Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP

Informações preliminares

O tamanho de vetores, distância entre vetores, etc., para vetores no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ são definidos usando o conceito chamado **norma**. A norma de um vetor pode ser definida em várias maneiras.

As definições de normas mais adotadas são: sejam α, β escalares e x, y vetores tais que

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

Norma 1: $\|\mathrm{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\alpha\,\mathrm{x} + \beta\,\mathrm{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha\, x_i + \beta\, y_i|,$

Norma p: $\|\mathrm{x}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p}, \quad \|\alpha\,\mathrm{x} + \beta\,\mathrm{y}\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha\, x_i + \beta\, y_i| \right\}^{1/p},$

Norma máxima: $\|\mathrm{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left\{ |x_i| \right\}, \quad \|\alpha\,\mathrm{x} + \beta\,\mathrm{y}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left\{ |\alpha\, x_i + \beta\, y_i| \right\}.$

Exemplo. Considere os vetores em $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\|\mathrm{x}\|_1 = 5 + 2 + 5 = 12,$$

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_1 = |-6| + |0| + |8| = 14,$$

$$\|\mathrm{y}\|_2 = \left\{1^2 + 2^2 + (-3)^2\right\}^{1/2} = \sqrt{14} = 3.741657...,$$

$$\|2\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 = \left\{(-9)^2 + (10)^2 + (7)^2\right\}^{1/2} = \sqrt{230} = 15.16575...,$$

$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \max\left\{|-5|, |2|, |5|\right\} = 5,$$

$$\|\mathrm{x} + 8\mathrm{y}\|_\infty = \max\left\{|3|, |18|, |-19|\right\} = 19,$$

Também podemos definir norma de matrizes

Seja a matriz A de ordem n dada por

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então}$$

Norma máxima (ou Norma linha): $$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\},$$

máximo entre as somas dos módulos dos elementos de cada linha.

Norma 1 (ou Norma coluna): $$\|\mathrm{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\},$$

máximo entre as somas dos módulos dos elementos de cada coluna.

Exemplo. Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le 3}\left\{\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\right\} = \max\left\{\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|a_{3j}|\right\} \\ &= \max\{|-2|+|6|+|4|,\ |0|+|3|+|-1|,\ |1|+|4|+|-3|\} \\ &= \max\{10,\ 4,\ 8\} = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le j\le 3}\left\{\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|\right\} = \max\left\{\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}|, \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}|\right\} \\ &= \max\{|-2|+|0|+|1|,\ |6|+|3|+|4|,\ |4|+|-1|+|-3|\} \\ &= \max\{3,\ 13,\ 8\} = 13. \end{aligned}$$

Dado o sistema linear $Ax = b$ um método iterativo para sua resolução é obtido da seguinte maneira:

♢ Expressar o sistema em uma forma equivalente

$$x = Bx + c;$$

♢ A partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$, aplicar o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Teorema

Seja $\hat{x}$ a solução do sistema $Ax = b$, or equivalentemente, a solução do sistema $x = Bx + c$. Para alguma norma matricial $\|.\|$, se $\|B\| = \lambda < 1$ então o processo iterativo converge para a solução $\hat{x}$ com qualquer escolha do vetor inicial $x^{(0)}$. Isto é,

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \hat{x}\| = 0.$$

Vamos estudar o método do JACOBI a partir de um exemplo particular.

Considere o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 & 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 5 & 1.0 \\ 2.0 & 3.0 & 10.0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ -8.0 \\ 6.0 \end{bmatrix},$$

Neste caso sabemos que a solução deste sistema é

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

Rearranjo das equações : As equações são

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7.0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8.0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6.0 \end{array}$$

Podemos rearranjar as equações da forma:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} 10x_1 & = & & & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 7.0 \\ 5x_2 & = & - & x_1 & & & - & x_3 & - & 8.0 \\ 10x_3 & = & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & 6.0 \end{array}$$

