③ O último limite $\left(\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))\right)$ nos fornece uma indeterminação do tipo $0.\infty$ que pode ser resolvida conforme o item ①. Denotando o valor desse limite por K, temos $\ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = k$.

Aplicando a exponencial, obtemos:

$$e^{\ln(\lim_{x\to a} y)} = e^{k} \Rightarrow \lim_{x\to a} y = e^{k} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = e^{k}}$$

Exemplo: ⓐ $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4+\ln x}}$ (0^0)

$f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{1}{4+\ln(x)}$. Denotando $y = x^{\frac{1}{4+\ln(x)}}$, temos

$$\ln(y) = \ln\left(x^{\frac{1}{4+\ln x}}\right) = \frac{1}{4+\ln(x)}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{4+\ln(x)}.$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln(y)}_{\ln(\lim_{x\to 0^+} y)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{4+\ln x} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{0+\frac{1}{x}} = 1.$$

Logo, $\underbrace{\lim_{x\to 0^+} y}_{e^{\ln(\lim_{x\to 0^+} y)}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4+\ln(x)}} = e^{1} = e.$

ⓑ $\lim_{x\to 0^+} x^{x}$ (0^0)

$y = x^{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x)^{x} = x\ln(x)$. Daí,

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln(y)}_{\ln(\lim_{x\to 0^+} y)} = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot(-x^2) = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Logo, $\underbrace{\lim_{x\to 0^+} y}_{e^{\ln(\lim_{x\to 0^+} y)}} = \lim_{x\to 0^+} x^{x} = e^{0} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\text{sen}\, 4x)^{\text{cotg}\, x}$ $\quad (1^\infty)$. Faça $y = (1+\text{sen}\,4x)^{\text{cotg}\,x}$.

$$\ln(y) = \ln\left((1+\text{sen}\,4x)^{\text{cotg}\,x}\right) \Rightarrow \ln(y) = \text{cotg}\,x \,\ln(1+\text{sen}\,4x).$$

$\ln(\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y)$

Daí, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{cotg}\,x \,\ln(1+\text{sen}\,4x) \quad (\infty \cdot 0) =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\text{sen}\,4x)}{\frac{1}{\text{cotg}\,x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\text{sen}\,4x)}{\text{tg}\,x} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+\text{sen}\,4x}\cdot 4\cos 4x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\text{sen}\,4x}}{\sec^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 4}{4\cos 4x}}{\underset{\to 1}{1+\text{sen}\,4x}} \cdot \frac{1}{\underset{\to 1}{\sec^2 x}} = 4.$$

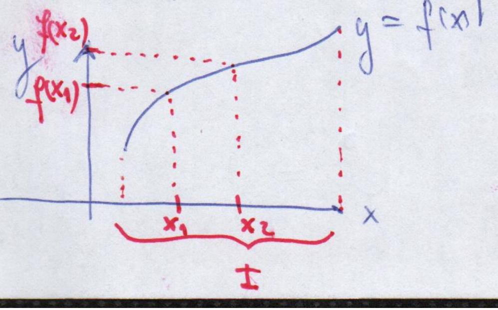
Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\text{sen}\,4x)^{\text{cotg}\,x} = e^4.$

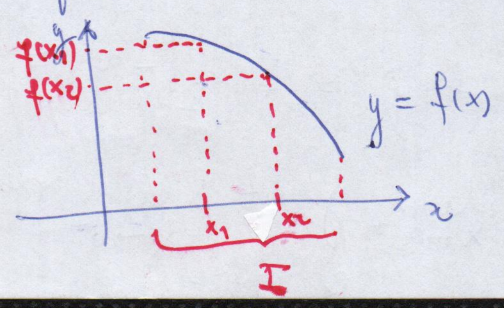
$e^{\ln(\lim\limits_{x\to 0^+} y)}$

Aplicações da Derivada

Lembremos que uma fç f é chamada crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I e que f é chamada decrescente em I se $f(x_1) > f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$ em I.

f crescente





f decrescente

Podemos usar a primeira derivada para estabelecer qdo uma função é crescente ou decrescente em um intervalo I.

Definição: Dizemos que uma função f é crescente em um intervalo I se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.

