4ª. Lista de Cálculo I – Computação

Livro Cálculo 1 – James Stewart – 7ª. Edição

Páginas 117 e 118 – exercícios: 11, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 35, 39, 41, 43, 46, 49, 53 e 55(a).

Páginas 129 – exercícios: 15, 17, 19, 23, 25, 29, 35, 37, 41, 43 e 45.

Páginas 137, 138 e 139 – exercícios: 5, 7, 9(a) e (b), 21, 23, 25(a), 27, 29, 53 e 54.

Páginas 147 a 149 – exercícios: 3, 21, 23, 27, 37 e 38.

Páginas 164, 165 e 166 – exercícios: 3, 7, 11, 13, 18, 23, 35, 51, 53, 55, 57, 65, 67 e 71.

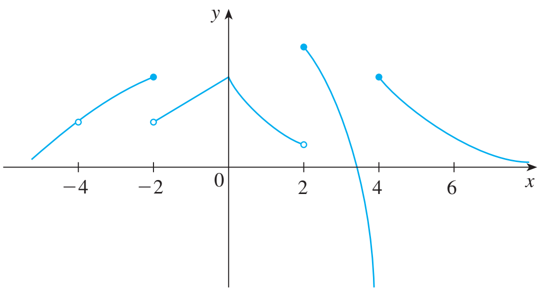
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

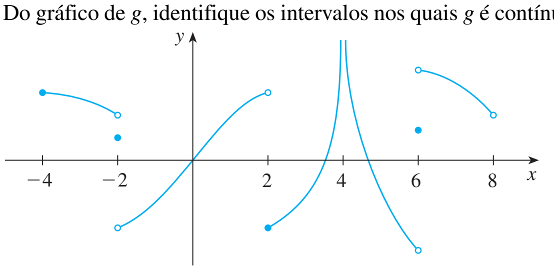
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2

6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4

7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5

8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

11. Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim_{x\to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4.$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1.$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1.$

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty).$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3].$

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

23–24 Como você "removeria a descontinuidade" de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

25. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

26. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

27. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

28. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \operatorname{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

35–38 Use a continuidade para calcular o limite.

35. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

36. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

38. $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $\quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $\quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, $\quad a = \pi$

48. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

49. Se $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.

50. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

51–54 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0$, $\quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $\quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x$, $\quad (0, 1)$

54. $\operatorname{sen} x = x^2 - x$, $\quad (1, 2)$

55–56 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

55. $\cos x = x^3$

56. $\ln x = 3 - 2x$

57–58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

57. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$

58. $\operatorname{arctg} x = 1 - x$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f é ímpar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$,
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedade dos limites que forem usadas.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x)$

34. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

39. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

40. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

41–46 Encontre as assíntotas horizontais e ~~verticais~~ de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

41. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

através do gráfico f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

48. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

49. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $f(2) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

50. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ por $[0{,}5; 1{,}5]$, e $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[0{,}9; 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que a parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

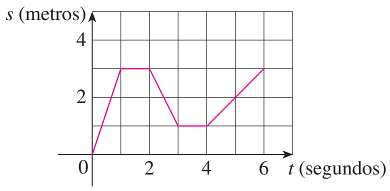
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

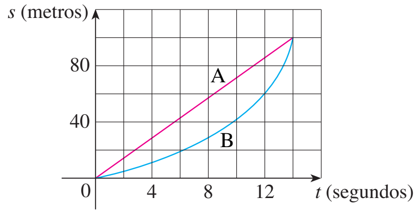
9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?
(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. São dados os gráficos das funções das posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.
(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?
(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

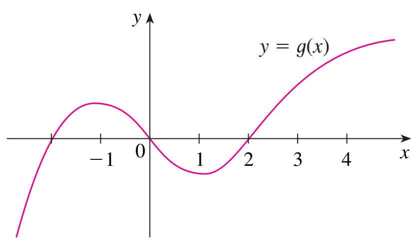
14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.
(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.
(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.
(c) Quando a pedra atinge a superfície?
(d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5; 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4; 4{,}5]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



18. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$ em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

19. Se uma equação de uma reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto onde $a = 2$ é $y = 4x - 5$, encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

20. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em (4, 3) passar pelo ponto (0, 2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

21. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

22. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto (1, 2).

24. Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

25. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto (2, 2).

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos (2, 8) e (3, 9).

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

27–32 Encontre $f'(a)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33–38 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

33. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

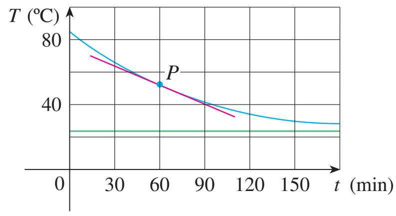
39–40 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

42. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa, em uma sala na qual a temperatura é 24 °C. O gráfico mostra como a temperatura do peru diminui e finalmente chega à temperatura ambiente. Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



43. A tabela mostra o número de passageiros P que chegaram à Irlanda por avião, em milhões.

Ano	2001	2003	2005	2007	2009
P	8,49	9,65	11,78	14,54	12,84

(a) Determine a taxa média de crescimento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2005, tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

44. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (São dados os números de franquias no dia 01 de outubro.)

Ano	2004	2005	2006	2007	2008
N	8.569	10.241	12.440	15.011	16.680

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2006 a 2008 (ii) de 2006 a 2007
(iii) de 2005 a 2006
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 medindo a inclinação de uma tangente.

(d) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2007 e compare-a com a taxa de crescimento em 2006. O que você pode concluir?

45. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

46. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é a máxima? E a mínima?

47. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) O que significa a afirmativa $f'(50) = 36$?
(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ irão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

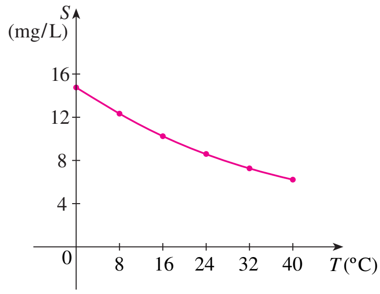
48. O número de bactérias depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(t)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(5)$? Quais são suas unidades?
(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

49. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Manila, horas após o meio-dia, em 19 de julho de 2011. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(5)$? Estime o seu valor.

t	1	3	5	7	9	11
T	32	32	31	27	26	25

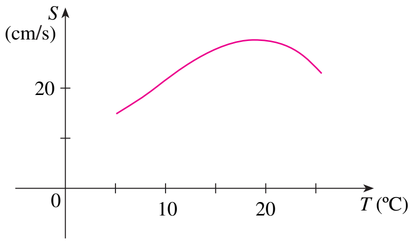
50. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?
(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

51. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidades do oxigênio varia em função da temperatura T da água.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.



Adaptado de Kupchella & Hyland, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2ª ed.; © 1989. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

52. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima s de nado de salmões Coho.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa dos valores de $S'(15)$ e $S'(25)$ e interprete-os.



53–54 Determine se existe ou não $f'(0)$.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

PROJETO ESCRITO MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que “Se vejo mais longe do que outros homens, é porque estou sobre os ombros de gigantes”. Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. Boyer C.; Merzbach U. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley, 1989, p. 389, 432.

2. Edwards C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.

3. Eves H. *An Introduction to the History of Mathematics*, 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.

4. Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

para todos os valores de x. Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

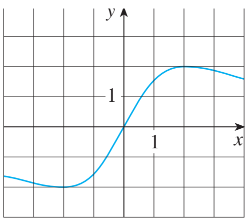
Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Vimos que uma aplicação da segunda e terceira derivadas ocorre na análise do movimento de objetos usando aceleração e *jerk*. Investigaremos mais uma aplicação da segunda derivada na Seção 4.3, quando mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11, no Volume II, veremos como a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta nos permitem representar funções como somas de séries infinitas.