Então, dividindo por números apropriados a cada equações, temos :

$$\begin{array}{lrcrrrrrrrr} \text{divisão por 10:} & x_1 & = & & & - & 0.2x_2 & - & 0.1x_3 & + & 0.7 \\ \text{divisão por 5:} & x_2 & = & - & 0.2x_1 & & & - & 0.2x_3 & - & 1.6 \\ \text{divisão por 10:} & x_3 & = & - & 0.2x_1 & - & 0.3x_2 & & & + & 0.6 \end{array}$$

Sistema equivalente. Obtemos

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_1 & = & & & - & 0.2x_2 & - & 0.1x_3 & + & 0.7 \\ x_2 & = & - & 0.2x_1 & & & - & 0.2x_3 & - & 1.6 \\ x_3 & = & - & 0.2x_1 & - & 0.3x_2 & & & + & 0.6 \end{array}$$

Este é um sistema equivalente de $A\,x = b$, que podemos escrever como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$x = Bx + c,$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Método iterativo de JACOBI: $\mathrm{x}^{(k+1)} = \mathrm{B}\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{c}$.
A partir das equações

$$\begin{array}{rcrrrrrr} x_1 & = & & & - & 0.2x_2 & - & 0.1x_3 & + & 0.7, \\ x_2 & = & - & 0.2x_1 & & & - & 0.2x_3 & - & 1.6, \\ x_3 & = & - & 0.2x_1 & - & 0.3x_2 & & & + & 0.6, \end{array}$$

considerar o processo iterativo, para $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} x_1^{(k+1)} & = & & & - & 0.2x_2^{(k)} & - & 0.1x_3^{(k)} & + & 0.7, \\ x_2^{(k+1)} & = & - & 0.2x_1^{(k)} & & & - & 0.2x_3^{(k)} & - & 1.6, \\ x_3^{(k+1)} & = & - & 0.2x_1^{(k)} & - & 0.3x_2^{(k)} & & & + & 0.6. \end{array}$$

Teste de parada: Por exemplo, paramos o processo quando
$\|\mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)}\|_\infty < \epsilon$, para uma precisão $\epsilon > 0$ escolhida.

Um exemplo de valores obtidos. Aplicando o processo iterativo, sucessivamente, com as escolhas

$$\mathrm{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \epsilon = 0.15,$$

obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= & & -0.2x_2^{(0)} & -0.1x_3^{(0)} & +0.7 & = & \quad 0.4000, \\
x_2^{(1)} &= & -0.2x_1^{(0)} & & -0.2x_3^{(0)} & -1.6 & = & -2.0000, \\
x_3^{(1)} &= & -0.2x_1^{(0)} & -0.3x_2^{(0)} & & +0.6 & = & \quad 0.1000,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(1)} - \mathrm{x}^{(0)}\|_\infty &= \max_{1 \le i \le 3} \{|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}|, |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}|, |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}|\} \\
&= \max_{1 \le i \le 3} \{|0.4 - 1|, |-2 - 1|, |0.1 - 1|\} = 3 > \epsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= && -0.2x_2^{(0)} && -0.1x_3^{(0)} && +0.7 && = && 0.4000,\\
x_2^{(1)} &= -0.2x_1^{(0)} && && -0.2x_3^{(0)} && -1.6 && = && -2.0000,\\
x_3^{(1)} &= -0.2x_1^{(0)} && -0.3x_2^{(0)} && && +0.6 && = && 0.1000,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= && -0.2x_2^{(1)} && -0.1x_3^{(1)} && +0.7 && = && 1.0900,\\
x_2^{(2)} &= -0.2x_1^{(1)} && && -0.2x_3^{(1)} && -1.6 && = && -1.7000,\\
x_3^{(2)} &= -0.2x_1^{(1)} && -0.3x_2^{(1)} && && +0.6 && = && 1.1200,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(2)} - \mathrm{x}^{(1)}\|_\infty &= \max_{1\le i\le 3}\{|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}|, |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}|, |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}|\}\\
&= \max_{1\le i\le 3}\{0, 69, 0.3, 1.02\} = 1.02 > \epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcccccl}
x_1^{(2)} & = & & -0.2x_2^{(1)} & -0.1x_3^{(1)} & +0.7 & = \quad 1.0900, \\
x_2^{(2)} & = & -0.2x_1^{(1)} & & -0.2x_3^{(1)} & -1.6 & = \quad -1.7000, \\
x_3^{(2)} & = & -0.2x_1^{(1)} & -0.3x_2^{(1)} & & +0.6 & = \quad 1.1200,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccl}
x_1^{(3)} & = & & -0.2x_2^{(2)} & -0.1x_3^{(2)} & +0.7 & = \quad 0.9280, \\
x_2^{(3)} & = & -0.2x_1^{(2)} & & -0.2x_3^{(2)} & -1.6 & = \quad -2.0620, \\
x_3^{(3)} & = & -0.2x_1^{(2)} & -0.3x_2^{(2)} & & +0.6 & = \quad 1.0006,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(3)} - \mathrm{x}^{(2)}\|_\infty &= \max\{|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}|, |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}|, |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}|\} \\
&= \max\{0.162, 0.362, 0.1194\} = 0.362 > \epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= & & -0.2x_2^{(2)} & -0.1x_3^{(2)} & +0.7 & = & \ \ 0.9280, \\
x_2^{(3)} &= & -0.2x_1^{(2)} & & -0.2x_3^{(2)} & -1.6 & = & -2.0620, \\
x_3^{(3)} &= & -0.2x_1^{(2)} & -0.3x_2^{(2)} & & +0.6 & = & \ \ 1.0006,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= & & -0.2x_2^{(3)} & -0.1x_3^{(3)} & +0.7 & = & \ \ 1.1012, \\
x_2^{(4)} &= & -0.2x_1^{(3)} & & -0.2x_3^{(3)} & -1.6 & = & -1.9857, \\
x_3^{(4)} &= & -0.2x_1^{(3)} & -0.3x_2^{(3)} & & +0.6 & = & \ \ 1.0330,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(4)} - \mathrm{x}^{(3)}\|_\infty &= \max\{|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}|, |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}|, |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}|\} \\
&= \max\{0.1732, 0.0763, 0.0324\} = 0.1732 > \epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= & -0.2x_2^{(3)} & -0.1x_3^{(3)} & +0.7 &= 1.1012,\\
x_2^{(4)} &= -0.2x_1^{(3)} & & -0.2x_3^{(3)} & -1.6 &= -1.9857,\\
x_3^{(4)} &= -0.2x_1^{(3)} & -0.3x_2^{(3)} & & +0.6 &= 1.0330,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= & -0.2x_2^{(4)} & -0.1x_3^{(4)} & +0.7 &= 0.9938,\\
x_2^{(5)} &= -0.2x_1^{(4)} & & -0.2x_3^{(4)} & -1.6 &= -2.0268,\\
x_3^{(5)} &= -0.2x_1^{(4)} & -0.3x_2^{(4)} & & +0.6 &= 0.9755,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(5)} - \mathrm{x}^{(4)}\|_\infty &= \max\{|x_1^{(5)} - x_1^{(4)}|, |x_2^{(5)} - x_2^{(4)}|, |x_3^{(5)} - x_3^{(4)}|\}\\
&= \max\{0.1072, 0.0411, 0.0575\} = 0.1072 < \epsilon
\end{aligned}
$$

Assim

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.9938 \\ -2.0268 \\ 0.9755 \end{bmatrix}$$

é uma aproximação para a solução do sistema $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10.0 & 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 5 & 1.0 \\ 2.0 & 3.0 & 10.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 7.0 \\ -8.0 \\ 6.0 \end{bmatrix},$$

$\|x^{(5)} - x^{(4)}\|_\infty < \epsilon = 0.15.$

Lembre-se que sabemos a solução deste sistema:

$$x = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Ex: Resolva o sistema de equações lineares pelo método de Jacobi

$$\begin{aligned} -4x_1 &+ 10x_2 = 19 \\ 5x_1 &+ 3x_2 = 15 \end{aligned} \quad \text{com} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rearranjamos as equações da forma:

$$\begin{aligned} -4x_1 &= & - 10x_2 + 19 \\ 3x_2 &= -5x_1 & + 15 \end{aligned}$$