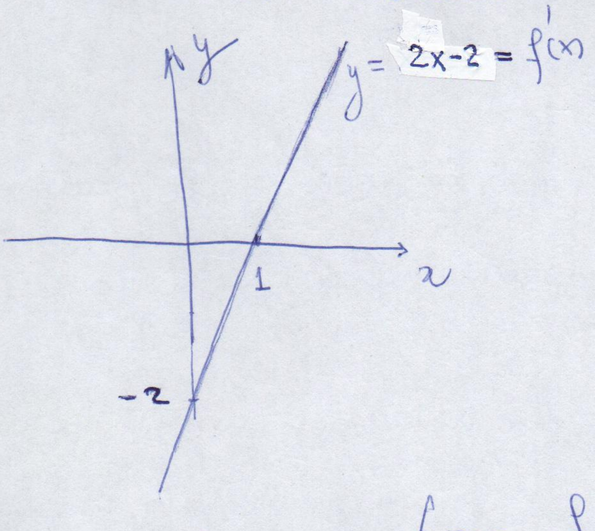
Do mesmo modo, dizemos que f é decrescente em I se $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$.

Exemplo: 1 Encontre os intervalos onde f é crescente e decrescente para:

a) $f(x) = x^2 - 2x$.

$f'(x) = 2x - 2$.

Devemos estudar o sinal de f'.

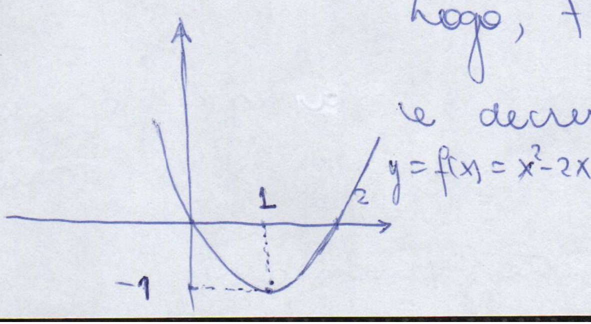


$f'(x) > 0 \iff 2x-2 > 0 \iff x > 1$.

$f'(x) < 0 \iff 2x-2 < 0 \iff x < 1$

Portanto, para $x > 1$, $f'(x) > 0$ e para $x < 1$, $f'(x) < 0$.

Logo, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.



(b) $g(x) = xe^{x}$.

$g'(x) = e^{x} + xe^{x}$. $\quad e^{x}(1+x) > 0 \overset{e^{x}>0}{\iff} (1+x) > 0 \iff \boxed{x > -1}$

$g'(x) > 0 \iff e^{x} + xe^{x} > 0 \iff xe^{x} > -e^{x} \overset{e^{x}>0}{\iff} x > -\frac{e^{x}}{e^{x}} = -1$

$\iff \boxed{x > -1}$

$g'(x) < 0 \iff e^{x} + xe^{x} < 0 \iff xe^{x} < -e^{x} \overset{e^{x}>0}{\iff} \boxed{x < -1}$

$e^{x}(1+x) < 0 \overset{e^{x}>0}{\iff} (1+x) < 0 \iff \boxed{x < -1}$

Portanto, g é crescente no intervalo $(-1, +\infty)$ e g é decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$.

Máximos e Mínimos Relativos e Absolutos.

Alguns problemas do cotidiano podem ser resolvidos por meio de máximos e mínimos de funções, por exemplo:

(a) Encontrar quais as melhores dimensões de uma caixa de volume fixo V para que seu custo de fabricação seja mínimo.

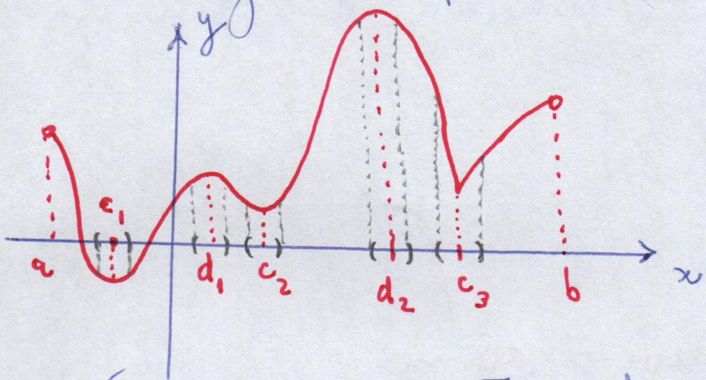
(b) Encontrar as dimensões de um retângulo de maior área que pode ser inscrito em um círculo dado.

Para resolver esses problemas necessitamos antes de alguns conceitos.

Definição: Uma função f tem um máximo relativo (ou máximo local) em um pto c, se $f(c) \geq f(x)$, para todo x em algum intervalo aberto contendo c

Da mesma forma, dizemos que f tem um mínimo relativo (ou mínimo local) em c, se $f(c) \leq f(x)$, para todo x em algum intervalo aberto contendo c.

Exemplo: Localize os ptos de máximo e mínimo local.



Os ptos de máximo local são: d_1 e d_2

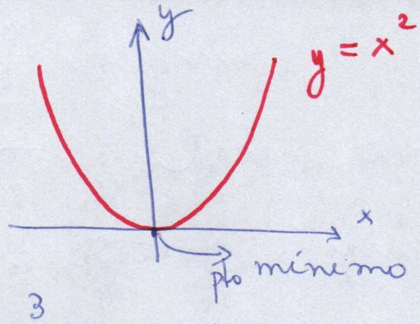
Os ptos de mínimo local são: c_1, c_2, c_3.

Definição: Uma função f tem um máximo (respect. um mínimo) absoluto, ou global em um pto c, se $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) para todo pto x de seu domínio.

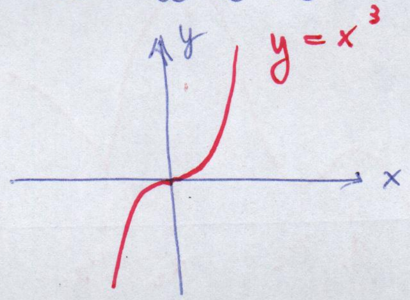
Exemplo: ① Localize no exemplo anterior os ptos de máximo e mínimo global.

O pto de máximo global ocorre no pto d_2 e o pto de mínimo global ocorre no pto c_1.

② A função $f(x) = x^2$ possui um mínimo global em $x=0$ e não possui máximo local e nem global



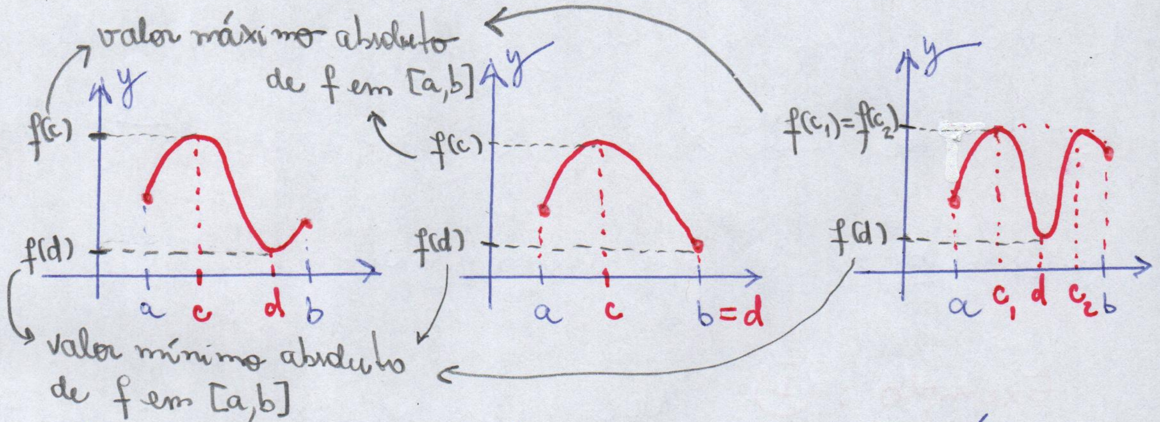
A função $g(x) = x^3$ não possui máximo local e global e tb não possui mínimo local e global.



Teorema do Valor Extremo:

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum nº c e d em $[a,b]$.

Exemplos:



Obs: Se f tiver um máximo ou um mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Definição: Um pto crítico de uma fç f é um pto c no domínio de f, onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Concluímos que se f tem um pto de máximo ou mínimo local em c, então c é um pto crítico de f.

Exemplo: Encontre os ptos críticos das funções:

ⓐ $f(x) = x\ln(x)$; ⓑ $g(x) = |x|$; ⓒ $h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq -1 \\ x+2, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

ⓐ Note que $f(x) = x\ln(x)$ é derivável em todo pto $x \in \mathbb{R}$, pois é o produto de duas funções deriváveis. Neste caso, c é pto crítico para f se $f'(c) = 0$.

Agora, $f'(x) = \ln(x) + x\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

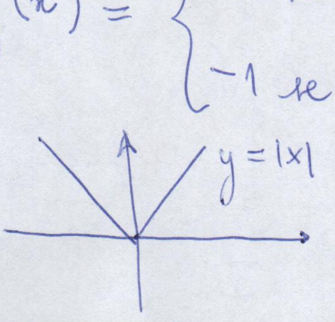
Daí, $f'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1$

$\iff \boxed{x = e^{-1}}$

Portanto, o único pto crítico de f é no pto $c = e^{-1}$.