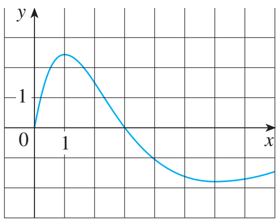
2.8 Exercícios

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

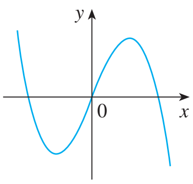
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

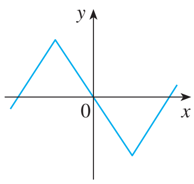


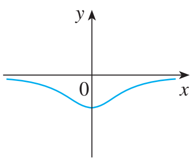
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$
(g) $f'(6)$
(h) $f'(7)$

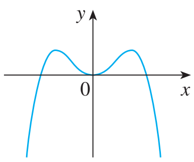


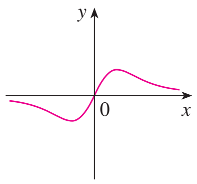
3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I–IV. Dê razões para suas escolhas.

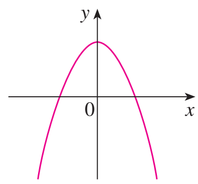
(a)


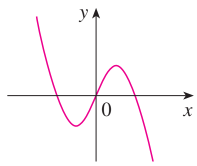
(b)


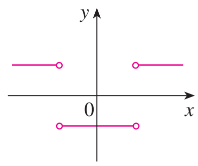
(c)


(d)


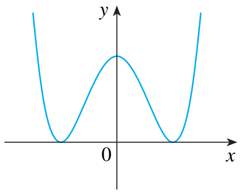
I


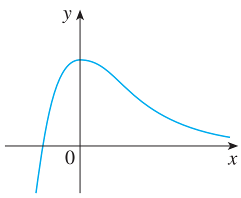
II


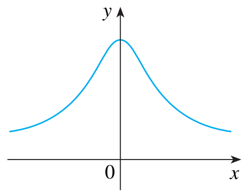
III


IV


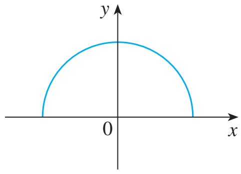
4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Assuma que os eixos possuem escalas iguais.) Use, então, o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f' abaixo.

4.


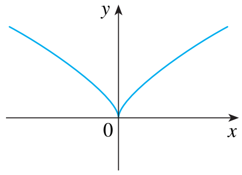
5.


6.


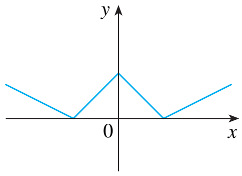
7.



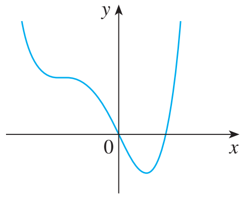
8.



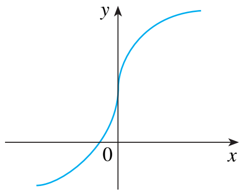
9.



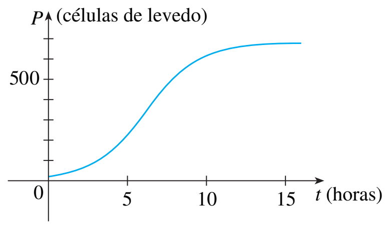
10.



11.



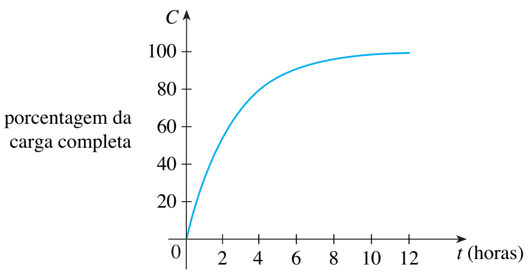
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedo?



