Cálculo Numérico

Ajuste de Curvas pelo Método dos Quadrados Mínimos

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP.

Um ramo da Teoria da Aproximação se trata de **aproximar** e **obter informações** sobre funções que são

- definidas de uma maneira mais complicadas, ou
- definidas apenas em pontos ou em conjuntos limitados.

Neste sentido procuramos aproximar uma função $f(x)$ por uma função mais simples $G(x)$ de maneira que

- a diferença entre $f(x)$ e sua aproximação $G(x)$ seja mínima, e que
- a função $G(x)$ seja mais fácil de ser manuseada do que a função $f(x)$.

O que queremos dizer quando falamos a diferença seja mínima?

No caso do *Método dos Quadrados Mínimos*, que é considerado nesta aula, o objetivo é minimizar a quantidade I, onde

Caso Discreto:

$$I = \sum_{j=1}^{N} [f(x_j) - G(x_j)]^2 w_j,$$

onde w_j em geral são pesos positivos.

- Caso mais simples: $w_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Caso Contínuo:

$$I = \int_a^b [f(x) - G(x)]^2 w(x) dx,$$

onde $w(x)$ em geral é uma função-peso positiva.

- Caso mais simples: $w(x) = 1$ em $[a, b]$.

x	-1.0	-0.6	-0.5	-0.3	0	0.2	0.4	0.5	1.0
$f(x)$	2.05	0.45	0.4	0.5	0	0.2	0.6	0.512	2.05

Uma forma de trabalhar com uma função definida por uma tabela de valores é *o Método dos Quadrados Mínimos*.

É aconselhável quando:

a) é preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento.

b) os valores tabelados poderão conter erro que, em geral, não são previsíveis.

Também é aconselhável quando precisamos expressar uma função mais complicada por uma função simples, como por exemplo, por um polinômio.

O problema do ajuste de curvas no caso em que temos uma tabela de pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_N, f(x_N))$, com $x_1, x_2, \ldots, x_N$ pertencentes a um intervalo $[a, b]$, consiste em:

"Escolhidas" n funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$, contínuas em $[a, b]$, obter n constantes α_1, α_2, $\ldots$, α_n tais que a função

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

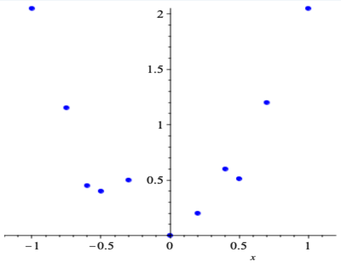
Este é um modelo matemático linear porque os coeficientes a determinar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, aparecem linearmente, embora as funções $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ possam ser funções não lineares de x.

A escolha das função pode ser feita observando o gráfico dos pontos tabelados ou baseando-se em fundamentos teóricos do experimento que nos forneceu a tabela.

Exemplo. Considere a tabela de valores obtidas a partir de experimentos.

x	-1.0	-0.75	-0.6	-0.5	-0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1.0
$f(x)$	2.05	1.153	0.45	0.4	0.5	0	0.2	0.6	0.512	1.2	2.05

O diagrama de dispersão dos valores tabelados é:



É natural escolhermos uma função $g_1(x) = x^2$ e procuramos então obter o valor de α tal que $G(x) = \alpha\, x^2$ aproxime ao máximo os valores tabelados.

No caso geral, escolhidas as funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, temos que estabelecer o conceito de proximidade entre as funções $G(x)$ e $f(x)$ para obter as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Algumas ideias são impor que

- $\diamondsuit$ $\displaystyle\max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j) - G(x_j)|$ seja mínimo, or

- $\diamondsuit$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - G(x_j)|$ seja mínimo.

No caso do *Método dos Quadrados Mínimos*, impomos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sejam determinados de forma que

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} [f(x_j) - G(x_j)]^2$ seja mínimo.

Considere a função $f(x)$ dada pela tabela

j	1	2	$\cdots$	N
x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
$f(x_j)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_N)$

Com as funções $g_1, g_2, \ldots, g_n$ escolhidas de alguma forma, o problema de obter a aproximação

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

tal que $\sum_j^N [f(x_j) - G(x_j)]^2$ seja mínimo pode ser resolovido pelo sistema

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

onde $\quad a_{i,k} = \sum_{j=1}^N g_i(x_j) g_k(x_j) \quad$ e $\quad b_i = \sum_{j=1}^N g_i(x_j) f(x_j)$.

Seja

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{N}[f(x_j) - G(x_j)]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left[f(x_j) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x_j)\right]^2.$$

Do Cálculo Diferencial sabemos que o mínimo de $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ocorre em

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\sum_{j=1}^{N}\left[f(x_j) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x_j)\right]^2 = 0,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Fazendo o desenvolvimento, obtemos

$$\sum_{j=1}^{N} 2\left[f(x_j) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x_j)\right] g_i(x_j) = 0,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

As equações

$$\sum_{j=1}^{N} 2\left[f(x_j) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x_j)\right] g_i(x_j) \; = 0,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, que podem ser escritas como

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_i(x_j) g_k(x_j) \; = \sum_{j=1}^{N} f(x_j) g_k(x_j),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Equivalentemente, podem ser escritas como

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) g_k(x_j) \; = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) f(x_j),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

A partir de

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) g_k(x_j) = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) f(x_j),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, tomando

$$b_i = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) f(x_j) \quad \text{e} \quad a_{i,k} = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) g_k(x_j), \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

e $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos o sistema linear $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, onde

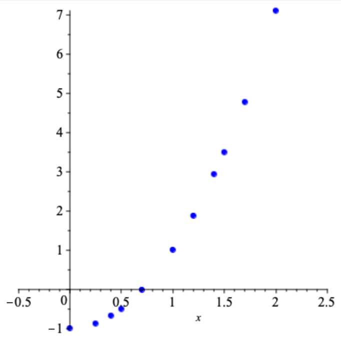
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz $\mathbf{A}$ é simétrica, pois $a_{i,k} = a_{k,i}$.

Conisdere a tabela de valores obtidos a partir de um experimento.

x	0.0	0.25	0.4	0.5	0.7	1.0	1.2	1.4	1.5	1.7	2.0
$f(x)$	-1.0	-0.88	-0.68	-0.51	-0.02	1.0	1.87	2.93	3.49	4.77	7.1

O diagrama de dispersão dos valores tabelados mostra que a tabela representa uma parábola do tipo $a + b\,x^2$.



Exemplo 1. Valores tabelados:

x	0.0	0.25	0.4	0.5	0.7	1.0	1.2	1.4	1.5	1.7	2.0
$f(x)$	-1.0	-0.88	-0.68	-0.51	-0.02	1.0	1.87	2.93	3.49	4.77	7.1

Portanto, escolhemos $G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$, onde

$$g_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad g_2(x) = x^2.$$

Primeiro determinarmos os valores

$$a_{i,k} = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) g_k(x_j) \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) f(x_j),$$

para $k = 1, 2$ e $i = 1, 2$.

Aqui $N = 11$ é o número de pontos na tabela.

Depois resolvemos o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Para facilitar os cálculos, consideramos a tabela com índices e valores informados:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_j	0.0	0.25	0.4	0.5	0.7	1.0	1.2	1.4	1.5	1.7	2.0
$f(x_j)$	-1.0	-0.88	-0.68	-0.51	-0.02	1.0	1.87	2.93	3.49	4.77	7.1

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} b_1 &= \textstyle\sum_{j=1}^{11} g_1(x_j)\, f(x_j) = \sum_{j=1}^{11} f(x_j) \\ &= \big[(-1.0) + (-0.88) + (-0.68) + (-0.51) + (-0.02) \\ &\qquad + 1.0 + 1.87 + 2.93 + 3.49 + 4.77 + 7.1\big] \\ &= 18.07, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \textstyle\sum_{j=1}^{11} g_2(x_j)\, f(x_j) = \sum_{j=1}^{11} x_j^2\, f(x_j) \\ &= \big[(0.0)^2{\times}(-1.0) + (0.25)^2{\times}(-0.88) + (0.4)^2{\times}(-0.68) \\ &\qquad + (0.5)^2{\times}(-0.51) + (0.7)^2{\times}(-0.02) + (1.0)^2{\times}1.0 + (1.2)^2{\times}1.87 \\ &\qquad + (1.4)^2{\times}2.93 + (1.5)^2{\times}3.49 + (1.7)^2{\times}4.77 + (2.0)^2{\times}7.1\big] \\ &= 59.1723, \end{aligned}$$

Exemplo 1.

$$a_{1,1} = \sum_{j=1}^{11} g_1(x_j)g_1(x_j) \; = \; \sum_{j=1}^{11} 1 \; = \; 11,$$

$$\begin{aligned}
a_{2,1} = a_{1,2} &= \sum_{j=1}^{11} g_1(x_j)g_2(x_j) \; = \; \sum_{j=1}^{11}(x_j)^2 \\
&= \big[(0.0)^2 + (0.25)^2 + (0.4)^2 + (0.5)^2 + (0.7)^2 \\
&\qquad + (1.0)^2 + (1.2)^2 + (1.4)^2 + \; (1.5)^2 + (1.7)^2 + (2.0)^2\big] \\
&= 14.5025,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,2} &= \sum_{j=1}^{11} g_2(x_j)g_2(x_j) \; = \; \sum_{j=1}^{11}(x_j)^4 \\
&= \big[(0.0)^4 + (0.25)^4 + (0.4)^4 + (0.5)^4 + (0.7)^4 \\
&\qquad + (1.0)^4 + (1.2)^4 + (1.4)^4 + \; (1.5)^4 + (1.7)^4 + (2.0)^4\big] \\
&= 36.66190625
\end{aligned}$$

Exemplo 1. Com os valores de b_i e $a_{i,k}$ obtidos temos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 11.0 & 14.5025 \\ 14.5025 & 36.66190625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.07 \\ 59.1723 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$\alpha_1 = -1.0140298190471946 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 = 2.0151234621285394.$$

Então, o polinômio quadrático

$$G(x) = -1.0140298190471946 + 2.0151234621285394\, x^2$$

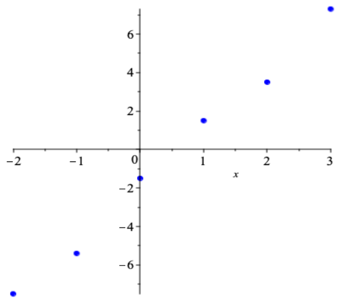
é que melhor aproxima a função $f(x)$, dada pela tabela, da forma

$$\sum_{j=0}^{11} [f(x_j) - G(x_j)]^2 = \min_{a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{11} \left[f(x_j) - (a + b\, x_j^2)\right]^2.$$

Conisdere a tabela de valores obtidos a partir de um experimento.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-7.5	-5.4	-1.5	1.5	3.5	7.3

O diagrama de dispersão dos valores tabelados mostra que a tabela representa uma reta $a + b\,x$.



Exemplo 2.

Portanto, escolhermos que $G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$, onde

$$g_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad g_2(x) = x.$$

Primeiro determinarmos os valores

$$a_{i,k} = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) g_k(x_j) \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{j=1}^{N} g_i(x_j) f(x_j),$$

para $k = 1, 2$ e $i = 1, 2$. Aqui $N = 6$ é o número de pontos na tabela.

$$a_{1,1} = \sum_{j=1}^{6} g_1(x_j) g_1(x_j) = \sum_{j=1}^{6} 1 = 6.$$

$$a_{1,2} = \sum_{j=1}^{6} g_1(x_j) g_2(x_j) = \sum_{j=1}^{6} x_j = 3.$$

$$a_{2,2} = \sum_{j=1}^{6} g_2(x_j) g_2(x_j) = \sum_{j=1}^{6} x_j^2 = 19.$$

Exemplo 2.