Então, dividindo cada equação por números apropriados, temos

divisão por -4: $x_1 = + 2.5x_2 - 4.75$

divisão por 3: $x_2 = - 1.66667x_1 + 5$

Método iterativo de Jacobi

Podemos começar o processo iterativo para $k = 0, 1, 2, \ldots$, onde

$$\begin{array}{rcrcl} x_1^{(k+1)} & = & & +2.5x_2^{(k)} & - \quad 4.75 \\ x_2^{(k+1)} & = & -1.66667x_1^{(k)} & & + \quad 5. \end{array} \quad \text{com} \quad \mathrm{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $k = 0$

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(1)} & = & +2.5x_2^{(0)} - 4.75 \quad = 2.5(0) - 4.75 \quad = -4.75 \\ x_2^{(1)} & = & -1.66667x_1^{(0)} + 5 \quad = -1.66667(0) + 5 \quad = 5 \end{array}$$

Para $k = 1$

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(2)} & = & +2.5x_2^{(1)} - 4.75 \quad = 2.5(5) - 4.75 \quad = 7.75 \\ x_2^{(2)} & = & -1.66667x_1^{(1)} + 5 \quad = -1.66667(-4.75) + 5 \quad = 12.91668 \end{array}$$

Para $k = 2$

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(3)} & = & +2.5x_2^{(2)} - 4.75 \quad = 2.5(12.91668) - 4.75 \quad = 27.5417 \\ x_2^{(3)} & = & -1.66667x_1^{(2)} + 5 \quad = -1.66667(7.75) + 5 \quad = -7.91669 \end{array}$$

Método iterativo de Jacobi

Veja que as aprroximações que conseguimos são

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -4.75 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 7.75 \\ 12.91668 \end{pmatrix}; \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 27.5417 \\ -7.91669 \end{pmatrix}.$$

E o erro entre duas aproximações sucessivas

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty = \max\{|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}|, |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}|\}$$

está crescendo.

Logo, podemos ver que a sequência de aproximações $\{x^{(k)}\}$ obtida pelo Método iterativo de Jacobi, neste caso, não converge para a solução do sistema.

A partir de Teorema de congervência de métodos iterativo para solução de sistema lineares, podemos criar critérios de convergência para o Método.

Teorema

Seja $\hat{x}$ *a solução do sistema* $Ax = b$, *or equivalentemente, a solução do sistema* $x = Bx + c$. *Para alguma norma matricial* $\|.\|$, *se* $\|B\| < 1$ *então o processo iterativo converge para a solução* $\hat{x}$ *com qualquer escolha do vetor inicial* $x^{(0)}$. *Isto é,* $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \hat{x}\| = 0$.

De forma geral a matriz B é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Método iterativo de Jacobi: matriz $n \times n$

Dada o sistema linear $Ax = b$, onde $A = (a_{i,j})$ uma matriz $n \times n$, o processo iterativo de Jacobi é

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \qquad\qquad - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j^{(k)} + \frac{b_1}{a_{1,1}}, \\
&\vdots \\
x_i^{(k+1)} &= - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{n,j}}{a_{n,n}} x_j^{(k)} \qquad\qquad + \frac{b_n}{a_{n,n}},
\end{aligned}
$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Critério das linhas para Convergência. Obtido com uso da norma matricial $\|B\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}\}$.

Seja $\beta = \max_{1 \le i \le n} \beta_i$, onde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1,j}|}{|a_{1,1}|}, \\
&\vdots \\
\beta_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}, \qquad i = 2, \dots, n-1, \\
&\vdots \\
\beta_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|a_{n,j}|}{|a_{n,n}|}
\end{aligned}$$

Se $\beta < 1$ então o método Jacobi converge, para qualquer valor inicial $x^{(0)}$.

Critério das colunas para Convergência. Obtido com uso da norma matricial $\|B\|_1 = \max_{1\le j\le n}\{\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}\}$.

Seja $\alpha = \max_{1\le j\le n} \alpha_j$, onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sum_{i=2}^{n} \frac{|a_{i,1}|}{|a_{i,i}|}, \\
&\vdots \\
\alpha_j &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}, \qquad j = 2, \ldots, n-1, \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|a_{i,n}|}{|a_{i,i}|}
\end{aligned}$$

Se $\alpha < 1$ então o método Jacobi converge, para qualquer valor inicial $x^{(0)}$.

• O **critério das linhas para Convergência** também pode ser dado em função dos elementos da matriz A, ou seja,
- se para cada linha $i = 1, 2, ..., n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

então o método de Jacobi converge,para qualquer valor inicial $x^{(0)}$.

Critérios de convergência para o Método Iterativo de Jacobi.

O critério é condição suficiente para garantir a convergência, mas não necessária, isto é,

- se um dos critérios (das linhas ou das colunas) for satisfeito, então garantimos da convergência do Método Iterativo de Jacobi.

- se nenhum critério for satisfeito, não podemos afirmar nada sobre a convergência.

Ex: Verifique se podemos garantir a convergência do método iterativo de Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} 10x_1 & +x_2 & -x_3 & = 10 \\ 2x_1 & -x_2 & +11x_3 & = 12 \\ x_1 & +12x_2 & +2x_3 & = 15 \end{cases}$$

Resposta: As matrizes A e B são

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 11 \\ 1 & 12 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 1/10 \\ 2/1 & 0 & 11/1 \\ -1/2 & 12/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

critério das linhas |

$|10| > |1| + |-1|$ (verdadeiro) |

$|-1| > |2| + |11|$ (falso) |

$|2| > |1| + |12|$ (falso) |

(não satisfaz critério das linhas) |

Logo, não é possível garantir a convergência.

Porém se trocarmos as linhas 2 e 3, temos o sistema equivalente

$$\begin{cases} 10x_1 & +x_2 & -x_3 & = 10 \\ x_1 & +12x_2 & +2x_3 & = 15 \\ 2x_1 & -x_2 & +11x_3 & = 12 \end{cases}.$$

E usando as novas matrizes são

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 1/10 \\ -1/12 & 0 & -2/12 \\ -2/11 & 1/11 & 0 \end{pmatrix}.$$

critério das linhas

$|10| > |1| + |-1|$ (verdadeiro)

$|12| > |1| + |2|$ (verdadeiro)

$|11| > |2| + |-1|$ (verdadeiro) Critério das linhas é satisfeito.

Logo, garantimos a convergência pelo método iterativo de Jacobi.

Obs 1: Basta um critério ser satisfeito, não precisa os dois, para garantir a convergência. (Não precisa calcular critério das colunas).

Obs 2: Este tipo de matriz é chamada de matriz diagonalmente dominante.

Exercício: Resolva o sistema

$$\begin{cases} 10x_1 & +x_2 & -x_3 & = 10 \\ x_1 & +12x_2 & +2x_3 & = 15 \\ 2x_1 & -x_2 & +11x_3 & = 12 \end{cases}$$

pelo método iterativo de Jacobi com

$$\mathrm{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \epsilon = 0.01.$$

Métodos Iterativo de GAUSS-SEIDEL. Vamos estudar este método a partir de um exemplo particular.

Considere o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 & 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 5 & 1.0 \\ 2.0 & 3.0 & 10.0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ -8.0 \\ 6.0 \end{bmatrix},$$

Neste caso sabemos que a solução deste sistema é

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

Rearranjo das equações. As equações são

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7.0 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8.0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6.0 \end{array}$$

Podemos rearranjar as equações da forma:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} 10x_1 & = & & & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 7.0 \\ 5x_2 & = & - & x_1 & & & - & x_3 & - & 8.0 \\ 10x_3 & = & - & 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & 6.0 \end{array}$$

Então, dividindo por números apropriados a cada equações, temos :

$$\begin{array}{lrcrrrrrrrr} \text{divisão por 10:} & x_1 & = & & & - & 0.2x_2 & - & 0.1x_3 & + & 0.7 \\ \text{divisão por 5:} & x_2 & = & - & 0.2x_1 & & & - & 0.2x_3 & - & 1.6 \\ \text{divisão por 10:} & x_3 & = & - & 0.2x_1 & - & 0.3x_2 & & & + & 0.6 \end{array}$$