13. Uma pilha recarregável é colocada no carregador. O gráfico mostra $C(t)$, a porcentagem de capacidade total que a pilha alcança conforme a função de tempo t passa (em horas).

(a) Qual o significado da derivada $C'(t)$?

(b) Esboce o gráfico de $C'(t)$. O que o gráfico diz?

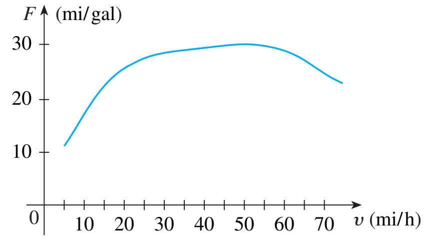


14. O gráfico (do Departamento de Energia dos EUA) mostra como a velocidade do carro afeta o rendimento do combustível. O rendimento do combustível F é medido em milhas por galão e a velocidade v é medida em milhas por hora.

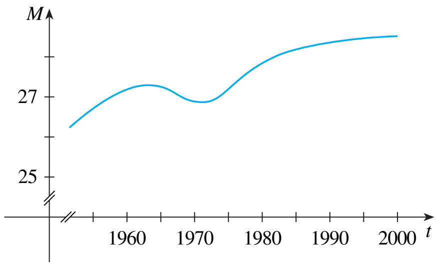
(a) Qual o significado da derivada $F'(v)$?

(b) Esboce o gráfico de $F'(v)$.

(c) Em qual velocidade você deve dirigir se quer economizar combustível?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



16–18 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f', como foi feito nos Exercícios 4–11. Você pode sugeir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \text{sen}\, x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

33. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(x) = x + 1/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $U'(t)$.

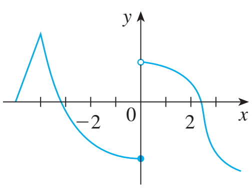
36. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6,1	2020	8,9

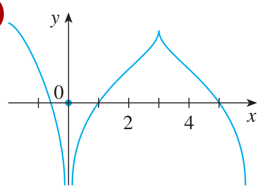
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

37–40 O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

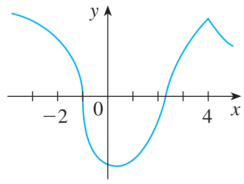
37.



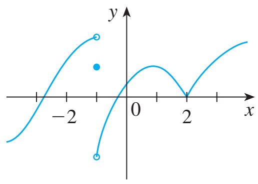
38.



39.



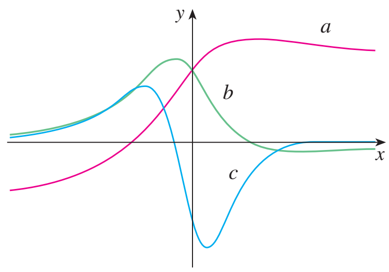
40.



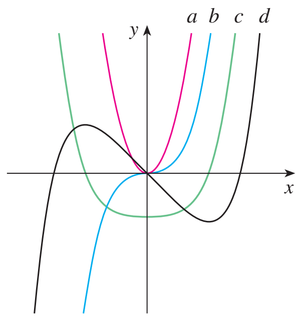
41. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e, então, em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

42. Dê *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

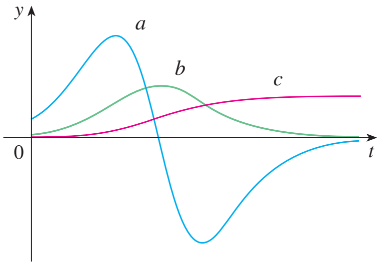
43. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



46. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

TEC *Visual 3.1* usa um escopo de inclinação para ilustrar essa fórmula.

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivada. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

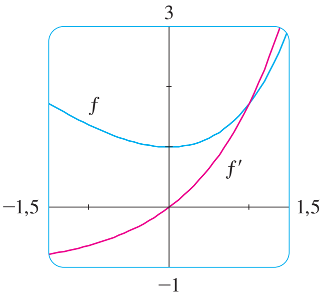


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, encontre f' e f''. Compare os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

Na Seção 2.8 definimos a segunda derivada como a derivada de f', de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

A Figura 8 exibe os gráficos da função f e sua derivada f'. Observe que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente.

