Derivação Implícita

Consideremos uma eq. nas variáveis x e y.

Dizemos que uma fç $y = f(x)$ é dada implicitamente por tal equação se, para todo x no domínio de f, o pto $(x, f(x))$ for solução dessa equação.

Exemplo: ① A função $y = \sqrt{1-x^2}$ é dada implicitamente pela equação $x^2+y^2=1$, pois

$$x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x^2+1-x^2 = 1.$$

Note que a fç $y = -\sqrt{1-x^2}$ tb é dada implicitamente por essa mesma equação.

$$x^2+y^2=1 \iff y^2 = 1-x^2 \iff$$
$$\iff \sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \iff$$
$$\iff |y| = \sqrt{1-x^2} \iff \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ \text{ou} \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

② Determine a fç que é dada implicitamente pela eq. $y^2+xy-1=0$.

$$y^2+xy-1=0 \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4}}{2},$$ portanto

temos duas funções $y = \dfrac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ e $y = \dfrac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2}$.

Nos dois exemplos anteriores é possível calcular a derivada $\dfrac{dy}{dx}$, pois conseguimos isolar y em fç de x.

Contudo, nem sempre é possível resolver uma equação em x e y e achar y explicitamente em fç de x,

por exemplo: $y^2 - x\cos(y) + \operatorname{sen}(xy) - 2xy = 0$.

Agora, felizmente, não precisamos resolver uma eq. para y em termos de x para encontrar a derivada de y. Para isso, vamos utilizar o método da diferenciação implícita, que consiste em diferenciar ambos os lados da equação e resolver a eq. resultante para $y' = \frac{dy}{dx}$.

Exemplos: ① Se $xy^2 + y + x = 1$, calcule $\frac{dy}{dx}$, lembrando que y é uma fç de x, isto é, $y = y(x)$.

$$xy^2 + y + x = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy^2 + y + x) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x)\cdot y^2 + x\cdot\frac{d}{dx}(\overset{y\cdot y}{\overset{\shortparallel}{y^2}})$$

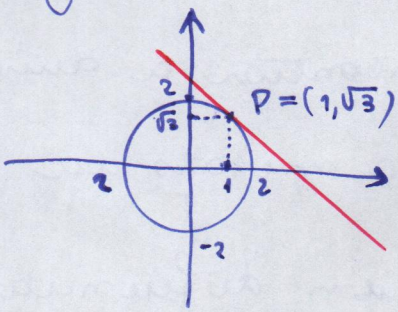
$$+ \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + x\left[\overbrace{\frac{d}{dx}(y)\cdot y + y\frac{d}{dx}(y)}^{\text{ou } 2y\cdot\frac{dy}{dx}}\right] + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + x\cdot 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow (2xy+1)\frac{dy}{dx} = -1 - y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y^2)}{2xy+1}}$$

② Seja $x^2 + y^2 = 4$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ e ache a eq. da reta tangente no pto $(1, \sqrt{3})$. Faça o gráfico dessa curva e de sua reta tangente.

$x^2+y^2=4$: eq. de uma circunferência de centro na origem e raio 2.



Derivando implicitamente $x^2+y^2=4$ temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(4) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

$$\Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}}$$

Logo, $\frac{dy}{dx}$ no pto $(1,\sqrt{3})$ é $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, isto é $y'(1)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

Daí, a reta tg nesse pto é dada por

$$y-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \Rightarrow y-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}.}$$

(*) $v=x^2+y^2$ e $u=\ln(\overbrace{x^2+y^2}^{v})=\ln v$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$$

3) Calcule $\frac{dy}{dx}$ na eq. implícita $y+\ln(x^2+y^2)=4$.

$$y+\ln(x^2+y^2)=4 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y+\ln(x^2+y^2)\right)=\frac{d}{dx}(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\ln(x^2+y^2)\right)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=0$$

(*)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}=0 \Rightarrow (x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+2y)\frac{dy}{dx}=-2x \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{x^2+y^2+2y}}$$

Aplicações da Derivada

Teorema (Rolle) Seja f é uma fç satisfazendo as seguintes hipóteses:

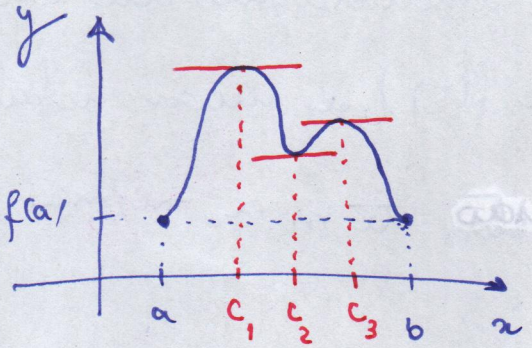
(i) f é contínua em $[a,b]$;

(ii) f é diferenciável em (a,b);

(iii) $f(a) = f(b)$.

Então existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tq. $f'(c) = 0$.

Geometricamente: Lembre-se que $f'(c) = 0$ $\Leftrightarrow$ a reta tg ao gráfico de f no pto $(c, f(c))$ é horizontal.



$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Teorema (do Valor Médio) Seja f uma fç satisfazendo as seguintes hipóteses:

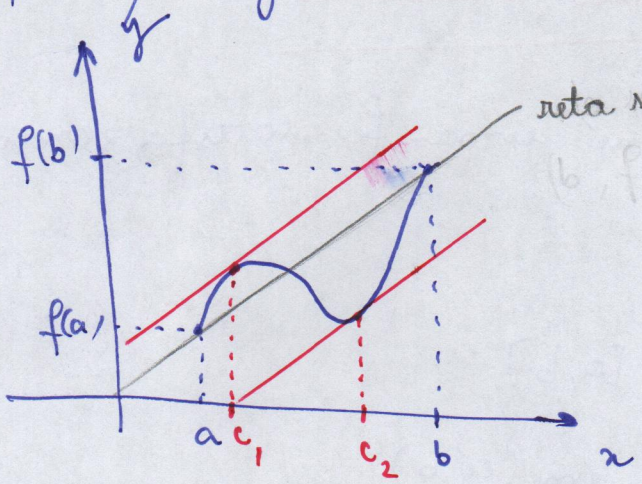
(i) f é contínua em $[a,b]$;

(ii) f é diferenciável em (a,b);

Então existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tq.

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$ ou equiv. $$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Interpretação geométrica:



reta secante passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A inclinação da reta secante ao gráfico de f passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é, por definição,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pelo TVM, existe $c \in (a,b)$ tq. $f'(c)$ coincide com esse valor, mas $f'(c)$ é a inclinação da reta tg. ao gráfico de f no pto $(c, f(c))$. e duas retas são $// s$ se, e somente se, elas tem a mesma inclinação.

Portanto, a reta tg ao gráfico de f em c é // a reta secante passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Exemplos: ① Mostre que a eq. $4x^5 + x^3 + 2x + 1$ possui exatamente uma raiz real.

Primeiramente mostraremos que essa eq. possui uma raiz e em seguida mostraremos que ela é única.

Seja $f(x) = 4x^5 + x^3 + 2x + 1$. Para mostrar que $\exists\, c$ tq. $f(c) = 0$, utilizaremos o teorema do anulamento.

Note que f é contínua, pois é uma fç polinomial e que $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -4 \cancel{-1} - 2 \cancel{+1} = -6 < 0$.

Assim, pelo teorema do Anulamento, $\exists\, c \in (-1, 0)$ tq. $f(c) = 0$, ou seja, c é uma raiz da eq. $4x^5 + x^3 + 2x + 1 = 0$

Mostremos agora que ela é única. Para isso, suponhamos que f admite duas raízes c e d e suponhamos que $c < d$.

Então $f(c) = f(d) = 0$. Além disso, note f é contínua em (c, d) e derivável em (c, d) pois é um polinômio.

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $a \in (c, d)$ tq. $f'(a) = 0$. Mas $f'(x) = 20x^4 + 3x^2 + 2 = 20(x^2)^2 + 3(x^2) + 2$.

Chame $x^2 = y$, então $f'(x) = 20y^2 + 3y + 2$ e $f'(a) = 0$ ou seja, a é raiz de f'.

O discriminante de $f'(x) = 0$ é $\Delta = (3)^2 - 4(20) \cdot 2 = 9 - 160 < 0$, logo, f' não possui uma raiz real e isso contradiz o fato de que a é uma raiz de f'.

Tal contradição surgiu por termos suposto que f possui mais de uma raiz, portanto f possui uma única raiz.

2) Uma fç f é dita ser constante no intervalo $[a,b]$ se para todo $x, y \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(y)$.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é tq. $f'(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$, mostre que f é constante em (a,b).

Sejam x e $y \in (a,b)$ arbitrários e tais que $x < y$.

Considere o intervalo $[x,y] \subset (a,b)$. Note que f é contínua em $[x,y]$ e derivável em (x,y), pois f é derivável em $[a,b]$.

Assim, pelo T.V.M. $\exists\, c \in (x,y)$ tq. $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$.

Como $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ segue que $f'(c) = 0$, já que $c \in (x,y) \subset (a,b)$. Portanto, $f(y) - f(x) = 0 \cdot (y-x)$, ou seja, $f(y) = f(x)$.

Como x e y são arbitrários em (a,b), segue que f é constante em (a,b).

Regra de L'Hospital

Suponhamos que queremos calcular o limite do quociente entre $f(x)$ e $g(x)$ em um pto a e que uma substituição direta gere indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, por exemplo, $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Neste caso, não podemos aplicar a regra do quociente (a saber, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$). Para estes tipos de indeterminações $\left(\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}\right)$ temos a seguinte regra:

Regra de L'Hospital: Suponha que f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$ próximo do pto a (exceto possivelmente em a).

Suponhamos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ou $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Então, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se o limite do lado direito existir, (ou é $+\infty$ ou $-\infty$).

Obs: ① A regra de L'Hospital continua válida para limites laterais e limites no infinito, isto é, "$x \to a$" pode ser substituído por $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

② A regra de L'Hospital pode ser usada em um mesmo limite qtas vezes forem necessárias.

Exemplos: Calcule os limites usando L'Hospital se possível:

ⓐ $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, ⓑ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, ⓒ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(1+2e^x)}$

ⓐ $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

ⓑ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\sqrt{x})'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(1+2e^x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln(1+2e^x))'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{1+2e^x}\cdot 2e^x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{2e^x}{1+2e^x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2e^x}{2e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+2e^x)'}{(2e^x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{2e^x}{2e^x}}_{1} = 1$

Observação: A regra de L'Hopital é utilizada somente na resolução de limites indeterminados da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Contudo, é possível reduzir as demais formas indeterminadas ($0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞), a uma delas duas através de artifícios adequados.

① Indeterminação da forma $0\cdot\infty$:

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, escrevamos

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} & \left(\text{estamos na forma } \frac{0}{0}\right) \\ \text{ou} & \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} & \left(\text{estamos na forma } \frac{\infty}{\infty}\right) \end{cases}$$

Em seguida, aplica-se L'Hopital.

Exemplos: ⓐ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$; ⓑ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (2x-\pi)\cdot\sec x$

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\dfrac{x^{\cancel{3}}}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{x^2}{2} = 0.$

Obs: Note que se tivessemos escolhido $\frac{x^2}{\frac{1}{\ln x}}$ a expressão para a derivada ficaria mais complicada.

(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\sec x \overset{(0.\infty)}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{\frac{1}{\sec x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{\cos x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2}{-\operatorname{sen} x} = -2.$

② Indeterminação da forma $\infty-\infty$:

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$. Para calcular o $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, escrevemos

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Daí, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e L'Hopital se aplica.

Exemplos: (a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cossec} x\right)$; (b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$.

(a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{=f(x)}-\underbrace{\operatorname{cossec} x}_{=g(x)}\right) \overset{(\infty-\infty)}{\underset{(*)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}}-\underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}_{=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\operatorname{cossec} x}=\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x - x\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{1+1+0} = 0.$

(*) Note que poderíamos ter feito:

$$\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}}}_{=f(x)} - \underbrace{\frac{1}{\operatorname{cossec} x}}_{=g(x)} = \frac{\underbrace{\frac{1}{\operatorname{cossec} x}}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}}}_{f(x)}}{\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}\operatorname{cossec} x}}_{f(x).g(x)}} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x.\frac{1}{\operatorname{cossec} x}} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}.$$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)^{(\infty-\infty)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)} =$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}\right) = \frac{-1}{1+1+0} = -\frac{1}{2}.$

(3) Indeterminação da forma 1^∞, ∞^0 ou 0^0.

Suponhamos 3 casos para $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)}$.

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (tipo 0^0).

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (tipo ∞^0).

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (tipo 1^∞).

(3i) Indeterminação da forma 0^0 (os demais casos são análogos).

Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Para calcular o limite indeterminado $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ procedemos da seguinte forma:

(1) Denotamos por $y = (f(x))^{g(x)}$ e aplicamos o logaritmo obtendo $\ln(y) = \ln((f(x))^{g(x)}) = g(x)\ln(f(x))$.

(2) Aplicando o limite nessa equação, temos:

$\ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = \lim_{x\to a}\ln(y) = \lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))$.