Disciplina: Lógica Matemática

Aula 08: Métodos de Contagem (continuação)

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

• Seja $r \geq 1$. Arranjo com repetição dos m elementos de A tomados r a r é toda r-úpla ordenada (sequência de r elementos) formada com elementos de A (não necessariamente distintos).

Número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r:

$$AR_{m,r} = m \times m \times \cdots \times m = m^r.$$

• Seja $(1 \leq r \leq m)$. Arranjo dos m elementos de A tomados r a r é toda r-úpla ordenada (sequência de r elementos) formada com elementos distintos de A.

Número de arranjos de m elementos tomados r a r:

$$A_{m,r} = m \times (m-1) \times \cdots \times (m-(r-1)) = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

• Permutação dos m elementos de A é toda m-úpla ordenada (sequência de m elementos) formada por todos os elementos de A.

Número de permutações de m elementos:

$$P_m = m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = m!$$

• Seja $(0 \leq r \leq m)$. Combinação dos m elementos de A tomados r a r, é um subconjunto de A constituído por r elementos.

Número de combinações de m elementos de tomados r a r:

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} = \frac{A_{m,r}}{r!}.$$

- Quantas permutações é possível obter-se das letras da palavra FILTRO?

  Como são 6 letras: F, I, L, T, R, O, obtemos $P_6 = 6! = 720$ permutações.

- Quantas permutações é possível obter-se das letras da palavra ABA?

  Neste caso precisamos aprender a contar o número de permutações com elementos repetidos.

- Permutação com elementos repetidos:

Vamos analisar o número de permutações podemos obter com as letras A B A.

- Primeiro consideramos estas letras como: A_1 B A_2. Sabemos que se $A_1 \neq A_2$ teríamos 3 letras distintas e $P_3 = 3! = 6$ permutações, que são:

  B A_1 A_2, B A_2 A_1, A_1 B A_2, A_2 B A_1, A_1 A_2 B, A_2 A_1 B.

- Porém, como 2 letras são iguais temos apenas 3 permutações, que são:

  B A A, A B A, A A B.

- Note que com 2 letras iguais, todas as permutações com as letras A_1 e A_2 tornam-se apenas uma.

• Número de permutação m elementos, sendo r elementos repetidos = $P_m^{(r)} = \frac{m!}{r!}$.

De maneira geral, suponhamos que em m elementos r são iguais.

- Logo temos $m-r$ elementos distintos.
- Como r elementos são iguais, vamos analisar como permutar os $m-r$ elementos distintos em m posições.

Das m possíveis posições, vamos escolher $m-r$ posições para colocar os elementos distintos e neste caso estamos falando de subconjunto de posições, ou seja, temos

$$C_{m,m-r} = \binom{m}{m-r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} = \binom{m}{r}$$ maneiras de escolher estas $m-r$ posições.

Para cada escolha de posições dos $m-r$ elementos distintos, temos $(m-r)!$ modos em que estes elementos distintos podem ser permutados. Logo, o número de permutações com elementos distintos, $P_m^{(r)}$, é

$$P_m^{(r)} = (m-r)!\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!}.$$

- Permutação com elementos repetidos:

Se em m elementos m_1 são iguais, então o número de permutações é

$$P_m^{(m_1)} = \frac{m!}{m_1!}.$$

Se em m elementos, m_1 elementos são iguais entre si, m_2 elementos são iguais entre si,..., m_k elementos são iguais entre si, então o número de permutações é

$$P_m^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!},.$$

Ex 1: Número de anagramas para a palavra ABA. São 3 letras, com 2 iguais e 1 diferente

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ex 2: E para a palavra MISSISSIPI? São 10 letras, onde 4 iguais a I e 4 letras S

$$P_{10}^{4,4} = \frac{10!}{4!\,4!} = 6300.$$

- Permutação com elementos repetidos:

Um caso especial é quando temos m elementos, m_1 elementos são iguais entre si, m_2 elementos são iguais entre si, e ainda $m_1 + m_2 = m$, (ou seja, $m_1 = m - m_2$ e $m_2 = m - m_1$, então o número de permutações é

$$P_m^{m_1,m_2} = \frac{m!}{m_1!\, m_2!} = \frac{m!}{m_1!\,(m-m_1)!} = \binom{m}{m_1}, \text{ para } m = m_1 + m_2,$$

$$P_m^{m_1,m_2} = \frac{m!}{m_1!\, m_2!} = \frac{m!}{(m-m_2)!\, m_2!} = \binom{m}{m_2} = \binom{m}{m_1}, \text{ para } m = m_1 + m_2.$$

Ex 3: Número de anagramas para a palavra ARARA.
São 5 letras, com 3 iguais a A e 2 iguais a R, sendo 3+2 = 5,

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$$

- Combinação permitindo elementos repetidos:

Exemplo 1: Uma criança pode escolher 4 doces entre balas e gomas. De quantas maneiras ela pode escolher os doces?