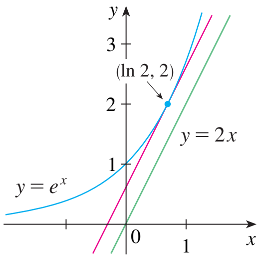


FIGURA 9

EXEMPLO 9 Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Seja a coordenada x do ponto em questão a. Então a inclinação da reta tangente nesse ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, ou seja, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9).

3.1 Exercícios

1. (a) Como é definido o número e?
(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

com precisão até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?
(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.
(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5x - 1$

6. $F(x) = -4x^{10}$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = 1{,}4t^5 - 2{,}5t^2 + 6{,}7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

25. $j(x) = x^{2{,}4} + e^{2{,}4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4$, $(1, 0)$

37–38 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–40 Encontre $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

41. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ na janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

42. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

43–44 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

47. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que x está em metros e t, em segundos. Encontre
(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,
(b) a aceleração depois de 2 s e
(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

48. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, em que s está em metros e t, em segundos.
(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.
(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.
(c) Trace o gráfico das funções de posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

49. A Lei de Boyle diz que, quando uma amostra de gás é comprimida em uma pressão contante, a pressão P do gás é inversamente proporcional ao volume V do gás.
(a) Suponha que a pressão de uma amostra de ar que ocupa 0,106 m^3 a 25 ºC seja de 50 kPa. Escreva V como uma função de P.
(b) Calcule dV/dP quando $P = 50$ kPa. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades?

50. Os pneus de automóveis precisam ser inflados corretamente porque uma pressão interna inadequada pode causar um desgaste prematuro. Os dados na tabela mostram a vida útil do pneu L (em milhares de quilômetros) para um certo tipo de pneu em diversas pressões P (em kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar a vida do pneu como uma função quadrática da pressão.
(b) Use o modelo para estimar dL/dP quando $P = 200$ e quando $P = 300$. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades? Qual é o significado dos sinais das derivadas?

51. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

52. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = e^x - 2x$ tenha uma reta tangente horizontal?

53. Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não tem reta tangente com inclinação 2.

54. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ que seja paralela à reta $y = 1 + 3x$.

55. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = 1 + x^3$ e que são paralelas à reta $12x - y = 1$.

56. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

57. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

58. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

59. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

60. (a) Encontre as equações de ambas as retas pelo ponto $(2, -3)$ que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.
(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

61. Use a definição de derivada para mostrar que, se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso $n = -1$.)

62. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

63. Encontre um polinômio de segundo grau P tal quer $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

64. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça essa equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume II.)

65. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

66. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$, e passe pelo ponto $(2, 15)$.

67. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

f é derivável em 1? Esboce gráficos de f e f'.

68. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

69. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce gráficos de f e f'.

70. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

71. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

72. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente quando $x = 0$ com equação $y = 2x + 1$, e uma reta tangente quando $x = 1$ com equação $y = 2 - 3x$. Encontre os valores de a, b, c e d.

73. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

74. Encontre o valor de c tal que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ seja tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda parte.

76. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

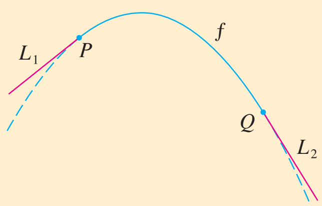
77. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{1.000} - 1}{x - 1}$

78. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

79. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

PROJETO APLICADO — CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR



Flashon Studio/Shutterstock

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8, e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar esses dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q (veja a figura). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
(b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
(c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.
(d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

2. A solução do Problema 1 pode *parecer* lisa, mas poderia não ocasionar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste em $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
(c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica