

Cálculo Numérico

Lista de Exercícios SistEqLin-1

1. O pivotamento parcial serve para:

- a) minimizar o efeito dos erros de arredondamento na resolução de sistemas lineares, por eliminação;
- b) testar a singularidade do sistema;
- c) evitar a divisão por zero.

(i) Só a é correta (ii) a e c são corretas (iii) Todas as afirmativas são corretas.

2. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - 6\alpha x_2 = 3 \\ 3\alpha x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Usando o método de eliminação de Gauss (MEG):

- a) Encontre valores de α para os quais o sistema não tem solução;
- b) Encontre valores de α para os quais o sistema tem um número infinito de soluções;
- c) Supondo que o sistema tem uma única solução para um dado α , encontre a solução (em função de α).

3. Calcule a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

usando o método de eliminação de Gauss (MEG) sem pivotamento.

4. Usando a fatoração LU :

- a) resolva o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

- b) calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

5. Uma matriz tridiagonal é uma matriz da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

- a) Escreva um algoritmo para resolver o sistema $Ax = b$, pelo MEG, de modo que a estrutura especial da matriz A seja explorada;
- b) Teste seus resultados com o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, & 2 \leq i \leq (n-1) \\ -x_{n-1} + 2x_n = 0 \end{cases}$$

6. Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- a) Resolva-o pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial, trabalhando com arredondamento para três algarismos significativos em todas as operações.
7. Resolver o sistema a seguir pelo método da decomposição LU , com a estratégia de pivotamento parcial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ 24 \end{bmatrix}$$

8. a) Considere a matriz A , $n \times n$, com todas as sub-matrizes principais não singulares. Exiba as fórmulas da decomposição LU , onde L é matriz triangular inferior e U é matriz triangular superior com 1 na diagonal. (Este tipo de decomposição é conhecido como **Método de Crout**).
- b) Usando a decomposição do item a), resolva o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Resolva o sistema $Ax = b$ com fatoração de Cholesky, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

10. A existência da fatoração de Cholesky de uma matriz é uma condição necessária e suficiente para que essa matriz seja positiva definida. Verifique se a matriz abaixo é positiva definida:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$$

11. a) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

não pode ser fatorada no produto LU . Por quê?

b) Aplique a eliminação de Gauss, com pivotamento parcial, em A , para obter uma matriz \bar{A} triangular superior.

c) Multiplique A pela matriz de permutação P , onde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e verifique que a eliminação de Gauss pode ser executada sobre a matriz PA sem troca de linhas.

c) Obtenha a fatoração LU da matriz PA e verifique que $U = \bar{A}$.

12. Mostre que se B é matriz $n \times n$, não singular, então a matriz $C = B^T B$ é definida positiva.