Cálculo Numérico

Aulas 02: Solução Aproximada de Equações Não Lineares

Parte 02: Refinamento dos Zeros

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP, Brasil

Fase II: Refinamento

Veremos a partir de agora alguns métodos de refinamento de zero.

Todos estes métodos pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções (ou iterações) que são executadas passo a passo.

Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes (testes de parada) que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.

Critérios de Paradas: Isto é, teste de parada para verificar se foi atingido um resultado (ou aproximação) com a precisão desejada.

Existem duas interpretações para zero aproximado.

♢ $\overline{x}$ é uma aproximação do zero ξ de $f(x)$, com precisão ϵ, se

$i)$ $|\overline{x} - \xi| < \epsilon$, ou

$ii)$ $|f(\overline{x})| < \epsilon$.

Na prática, não conhecemos ξ e o objetivo é determinar ξ. Isto é, obter uma boa aproximação para ξ.

Então, como efetuar $i)$ se não conhecemos ξ ?

Uma forma é reduzir o intervalo que contém o zero a cada iteração, até conseguir um intervalo $[a, b]$ tal que $|b - a| < \epsilon$. Assim, garantimos que qualquer ponto $\overline{x}$ em (a, b) satisfaz $|\overline{x} - \xi| < \epsilon$ e, portanto, é uma aproximação para o zero ξ.

Na grande maioria dos métodos que veremos, o objetivo é gerar uma sequência de valores $\{x_k\}_{k\geq 0} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que converge para ξ. Isto é, $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.

Então, o critério de parada deve ser baseada na condição $|x_k - \xi| < \epsilon$.

Novamente, como não conhecemos de antemão o valor de ξ, utilizamos o critério:

- Parar quando

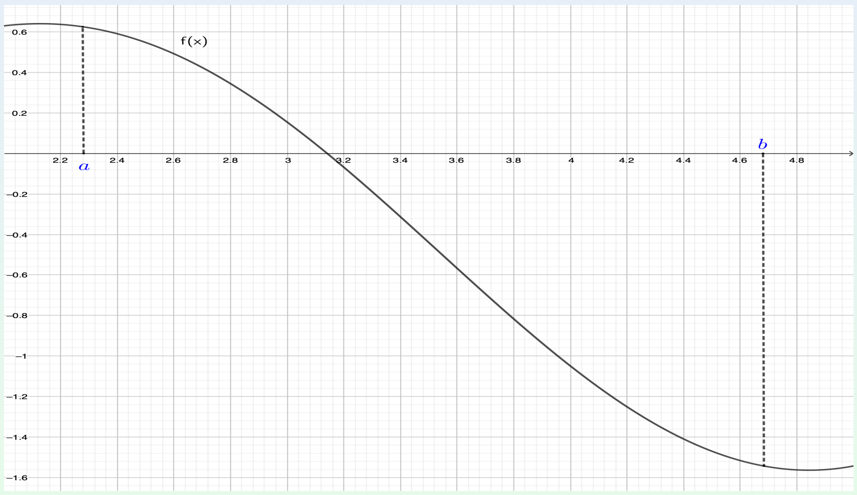
$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon \qquad \text{ou} \qquad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \epsilon.$$

Observação: Podemos também usar $|f(x_k)| < \epsilon$ como um critério de parada.

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

Então, existe um zero ξ em (a, b) e supomos que é único.

Graficamente, temos uma situação como:



Temos $f(a) \times f(b) < 0$, e $f(x)$ tem apenas um zero em (a, b)

O processo iterativo do método da bissecção pode ser dado como:

Dados $f(x)$, $[a, b]$ e $\epsilon > 0$

$a_0 = a, \quad b_0 = b$

$k = 0, \qquad x_k = [a_k + b_k]/2$

Enquanto $|b_k - a_k| > 2\epsilon$ **repetir**

Se $f(a_k)\,f(x_k) \;<\; 0$ **então**

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k;$$

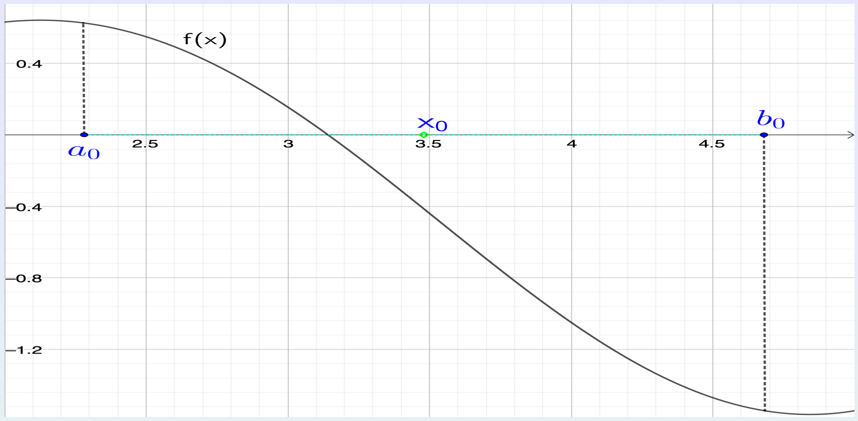
Caso contrário (isto é, quando $f(a_k)\,f(x_k) \;\geq\; 0$)

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k.$$

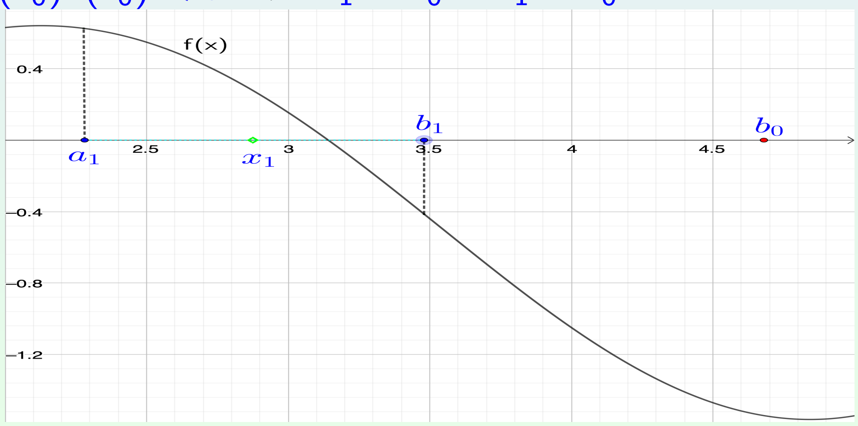
$k \Leftarrow k + 1, \qquad x_k = [a_k + b_k]/2.$

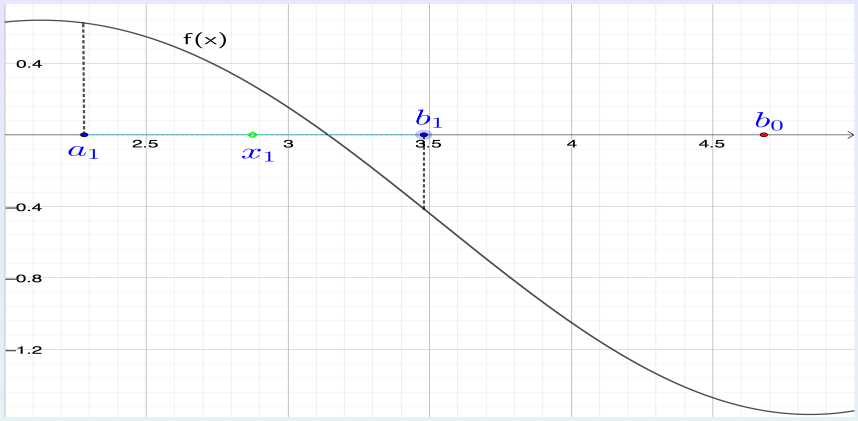
A aproximação para ξ **é** x_k (pois temos $|\xi - x_k| < \epsilon$.)