ⓑ Vimos que a fç $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ tem um único pto onde não é derivável que é o pto $x = 0$. (onde ocorre um "bico" em seu gráfico). Além disso,

$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, ou seja, $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$



Portanto, $x = 0$ é o único pto crítico de g.

ⓒ $h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq -1 \\ x+2, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

Note que h não é derivável em $x=-1$, pois

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{h(-1+t) - h(-1)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{(-1+t)+2-1}{t} =$$

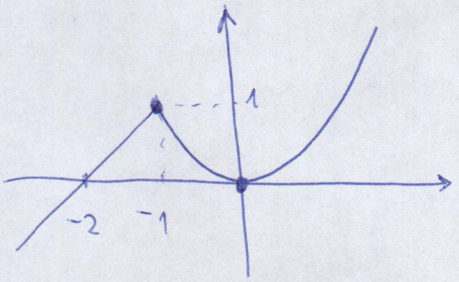
$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{\cancel{-1} + t \cancel{+1}}{t} = \lim_{t \to 0^-} 1 = 1. \quad \text{e}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(-1+t) - h(-1)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(-1+t)^2 - 1}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{1} - 2t + t^2 \cancel{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{t}(-2+t)}{\cancel{t}} = -2.$$

Assim, $h'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > -1 \\ 1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$. Logo, $h'(x) = 0$

$\iff x = 0$ e $h'(x)$ não existe em $x = -1$.

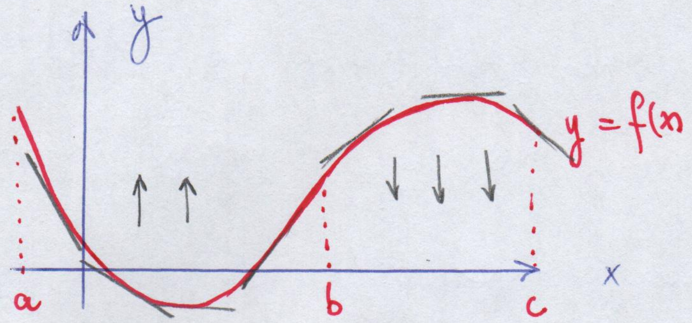


Portanto, os pontos críticos de h são $x = -1$ e $x = 0$.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Dizemos que uma função f é côncava para cima em um intervalo I, se nesse intervalo, o gráfico de f estiver acima de todas as tangentes. Por outro lado, se em I o gráfico de f estiver abaixo de todas as tgs dizemos que f é côncava para baixo em I.

Exemplo:



f é côncava p/ cima no intervalo (a, b) e côncava para baixo no intervalo (b, c).

Observação: ① Se f é uma fç derivável, então existe $g(x) = f'(x)$, neste caso, se g também for derivável, então $g'(x) = f''(x)$ é a segunda derivada de f e dizemos que f é derivável até 2ª ordem.

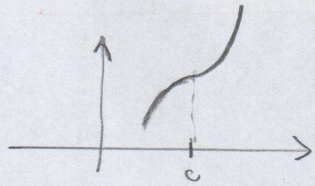
② Existe um teste que determina os intervalos de concavidade para f. Este teste é chamado de teste da 2ª derivada para concavidade.

Teste da 2ª derivada p/ concavidade:

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in I$, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Definição: Dizemos que um pto $P = (c, f(c))$ sobre o gráfico de f é um pto de inflexão se:



(i) f é contínua em c

(ii) O gráfico de f muda a concavidade (de cima para baixo ou de baixo para cima) em P.

Exemplo: Determine os intervalos de concavidade e os ptos de inflexão das funções:

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$; (b) $g(x) = x - 2\,sen(x)$, $0 < x < 3\pi$.

(a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ e $f''(x) = 6x + 2$.

(i) $f''(x) > 0 \iff 6x + 2 > 0 \iff \boxed{x > -\frac{1}{3}}$

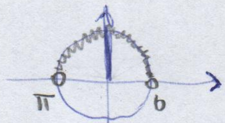
(ii) $f''(x) < 0 \iff 6x + 2 < 0 \iff \boxed{x < -\frac{1}{3}}$

Portanto, pelo teste da 2ª derivada para concavidade temos:

- f é côncava para cima no intervalo $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
- f é " " baixo " " $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.

O pto $P = \left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ é o pto de inflexão para a função f.

