Disciplina: Lógica Matemática

Aula 02: Cálculo Proposicional

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Resumo

Sabemos que para expressar proposições compostas em forma simbólica fazemos uso dos conectivos lógicos:

conectivo	**símbolo**	**significado**
e	$\wedge$	conjunção
ou	$\vee$	disjunção (inclusiva)
ou ... ou	$\veebar$	disjunção exclusiva
se ... então	$\rightarrow$	condicional
se, e somente se	$\leftrightarrow$	bicondicional
não	$\sim$	negação

Porém, às vezes precisamos usar parênteses para expressar corretamente a proposição.

Uso de parênteses

Escrever a seguinte proposição na forma simbólica:

Você não tem e-mail do tipo "@unesp.br" se você não for estudante da Unesp, a menos que você trabalhe na Unesp.

- Primeiro determinamos as proposições simples:

  p: "Você tem e-mail do tipo @unesp.br.

  q: "Você é estudante da Unesp".

  r: "Você trabalha na Unesp".
- Agora escrevemos a proposição em forma simbólica

$$(\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$$

ou, na forma equivalente, $p \rightarrow (q \vee r)$

Você consegue encontrar alguma outra forma simbólica equivalente para expressar esta proposição?

Note a necessidade do uso de parênteses.

Uso de parênteses

Proposições que envolvem vários símbolos podem ter resultados ambíguos. Por exemplo, considerando a proposição $\sim p \wedge q$, veja que

$(\sim p) \wedge q$ não tem o mesmo valor lógico que $\sim (p \wedge q)$

$(\sim p) \wedge q$ não é equivalente a $\sim (p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

As últimas colunas das tabelas verdade não são iguais.

Assim, torna-se necessário o uso de parênteses na expressão $\sim p \wedge q$ ou usar alguma precedência de operações lógicas, para conseguimos o valor lógico correto.

Uso de parênteses (algumas convenções)

Uma convenção é que a negação tem precedência sobre os outros símbolos, ou seja,

$$\sim p \wedge q \equiv (\sim p) \wedge q$$

$$p \vee \sim q \equiv p \vee (\sim q)$$

$$\sim p \rightarrow q \equiv (\sim p) \rightarrow q$$

Outra convenção é que $\wedge$ e $\vee$ tem precedência sobre os outros símbolos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, ou seja,

$$p \wedge q \rightarrow r \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$p \vee q \leftrightarrow r \equiv (p \vee q) \leftrightarrow r$$

Se quiser que os símbolos $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$ sejam executados primeiro, então deve usar parênteses, ou seja, usa-se

$$p \wedge (q \rightarrow r)$$

$$p \vee (q \leftrightarrow r)$$

Uso de parênteses

Assim, em muitas situações, devemos usar parênteses para obter o resultado desejado.

Exercícios:

1) Verifique se

$$(p \wedge q) \vee r \quad \text{não é equivalente a} \quad p \wedge (q \vee r).$$

2) Assumindo que, quando não há parênteses nem precedência, os símbolos são executados da esquerda para a direita, qual das duas proposições do item 1) é equivalente a $p \wedge q \vee r$?

3) Verifique se

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \quad \text{não é equivalente a} \quad p \rightarrow (q \leftrightarrow r).$$

4) Assumindo que, quando não há parênteses nem precedência, os símbolos são executados da esquerda para a direita, qual das duas proposições do item 3) é equivalente a $p \rightarrow q \leftrightarrow r$?

Uso de parênteses

Notação: denotamos por letras minúsculas com índices ou não as proposições simples. Por exemplo, p, q, r, p_1, p_2,...,p_n.

Quando os conectivos são iguais, assumimos que são executados da esquerda para a direita.

Assim, para n proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n$, com $n \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \wedge p_n &\equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \wedge p_n \\ &\equiv (((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \ldots) \wedge p_{n-1}) \wedge p_n \end{aligned}$$

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_{n-1} \vee p_n \equiv (p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_{n-1}) \vee p_n$$

$$p_1 \veebar p_2 \veebar p_3 \veebar \ldots \veebar p_{n-1} \veebar p_n \equiv (p_1 \veebar p_2 \veebar p_3 \veebar \ldots \veebar p_{n-1}) \veebar p_n$$

Exercícios:

- Verifique que

1. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \wedge p_n$ é verdadeira se todas as proposições p_k forem verdadeiras, caso contrário é falsa.
2. $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_{n-1} \vee p_n$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições p_k for verdadeira, caso contrário é falsa.
3. $p_1 \veebar p_2 \veebar p_3 \veebar \ldots \veebar p_{n-1} \veebar p_n$ é verdadeira quando existe um número ímpar de proposições p_k verdadeiras, caso contrário é falsa.

- Escreva a proposição “Ou vou a São Paulo ou vou a Campinas ou vou a Catanduva ou vou a Mirassol” em forma simbólica e monte sua tabela verdade.

Tautologia:

Tautologia é uma proposição composta, denotada por T, que é sempre verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõe. Ou seja, a coluna de T na tabela verdade contém apenas V.

Exemplo: $p \wedge q \rightarrow p$ é uma tautologia. Vamos construir a tabela verdade de $p \wedge q \rightarrow p$ para comprovar que é uma taulogia observando sua última coluna

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Exercício: Verifique que as seguintes proposições são tautologias:

$a)\ p \vee \sim p$ $\qquad b)\ p \rightarrow p$ $\qquad c)\ \sim\sim p \rightarrow p$ $\qquad d)\ p \rightarrow p \vee q$

Contradição:

Contradição é uma proposição composta, denotada por C, que é sempre falsa quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõe. Ou seja, coluna de C na tabela verdade contém apenas F.

Exemplo: $p\wedge \sim p$ é uma contradição. Vamos construir a tabela verdade de $p\wedge \sim p$ para comprovar que é uma contradição observando sua última coluna

p	$\sim p$	$p\wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Exercício: Verifique se as seguintes proposições são contradições:

$a)\ \sim (p \rightarrow p)$

$b)\ p \wedge (p \rightarrow q) \wedge \sim q$

$c)\ p \wedge (p \rightarrow q) \wedge q$

Contingência:

Toda proposição que não é uma tautologia ou uma contradição é dita Contingência ou Indeterminada.

Encontre um exemplo de Proposição Indeterminada.

Exercício: Classifique as seguintes proposições em tautologia, contradição ou contingência:

$a)\ p \wedge q \rightarrow r$

$b)\ q \rightarrow p \vee q$

$c)\ r \wedge \sim r$

$d)\ ((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

Equivalência e Implicação Lógica

Notação: aqui vamos denotar por letras minúsculas com índices ou não as proposições simples, $p, p_1, p_2, ..., q, r$, e por letras maiúsculas as proposições compostas, P, Q, R, que dependam das proposições simples

Exemplos:

$$P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$$

$$Q = Q(p, q, r, s)$$

Se as proposições P e Q ocorrem em um mesmo contexto, denotaremos por $p_1, p_2, ..., p_n$ todas as proposições simples que ocorrem em P ou Q.

Exemplos:

1)

$$\begin{array}{rcl} P(p_1, p_2, p_3) & : & p_1 \to p_2 \\ Q(p_1, p_2, p_3) & : & p_2 \vee \sim p_3 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{rcl} A(p, q, r, s) & : & (p \vee q) \to (r \wedge s) \\ B(p, q, r, s) & : & p \wedge r \end{array}$$

Equivalência Lógica:

Duas proposições $P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$ e $Q = Q(p_1, p_2, ..., p_n)$ para $n \geq 1$ são logicamente equivalentes se P e Q sempre assumem valores lógicos iguais, para os mesmos valores lógicos atribuídos a $p_1, p_2, ..., p_n$.

Em outras palavras:

P e Q são logicamente equivalentes se, e somente se, a proposição bicondicional $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia.

Ou ainda, como vimos anteriormente:

P e Q são logicamente equivalentes se, e somente se, as úlimas colunas das respectivas tabelas verdade forem iguais.

Notação:

$$P \equiv Q \qquad \text{ou} \qquad P \Leftrightarrow Q.$$

Exemplo 1:

Considere as proposições P e Q dadas por

$$P:\ p \to q \qquad \text{e} \qquad Q: \sim q \to \sim p.$$

Verifique que $P \equiv Q$, ou seja, verifique que $p \to q \equiv \sim q \to \sim p.$

Vamos mostrar que $P \equiv Q$ usando a definição "P e Q são logicamente equivalentes se, e somente se, a proposição $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia".

p	q	$P:\ p \to q$	$\sim p$	$\sim q$	$Q: \sim q \to \sim p$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 2:

Considere as proposições P e Q dadas por

$$P: \ p \to q \qquad \text{e} \qquad Q: \sim p \vee q.$$

Verifique que $P \equiv Q$, ou seja, verifique que $p \to q \equiv \sim p \vee q$.

Vamos mostrar que $P \equiv Q$ usando a definição "P e Q são logicamente equivalentes se, e somente se, a proposição $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia".

p	q	$P: \ p \to q$	$\sim p$	q	$Q: \sim p \vee q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Equivalência Lógica

Exemplo 3:

Considere as proposições A e B dadas por

$$A: \ (a \wedge \sim b) \rightarrow \sim s \qquad \text{e} \qquad B: \ (a \wedge s) \rightarrow b.$$

Verifique que $A \equiv B$, ou seja, verifique que $(a \wedge \sim b) \rightarrow \sim s \equiv (a \wedge s) \rightarrow b.$

a	b	s	$\sim b$	$a \wedge \sim b$	$\sim s$	A	$a \wedge s$	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Como $A \leftrightarrow B$ é Tautologia, então $A \equiv B$.

Equivalências Lógicas Importantes

• Para quaisquer proposições p, q, r, T (tautologia), C (contradição), as seguintes equivalências lógicas valem

a) **Associativas**

$$\begin{aligned} p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \end{aligned}$$

b) **Comutativas**

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv q \vee p \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p \\ p \leftrightarrow q &\equiv q \leftrightarrow p \end{aligned}$$

c) **Propriedades da condicional e da bicondicional**

$$\begin{aligned} p \to q &\equiv \sim p \vee q \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \end{aligned}$$

d) **Leis de DeMorgan**

$$\begin{aligned} \sim (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \end{aligned}$$

e) **Negação da condicional**

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

• De fato, podemos mostrar esta equivalência se usar tabela verdade, fazendo apenas uso das equivalências já conhecidas c) e d), veja:

$$\sim (p \rightarrow q) \overset{c)}{\equiv} \sim (\sim p \vee q) \overset{d)}{\equiv} \sim (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

f) **Negação da bicondicional**

$$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$$

g) **Leis complementares**

$$\begin{aligned} p \vee \sim p &\equiv T \\ p \wedge \sim p &\equiv C \end{aligned}$$

h) **Leis complementares**

$$\begin{aligned} \sim\sim p &\equiv p \\ \sim T &\equiv C \\ \sim C &\equiv T \end{aligned}$$

i) **Idempotentes**

$$p \vee p \equiv p \wedge p \equiv p$$

j) **Distributivas**

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

ou ainda,
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

k) **Identidades**

$$p \vee C \equiv p$$
$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge C \equiv C$$
$$p \wedge T \equiv p$$

Exemplo: Usando as "Equivalências Lógicas Importantes" (ou seja, sem usar tabela verdade), mostre que a seguinte condicional

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \quad \text{é uma tautologia.}$$

Resolução: Usando prop. da condicional, leis de DeMorgan, prop. comutativa, prop. associativa, lei complementar e a prop. idempontente:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\overset{c)}{\equiv} \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
&\overset{d)}{\equiv} (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \\
&\overset{comut}{\equiv} (\sim p \vee \sim q) \vee (q \vee p) \\
&\overset{assoc}{\equiv} \sim p \vee (\sim q \vee q) \vee p \\
&\overset{g)}{\equiv} \sim p \vee T \vee p \\
&\overset{comut}{\equiv} \sim p \vee p \vee T \\
&\overset{g)}{\equiv} T \vee T \overset{idemp.}{\equiv} T
\end{aligned}$$

- No exemplo anterior, a cada passo aplicamos apenas uma propriedade de equivalência. O mesmo exercício pode ser feito vai rapidamente, por exemplo:

Resolução: Usando prop. da condicional, leis de DeMorgan, prop. comutativa, prop. associativa, lei complementar e a prop. idempontente:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) & \overset{pr.\ cond.}{\equiv} & \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \\
& \overset{DeMorgan}{\equiv} & (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \\
& \overset{comut.\ assoc.}{\equiv} & (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \\
& \overset{lei\ compl.}{\equiv} & T \vee T \\
& \overset{idemp.}{\equiv} & T
\end{aligned}
$$

Assim, mostramos que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é um tautologia, sem o uso da tabela verdade.

- Mostre (sem usar tabela verdade) que $\sim q \vee (p \wedge q) \equiv \sim q \vee p$

Resolução:

$$\sim q \vee (p \wedge q) \quad \equiv$$

Implicação Lógica:

Dizemos que a proposição $P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$ implica logicamente a proposição $Q = Q(p_1, p_2, ..., p_n)$, se, toda atribuição de valores lógicos de $p_1, p_2, ..., p_n$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Em outras palavras:

P implica logicamente Q se, e somente se, a proposição condicional $P \to Q$ for uma tautologia.

Notação:

$$P \Rightarrow Q$$

Implicação Lógica

Exemplo: Considere as proposições P e Q dadas por

$$P:\ p \qquad \text{e} \qquad Q:\ p \vee q.$$

Verifique que $P \Rightarrow Q$, ou seja, verifique que $p \Rightarrow (p \vee q)$, p implica logicamente em $(p \vee q)$.

• Vamos mostar que $P \Rightarrow Q$ usando a definição "P implica logicamente Q se, e somente se, a proposição $P \rightarrow Q$ for uma tautologia".

p	q	$P:\ p$	$Q:\ p \vee q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Como $P \rightarrow Q$ é Tautologia, então $P \Rightarrow Q$.

• lembre-se que P implica logicamente Q, se, toda atribuição de valores lógicos que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Exercícios: Mostre que

$$p \Rightarrow p \qquad \text{e} \qquad p \wedge q \Rightarrow q.$$

Importante: Dadas duas proposições A e B, então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $A \Rightarrow B$ (isto é, A logicamente implica B, $A \rightarrow B$ é tautologia)

ii) $\sim A \vee B$ é tautologia

iii) $A \wedge \sim B$ é contradição

Exercícios

Exercícios:

Faça todos os exercícios da Seção 1.3, páginas 36 a 37 do Livro A.F. da Silva e C.M. dos Santos, “Aspectos Formais da Computação”.