Vamos ver como é graficamente.

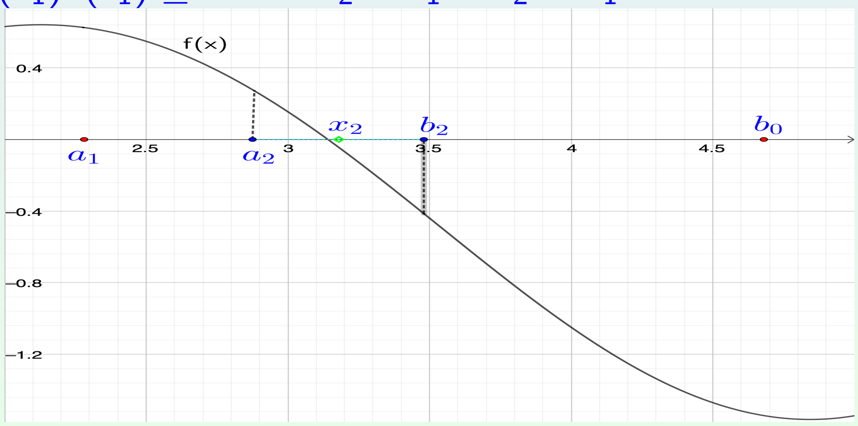


Como $f(a_0)f(x_0) < 0 \Rightarrow a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$.





Como $f(a_1)f(x_1) \geq 0 \Rightarrow a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$.



No método bissecção podemos determinar, de antemão, o número de iteração.

Pois,

$$
\begin{aligned}
|\xi - x_0| &< 2^{-1}|b_0 - a_0|, \\
|\xi - x_1| &< 2^{-1}|b_1 - a_1| = 2^{-2}|b_0 - a_0|, \\
|\xi - x_2| &< 2^{-1}|b_2 - a_2| = 2^{-3}|b_0 - a_0|, \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \\
|\xi - x_{n-1}| &< 2^{-1}|b_{n-1} - a_{n-1}| = 2^{-n}|b_0 - a_0|, \\
|\xi - x_n| &< 2^{-1}|b_n - a_n| = 2^{-n-1}|b_0 - a_0|.
\end{aligned}
$$

Portanto, se $2^{-n-1}|b_0 - a_0| < \epsilon$, então $|\xi - x_n|$ também é.

A partir de $2^{-n-1}|b_0 - a_0| < \epsilon$, obtemos

$$
\begin{aligned}
2^{-n-1} &< \epsilon/|b_0 - a_0|; \\
(-n-1)\ln(2) &< \ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]; \\
-n-1 &< \frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)}; \\
n &> -1 - \frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o melhor escolha para n é o menor inteiro maior ou igual a

$$-1 - \frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)}.$$

Isto é,

$$n = \left\lfloor -\frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\ln\left[|b_0 - a_0|/\epsilon\right]}{\ln(2)} \right\rfloor.$$

O processo iterativo do método da bissecção pode ser dado como:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

$$k = 0, \qquad x_k = [a_k + b_k]/2.$$

O número de iteração $n = \left\lfloor -\frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)} \right\rfloor$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots n-1,$

Se $f(a_k)\,f(x_k) \ < \ 0$ **então**

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k;$$

Caso contrário (isto é, quando $f(a_k)\,f(x_k) \ \geq \ 0$)

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k.$$

$$x_{k+1} = [a_{k+1} + b_{k+1}]/2.$$

A aproximação para ξ é x_n (pois temos $|\xi - x_n| < \epsilon.$)

Exemplo: Obter uma aproximação para o zero de $f(x) = e^x - 2$, com uma precisão menor que $\epsilon = 0.1$, pelo método da bissecção.