Matriz é simétrica $a_{2,1} = a_{1,2} = 3$

$$b_1 = \sum_{j=1}^{6} g_1(x_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^{6} f(x_j) = -2.1$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^{6} g_2(x_j) f(x_j) = \sum_{j=1}^{6} x_j f(x_j) = 50.8$$

Agora resolvemos o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.1 \\ 50.8 \end{bmatrix}.$$

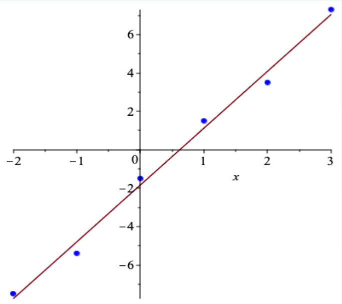
Exemplo 2.
Cuja solução é

$$\alpha_1 = -1.831428571 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 2.962857143$$

Assim, a reta

$$G(x) = -1.831428571 + 2.962857143x$$

é a reta que melhor aproxima os pontos dados pelo método dos mínimos quadrados. Veja o gráfico da reta e dos pontos dados.



No caso contínuo, o problema de ajuste de curvas consiste em:

dada uma função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ e escolhidas as funções $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ todas contínuas em $[a, b]$, determinar n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Impormos que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sejam escolhidos de maneira que

- $$\int_a^b [f(x) - G(x)]^2 dx \quad \text{seja mínimo.}$$

Realizando o desenvolvimento do mesmo modo que foi feito no caso discreto, obtemos:

Dada a função $f(x)$ definida em $[a, b]$, com as funções $g_1, g_2, \ldots, g_n$ escolhidas de alguma forma, o problema de obter a aproximação

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

tal que $\int_a^b [f(x) - G(x)]^2 dx$ seja mínimo pode ser resolvido obtendo a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

onde

$$a_{i,k} = \int_a^b g_i(x) g_k(x) dx \quad \text{e} \quad b_i = \int_a^b g_i(x) f(x) dx.$$

Exemplo. Obter, entre todas as parábolas, aquela que fica "mais próxima" de $f(x) = 4x^3$ no intervalo $[0, 1]$.

Escolher $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$, e com isso, preciso encontrar os coeficientes α_1, α_2 e α_3 tais que a função

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2,$$

se aproxime ao máximo de $4x^3$.

Desenvolvimento:

$$b_1 = \int_0^1 g_1(x) f(x) dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1.$$

$$b_2 = \int_0^1 g_2(x) f(x) dx = \int_0^1 4x^4 dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}.$$

$$b_3 = \int_0^1 g_3(x) f(x) dx = \int_0^1 4x^5 dx = \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$a_{1,1} = \int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1.$$

$$a_{2,1} = a_{1,2} = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$a_{3,1} = a_{1,3} = \int_0^1 g_1(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$a_{2,2} = \int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

$$a_{3,2} = a_{2,3} \int_0^1 g_2(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

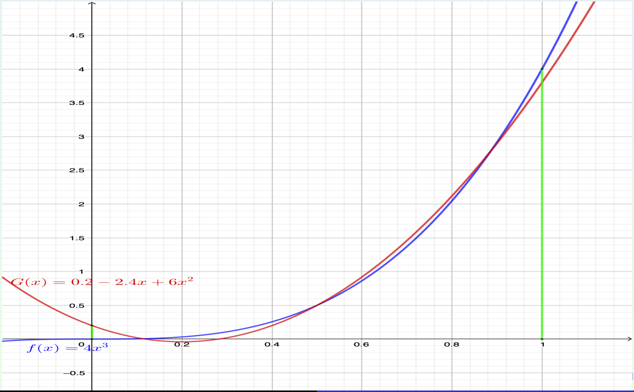
$$a_{3,3} = \int_0^1 g_3(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^4dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

O sistema linear é então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/5 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$\alpha_1 = 0.2, \quad \alpha_2 = -2.4, \quad \alpha_3 = 6.0$$



Uma observação.

Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/5 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

também é equivalente de resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 48 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Exemplo. Obter, entre todas as parábolas, aquela que fica "mais próxima" de $f(x) = 4x^3$ no intervalo $[0, 1]$. Mas, agora escolhemos

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = 2x - 1 \quad \text{e} \quad g_3(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Precisamos de encontrar os coeficientes α_1, α_2 e α_3 tais que a função

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = a + bx + cx^2,$$

se aproxime ao máximo de $4x^3$.

Desenvolvimento:

$$b_1 = \int_0^1 g_1(x) f(x) dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[\frac{4x^4}{4}\right]_0^1 = 1,$$

$$b_2 = \int_0^1 g_2(x) f(x) dx = \int_0^1 (2x-1)4x^3 dx = \left[\frac{8x^5}{5} - x^4\right]_0^1 = \frac{3}{5},$$

$$b_3 = \int_0^1 g_3(x) f(x) dx = \int_0^1 (6x^2-6x+1)4x^3 dx = \left[\frac{24x^6}{6} - \frac{24x^5}{5} + \frac{4x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{5},$$

$$a_{1,1} = \int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1,$$

$$a_{2,1} = a_{1,2} = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = \int_0^1 (2x-1)dx = \left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_0^1 = 0,$$

$$a_{3,1} = a_{1,3} = \int_0^1 g_1(x)g_3(x)dx = \int_0^1 (6x^2-6x+1)dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x\right]_0^1 = 0,$$

$$a_{2,2} = \int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx = \int_0^1 (2x-1)^2dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$a_{3,2} = a_{2,3} \int_0^1 g_2(x)g_3(x)dx = \int_0^1 (2x-1)(6x^2-6x+1)dx = \cdots = 0,$$

$$a_{3,3} = \int_0^1 g_3(x)g_3(x)dx = \int_0^1 (6x^2-6x+1)^2dx = \cdots = \frac{1}{5}$$

O sistema linear é então

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \alpha_3 = 1$$

Então,

$$\begin{aligned} G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) &= 1 + 1.8(2x - 1) + (6x^2 - 6x + 1) \\ &= 0.2 - 2.4x + 6x^2. \end{aligned}$$

Vimos no caso discreto que, quando queremos encontrar a reta $G(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ que melhor aproxima uma função $f(x)$, escolhemos $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e resolvemos o sistema

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, resolvemos

$$\begin{bmatrix} N & \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j & \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} f(x_j) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j f(x_j) \end{bmatrix}.$$

Há outros casos que podem ser convertidos na solução de um sistema 2×2.

1) Dados N valores de uma função f, queremos encontrar uma função G que melhor aproxima $f(x)$, tal que

$$G(x) = ae^{bx},$$

ou seja, precisamos determinar a e b.

• Vamos transformar a função não linear $G(X)$ em um função linear aplicando ln em ambos os lados, assim

$$ln(G(x)) = ln(ae^{bx})$$
$$ln(G(x)) = ln(a) + ln(e^{bx})$$
$$ln(G(x)) = ln(a) + b\,x.$$

• Denotamos $h(x) = ln(G(x))$ que é uma reta e temos que determinar $\alpha_1 = ln(a)$ e $\alpha_2 = b$, ou seja determinar a reta

$$h(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Como a função $G(x)$ foi "linearizada" também precisamos "linearizar" os valores dados da função $f(x)$, ou seja, vamos usar os valores $ln(f(x_j))$.

Lembre-se: vamos encontrar $h(x) = ln(G(x))$ que aproxima $ln(f(x))$, assim, $G(x)$ aproxima $f(x)$.