A partir das equações

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} x_1 & = & & & - & 0.2x_2 & - & 0.1x_3 & + & 0.7, \\ x_2 & = & - & 0.2x_1 & & & - & 0.2x_3 & - & 1.6, \\ x_3 & = & - & 0.2x_1 & - & 0.3x_2 & & & + & 0.6, \end{array}$$

vamos considerar o processo iterativo:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} x_1^{(k+1)} & = & & & - & 0.2x_2^{(k)} & - & 0.1x_3^{(k)} & + & 0.7, \\ x_2^{(k+1)} & = & - & 0.2x_1^{(k+1)} & & & - & 0.2x_3^{(k)} & - & 1.6, \\ x_3^{(k+1)} & = & - & 0.2x_1^{(k+1)} & - & 0.3x_2^{(k+1)} & & & + & 0.6, \end{array}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Um exemplo de valores obtidos. Aplicando o processo iterativos, sucessivamente, com a escolha

$$\mathrm{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

obtemos os seguintes resultados:

Com $k = 0$, calculamos

$$\begin{array}{rcrrrrcr} x_1^{(1)} & = & & -0.2x_2^{(0)} & -0.1x_3^{(0)} & +0.7 & = & 0.4000, \\ x_2^{(1)} & = & -0.2{\color{blue}x_1^{(1)}} & & -0.2x_3^{(0)} & -1.6 & = & -1.8800, \\ x_3^{(1)} & = & -0.22{\color{blue}x_1^{(1)}} & -0.32{\color{blue}x_2^{(1)}} & & +0.6 & = & 1.0840, \end{array}$$

$$
\begin{array}{rclllcr}
x_1^{(1)} & = & & -0.2x_2^{(0)} & -0.1x_3^{(0)} & +0.7 & = & 0.4000, \\
x_2^{(1)} & = & -0.2x_1^{(1)} & & -0.2x_3^{(0)} & -1.6 & = & -1.8800, \\
x_3^{(1)} & = & -0.2x_1^{(1)} & -0.3x_2^{(1)} & & +0.6 & = & 1.0840,
\end{array}
$$

Com $k = 1$ calculamos

$$
\begin{array}{rclllcr}
x_1^{(2)} & = & & -0.2x_2^{(1)} & -0.1x_3^{(1)} & +0.7 & = & 0.9676, \\
x_2^{(2)} & = & -0.22x_1^{(2)} & & -0.2x_3^{(1)} & -1.6 & = & -2.0103, \\
x_3^{(2)} & = & -0.2x_1^{(2)} & -0.3x_2^{(2)} & & +0.6 & = & 1.0096,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= & & -0.2x_2^{(1)} & -0.1x_3^{(1)} & +0.7 &= & \ \ 0.9676,\\
x_2^{(2)} &= & -0.2x_1^{(2)} & & -0.2x_3^{(1)} & -1.6 &= & -2.0103,\\
x_3^{(2)} &= & -0.2x_1^{(2)} & -0.3x_2^{(2)} & & +0.6 &= & \ \ 1.0096,
\end{aligned}
$$

Com $k = 2$ calculamos

$$
\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= & & -0.2x_2^{(2)} & -0.1x_3^{(2)} & +0.7 &= & \ \ 1.0011,\\
x_2^{(3)} &= & -0.2x_1^{(3)} & & -0.2x_3^{(2)} & -1.6 &= & -2.0021,\\
x_3^{(3)} &= & -0.2x_1^{(3)} & -0.3x_2^{(3)} & & +0.6 &= & \ \ 1.0004,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrrrrl}
x_1^{(3)} & = & & -0.2x_2^{(2)} & -0.1x_3^{(2)} & +0.7 & = & 1.0011, \\
x_2^{(3)} & = & -0.2x_1^{(3)} & & -0.2x_3^{(2)} & -1.6 & = & -2.0021, \\
x_3^{(3)} & = & -0.2x_1^{(3)} & -0.3x_2^{(3)} & & +0.6 & = & 1.0004,
\end{array}
$$

Com $k = 3$ calculamos

$$
\begin{array}{rcrrrrl}
x_1^{(4)} & = & & -0.2x_2^{(3)} & -0.1x_3^{(3)} & +0.7 & = & 1.0004, \\
x_2^{(4)} & = & -0.2x_1^{(4)} & & -0.2x_3^{(3)} & -1.6 & = & -2.0002, \\
x_3^{(4)} & = & -0.2x_1^{(4)} & -0.3x_2^{(4)} & & +0.6 & = & 1.0000,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{x}^{(4)} - \mathrm{x}^{(3)}\|_\infty &= \max_{1 \le i \le 3} \{|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}|, |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}|, |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}|\} \\
&= \max_{1 \le i \le 3} \{0.0007, 0.0019, 0.0004\} = 0.0019
\end{aligned}
$$

Método iterativo de Gauss-Seidel: matriz $n \times n$

Dada o sistema linear $Ax = b$, onde $A = (a_{i,j})$ uma matriz $n \times n$, o processo iterativo de Gauss-Seidel é

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \phantom{-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(k+1)}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j^{(k)} + \frac{b_1}{a_{1,1}}, \\
&\vdots \\
x_i^{(k+1)} &= -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{n,j}}{a_{n,n}} x_j^{(k+1)} + \frac{b_n}{a_{n,n}},
\end{aligned}
$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Critérios de convergência de Sassenfeld para o Método Iterativo de Gauss-Seidel.

Seja $\beta = \max\limits_{1 \le i \le n} \beta_i$, onde

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1,j}|}{|a_{1,1}|}, \\
&\vdots \\
\beta_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}, \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\
&\vdots \\
\beta_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|a_{n,j}|}{|a_{n,n}|} \beta_j
\end{aligned}
$$

Se $\beta < 1$ então o método Gauss-Seidel converge, para qualquer valor inicial $x^{(0)}$.

Critérios de convergência para o Método Iterativo de Gauss-Seidel.

O método iterativo de Gauss-Seidel converge se um dos critérios abaixo for satisfeito:
- critério das linhas;
- critério de Sassenfeld.

Ex: Verifique se podemos garantir a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel para resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +6x_2 & +8x_3 & = 10 \end{cases}.$$

Resposta: As matrizes A e B são

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & -1/5 \\ -2/4 & 0 & 1/4 \\ -2/8 & -6/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

critério das linhas

$|5| > |2| + |1|$ (verdadeiro)

$|4| > |2| + |-1|$ (verdadeiro)

$|8| = |2| + |6|$ (falso) (não satisfaz critério das linhas)

Equivalentemente:

$$\beta_1 = \frac{|2|}{|5|} + \frac{|1|}{|5|} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\beta_2 = \frac{|2|}{|4|} + \frac{|-1|}{|4|} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\beta_3 = \frac{|2|}{|8|} + \frac{|6|}{|8|} = \frac{2}{8} + \frac{6}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Logo, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 1 \nless 1$ (não satisfaz critério das linhas)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & -1/5 \\ -2/4 & 0 & 1/4 \\ -2/8 & -6/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{|2|}{|5|} + \frac{|1|}{|5|} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\beta_2 = \frac{|2|}{|4|}\beta_1 + \frac{|-1|}{|4|} = \frac{2}{4}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{4} = \frac{11}{20} = 0.55$$

$$\beta_3 = \frac{|2|}{|8|}\beta_1 + \frac{|6|}{|8|}\beta_2 = \frac{2}{8}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{8}\left(\frac{11}{20}\right) = \frac{9}{16} = 0.5625$$

Logo, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 0.6 < 1$ (satisfaz critério de Sassenfeld.)

Podemos garantir a convergência pelo Método de Gauss-Seidel.

Critérios de convergência para o Método Iterativo de Gauss-Seidel.
Assim, para o sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 6 \\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +6x_2 & +8x_3 & = 10 \end{array}\right. .$$

garantimos a convergência pelo Método de Gauss-Seidel,
mas não podemos dizer nada sobre a convergência pelo Método de Jacobi.

Exercício: Encontre aproximações para a solução do sistema fazendo 3 iterações do Método de Gauss-Seidel, com

$$\mathrm{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Calcule o erro entre as duas últimas aproximações encontradas, ou seja, calcule

$$\|\mathrm{x}^{(3)} - \mathrm{x}^{(2)}\|_\infty .$$