(b) $g(x) = x - 2\,\text{sen}(x)$, $\quad 0 < x < 3\pi$



$g'(x) = 1 - 2\cos(x)$

$g''(x) = 2\,\text{sen}(x)$. Assim,

$g''(x) > 0 \iff 2\,\text{sen}(x) > 0 \iff \text{sen}(x) > 0 \iff x \in (0, \pi)$ ou $x \in (2\pi, 3\pi)$

$g''(x) < 0 \iff \text{sen}(x) < 0 \iff x \in (\pi, 2\pi)$.

Portanto, g é côncava para cima nos intervalos $(0,\pi)$ e $(2\pi, 3\pi)$ e é côncava para baixo no intervalo $(\pi, 2\pi)$.

Ptos de inflexão: $P_1 = (\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi)$

$P_2 = (2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 2\pi)$.

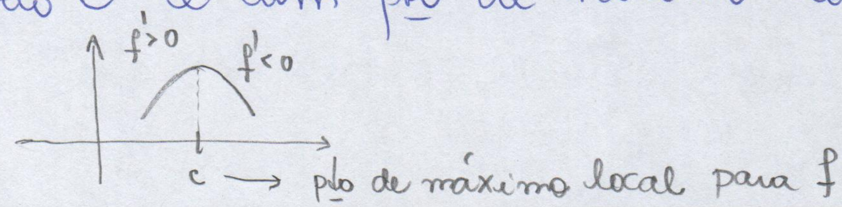
—— // —— // ——

Podemos usar a 1ª e a 2ª derivada para classificar os ptos de máximo e mínimo locais de f.

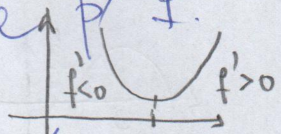
Teste da 1ª derivada para extremos locais.

Suponha que c é um pto crítico de uma fç contínua f.

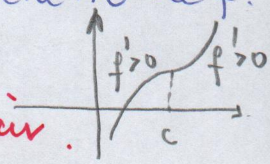
(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então c é um pto de máximo local para f.



(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então c é um pto de mínimo local p/ f.



(c) Se f' não mudar de sinal em c, isto é, se em ambos os lados de c f' for positiva ou negativa, então c não é pto de máximo e nem de mínimo de f.



Teste da 2ª derivada para extremos locais.

Suponha que f'' é contínua em uma vizinhança do pto c, então:

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então c é um pto de mínimo local de f.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então c é um pto de máximo local para f.

Exemplo: Use o teste da 1ª e da 2ª derivada para classificar os ptos de máximo e mínimo local para as fç:

(a) $f(x) = x^3 - 12x - 5$, (b) $g(x) = \ln(x^2+1)$

(a) (i) Teste da 1ª derivada.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$. Daí,

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x<-2$ ou $x>2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Intervalo	sinal de f'	máx. ou mínimo
$(-\infty,-2)$	+	$x=-2$ é pto de máximo
$(-2,2)$	−	
$(2,+\infty)$	+	$x=2$ é pto de mínimo.

Portanto, f possui um máx local em $x=-2$ e um mínimo local em $x=2$.

(ii) Teste da 2ª derivada

$f'(x) = 3x^2-12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$.

Portanto, $x_1=-2$ e $x=2$ são os ptos críticos de f.

$f''(x)=6x$ é uma fç contínua em $\mathbb{R}$, em particular numa viz de -2 e de 2.

- $f'(-2)=0$ e $f''(-2)=-12<0 \Rightarrow x_1=-2$ é pto de max. local.
- $f'(2)=0$ e $f''(2)=12>0 \Rightarrow x_2=2$ é pto de mínimo local.

(b) $g(x)=\ln(x^2+1)$.

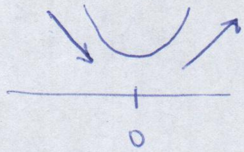
$g'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$ e $g''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

(i) Teste da 1ª derivada:

• $g'(x) > 0 \iff 2x > 0$ (pois $(x^2+1)^2 > 0$) $\iff x > 0$.

• $g'(x) < 0 \iff x < 0$.

Portanto, $x = 0$ é pto de mínimo local



(ii) Teste da 2ª derivada

$$g'(x) = 0 \iff \frac{2x}{x^2+1} = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

Portanto, $x = 0$ é pto crítico de g.

$$g''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$ é contínua numa vizinhança de 0.

$g'(0) = 0$ e $g''(0) = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Longrightarrow x = 0$ é pto de mínimo local para g.

Esboço de Gráficos de Funções

Vamos agora usar todos os conceitos desenvolvidos até agora para esboçar o gráfico de uma fç $y = f(x)$. Para isso, desenvolveremos um roteiro com todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função:

1) Domínio;