Sendo B = bala , G = goma e | = separador, poderíamos pensar nas seguintes escolhas:

B B B B | $= \{4B\}$ ou seja, 4 balas e 0 gomas
B B B | G $= \{3B, 1G\}$ ou seja, 3 balas e 1 goma
B B | G G $= \{2B, 2G\}$ ou seja, 2 balas e 2 gomas
B | G G G $= \{1B, 3G\}$ ou seja, 1 balas e 3 gomas
| G G G G $= \{4G\}$ ou seja, 0 balas e 4 gomas.

Resposta = 5 maneiras de escolher os 4 doces.

Seja $n = 2$ o número de possibilidades (balas ou gomas).
Seja $n-1 = 1$ o número de separadores de possibilidades.
Seja $r = 4$ o número de objetos (doces) a serem escolhidos.

- Combinação permitindo elementos repetidos:

Seja n o número de possibilidades.
Seja $n-1$ o número de separadores de possibilidades.
Seja r o número de objetos a serem escolhidos.

Em geral, temos que calcular a combinação de $r+n-1$ objetos tomados r a r, ou seja

$$C_{r+n-1,r} = \binom{r+n-1}{r} = \frac{(r+n-1)!}{r!(r+n-1-r)!} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}.$$

Veja que, no Exemplo 1, temos $n=2$, $n-1=1$ e $r=4$, assim a resposta é

$$C_{4+1,4} = C_{5,4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5.$$

- Combinação permitindo elementos repetidos:

Exemplo 2: Ao projetar um anel, um joalheiro decidiu colocar 5 pedras escolhidas entre diamantes, rubis e esmeraldas. De quantas maneiras as pedras podem ser escolhidas?

Aqui
$n = 3$ o número de possibilidades de pedras.
$n - 1 = 2$ o número de separadores de possibilidades.
$r = 5$ o número de pedras a serem escolhidos.

Assim, a resposta é

$$C_{5+2,5} = C_{7,5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \quad \text{maneiras diferentes.}$$

$\{5D\}$ ou $\{4D, 1R\}$ ou $\{4D, 1E\}$ ou $\{3D, 1R, 1E\}$ ou $\{2D, 2R, 1E\}$ ou .... ou $\{5E\}$

• Combinação permitindo elementos repetidos:

Exemplo 3: Quantas soluções existem para a equação

$$x+y+z+w=73, \quad \text{com} \quad x,y,z,w \in \mathbb{N}\ ?$$

Obs.: $x=40, y=10, z=20, w=3$ e $x=40, y=10, z=3, w=20$ são soluções distintas.

Podemos pensar que temos 73 bolas idênticas e 4 caixas e perguntar de quantas maneiras podemos distribuir as 73 bolas idênticas nestas 4 caixas. Aqui

$n=4$ o número de possibilidades de caixas.

$n-1=3$ o número de separadores de possibilidades.

$r=73$ o número de bolas a serem escolhidos.

Assim, a resposta é

$$C_{73+3,73} = C_{76,73} = \binom{76}{73} = 70300 \quad \text{soluções distintas.}$$

Consideramos uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ que pode ser denotada por $\{a_n\}_{n\geq 0}$, ou apenas por $\{a_n\}$.

• Relação de recorrência:

Definição: Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa o valor de a_n em termos de um ou mais termos prévios da sequência, ou seja, em termos de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Uma sequência é chamada de solução de uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Obs. 1: Uma relação de recorrência também depende dos seus valores iniciais. Por exemplo, a_0 e a_1.

Obs. 2: Relação de recorrência é um tipo de relação recursiva.

Exemplo 1: Considere a relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

com as condições iniciais $a_0 = 2$ e $a_1 = 6$. Qual é o valor de a_5?