A função $f(x)$ tem um zero no intervalo $(a, b) = (0, 2)$. A partir disso obtemos

$$f(a_0) = f(a) = -1.0 \quad \text{e} \quad f(b_0) = f(b) \approx 5.3890561.$$

$$\text{O número de iteração } n = \left\lfloor -\frac{\ln\left[\epsilon/|b_0 - a_0|\right]}{\ln(2)} \right\rfloor = \lfloor 4.32\ldots \rfloor = 4.$$

k	a_k	$\approx f(a_k)$	b_k	$x_k = (a_k + b_k)/2$	$\approx f(x_k)$	*sinal* $[f(a_k)f(x_k)]$	
0	0.000	-1.000	2.000	1.000	0.7183	$-$	$b_{k+1} = x_k$
1	0.000	-1.000	1.000	0.500	-0.3513	$+$	$a_{k+1} = x_k$
2	0.500	-0.351	1.000	0.750	0.1170	$-$	$b_{k+1} = x_k$
3	0.500	-0.351	0.750	0.625	-0.1318	$+$	$a_{k+1} = x_k$
4	0.625	-0.131	0.750	0.6875	-0.0113	$+$	$a_{k+1} = x_k$

Observações Finais:

- Satisfeitas as hipóteses de continuidade de $f(x)$ em $[a, b]$ e troca de sinal em a e b, o método da bissecção gera uma sequência convergente. Isto é, sempre possível obter uma aproximação para o zero com precisão desejada;

- As iterações não envolvem cálculos laboriosos;

- Porém, a convergência é lenta, em comparação com outros métodos que veremos.

Método do Ponto Fixo (MPF)

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz ξ da equação $f(x) = 0$.

O MPF consiste em

♢ transformar a equação $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $x = g(x)$. Isto é, $g(x)$ é tal que $g(\xi) = \xi$. O problema de encontrar um zero de $f(x)$ se torna um problema de encontrar um ponto fixo de $g(x)$.
Uma função $g(x)$ que satisfaz esta condição é chamada de *função de iteração* para a equação $f(x) = 0$.

♢ a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a sequência $\{x_k\}_{k\geq 0}$ pela relação

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

♢ Se $\{x_k\}_{k\geq 0}$ convergir então $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.

Exemplo. Para a equação $f(x) = x^2 + x - 6 = 0$ há várias funções de iterações, entre a quais:

a) $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - x^2$: $\quad g_1(x) = 6 - x^2$;

b) $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 6 - x$: $\quad g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$;

c) $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 6 - x$: $\quad g_3(x) = \frac{6}{x} - 1$;

d) $x^2 + x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1) = 6$: $\quad g_4(x) = \frac{6}{x+1}$.

e) $g_5(x) = x + A(x)f(x)$, com $A(x) \neq 0$ na vizinhança de ξ.

Nem todas estas funções de iterações serão úteis, no sentido de gerar sequências $\{x_k\}_{k \geq 0}$ que convergem para um zero ζ de $f(x)$.

Vamos, verificar experimentalmente se as funções de iterações $g_1(x) = 6 - x^2$ e $g_2(x) = +\sqrt{6-x}$ podem servir ou não para obter uma sequência convergente para o zero $\zeta = 2$ da função $f(x) = x^2 + x - 6$.

$$
\begin{array}{ll}
x_0^{(1)} = 1.9 & x_0^{(2)} = 1.9 \\
x_1^{(1)} = g_1(x_0^{(1)}) = 2.39 & x_1^{(2)} = g_2(x_0^{(2)}) = 2.024845673\cdots \\
x_2^{(1)} = g_1(x_1^{(1)}) = 0.2879 & x_2^{(2)} = g_2(x_1^{(2)}) = 1.993778906\cdots \\
x_3^{(1)} = g_1(x_2^{(1)}) = 5.9171136\cdots & x_3^{(2)} = g_2(x_2^{(2)}) = 2.001554669\cdots \\
x_4^{(1)} = g_1(x_3^{(1)}) = -29.01223\cdots & x_4^{(2)} = g_2(x_3^{(2)}) = 1.999611295\cdots \\
x_5^{(1)} = g_1(x_4^{(1)}) = -835.7097\cdots & x_5^{(2)} = g_2(x_4^{(2)}) = 2.0000971739\cdots
\end{array}
$$

A sequência $\{x_k^{(1)}\}_{k\geq 0}$ diverge, mas a sequência $\{x_k^{(2)}\}_{k\geq 0}$ converge para $\xi = 2$. Por quê?

Existe algum critério que garante a convergência?

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que o processo seja convergente.

(Teorema: Convergência para ponto fixo)

Seja ξ um zero de $f(x)$, isolado num intervalo I que é centrado em ξ. Seja $g(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se

i) $g(x)$ *e* $g'(x)$ *são contínuas em* I

ii) $|g'(x)| \leq M < 1$ *para todo* $x \in I$.

iii) $x_0 \in I$.

Demonstração:

Parte 1: Provar que se $x_0 \in I$, então $x_k \in I$ para todo k.

Para isso, utilizamos o seguinte teorema

(Teorema de valor médio)

Sejam $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em $[a, b]$. Então existe (pelo menos) um ponto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = [g(b) - g(a)]/[b - a]$.

Como ξ, o zero de $f(x)$ em I, é tal que $\xi = g(\xi)$, temos para qualquer $k \geq 0$,

$$x_{k+1} - \xi = g(x_k) - g(\xi).$$

Pelo TVM, existe um ponto c_k entre x_k e ξ tal que $g(x_k) - g(\xi) = g'(c_k)(x_k - \xi)$. Logo,

$$x_{k+1} - \xi = g'(c_k)(x_k - \xi).$$

e

$$|x_{k+1} - \xi| = |g'(c_k)(x_k - \xi)| = |g'(c_k)|\,|(x_k - \xi)|.$$

Portanto, pelo hipótese *ii*) do teorema

$$|x_{k+1} - \xi| = |g'(c_k)|\,|(x_k - \xi)| \leq M\,|x_k - \xi| < |x_k - \xi|.$$

Ou seja, a distância entre x_{k+1} e ξ é estritamente menor que a distância entre x_k e ξ e, como I está centrado em ξ, temos que se $x_k \in I$, então $x_{k+1} \in I$.

Assim, como $x_0 \in I$ temos $x_k \in I$ para todo k.

Parte 2: Provar que $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.

Como vimos anteriormente, $|x_{k+1} - \xi| \leq M\,|x_k - \xi|$, para $k \geq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|x_1 - \xi| &\leq M\,|x_0 - \xi|, \\
|x_2 - \xi| &\leq M\,|x_1 - \xi| \leq M^2\,|x_0 - \xi|, \\
|x_3 - \xi| &\leq M\,|x_2 - \xi| \leq M^3\,|x_0 - \xi|, \\
\vdots \quad & \qquad\quad \vdots \\
|x_{k-1} - \xi| &\leq M\,|x_{k-2} - \xi| \leq M^{k-1}\,|x_0 - \xi|, \\
|x_k - \xi| &\leq M\,|x_{k-1} - \xi| \leq M^k\,|x_0 - \xi|.
\end{aligned}$$

Então,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k\to\infty} M^k |x_0 - \xi| = 0, \qquad \text{pois} \quad 0 < M < 1.$$

Assim, $\lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| = 0$. Isto é, $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$.

Analisaremos agora porque a sequência $\{x_k^{(2)}\}_{k\geq 0}$ gerada por

$$x_{k+1}^{(2)} = g_2\left(x_k^{(2)}\right) = \sqrt{6 - x_k^{(2)}}, \quad k \geq 0,$$

com $x_0^{(2)} = 1.9$ converge para o zero $\xi = 2$.

Observe que $g_2(x) = \sqrt{6-x}$ e

$$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}.$$

Então, se consideramos por exemplo o intervalo $I = [1, 3]$, temos

- $g_2(x)$ e $g_2'(x)$ são contínuas em I
- O zero $\xi = 2$ está centrado no intervalo I;
- $|g_2'(x)| \leq |g_2'(3)| = |-\frac{1}{2\sqrt{3}}| < 1$;

(pois $|g_2'(x)|$ é função crescente no intervalo I)

Então, pelo teorema anterior $\{x_k^{(2)}\}_{k\geq 0}$ converge para $\xi = 2$.

Exemplo: Usar a função de iteração $g_3(x) = 6/x - 1$ para obter uma aproximação para o zero negativo da $f(x) = x^2 + x - 6$. Temos

$$x_0^{(3)} = -2.5 \qquad x_1^{(3)} = g_3(x_0^{(3)}) = -3.4$$
$$x_2^{(3)} = g_3(x_1^{(3)}) = -2.76470588\cdots \qquad x_3^{(3)} = g_3(x_2^{(3)}) = -3.17021277\cdots$$
$$x_4^{(3)} = g_3(x_3^{(3)}) = -2.89261745\cdots \qquad x_5^{(3)} = g_3(x_4^{(3)}) = -3.07424594\cdots$$
$$x_6^{(3)} = g_3(x_5^{(3)}) = -2.95169811\cdots \qquad x_7^{(3)} = g_3(x_6^{(3)}) = -3.03272820\cdots$$
$$x_8^{(3)} = g_3(x_7^{(3)}) = -2.97841666\cdots \qquad x_9^{(3)} = g_3(x_8^{(3)}) = -3.01449316\cdots$$
$$x_{10}^{(3)} = g_3(x_9^{(3)}) = -2.99038434\cdots \qquad x_{11}^{(3)} = g_3(x_{10}^{(3)}) = -3.00643105\cdots$$

A sequência está convergindo.
Observe que $\xi = -3$ é um zero da função $f(x)$ e, se tomamos, por exemplo, $I = [-3.55, -2.45]$, um intervalo centrado em -3, temos

- $g_3(x)$ e $g_3'(x) = -6/x^2$ são contínuas em I;
- $|g_3'(x)| < 6/(-2.45)^2| < 1$ para todo $x \in I$;
  (pois $|g_3'(x)|$ é função crescente no intervalo I)
- $x_0^{(3)} \in I$.

Ordem de Convergência do Método do Ponto Fixo.

Definição *Seja* $\{x_k\}$ *uma sequência que converge para um ponto* ξ *e seja* $e_k = x_k - \xi$ *o erro na iteração.*

Se existir um número $p > 1$ *e uma constante* $C > 0$*, tais que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C,$$

então p *é chamada de ordem de convergência da sequência* $\{x_k\}$ *e* C *é a constante assintótica de erro.*

Caso contrário, se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C \quad e \quad 0 \le C < 1,$$

então a convergência é linear.

A ordem da convergência p de um método iterativo nos dá uma informação sobre a rapidez da convergência do processo.

Quanto maior é o valor de p, temos uma convergência mais rápida.

No caso do método **MPF** temos

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \xi = g'(c_k)(x_k - \xi) = g'(c_k)\, e_k.$$

Assim,

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |g'(c_k)|, \quad k \geq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k\to\infty} |g'(c_k)| = |g'(\xi)| = C,$$

onde

$$0 \leq C < 1,$$

pois $g'(x)$ satisfaz o hipótese *ii*) do teorema da convergência.

A ordem da convergência do método MPF é linear.

Método de Newton-Raphson

Uma das condições de convergência do MPF é que a função de iteração para $f(x)$ satisfaz $|g'(x)| \leq M < 1$ na vizinhança do zero ξ da $f(x)$.

Vimos também que quanto menor for M a convergência é mais rápida.

A ideia por traz do método de Newton-Raphson (or simplesmente, método de Newton) é, com objetivo de garantir e acelerar convergência, escolher uma função de iteração $g(x)$ que satisfaz $g'(\xi) = 0$.

Para atingir este objetivo, tomamos a função de iteração $g(x)$ da equação $f(x) = 0$ da forma

$$g(x) = x + A(x)f(x),$$

e escolhemos $A(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$.

Temos de $g(x) = x + A(x)f(x)$,

$$g'(x) = 1 + A(x)f'(x) + A'(x)f(x).$$

Substituindo x por ξ e tomando $g'(\xi) = 0$, obtemos

$$0 = 1 + A(\xi)f'(\xi) + A'(\xi)f(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi),$$

pois, $f(\xi) = 0$.

Então, a função $A(x)$ é tal que $A(\xi) = -1/f'(\xi)$.

Claramente, a escolha mais simples para $A(x)$ é

$$A(x) = -1/f'(x).$$

Assim, obtemos o processo de iteração do método de Newton:

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dada a equação $f(x) = 0$, é fácil de confirmar que a função de iteração

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

associada o método de Newton satisfaz $g'(\xi) = 0$.

Pois,

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Como ξ é tal que $f(\xi) = 0$, obtemos então $g'(\xi) = 0$, desde que $f'(\xi) \neq 0$.

Exemplo. Considere a equação $f(x) = 0$, onde $f(x) = x^2 + x - 6$. Obter, pelo método de Newton, uma aproximação para o zero positivo.

Temos, $f'(x) = 2x + 1$. Portanto, a função de iteração associada é

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1} = \frac{x^2 + 6}{2x + 1}.$$

O processo iterativo associada pode ser dado como

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Escolhendo, $x_0 = 1.5$, obtemos

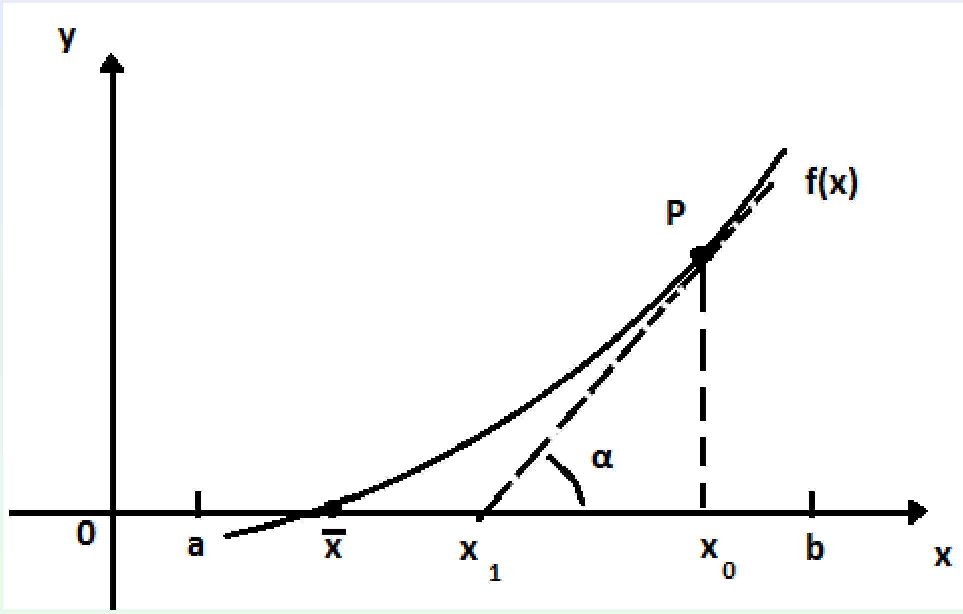
$$x_1 = \frac{x_0^2 + 6}{2x_0 + 1} = \frac{1.5^2 + 6}{2 \times 1.5 + 1} = 2.0625$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 6}{2x_1 + 1} = \frac{2.0625^2 + 6}{2 \times 2.0625 + 1} = 2.00076$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 6}{2x_2 + 1} = 2.00000$$

A convergência é muito rápida.

Interpretação gráfica do método de Newton



(Teorema: Convergência do Método de Newton)

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém um zero ξ de $f(x)$. Supomos também que $f'(\xi) \neq 0$.

Então, existe um intervalo $\tilde{I} \subset I$, contendo o zero ξ, tal que se $x_0 \in \tilde{I}$, a sequência gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

convergirá para ξ.