Exemplo: Ajustar os pontos abaixo por uma função do tipo $G(x) = ae^{bx}$.

x_j	0.1	1.5	3.3	4.5	5.0
$f(x_j)$	5.9	8.8	12.0	19.8	21.5

Vamos ajustar $ln(f(x))$ por $h(x) = ln(G(x)) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, onde $\alpha_1 = ln(a) \Rightarrow a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Calculamos os valores de $ln(f(x_j))$:

x_j	0.1	1.5	3.3	4.5	5.0
$f(x_j)$	5.9	8.8	12.0	19.8	21.5
$ln(f(x_j))$	1.77	2.17	2.48	2.99	3.07

e resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} ln(f(x_j)) \\ \sum_{j=1}^{N} x_j ln(f(x_j)) \end{bmatrix},$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 5 & 14.4 \\ 14.4 & 58.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.48 \\ 40.42 \end{bmatrix}.$$

Cuja solução é

$$\alpha_1 = 1.734215501 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0.2645085066$$

Logo,

$$a = e^{\alpha_1} = e^{1.734215501} = 5.664482280$$

e

$$b = \alpha_2 = 0.2645085066$$

e a função $G(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ é dada por

$$G(x) = 5.664482280 \ e^{0.2645085066 \ x} \ .$$

Outras transformações possíveis são

2)

$$G(x) = \frac{1}{a + bx} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{1}{G(x)} = a + bx = \alpha_1 + \alpha_2 x,$$

usando os valores de $\frac{1}{f(x_j)}$ encontra-se a reta $h(x)$, e os valores a e b são obtidos por $a = \alpha_1$ e $b = \alpha_2$.

3)

$$G(x) = ab^x \quad \Rightarrow \quad h(x) = ln(G(x)) = ln(a) + ln(b)x = \alpha_1 + \alpha_2 x,$$

usando os valores de $\ln(f(x_j))$ encontra-se a reta $h(x)$, e os valores a e b são obtidos por $a = e^{\alpha_1}$ e $b = e^{\alpha_2}$.

4)

$$G(x) = e^{a+bx} \quad \Rightarrow \quad h(x) = ln(G(x)) = a + bx = \alpha_1 + \alpha_2 x,$$

usando os valores de $\ln(f(x_j))$ encontra-se a reta $h(x)$, e os valores a e b são obtidos por $a = \alpha_1$ e $b = \alpha_2$.

5)

$$G(x) = ax^b \quad \Rightarrow \quad h(x) = ln(G(x)) = ln(a) + b\ ln(x) = \alpha_1 + \alpha_2 t,$$

neste caso temos que usar os valores de $\ln(f(x_j))$

e também os valores de $ln(x_j)$, pois a variável depois da transformação é $ln(x)$.

Então, encontra-se a reta $h(x)$, e os valores a e b são obtidos por $a = e^{\alpha_1}$ $b = \alpha_2$.

Ajustar os pontos abaixo por uma função do tipo $G(x) = ax^b$.

x_j	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_j)$	3	23	96	293	729

Como $G(x) = ax^b \Rightarrow h(x) = ln(G(x)) = ln(a) + b\ ln(x) = \alpha_1 + \alpha_2 t$, precisamos calcular $t_j = ln(x_j)$ e $ln(f(x_j))$

$t_j = ln(x_j)$	0	0.41	0.69	0.92	1.1
$ln(f(x_i))$	1.1	3.14	4.56	5.68	6.59

e resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} t_j \\ \sum_{j=1}^{N} t_j & \sum_{j=1}^{N} t_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} ln(f(x_j)) \\ \sum_{j=1}^{N} t_j ln(f(x_j)) \end{bmatrix},$$

ou seja e resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 3.12 \\ 3.12 & 2.7006 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.07 \\ 16.9084 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\alpha_1 = 1.1006 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 4.9895$$

Para encontrar os valores de a e b fazemos

$$a = e^{\alpha_1} = e^{1.1006} = 3.006$$

e

$$b = \alpha_2 = 4.9895$$

e a função G do tipo ax^b, que melhor aproxima f é dada por

$$G(x) = 3.006\ x^{4.9895}\ .$$

Gráfico dos pontos de $f(x)$ em azul

x_j	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_j)$	3	23	96	293	729

e da função $G(x) = 3.006\ x^{4.9895}$ em vermelho