $A \subseteq B \subseteq F$, mostre que $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq E$.
- (b) Mostre que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- (c) Mostre que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- (d) Mostre que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.