Resp: Para calcular a_5, precisamos calcular primeiro a_2, a_3 e a_4, ou seja,

fazendo $n = 2$ em (1), temos $a_2 = a_1 - a_0 = 6 - 2 = 4,$ $\quad a_2 = 4$

fazendo $n = 3$ em (1), temos $a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 6 = -2,$ $\quad a_3 = -2$

fazendo $n = 4$ em (1), temos $a_4 = a_3 - a_2 = -2 - 4 = -6,$ $\quad a_4 = -6$

fazendo $n = 5$ em (1), temos $a_5 = a_4 - a_3 = -6 - (-2) = -4,$ $\quad a_5 = -4$

E, assim por diante, podemos gerar todos os elementos da sequência.

- Agora, supondo que $a_0 = 3$ e $a_1 = 5$, calcule o valor de a_5.

Exemplo 2: Considere a relação de recorrência

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2, \tag{2}$$

• Verifique se $a_n = 3n$, para $n \geq 0$, é solução da relação de rec. (2), com $a_0 = 0$ e $a_1 = 3$.
Resp: Temos que verificar se $a_n = 3n$ satisfaz a relação de recorrência (2).
Note que $a_n = 3n$ significa que $a_{n-1} = 3(n-1)$ e $a_{n-2} = 3(n-2)$. Assim,

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n = a_n.$$

Logo, $a_n = 3n$ satisfaz a relação de recorrência (2). Portanto $a_n = 3n$ é solução. Além disso, os valores iniciais são $a_0 = 0$ e $a_1 = 3$.

• Verifique se $a_n = 2^n$, para $n \geq 0$, é solução da relação de rec. (2), com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.
Resp: Note que $a_n = 2^n$ significa que $a_1 = 2^1 = 2$ e $a_0 = 2^0 = 1$, ok até aqui. Mas,

$$2a_1 - a_0 = 2(2) - 1 = 3 \neq 4 = 2^2 = a_2$$

Como $a_2 \neq 2a_1 - a_0$ já podemos concluir que $a_n = 2^n$ não é solução.

Relação de recorrência

Exemplo 3: Encontrar uma relação de recorrência para calcular juros compostos.

Suponhamos que você deposite R$ 10.000,00 em uma poupança que rende 6% ao ano, com taxa de juros compostos anual. Que valor terá depois de 20 anos?

Resp: Sabemos que juros de 6% significa 0,06 do montante aplicado.
Assim, se o montante aplicado é M, no final de um ano você tem $M + 0,06M = (1,06)M$.
Vamos denotar por M_0 o montante aplicado no início. Depois de um ano você tem M_1 que é $M_1 = (1,06)M_0$. Se continuarmos temos

$$\begin{aligned}
M_1 &= (1,06)M_0 \\
M_2 &= (1,06)M_1 = (1,06)^2 M_0 \\
M_3 &= (1,06)M_2 = (1,06)^3 M_0 \\
&\vdots \\
M_n &= (1,06)M_{n-1} = (1,06)^n M_0.
\end{aligned}$$

Solução da rel. de rec. é

$$M_n = (1,06)^n M_0$$

$$M_{20} = (1,06)^{20} 10000 = \text{R\$}\, 32.071,35.$$

A rel. de rec. é $M_n = (1,06)^n M_0$, com M_0 sendo o montante inicial aplicado.

Relação de recorrência

De maneira geral a relação de recorrência para o valor da aplicação de um montante M_0, por n períodos a uma taxa $i\%$ de juros compostos é

$$M_n = (1 + i/100)M_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

com valor inicial M_0.
Cujo valor também pode ser fornecido pela solução

$$M_n = (1 + i/100)^n M_0.$$

Ex: Montante aplicado $M_0 =$R$\$1000,00$ por $n = 12$ meses e taxa de juros compostos de 15% por mês. Depois de 12 meses o valor é de

$$M_{12} = (1,15)^{12} 1000 = 5350,25.$$

Relação de recorrência

Exemplo 3: Relação de recorrência para calcular $n!$ para $n \geq 0$.

Resp: Da definição de fatorial sabemos que

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Vamos encontrar uma rel. de rec. tal que $a_n = n!$ e com $a_0 = 0! = 1$ valor inicial. Note que

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \times 0! & &\Rightarrow & a_1 &= 1 \times a_0 \\ 2! &= 2 \times 1! & &\Rightarrow & a_2 &= 2 \times a_1 \\ 3! &= 3 \times 2! & &\Rightarrow & a_3 &= 3 \times a_2 \\ &\vdots & & & & \\ n! &= n \times (n-1)! & &\Rightarrow & a_n &= n \times a_{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, a relação de recorrência para calcular $a_n = n!$ é

$$a_n = n\, a_{n-1}, \quad n \geq 1, \qquad \text{com} \quad a_0 = 1.$$

Relação de recorrência

A relação de recorrência para calcular $n!$ para $n \geq 0$, também pode ser escrita como

$$n! = n \times (n-1)!, \quad n \geq 1, \qquad \text{e} \quad 0! = 1. \tag{3}$$

Na próxima página vemos um programa em Python que calcula $n!$ com $n \geq 0$, usando a relação de recorrência (3) de forma recursiva, ou seja, função `Fatorial_Recursiva(n)` chama ela própria com `Fatorial_Recursiva(n-1)`.

Por exemplo, se o usuário fornecer o valor $n = 3$,
a função `main()` chama a função `Fatorial_Recursiva(3)`,
que, por sua vez, chama a função `Fatorial_Recursiva(2)`,
que chama a função `Fatorial_Recursiva(1)`,
que, finalmente chama a função, `Fatorial_Recursiva(0)` e retorna o valor 1,
em seguinda a função `Fatorial_Recursiva(1)` retorna o valor 1,
a função `Fatorial_Recursiva(2)` retorna o valor 2,
a função `Fatorial_Recursiva(3)` retorna o valor 6, que é exibido pela função `main()`.

```
## Programa calcula fatorial de um natural usando uma função recursiva
def main() :
    n = int(input("Entre o número:"))
    if n < 0 :
        print("Fatorial é definido apenas para valores não negativos")
        return
    fat = Fatorial_Recursiva(n)
    print(fat)

## Função recursiva
def Fatorial_Recursiva(n) :
    if n == 0 :
        return 1
    else :
        fat = n * Fatorial_Recursiva(n - 1)
    return fat
main()
```

Relação de recorrência

Exercício: Torre de Hanói é um quebra-cabeça que consiste em 3 pinos colocados sobre uma base, e discos de tamanhos diferentes com um buraco no meio, para serem encaixados nos pinos. Inicialmente esses discos estão encaixados no primeiro pino, em ordem crescente de tamanho, de baixo para cima. As regras do quebra-cabeça permitem que os discos sejam movidos um de cada vez a partir do primeiro pino para outro, contanto que nenhum disco seja colocado em cima de um disco menor.
O objetivo do jogo é ter todos os discos em outro pino, também em ordem crescente de tamanho de baixo para cima.

Considere n o número de discos e H_n o número de movimentos para resolver o quebra-cabeça.

Construa uma relação de recorrência para calcular o H_n.

Dicas:
$H_1 = 1$ (apenas 1 movimento é necessário para mudar 1 disco de pino)
$H_2 = 3$ (3 movimentos são necessários para mudar 2 discos de pino, sem que disco maior fique em cima de disco menor).

Princípio da Casa dos Pombos

Esse estranho nome é devido à seguinte ideia:

“Se mais do que K pombos pousarem em K casas de pombos, então pelo menos uma casa receberá mais de um pombo.”

Princípio da Casa dos Pombos: “Se mais do que K objetos forem distribuídos em K caixas, então **pelo menos** uma caixa receberá mais de um objeto.”

Este princípio é trivial e pode ser mostrado por contradição.

De fato: Suponha, por absurdo, que em cada casa pousou no máximo 1 pombo.

Logo, no máximo K pombos conseguiram pousar.

O que é um absurdo, pois por hipótese, mais do que K pombos pousaram.

Princípio da Casa dos Pombos - Aplicação

Ex 1. Quantas pessoas precisam estar em uma mesma sala para se garantir que pelo menos 2 pessoas têm os nomes iniciados com a mesma letra?

Resp.: Sabemos que são 26 letras no alfabeto (caixas).

Se tivermos 27 pessoas, então haverá 27 letras iniciais (que devem ser distribuídas entre 26 “caixas”).

Logo, com 27 pessoas podemos garantir que pelo menos 2 pessoas têm os nomes iniciados pela mesma letra.

Ex 2. Quantas vezes um dado deve ser lançado para garantirmos que obtemos algum valor 2 vezes

Resp.:

Ex 3. Você tem 5 pares de meias (cada par de uma cor diferente), mas as meias estão separadas e desorganizadas em uma gaveta. De manhã, ainda escuro, sem energia elétrica, você precisa pegar um par de meias.

Quantas meias você precisa pegar na gaveta, para ter certeza que terá um par de meias da mesma cor?

Resp.: