Disciplina Álgebra Linear

- Parte da matemática voltada para o estudo de métodos para a manipulação de matrizes e vetores

IMPORTÂNCIA

Arranjos numéricos retangulares (matrizes) podem representar linhas, ângulos e outros aspectos geométricos

Roteamento de pacotes em Redes de Computadores

PROBLEMA

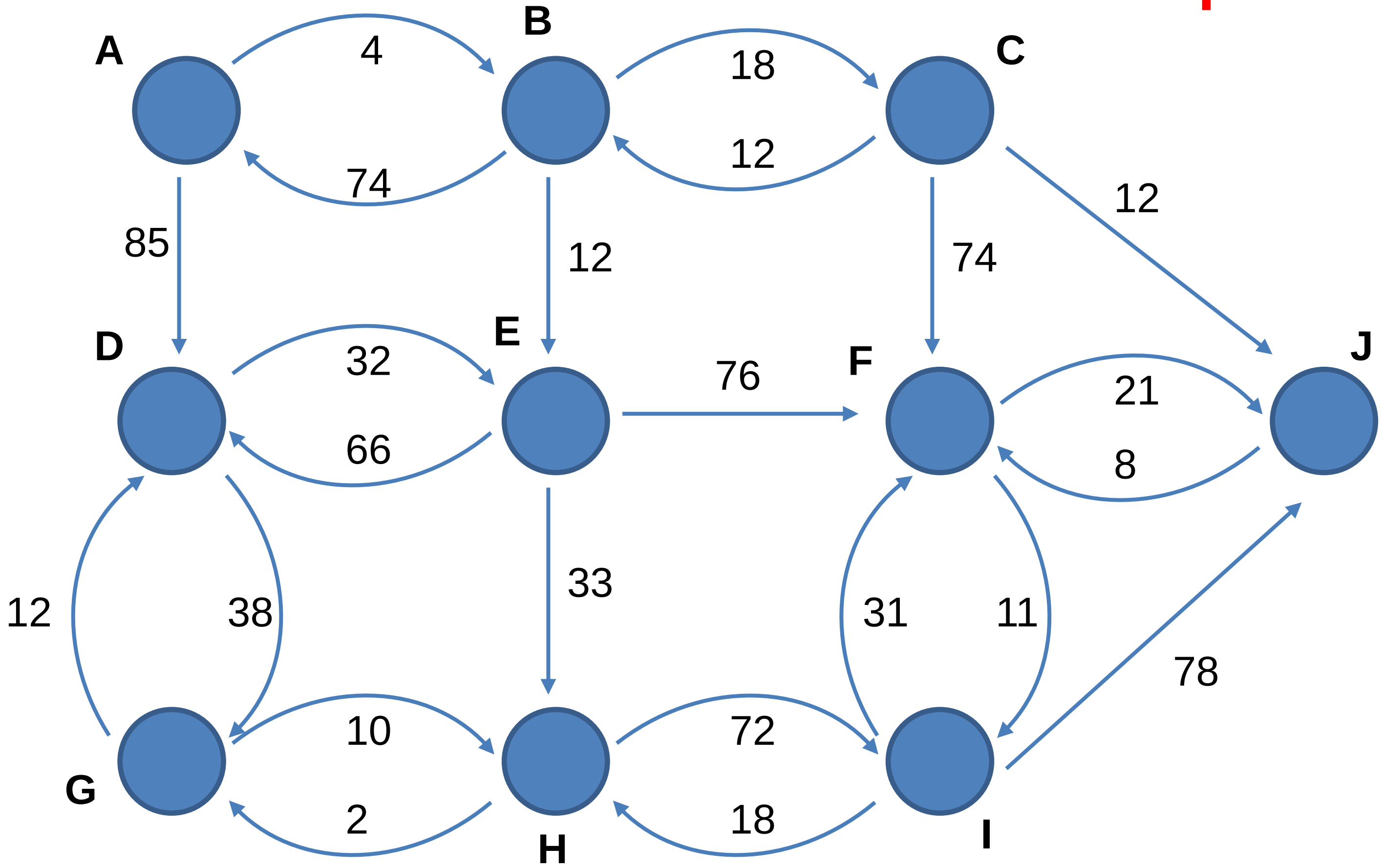
- Otimização de rotas a serem seguidas pelos diversos pacotes em trânsito na internet

- A dificuldade está em determinar como a demanda por serviço (taxa de chegada de cliente) deve ser gerada de modo a não criar sobrecargas nem congestionamentos ao longo da rede, operando numa situação ótima

Exemplo

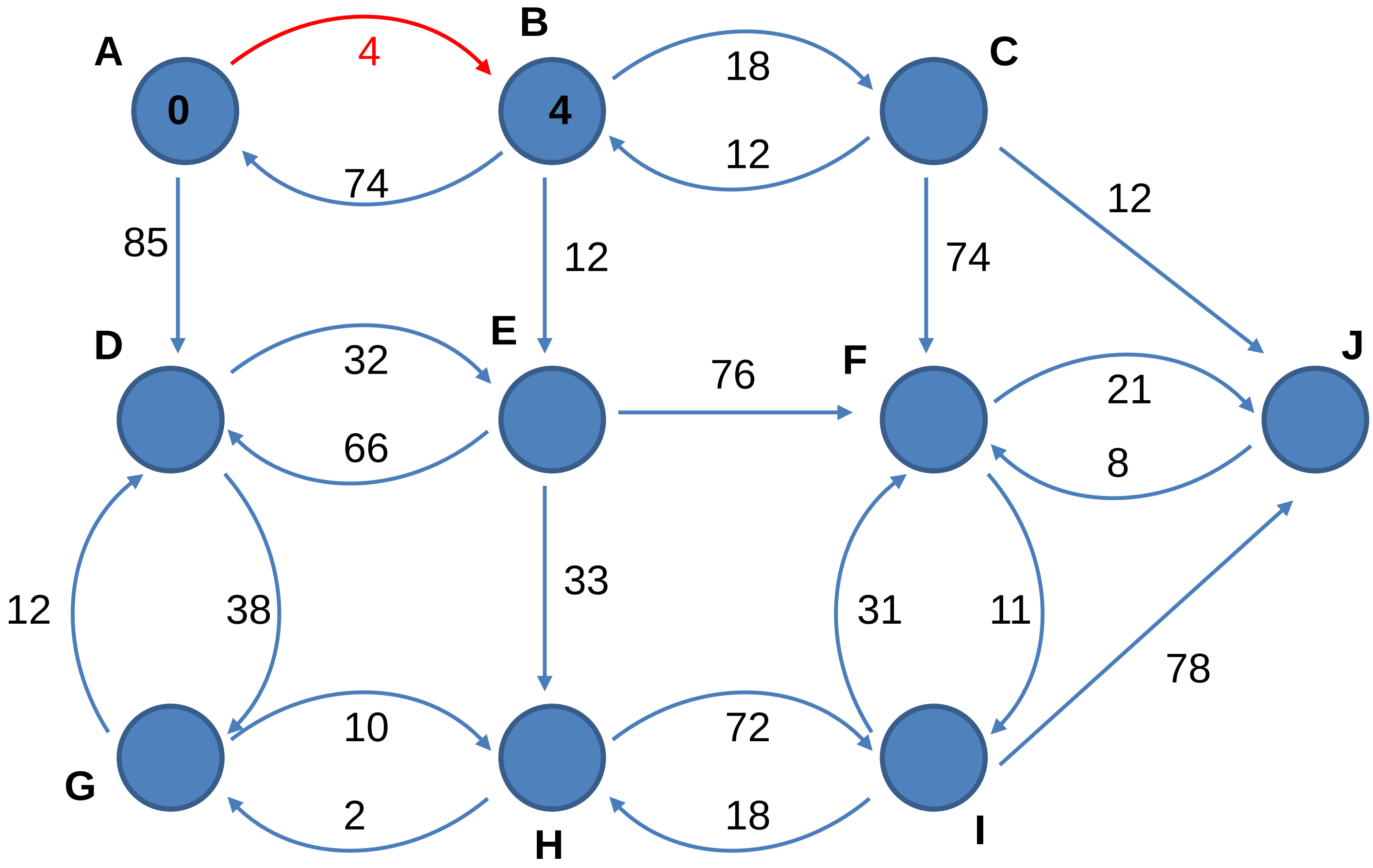
Calcular melhor rota partindo de A

- Malha de roteadores



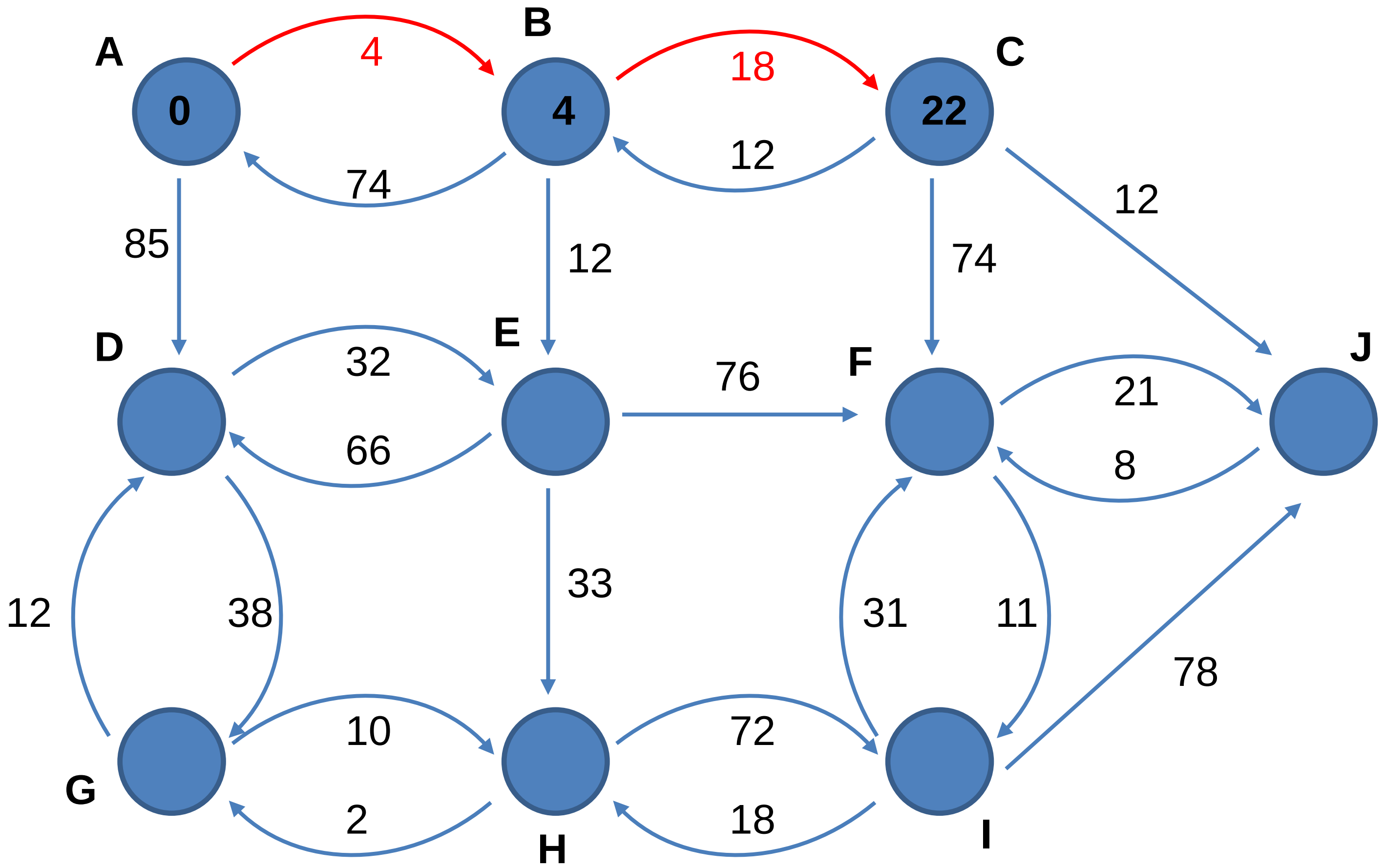
Melhor Rota

A → **B ?**



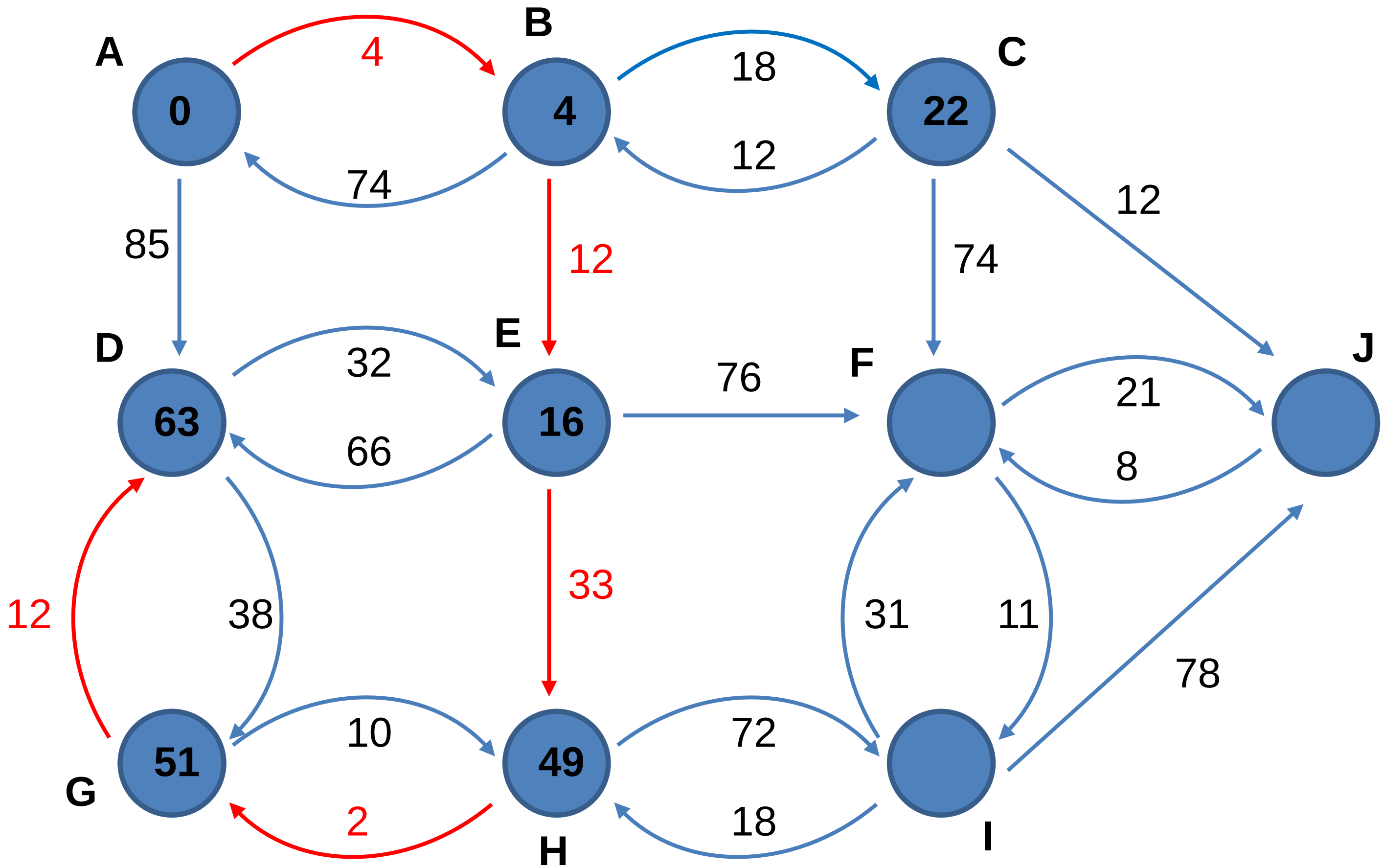
Melhor Rota

A → **C ?**



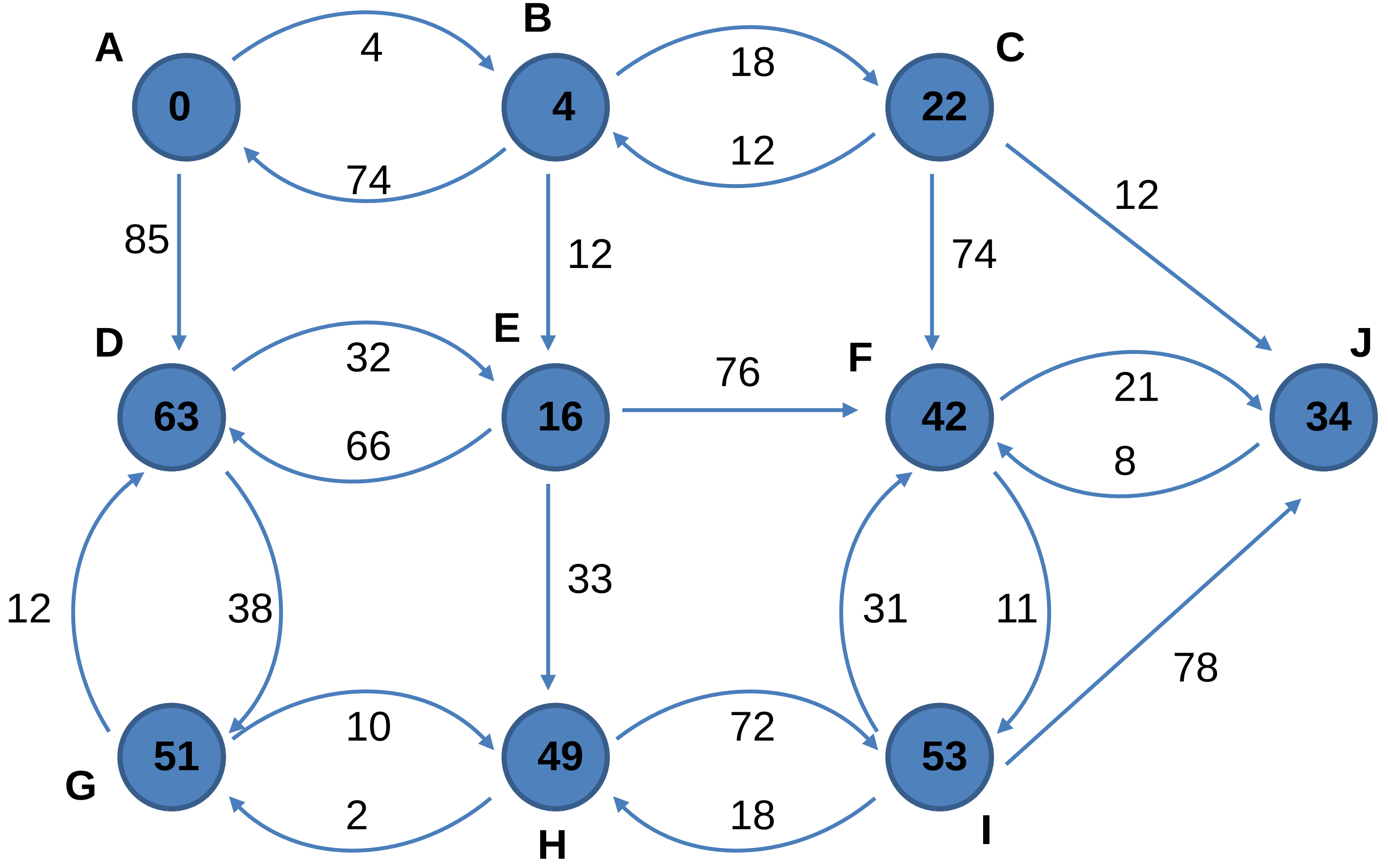
Melhor Rota

A → D ?



Introdução à Ciência da Computação

Melhor Rota


A
0
B
4
C
22
D
63
E
16
F
42
J
34
G
51
H
49
I
53
4
74
18
12
12
85
12
74
32
66
76
21
8
12
38
33
31
11
78
10
2
72
18

Técnica

- Origem na teoria de fluxo de redes

Fluxo de Redes

Existem pontos de parada na rede (vértices) e caminhos possíveis entre estas paradas (arestas), logo é possível otimizar os fluxos entre as paradas através de, pelo menos, busca exaustiva para melhor solução

Tentativa de encontrar algoritmos para redução do espaço de busca

Disciplinas que estudam fluxo de redes: Teoria dos Grafos e Otimização Linear Contínua (conteúdo depende de manipulação de matrizes)

Algoritmo para roteamento de pacotes

Caminhos mínimos – proposto por Edsger Dijkstra (cientista holandês)

Disciplina que estuda roteamento de pacotes: Redes de Computadores I

Modelagem de Sistemas Computacionais

- Outra área de aplicação de técnicas advindas da álgebra linear

MODELO

Representação do sistema real, podendo assumir formatos algébricos ou funcional (simulação)

Objetivo é ser fiel ao sistema

VANTAGENS

Fomenta o estudo das diferentes soluções possíveis

Baixo custo para alterações

EXEMPLO

Uso compartilhado de impressora

Para que não haja interferência de um processo no outro é necessário que o sistema estabeleça certas regras de funcionamento, restringindo o acesso a seus recursos, de acordo com certas políticas de uso

Concessão da impressora a apenas um dos processos, fazendo com que o outro espere o primeiro terminar sua impressão para somente, na sequência, dar-lhe o acesso ao recurso desejado?

Compra de outra impressora para casos urgentes, atribuindo prioridades?

Redes de Petri do tipo Lugar-Transição

- Proposta em 1962 por Carl Adam Petri, em seu doutorado defendido na Alemanha

- Permite modelar e analisar sistemas em que as noções de eventos e de evoluções simultâneas são importantes

- Possui linguagem gráfica altamente intuitiva e eficiente

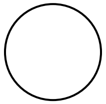
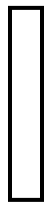
Redes de Petri como Grafos

- Grafo bipartido: constituído por dois conjuntos distintos de vértices ou nós (estados e ações), em que nenhum dos nós constituintes de um conjunto se interliga a outro nó pertencente ao mesmo conjunto

- Lugares (P) e transições (T) são ligados através de arestas (arcos dirigidos), as quais iniciam-se em um tipo de nó e chegam sempre a um nó do tipo complementar

- P e T são conjuntos não-vazios, finitos, denominados por p_i e t_j, sendo i e j índices adequados

Representação Gráfica

- Lugar 
- Transição 
- Arcos 
- Tokens 

Tipos de Arcos:

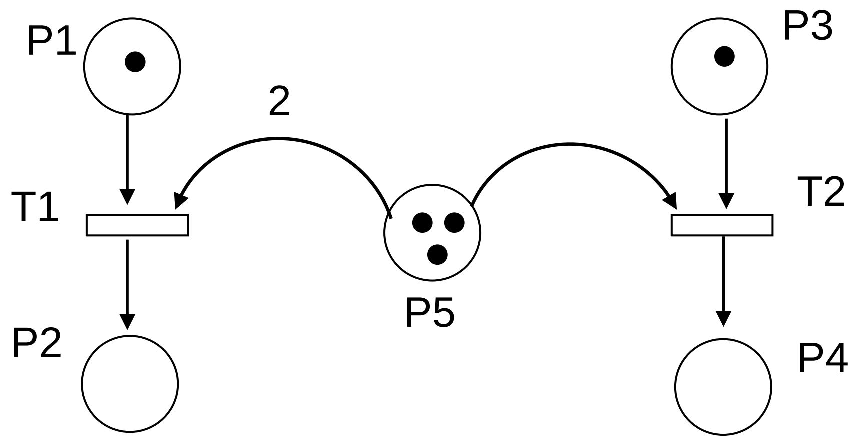
- Entrada: $i \subseteq P \times T$
- Saída: $o \subseteq T \times P$

Comportamento do grafo

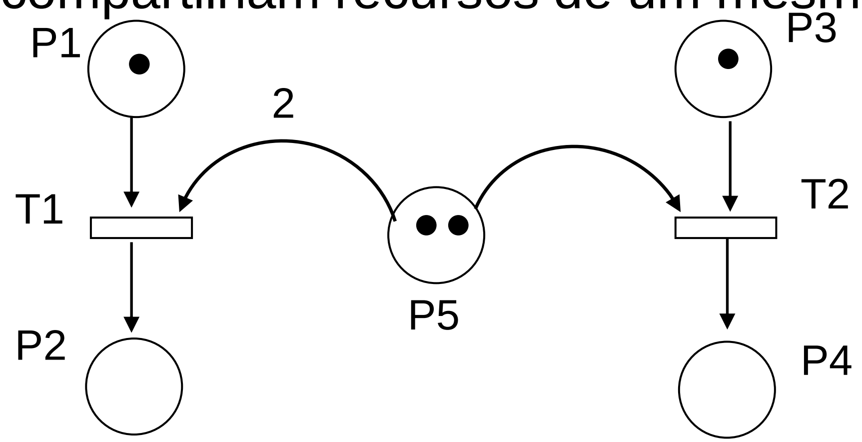
- Tokens só podem ser colocados em lugares
- Cada transição representa uma ação que ocorre no sistema, capaz de mudar o seu estado
- Um movimento é possível se e somente se cada lugar de entrada de determinada transição apresentar, pelo menos, o número de tokens indicados no arco de entrada, ou seja, o arco que liga o lugar correspondente à transição em questão. Isso indica que uma transição está habilitada a disparar
- Quando uma transição dispara, tokens são removidos dos lugares de entrada e novos tokens são criados nos lugares de saída da transição. O número de tokens removidos/criados é especificado pelo peso dos arcos de entrada/saída correspondentes.

IMPORTANTE

- <u>Concorrência</u>: quando um lugar compartilhado por duas transições habilitadas possui tokens suficientes para que cada uma delas utilize o número de tokens necessários para o seu disparo



- <u>Conflito</u>: quando duas transições, apesar de habilitadas, não podem disparar concorrentemente, uma vez que a ocorrência de uma desabilita a outra, visto que compartilham recursos de um mesmo lugar.



Descrição matricial

- Representação utilizada, pelo computador na verificação automática

- ✓ D- : funções de entrada das transições (matriz de incidência anterior)

- ✓ D+ : funções de saída das transições (matriz de incidência posterior)

- ✓ Tamanho: m linhas (uma para cada transição) e n colunas (uma para cada lugar da rede)

- ✓ Os valores dos elementos da matriz correspondem aos pesos dos arcos de entrada (D-) ou saída (D+) das transições consideradas

Habilitação de uma transição

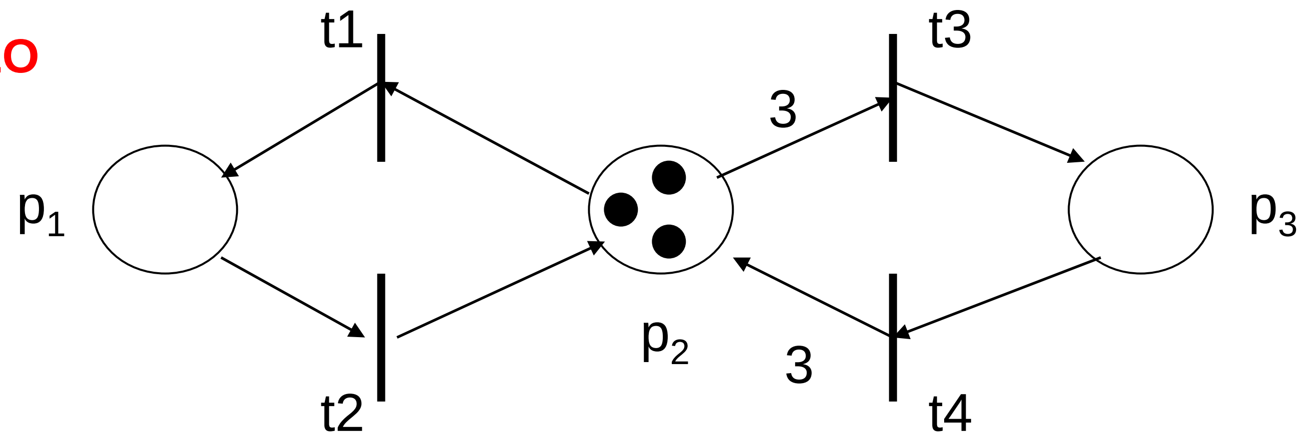
- Vetor e[j], com m componentes, dos quais m-1 são nulos, exceto o j-ésimo elemento que indica quantas vezes a transição deve disparar. A transição t_j, representada pelo vetor e[j], está habilitada em uma marcação se o número de tokens ≥ e[j].D-

- O resultado do disparo das transições t_j em uma dada marcação é:

  D = D+ - D- (matriz de trabalho ou matriz de incidência)

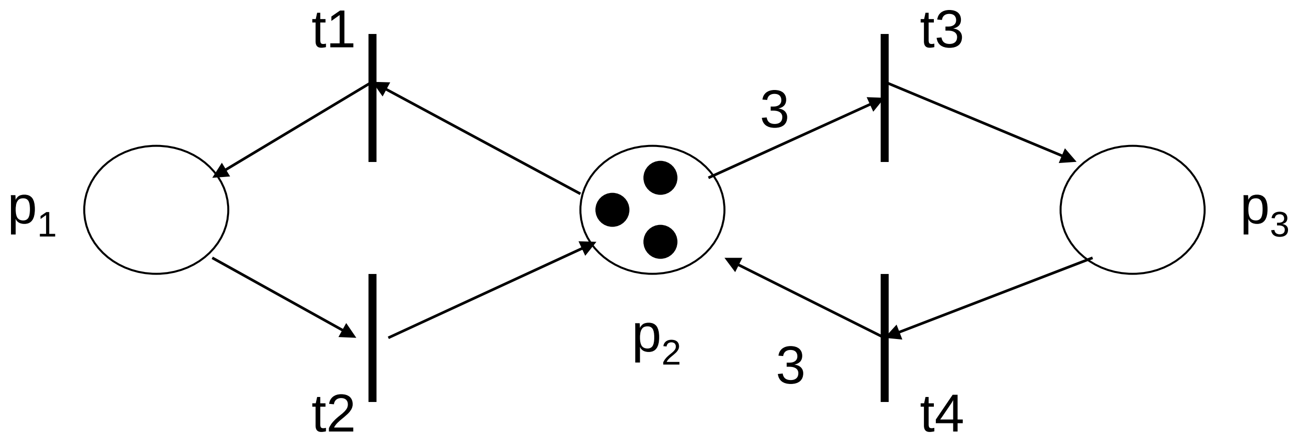
- Sequência de disparos: uma série de transições que são disparadas para simular a execução do sistema

EXEMPLO



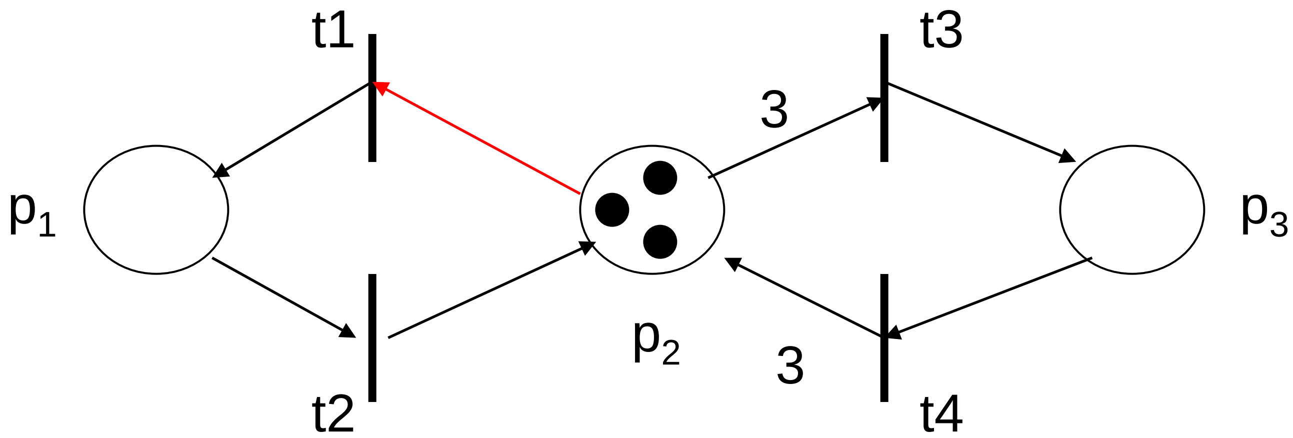
Lembrando que...

- D- : função de entrada das transições
- D+ : função de saída das transições
- Tamanho: m linhas (uma por transição) e n colunas (uma por lugar)
- Os valores dos elementos da matriz correspondem aos pesos dos arcos de entrada (D-) ou saída (D+) das transições consideradas
- D = D+ - D- (matriz de trabalho ou matriz de incidência)
- Vetor e[j], com m componentes, dos quais m-1 são nulos, exceto o j-ésimo elemento que indica quantas vezes a transição deve disparar. Ex: t1 disparar duas vezes
- Marcação inicial (M_0): vetor com n componentes, os quais indicam quantos tokens cada lugar possui no estado inicial da rede



Representação matricial

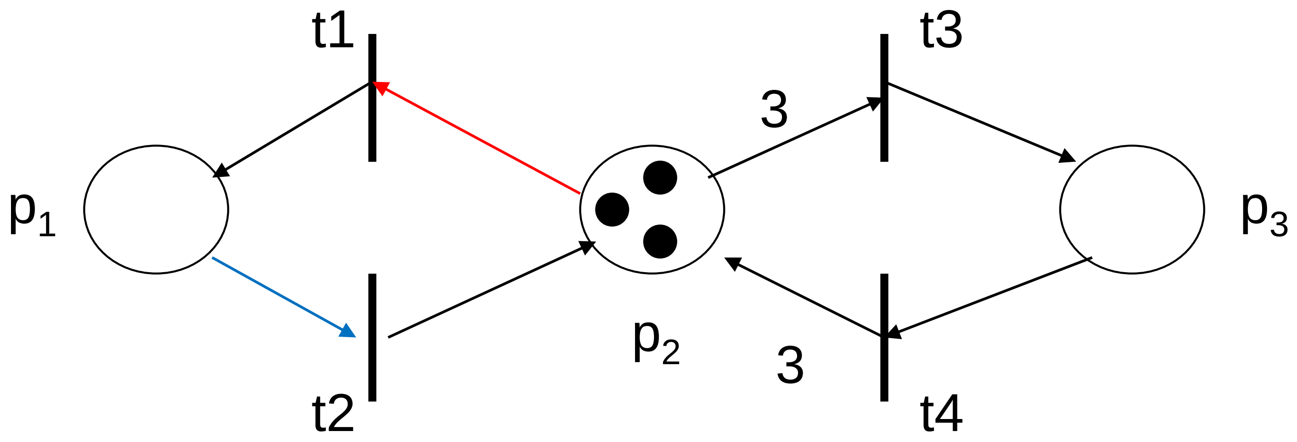
$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\
D^- = & \left|\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$



Representação matricial

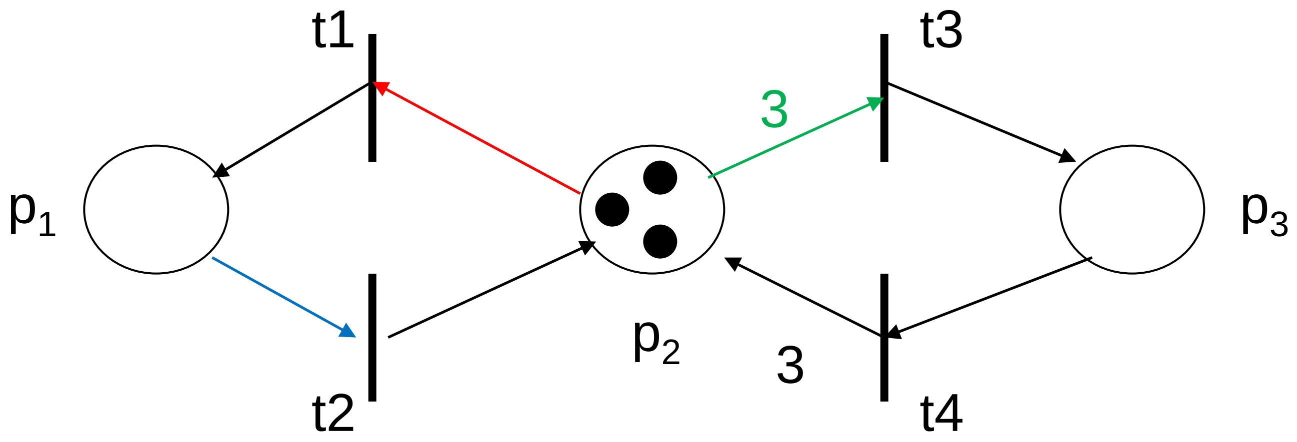
$$
D^- = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & p_1 & p_2 & p_3 \\
D- = & \left| \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} {\color{red}1} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}
\end{array}
$$



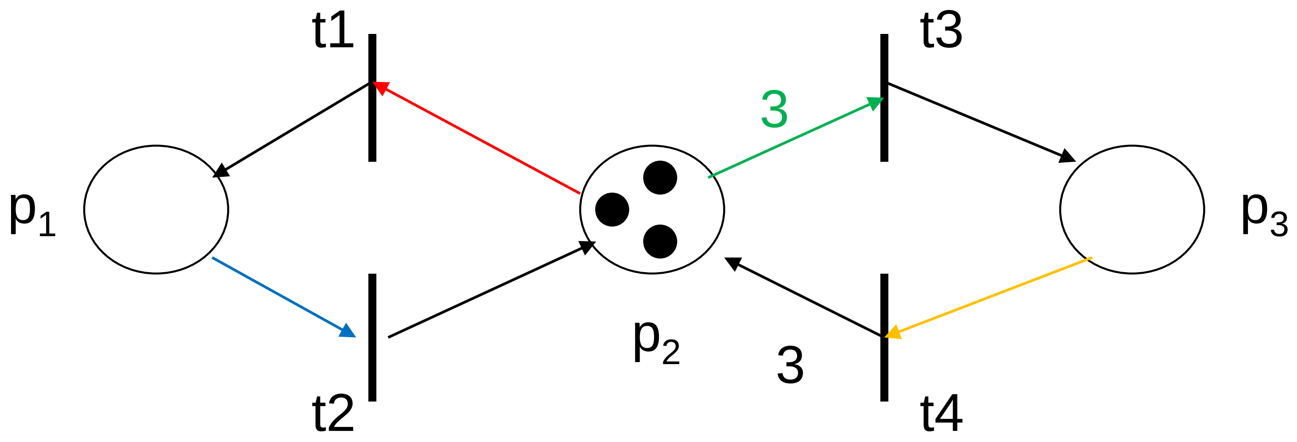
Representação matricial

$$D- = \begin{array}{cc} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{vmatrix} & \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} \end{array}$$



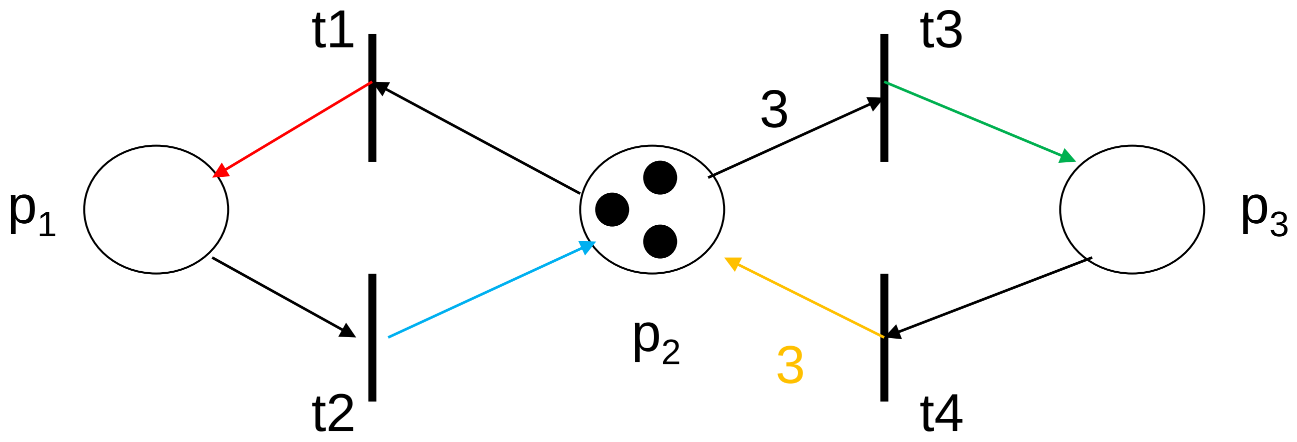
Representação matricial

$$D- = \begin{array}{c} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ & & \end{matrix}\right| \end{array} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix}$$



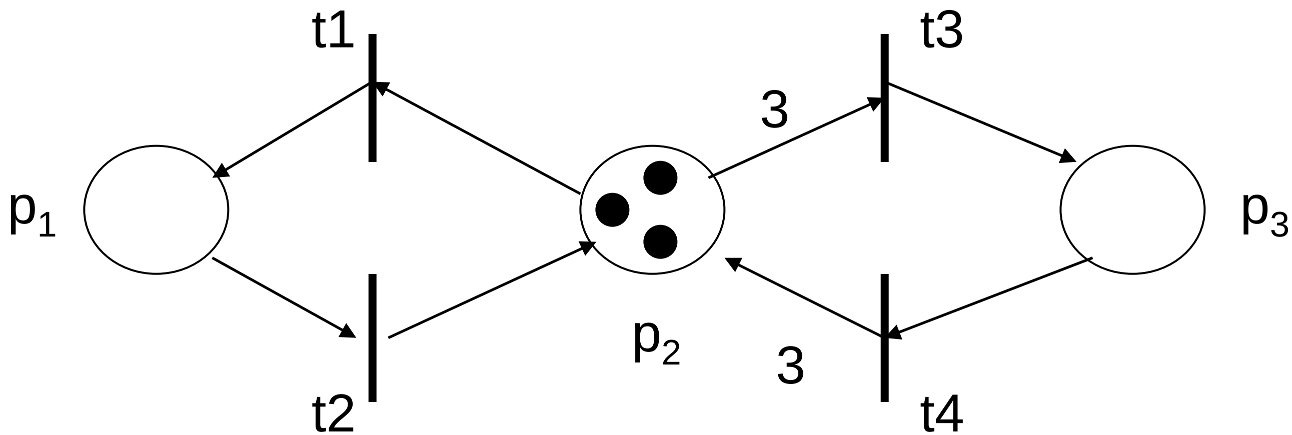
Representação matricial

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
D^- = & 0 & 1 & 0 & t_1 \\
 & 1 & 0 & 0 & t_2 \\
 & 0 & 3 & 0 & t_3 \\
 & 0 & 0 & 1 & t_4
\end{array}
$$



Representação matricial

$$\text{D-} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \qquad \text{D+} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$



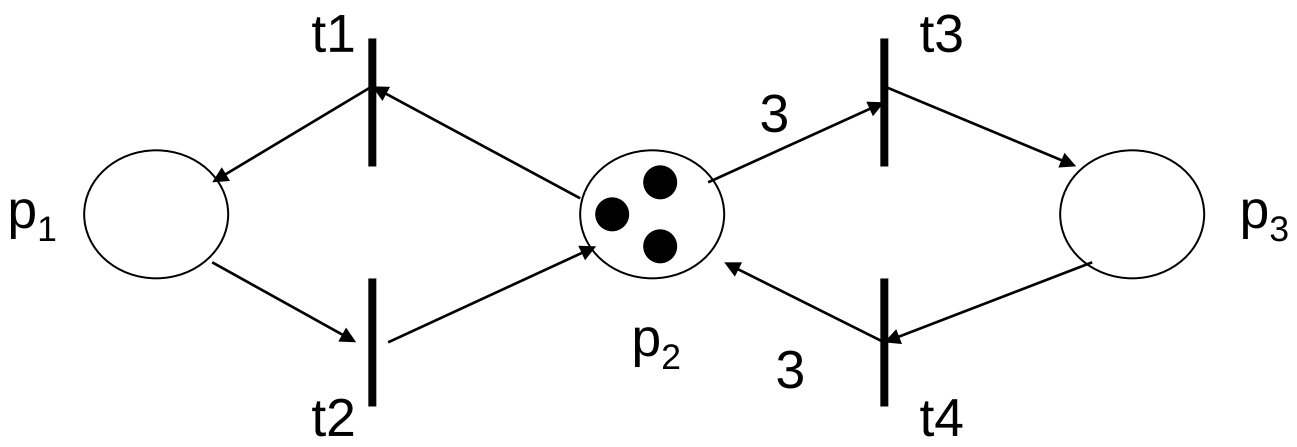
Representação matricial

$$
D^- = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ \end{array}
$$

$$
D- = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\
 & 1 & 0 & 0 & t_2 \\
 & 0 & 3 & 0 & t_3 \\
 & 0 & 0 & 1 & t_4
\end{array}
\qquad
D+ = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & 1 & 0 & 0 & t_1 \\
 & 0 & 1 & 0 & t_2 \\
 & 0 & 0 & 1 & t_3 \\
 & 0 & 3 & 0 & t_4
\end{array}
$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$
D = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & & & & t_1 \\
 & & & & t_2 \\
 & & & & t_3 \\
 & & & & t_4
\end{array}
$$



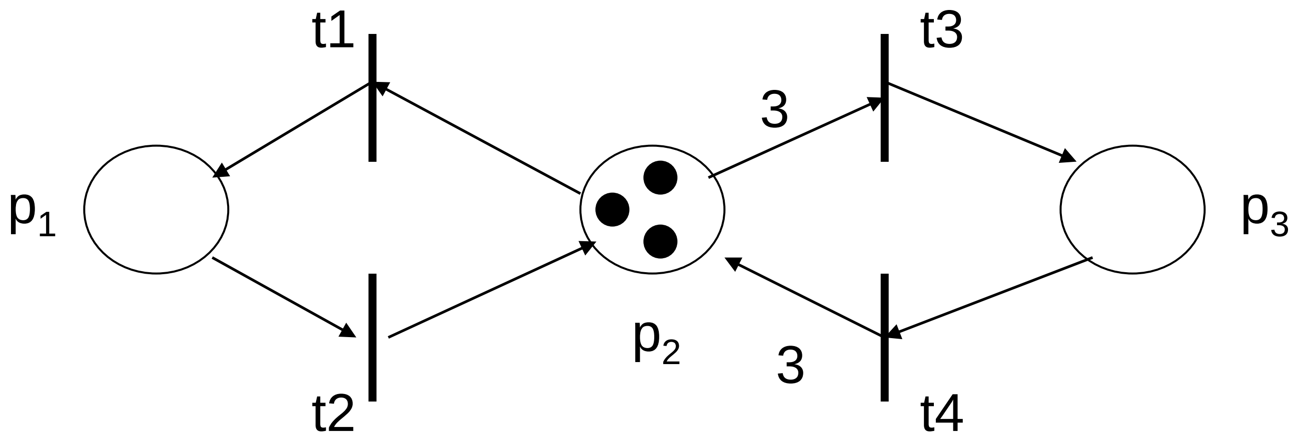
Representação matricial

$$D^- = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

$$D^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

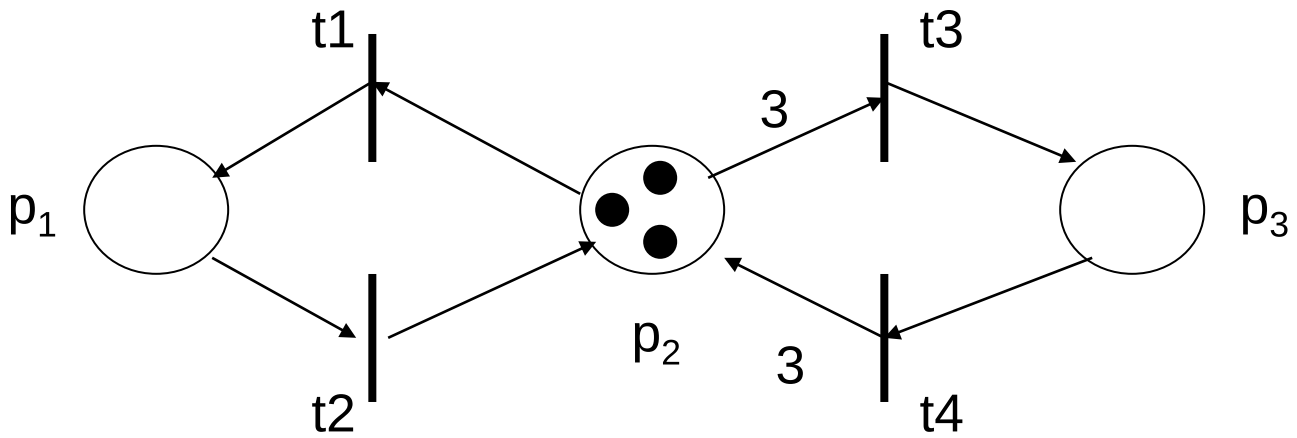


Representação matricial

$$
D^- = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\
 & 1 & 0 & 0 & t_2 \\
 & 0 & 3 & 0 & t_3 \\
 & 0 & 0 & 1 & t_4
\end{array}
\qquad
D^+ = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & 1 & 0 & 0 & t_1 \\
 & 0 & 1 & 0 & t_2 \\
 & 0 & 0 & 1 & t_3 \\
 & 0 & 3 & 0 & t_4
\end{array}
$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$
D = \begin{array}{c|ccc|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & 1 & -1 & 0 & t_1 \\
 & -1 & 1 & 0 & t_2 \\
 & & & & t_3 \\
 & & & & t_4
\end{array}
$$

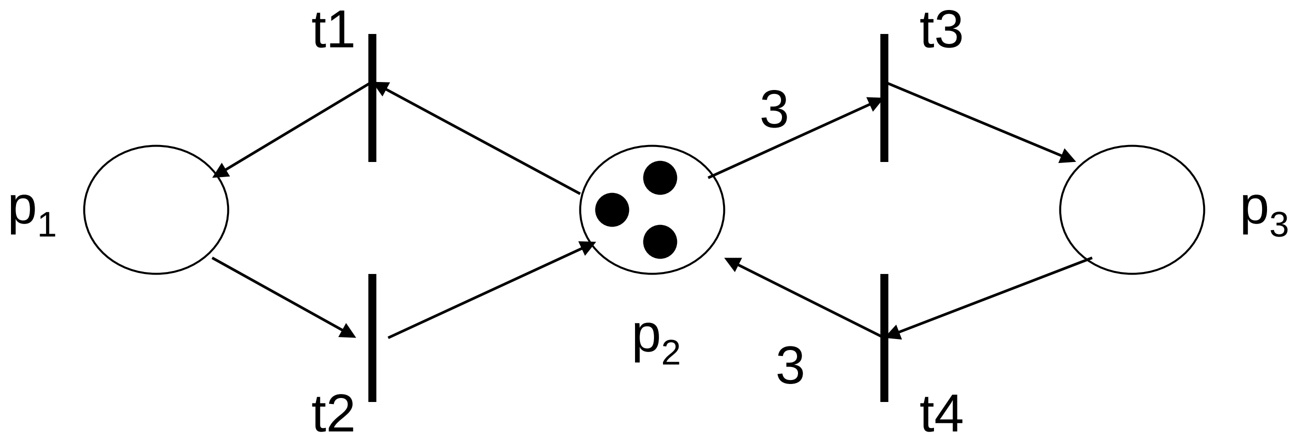


Representação matricial

$$
\begin{array}{c} \\ D^- = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ D^+ = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}
$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$
\begin{array}{c} \\ D = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}
$$



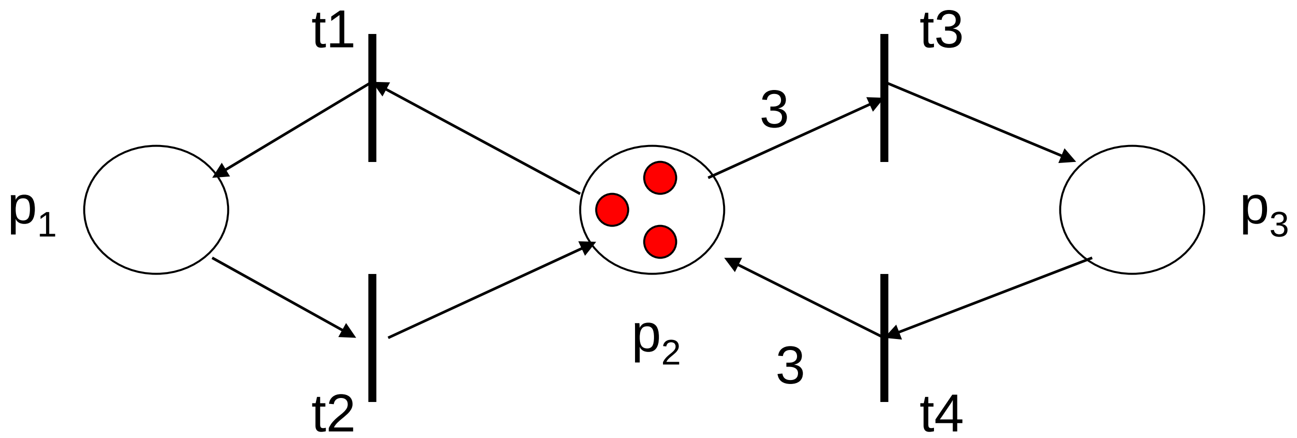
Representação matricial

$$D^- = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

$$D^+ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array}$$



Representação matricial

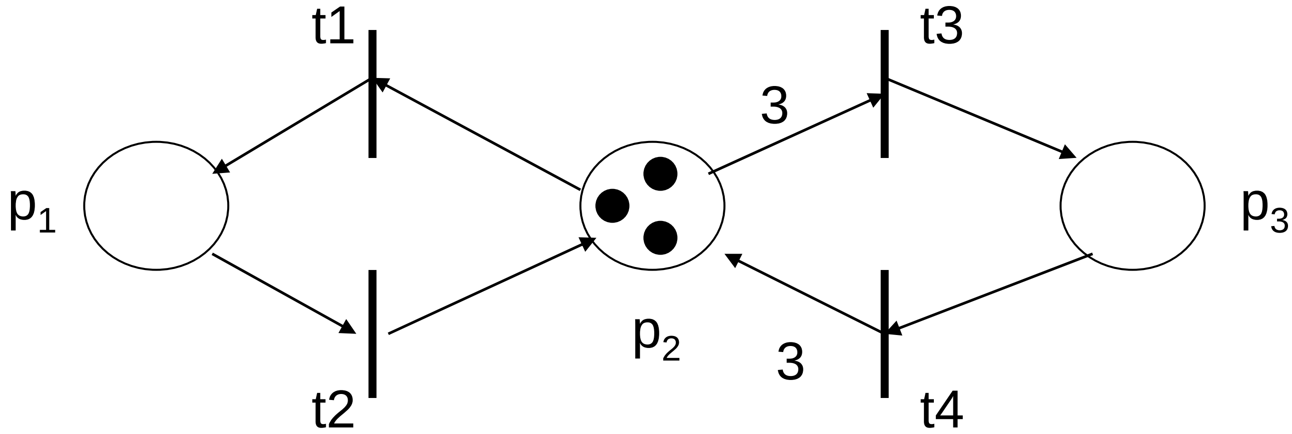
$$
D^- = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & \\
0 & 1 & 0 & t_1 \\
1 & 0 & 0 & t_2 \\
0 & 3 & 0 & t_3 \\
0 & 0 & 1 & t_4
\end{array}
\qquad
D^+ = \begin{array}{ccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & \\
1 & 0 & 0 & t_1 \\
0 & 1 & 0 & t_2 \\
0 & 0 & 1 & t_3 \\
0 & 3 & 0 & t_4
\end{array}
$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$
D = \begin{array}{ccc|c}
p_1 & p_2 & p_3 & \\
1 & -1 & 0 & t_1 \\
-1 & 1 & 0 & t_2 \\
0 & -3 & 1 & t_3 \\
0 & 3 & -1 & t_4
\end{array}
$$

Marcação Inicial

$$
\begin{array}{cccc}
 & p_1 & p_2 & p_3 \\
M_0 = & | \; 0 & 3 & 0 \; |
\end{array}
$$



Representação matricial

$$D^- = \begin{array}{c|ccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & \\ & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ & 1 & 0 & 0 & t_2 \\ & 0 & 3 & 0 & t_3 \\ & 0 & 0 & 1 & t_4 \end{array}$$

$$D^+ = \begin{array}{c|ccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & \\ & 1 & 0 & 0 & t_1 \\ & 0 & 1 & 0 & t_2 \\ & 0 & 0 & 1 & t_3 \\ & 0 & 3 & 0 & t_4 \end{array}$$

Matriz de trabalho (D = D+ - D-)

$$D = \begin{array}{c|ccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & \\ & 1 & -1 & 0 & t_1 \\ & -1 & 1 & 0 & t_2 \\ & 0 & -3 & 1 & t_3 \\ & 0 & 3 & -1 & t_4 \end{array}$$

Marcação Inicial

$$\begin{array}{lccc} & p_1 & p_2 & p_3 \\ M_0 = | & 0 & 3 & 0\ | \end{array}$$

Disparo de t1 <u>duas vezes</u>

$$\begin{array}{lcccc} & t1 & t2 & t3 & t4 \\ e[t1] = | & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0\ | \end{array}$$

Exercício

- Construa uma Rede de Petri para um semáforo e depois elabore as matrizes de entrada, de saída e de incidência para as transições, além de indicar a marcação inicial, considerando que o semáforo está no vermelho.