Demonstração.

$$\text{Seja,} \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$$\text{Então,} \quad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Como $f'(\xi) \neq 0$, existe um sub-intervalo $\hat{I}$ de I, contendo ξ no seu interior, no qual $g(x)$ e $g'(x)$ são continuas.

Como $g'(\xi) = 0$, podemos achar um sub intervalo $\tilde{I}$ de $\hat{I}$, centrado em ξ, onde $|g'(x)| < 1$.

Então, com uma escolha $x_0 \in \tilde{I}$, a iteração

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0,$$

converge para ξ.

Ordem de Convergência do Método de Newton.

Supomos que $\{x_k\}_{k\geq 0}$ gerado pelo método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $k \geq 0$, converge para o zero ξ de $f(x)$.

Como,

$$\xi - x_{k+1} = \xi - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

temos, para $e_k = \xi - x_k$, $k \geq 0$,

$$e_{k+1} = e_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0.$$

Precisamos agora o uso de seguinte teorema:

(Teorema de Taylor)

Se f é uma função derivável n vezes no intervalo real e fechado $[a, a+h]$, e derivável $n+1$ vezes no intervalo aberto $(a, a+h)$, então

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \; + \; \frac{f^{(n+1)}(\tilde{a})}{(n+1)!} h^{n+1},$$

onde $\tilde{a} \in (a, a+h)$.

O desenvolvimento da função $f(x)$ em torno de x_k nos dá

$$f(x) = f\left(x_k + (x - x_k)\right) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\tilde{x}),$$

onde sabemos que $\tilde{x}$ fica entre x e x_k. Se $x = \xi$ então,

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + (\xi - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(\xi - x_k)^2 f''(c_k),$$

onde c_k fica entre ξ e x_k. Isto é,

$$e_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = (\xi - x_k) + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = -(\xi - x_k)^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} = -e_k^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}.$$

Daí,

$$e_{k+1} = -e_k^2 \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(c_k)|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|} = C$$

Portanto, o método de Newton tem convergência quadrática.

Exemplo. Obter a raiz quadrada de $A = 7$.

Este problema é equivalente a obter o zero positivo da função $f(x) = x^2 - 7$.

Vamos aplicar o método de Newton para obter este zero.

Temos $f'(x) = 2x$. Portanto

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 7}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Com $x_0 = 2$, por exemplo, obtemos a partir do processo $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{7}{x_k}\right)$, $k = 0, 1, \ldots,$:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 2.0 & x_1 = 2.75 \\ x_2 = 2.647727273 & x_3 = 2.645752048 \\ x_4 = 2.645751311 & x_5 = 2.645751311 \end{array}$$

Exemplo. Encontre uma aproximação para um zero de $f(x) = sen(x) + x - 2$ pelo Método de Newton. Pare o processo quando o erro absoluto entre duas aproximações sucessivas for $< \epsilon = 0.0001$.

Como $f(1) = -0.158...$ e $f(1.5) = 0.497...$, isto é $f(1) \times f(1.5) < 0$. Então, o intervalo $I = [1, 1.5]$ contém um zero de $f(x)$.

Como $f'(x) = cos(x) + 1$ não muda de sinal no intervalo I, o zero é único.

Portanto, podemos tomar $x_0 = 1.25$,

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{ou seja} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{sen(x_k) + x_k - 2}{cos(x_k) + 1}.$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.25 \\
x_1 &= 1.098717983, & |x_1 - x_0| &= 0.151282017 > \epsilon \\
x_2 &= 1.106043635, & |x_2 - x_1| &= 0.007325652 > \epsilon \\
x_3 &= 1.106060158, & |x_3 - x_1| &= 0.000016523 < \epsilon
\end{aligned}$$

Logo, $x_3 = 1.106060158$ é a aproximação para o zero de $f(x)$ com a precisão desejada. Note que $f(x_3) = 4.2537319 * 10^{-10}$.