calcular $g(f(x)) = \dfrac{2}{f(x)+2}$, ou seja, $f(x) \neq -2$.

Como $f(x) = x+3$, então $x+3 \neq -2$, ou seja, $x \neq -5$.

Portanto, se $\underset{\mathcal{D}(f)}{\overset{\parallel}{A}} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, então $Im(f) = \{ f(x) : x \in \mathcal{D}(f) \}$

$= \{ x+3 \,;\, x \neq -5 \} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = \mathcal{D}(g)$.

Logo, vale que $Im(f) \subset \mathcal{D}(g)$ e o maior A para que isso ocorra é $A = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Além disso, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{2}{f(x)+2} = \dfrac{2}{x+3+2} = \dfrac{2}{x+5}$

3. Expresse a função $F(x) = (x^2+1)^{10}$ na forma $f \circ g$ e encontre f e g.

Solução: Note que na expressão de $F(x)$ primeiro calculamos x^2+1 e depois elevamos o resultado à 10^a potência.

Se denotarmos por $g(x) = x^2+1$, então $F(x) = (g(x))^{10}$.

Logo, $f(x) = x^{10}$ e, portanto, temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^{10} = (x^2+1)^{10} = F(x).$$

4) Expresse a função $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ na forma $f \circ g$ e encontre f e g.

Solução: Se $g(x) = \sqrt[3]{x}$, então $F(x) = \dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

Tomando, então, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ temos:

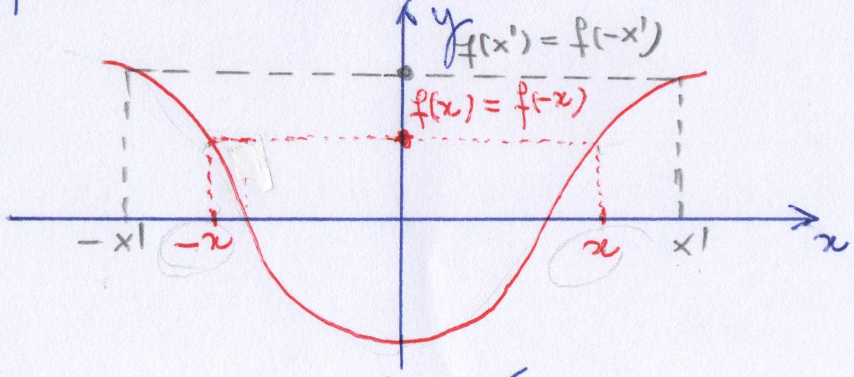
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+g(x)} = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = F(x).$$

Funções Pares e Ímpares

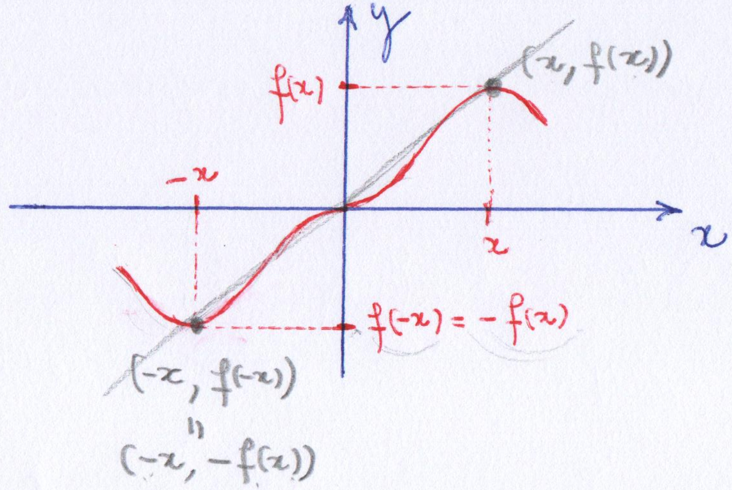
Dizemos que uma função f é uma função par se para todo x em seu domínio, f satisfaz $f(-x) = f(x)$.

Dizemos que uma função f é ímpar, se para todo x em seu domínio, f satisfaz $f(-x) = -f(x)$.

Observações: ① O significado geométrico de uma fç par é que seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y.



② O gráfico de uma fç ímpar é simétrico com relação à origem.



Note que $(-x, -f(x))$ pertence ao gráfico, sempre que $(x, f(x))$ também pertencer.

Exemplo: Determine se a fç é par, ímpar ou nenhum dos dois, nos seguintes casos:

ⓐ $f(x) = x^5 + x$, ⓑ $g(x) = 1 - x^2$, ⓒ $h(x) = 2x - x^2$.

Solução: Notemos primeiramente que $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$.

ⓐ $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, f é uma fç ímpar.

ⓑ $g(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - (-1)^2 x^2 = 1 - x^2 = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Portanto, g é uma fç par.

ⓒ $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2 \neq -2x + x^2 = -h(x)$ e tb $h(-x) = -2x - x^2 \neq 2x - x^2 = h(x)$. Portanto, h não é par e nem ímpar.

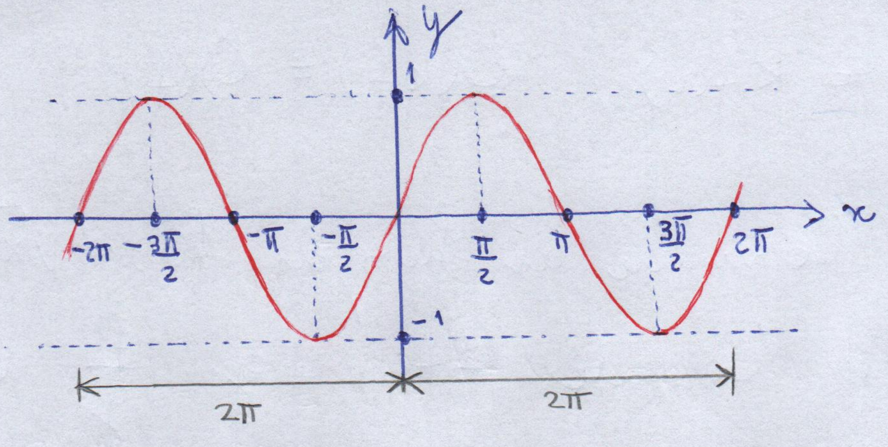
Funções Periódicas

Definição: Uma função f é dita periódica se para todo x de seu domínio, tem-se $f(x+T) = f(x)$, em que $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

O menor nº T que satisfaz a condição acima é dito o período de uma fç periódica.

Geometricamente, o gráfico de uma fç periódica de período T se repete a cada intervalo de comprimento T.

Exemplo: A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é periódica de período 2π.



Note que $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x \cos 2\pi + \operatorname{sen} 2\pi \cos x =$
$= \operatorname{sen} x \cdot 1 + 0 \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$.

2π é o período da função $y = \operatorname{sen} x$.

Operações com Funções

Definição: Sejam f e g duas funções com $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$. Definimos:

(a) A função soma $f+g$ por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$.

(b) A função produto $f.g$ por $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, $D(f.g) = D(f) \cap D(g)$.

(c) A função quociente $\frac{f}{g}$ por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathbb{R} \, ; \, x \in D(f) \cap D(g) \text{ e } g(x) \neq 0\}$.

(d) A função produto por uma constante $k.f$ por $(kf)(x) = k.f(x)$, $D(k.f) = D(f)$.

Exemplo: Considere as funções $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{5-x}$. Calcule $f+g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ e $2f$ e seus respectivos domínios.

Solução: Observe, primeiramente, que

$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty)$ e

$\mathcal{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} : 5-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\} = (-\infty, 5]$.

Assim; 1 $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\} = [1, 5]$ e,

então $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ e

$\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = [1, 5]$.

2 $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{(x-1)(5-x)} =$
$= \sqrt{-x^2+6x-5}$ e $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = [1, 5]$.

3 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-x}} = \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$ e

$\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathbb{R} ; x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \text{ e } g(x) \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} ; x \in [1, 5] \text{ e } \underbrace{\sqrt{5-x} \neq 0}_{x \neq 5}\} = [1, 5)$.

4 $(2f)(x) = 2f(x) = 2\sqrt{x-1}$ e $\mathcal{D}(2f) = \mathcal{D}(f) =$
$= [1, +\infty)$.

Funções Polinomiais

Uma função polinomial de grau n é uma função dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$.

Note que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

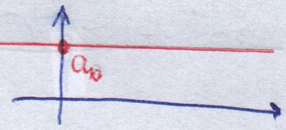
Casos Particulares:

(0) $\underline{n = 0}$: Função constante

$f(x) = a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$

Temos $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \{a_0\}$

$Graf(f) = \{(x, a_0) : x \in \mathbb{R}\}$.



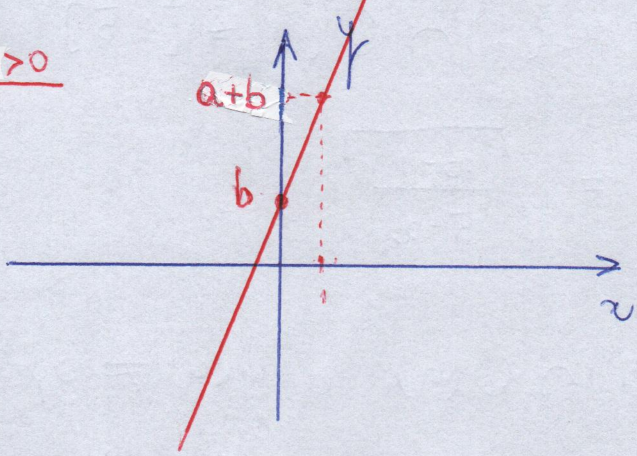
(1) $\underline{n = 1}$: Função Afim

$$f(x) = \overset{a_1}{\overset{\|}{a}}\,x + \overset{a_0}{\overset{\|}{b}} \text{ , com } a, b \in \mathbb{R} \text{ , } a \neq 0.$$

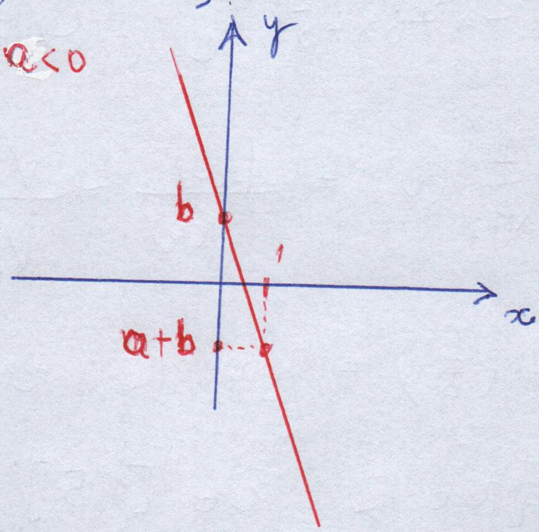
Temos que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$ e

$Graf(f) = \{(x, ax+b) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$.

$\underline{a>0}$



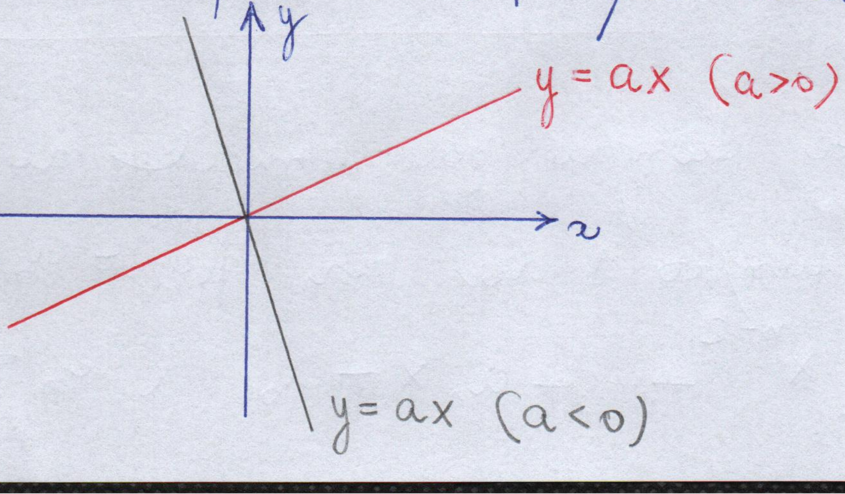
$a<0$



x	$f(x) = ax+b$	$(x, f(x))$
0	$a.0+b = b$	$(0, b)$
1	$a.1+b = a+b$	$(1, a+b)$

Se $b=0$, isto é $f(x) = ax$, então f recebe um nome especial (função linear).

Neste caso, o gráfico <u>sempre</u> passa pela origem.



Observação: A função constante $f(x) = b$ $(a=0)$ também é um caso particular de fç afim, porém essa fç é uma fç polinomial de grau 0.

② $n=2$: Função quadrática

$$f(x) = \overset{a_2}{\overset{\shortparallel}{a}}x^2 + \overset{a_1}{\overset{\shortparallel}{b}}x + \overset{a_0}{\overset{\shortparallel}{c}}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

O gráfico de f é o que chamamos de parábola. Note que $D(f) = \mathbb{R}$.

O vértice V da parábola é o ponto mais baixo da parábola (caso $a > 0$) ou o ponto mais alto (caso $a < 0$). Suas coordenadas são:

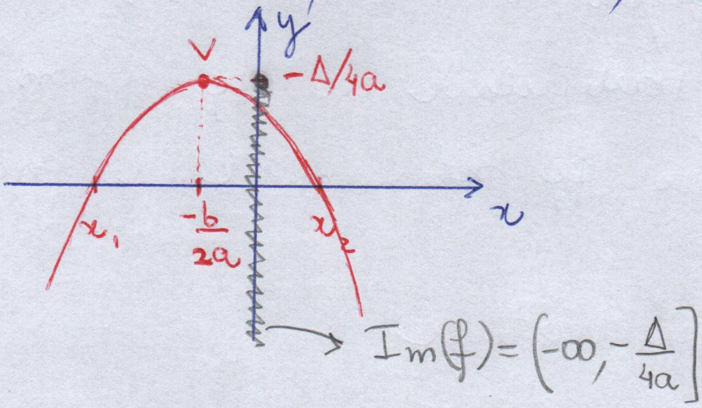
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right), \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac.$$

As raízes da parábola são o(s) valor(es) de x no(s) qual(quais) o gráfico cruza o eixo x, isto é, $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$

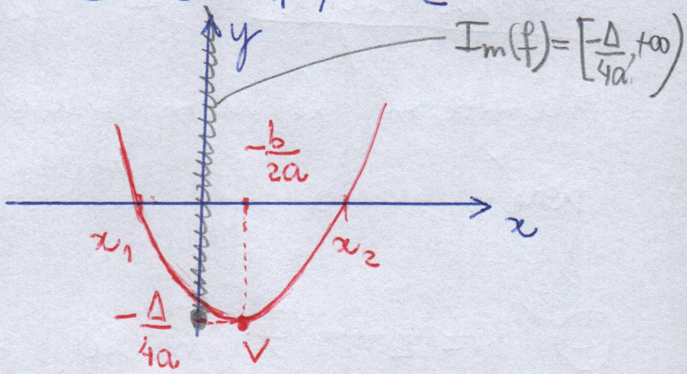
$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Temos então seis possíveis casos dependendo do sinal de a e Δ. São eles:

① Se $\Delta > 0$, então $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$.

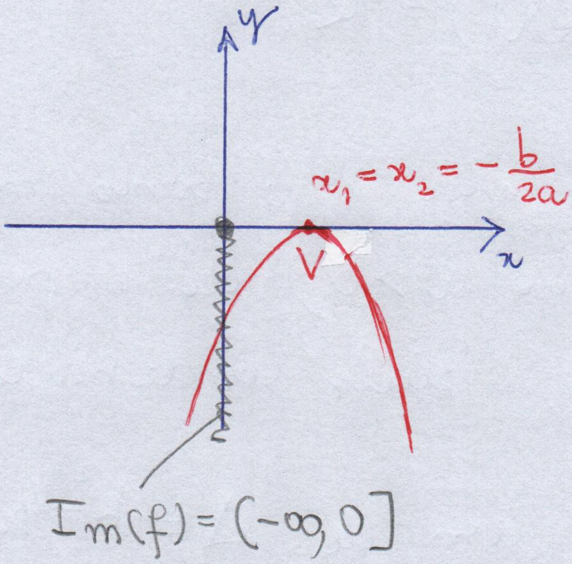


caso $a<0$

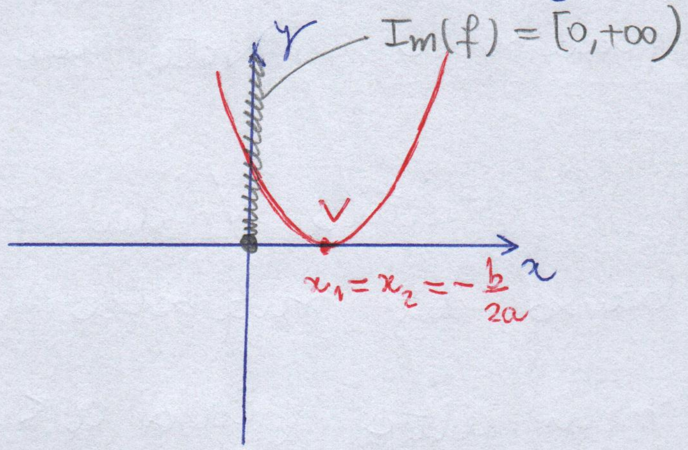


caso $a>0$

② Se $\Delta = 0$, então $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 = x_2$.

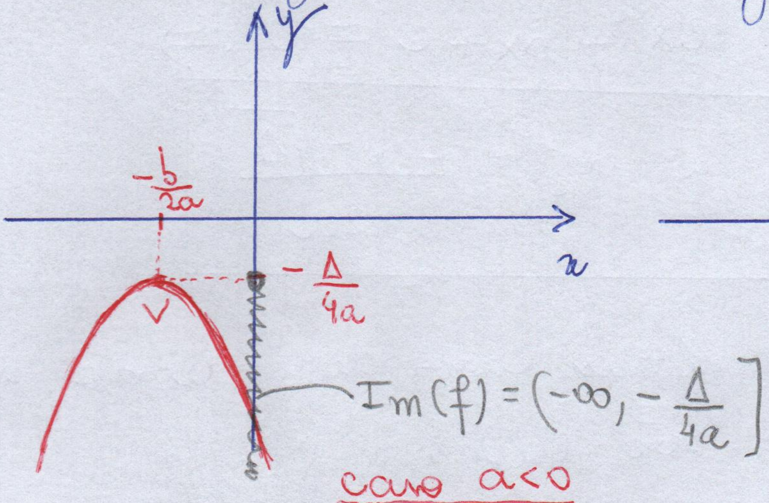


caso $a<0$

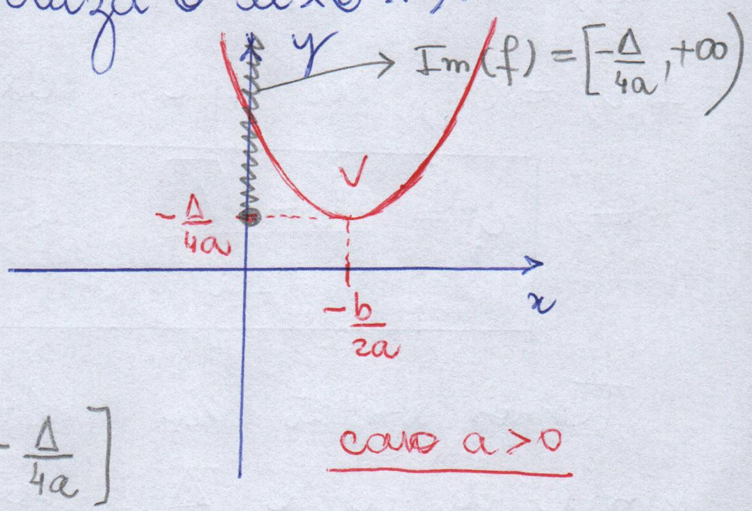


caso $a>0$

③ Se $\Delta < 0$, então x_1 e $x_2 \notin \mathbb{R}$, logo a parábola não tem raíz real (não cruza o eixo x).



caso $a<0$



caso $a>0$