Cálculo Numérico

Solução Aproximada de Equações Não Lineares

Parte 01: Localização dos Zeros

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP, Brasil

Introdução

Nosso objetivo aqui é a resolução de uma equação do tipo

$$f(x) = 0,$$

onde, por exemplo,

$$f(x) = x^2 + 2x - 3,$$

ou $$f(x) = \sqrt{x} - e^{-x},$$

ou $$f(x) = x\ln(x) - 1.$$

Um número real (ou complexo) ξ é

um zero da função $f(x)$ ou

uma raiz da equação $f(x) = 0$,

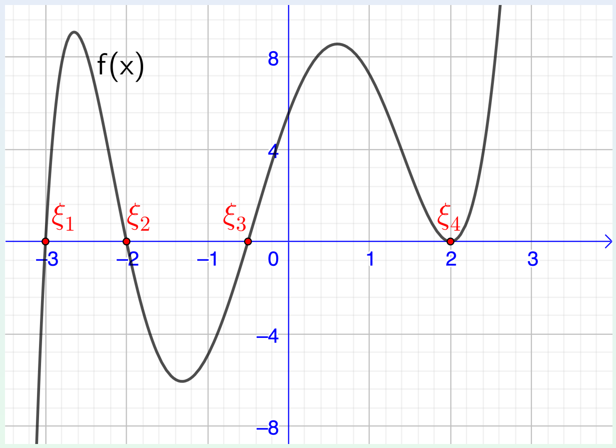
se $f(\xi) = 0$.

Estaremos interessados em determinar somente os zeros reais de $f(x)$.

Interpretação Geométrica.

Graficamente, os zeros reais são representados pelas abcissas dos pontos onde a curva da função intercepta o eixo **x**.

Considere a função $f(x)$ que, no intervalo $(-3.5,\ 4)$, é dada pelo gráfico:



Os zeros de $f(x)$ no intervalo $(-3.5,\ 4)$ são então

$$\xi_1 = -3.0, \quad \xi_2 = -2.0, \quad \xi_3 = -0.5 \quad \text{e} \quad \xi_4 = 2.0,$$

respectivamente.

Como obter zeros de uma função qualquer?

Com os métodos que veremos, conseguimos encontrar "boas" aproximações para zeros de uma dada função.

A ideia central destes métodos é:

partir de uma aproximação inicial para o zero e, em seguida

refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

Por isso, os métodos constam de duas fases:

- **Fase I**: Localização ou isolamento dos zeros, que consiste em obter um intervalo que contém o zero.
- **Fase II**: Refinamento, que consiste em, escolhidas aproximações iniciais no intervalo encontrado no Fase I, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para o zero dentro de uma precisão ϵ prefixada.

Fase I: Isolamento dos Zeros

Nesta fase é feita uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$.

Na análise gráfica o processo mais trivial é, como vimos anteriormente, esboçar a função $f(x)$ e localizar as abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo **x**.

Na análise teórica usamos frequentemente o seguinte teorema.

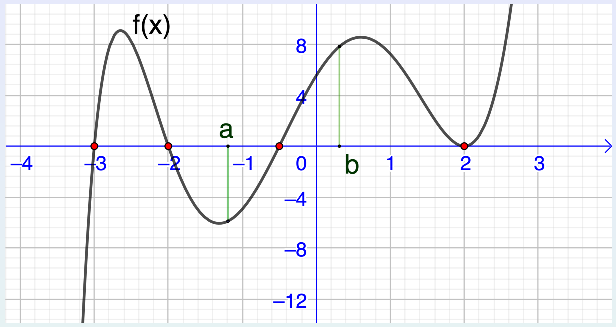
(Teorema A)

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Se $f(a)\, f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

Vamos entender o Teorema A via análise gráfica de uma função escolhida.

Teorema A e **Análise Gráfica**: exatamente um zero.

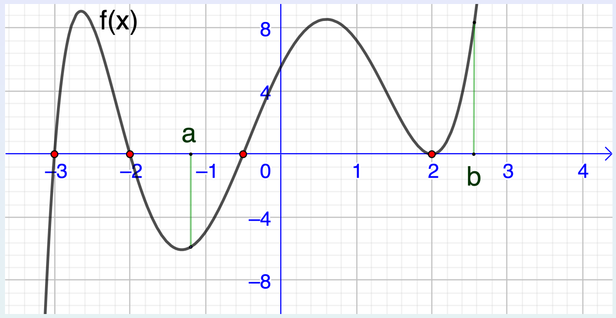


Temos $f(a) \times f(b) < 0$, mas $f(x)$ tem apenas um zero em (a, b)

Aqui temos uma situação em que, como informa o Teorema A, existe pelo menos um zero no intervalo (a, b).

Mas, o intervalo (a, b) é suficientemente pequeno tal que existe exatamente um zero no intervalo.

Teorema A e **Análise Gráfica**: mais de um zero.

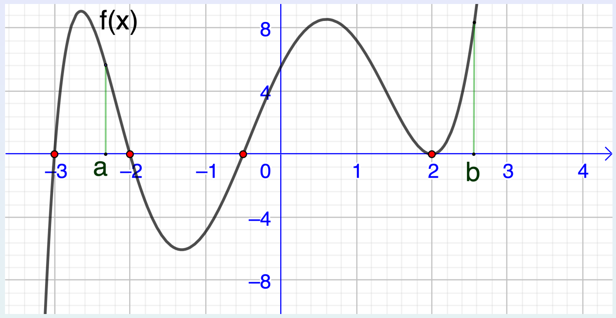


Temos $f(a) \times f(b) < 0$, mas $f(x)$ tem mais de um zero em (a, b)

Aqui temos uma situação em que, como informa o Teorema A, existe pelo menos um zero no intervalo (a, b).

Mas, no intervalo (a, b) temos mais de um zero.

Teorema A e **Análise Gráfica**: resultado inconclusivo.



Temos $f(a) \times f(b) > 0$, mas $f(x)$ ainda tem zeros em (a, b)

Embora $f(a) \times f(b) > 0$, ainda temos zeros no intervalo (a, b).

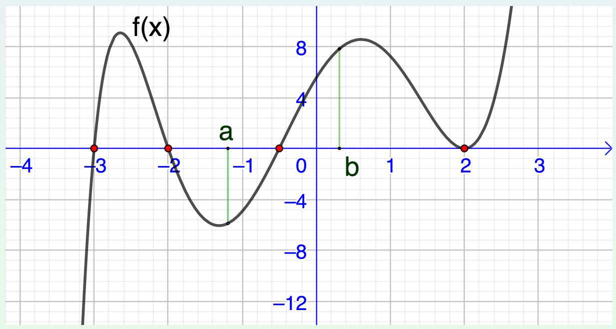
Isto é, podemos ter situações em que as extremidades do intervalo não satisfaz a condição do Teorema A, mas o intervalo pode ter zeros.

Condições suficientes para um único zero.

(Theorem A1)

Sejam $f(x)$ e $f'(x)$ contínuas em $[a, b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$ e se $f'(x)$ não muda de sinal em (a, b), então existe um único zero ζ de $f(x)$ em (a, b).



Temos $f(a) \times f(b) < 0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Outros tipos de verificação gráfica

Podemos também,

- a partir da equação $f(x) = 0$, obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$,
- esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano, e
- localizar os pontos onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso
$$f(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\xi) = h(\xi).$$

Ex: Seja $f(x) = \cos(x) + \ln(x^2)$,

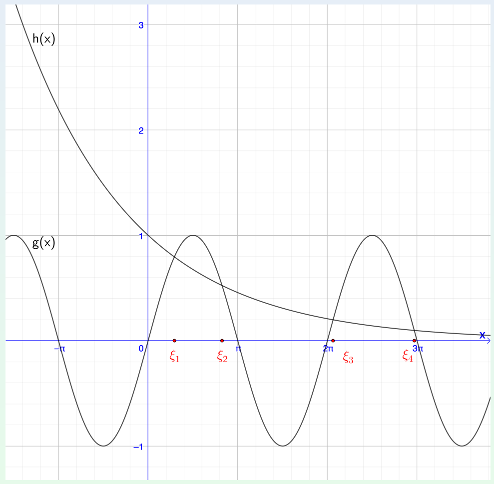
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) + \ln(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = -\ln(x^2).$$

Logo, podemos escolher $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = -\ln(x^2)$.

Exemplo.

Seja $f(x) = \sin(x) - e^{-x/4}$. Neste caso,

- podemos escolher $g(x) = \sin(x)$ e $h(x) = e^{-x/4}$;
- esboçar os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$;
- localizar os pontos onde as duas curvas se interceptam.



Gráficos de $g(x) = \sin(x)$ e $h(x) = e^{-x/4}$.

Isolamento de zeros por tabelamento

Usando as informações do Teorema A, uma maneira sistemática de isolar os zeros de $f(x)$ é tabelar $f(x)$ para vários valores de x e analizar as mudanças de sinal de $f(x)$.

E analizar o sinal da derivada $f'(x)$ nos intervalos em que $f(x)$ mudou de sinal (usando o Teorema A1).

Exemplo **a)**.

Considere a função $f(x) = 6\arctan(x)(8x^4 - 8x^2 + 1) + 0.5$. Temos,

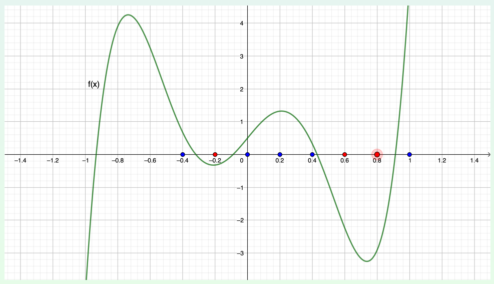
x	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x) \approx$	0.67	-0.32	0.5	1.32	0.32	-2.23	-2.91	5.21
sinal	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

Então, pela tabela e pelo Teorema A, temos

pelo menos um zero no intervalo $(-0.2, 0)$,

pelo menos um zero no intervalo $(0.4, 0.6)$, e

pelo menos um zero no intervalo $(0.8, 1.0)$.



Gráficos de $f(x) = 6\arctan(x)(8x^4 - 8x^2 + 1) + 0.5$.

Exemplo **b)**.

Considere a função $f(x) = 5e^{-x} - \sqrt{x}$. Temos,

x	0	1	2	3	...
$f(x) \approx$	5.0	0.839	-0.737	-1.483	...
sinal	$+$	$+$	$-$	$-$	...

Então, pela tabela e pelo Teorema A, temos

pelo menos um zero no intervalo $(1, 2)$.

Mas,

$$f'(x) = -5e^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

por tanto, é negativa no intervalo $(1, 2)$.

Assim, pelo Teorema A1, concluímos que existe exatamente um zero no intervalo $(1, 2)$.

Exercícios

1) Usando a verificação gráfica (método do gráfico) ou o isolamento de zeros por tabelamento encontre intervalo que contém zeros das funções

(a) $f(x) = x + e^x$

(b) $f(x) = xln(x) - 2$

(c) $f(x) = cos(x) - x + 1$

(d) $f(x) = ln(x) - 2x + 1$

2) Para o intervalo que contém um zero da função $f(x) = x + e^x$ encontrado no item (a), pode-se garantir que existe um único zero desta função? Por quê?