

Aplicação de grafos: processamento de imagens



Imagem digital: representação

Imagem digital: é uma matriz de valores, cujos elementos são chamados de *pixels* da imagem.

- **Linhas e colunas:** servem para localizar os pixels da imagem.
- **Valor de um elemento na matriz:** cor do pixel associado.

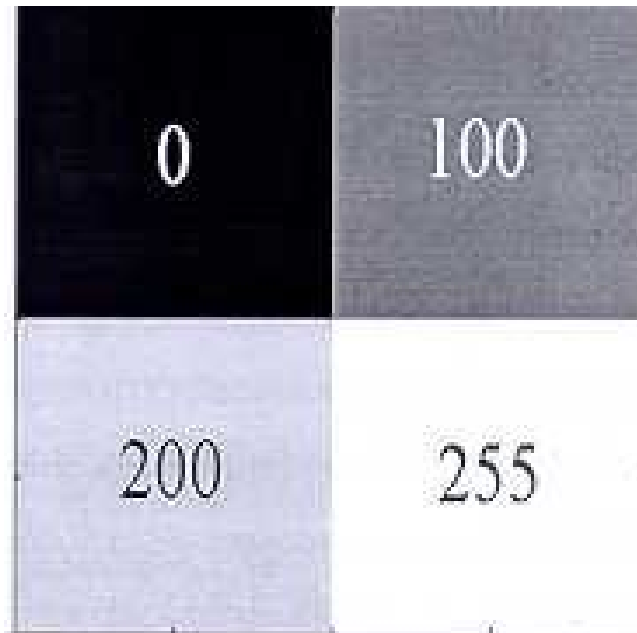
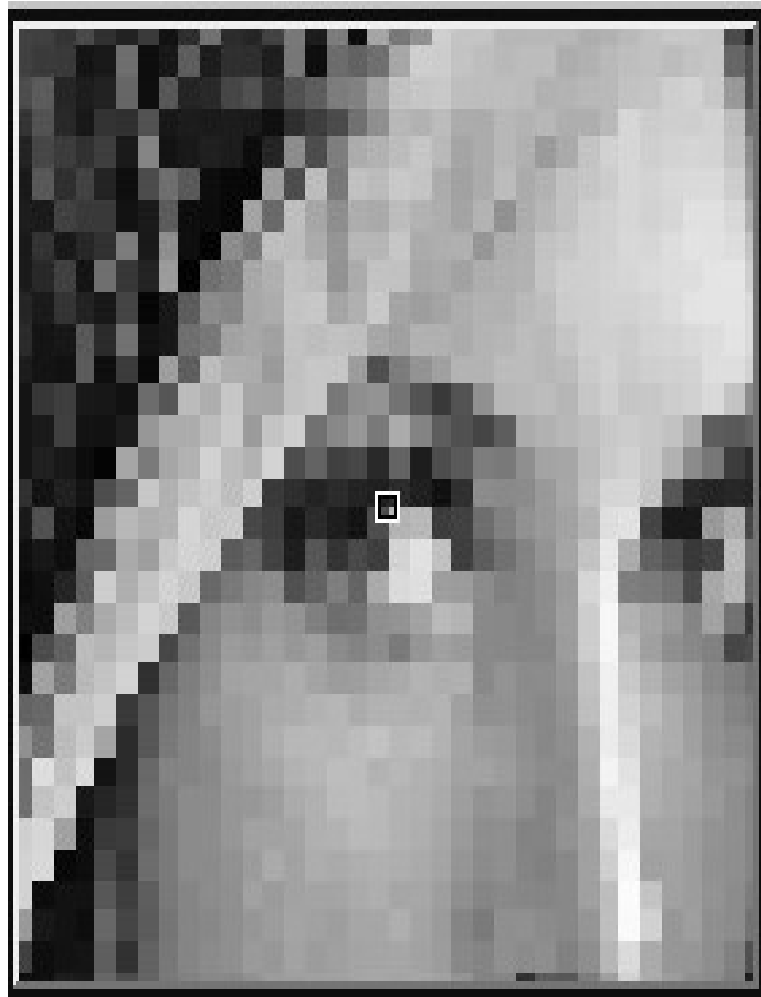


Imagem digital: representação no computador

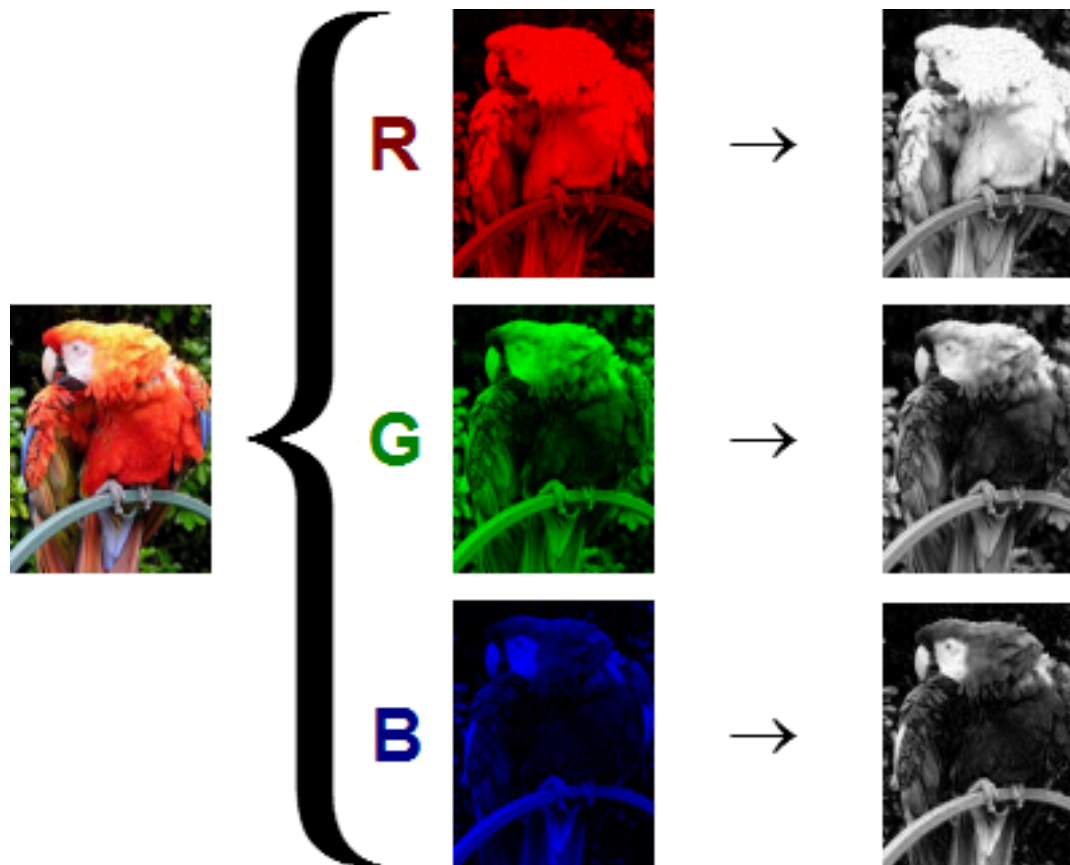


168	163	187	184	186	185	168	162	175	174
171	158	186	191	190	180	103	136	153	162
167	166	187	191	133	149	153	130	107	87
159	188	196	128	145	156	134	170	141	114
176	200	102	118	92	96	76	118	67	102
196	87	79	71	77	71	63	77	69	58
98	91	63	77	68	61	102	177	180	50
120	94	68	106	84	99	91	200	210	186
144	148	104	117	138	119	169	205	208	161
148	157	153	139	126	128	150	153	164	181

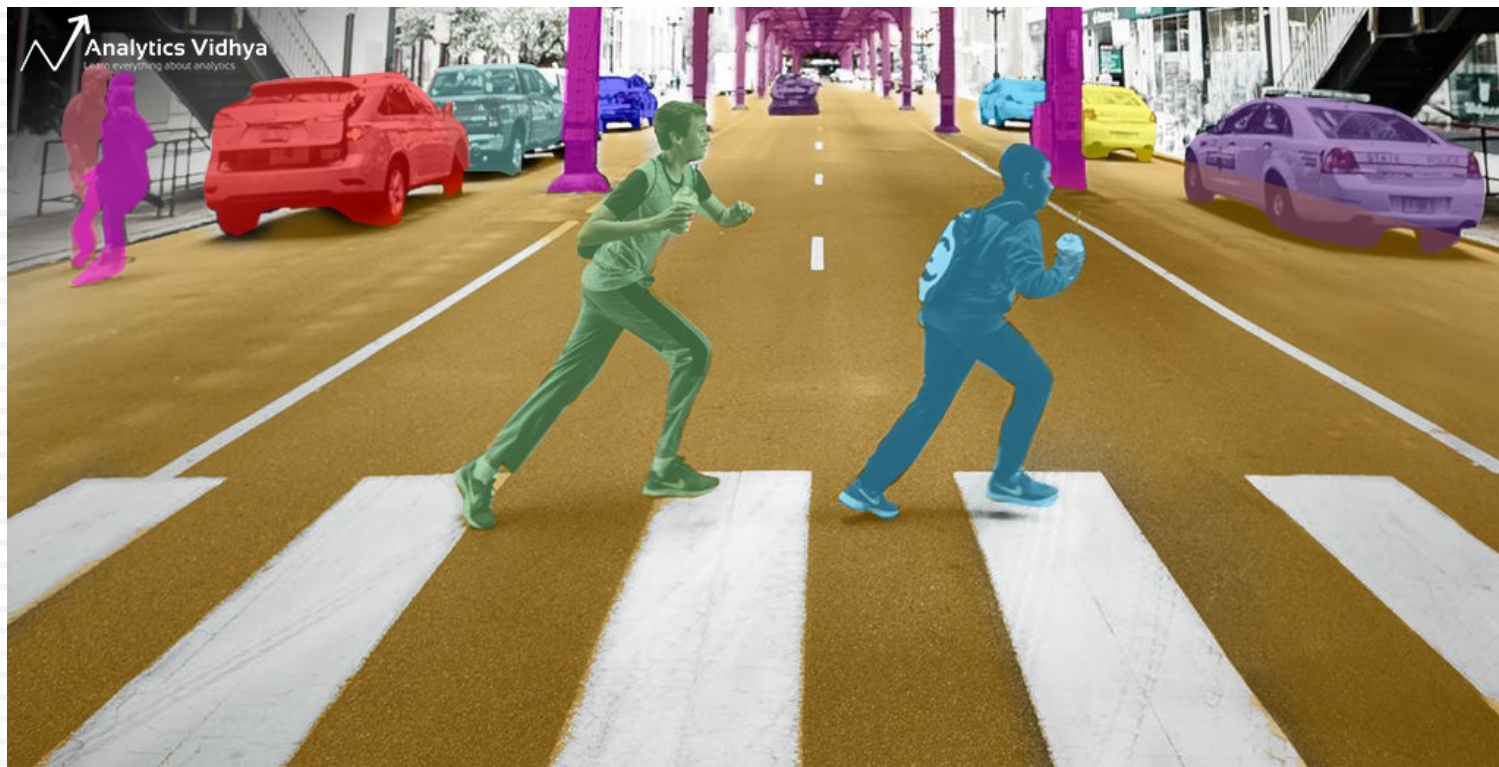
Imagem (em escala de cinza, de 0 a 255). Cor preta: valor 0; Cor branca: valor 255.

Imagem digital colorida

Imagem digital colorida: é definida por **três** matrizes de cores, **R**, **G** e **B**, que, quando combinadas, geram a imagem colorida.



Segmentação de imagens digitais



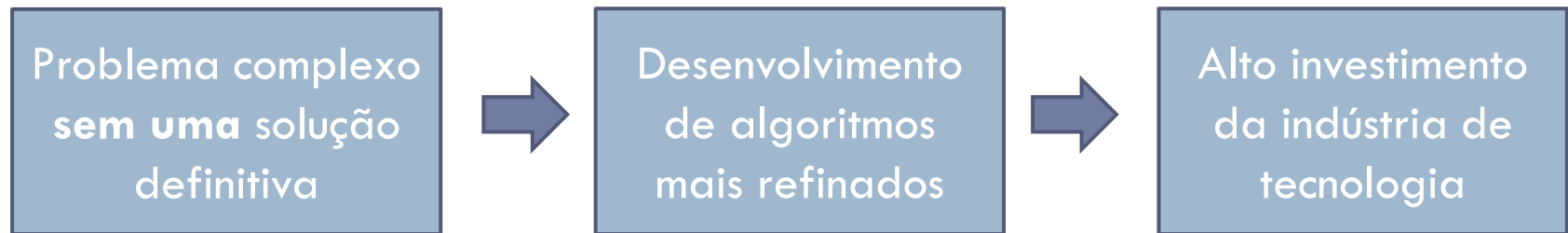
O problema de segmentação

Objetivo: “Recortar” um objeto do “fundo” da imagem.

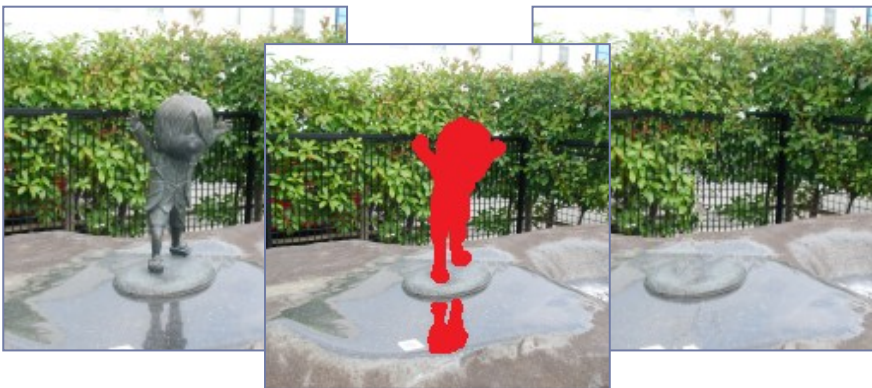


Segmentação de Imagens

Tarefa de segmentação



Finalidade básica da segmentação: usada como etapa de pré processamento em uma infinidade de aplicações.



Remoção de objetos.

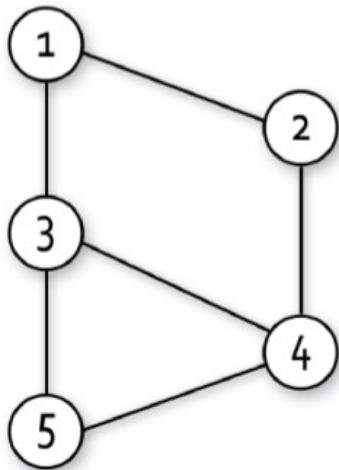


Colorização de imagens.

Ideia-chave: teoria dos grafos

Grafo (definição):

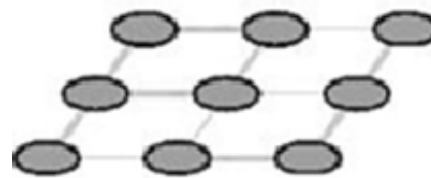
- $G = (V, E, W)$
 - ✓ Conjunto de vértices
 - ✓ Conjunto de arestas
 - ✓ Conjunto de Pesos



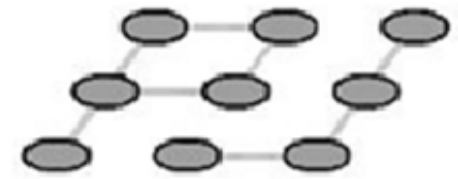
(a)



(d)



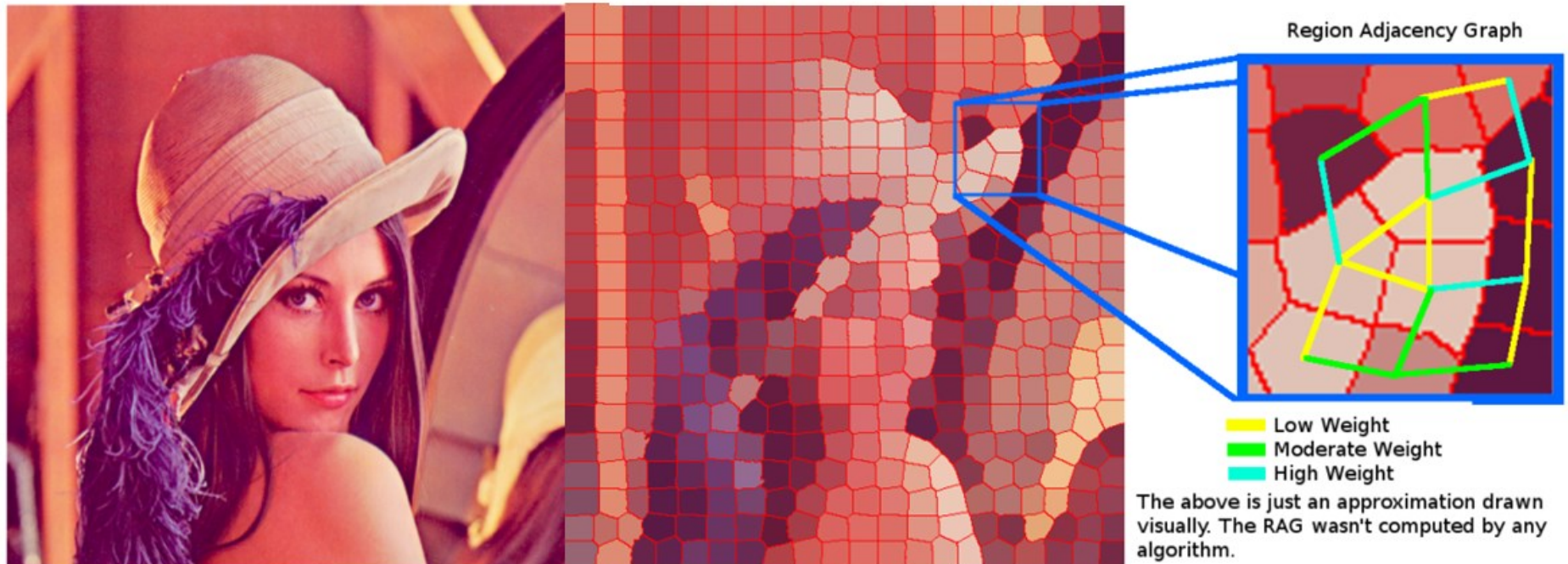
(b)



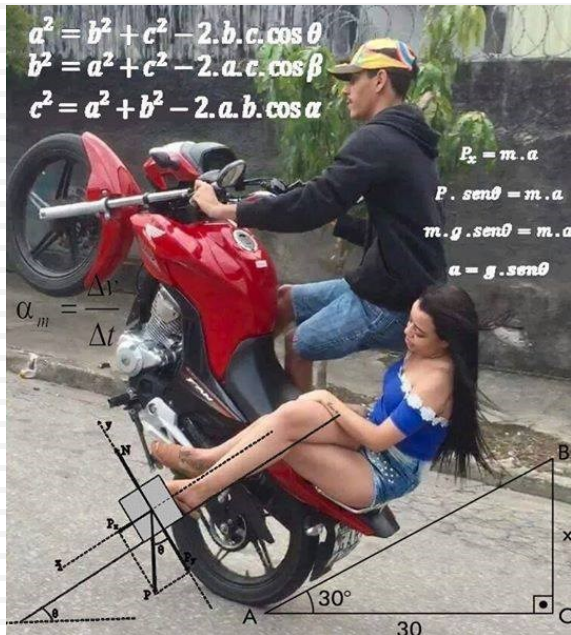
(c)



Ideia-chave: teoria dos grafos



Segmentação via Análise Espectral em Grafos



+



+



Operadores laplacianos

❑ **Vantagens do uso dos operadores laplacianos:**

- *Suportam diferentes abordagens para problemas variados;*
- *Boa performance e flexibilidade;*
- *Possuem forte respaldo matemático;*
- *Exploram bem a esparsidade do problema.*

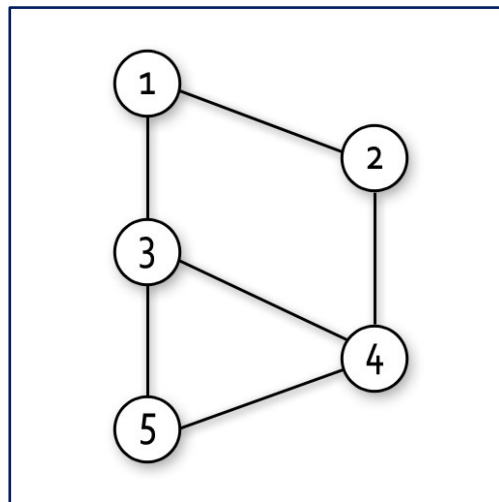
❑ **Objetivo:** Estudar a funcionalidade desses operadores para o problema de segmentação de grafos gerados a partir de imagens.

Operadores laplacianos

□ Laplaciano combinatorial do grafo (K)

- $G = G(V, E, W_E): W_E = \{1\}$
- W : matriz de adjacência de G
- D : matriz de incidência de G

$$K = D - W,$$
$$K_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } (i, j) \in E \\ d_i, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } (i, j) \notin E \text{ e } i \neq j, \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo de um grafo simples e sua matriz laplaciana.

Operadores laplacianos

□ Laplaciano do grafo (L)

- $G = G(V, E, W_E)$: onde W_E assume pesos não-negativos
- W : matriz dos pesos (matriz de adjacência ponderada)
- D : matriz diagonal formada pela soma dos pesos

$$L_{ij} = \begin{cases} -w_{ij}, & \text{se } (i, j) \in E \\ \sum_{k \in N(i)} w_{ik}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } (i, j) \notin E \text{ e } i \neq j, \end{cases}$$

Operadores laplacianos

Interpretação sob o viés espectral

Operador: L

Par (λ^i, f^i) para cada nível i :

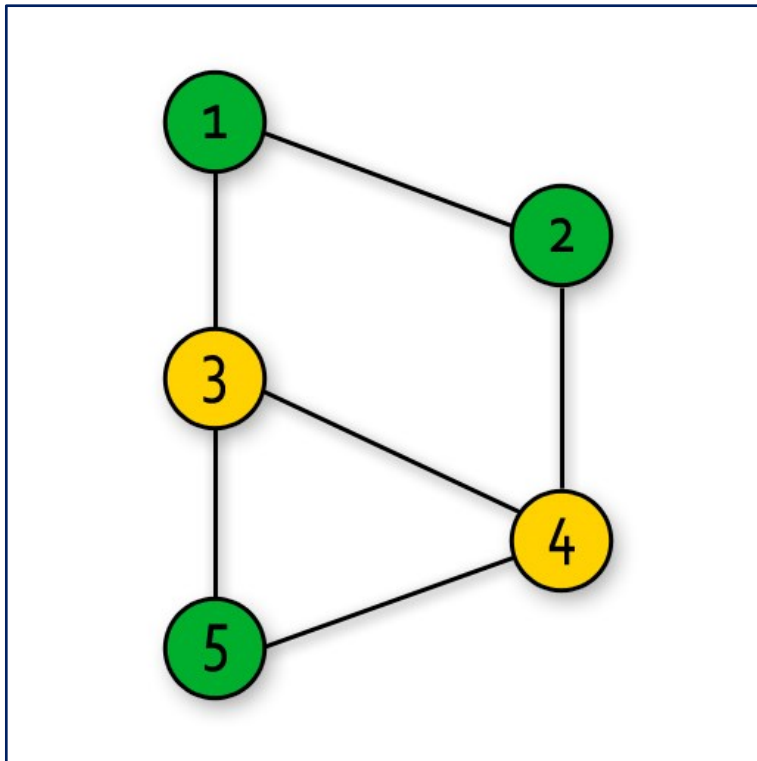
$$L(f^i) = \lambda^i f^i$$

$$f^i : V \rightarrow \mathbb{R}, \lambda^i \in \mathbb{R}$$

- Cada par de autovalor-autovetor acima gera uma segmentação diferente no grafo de adjacência.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

❑ Laplaciano combinatorial do grafo (corte espectral)

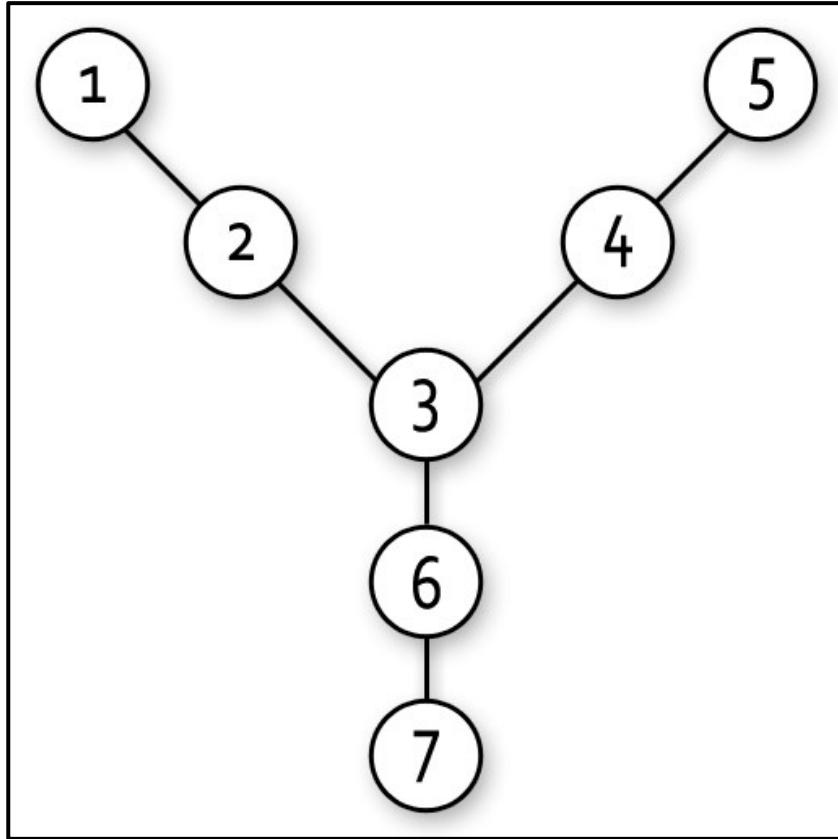


Corte espectral baseado no 4º autovetor.

0.0	1.4	2.4	3.6	4.6
0.4	0.5	-0.6	0.2	0.4
0.4	0.5	0.6	0.2	-0.4
0.4	-0.2	-0.4	-0.5	-0.6
0.4	-0.2	0.4	-0.5	0.6
0.4	-0.6	0.0	0.6	0.0

Autovalores e autovetores associados.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

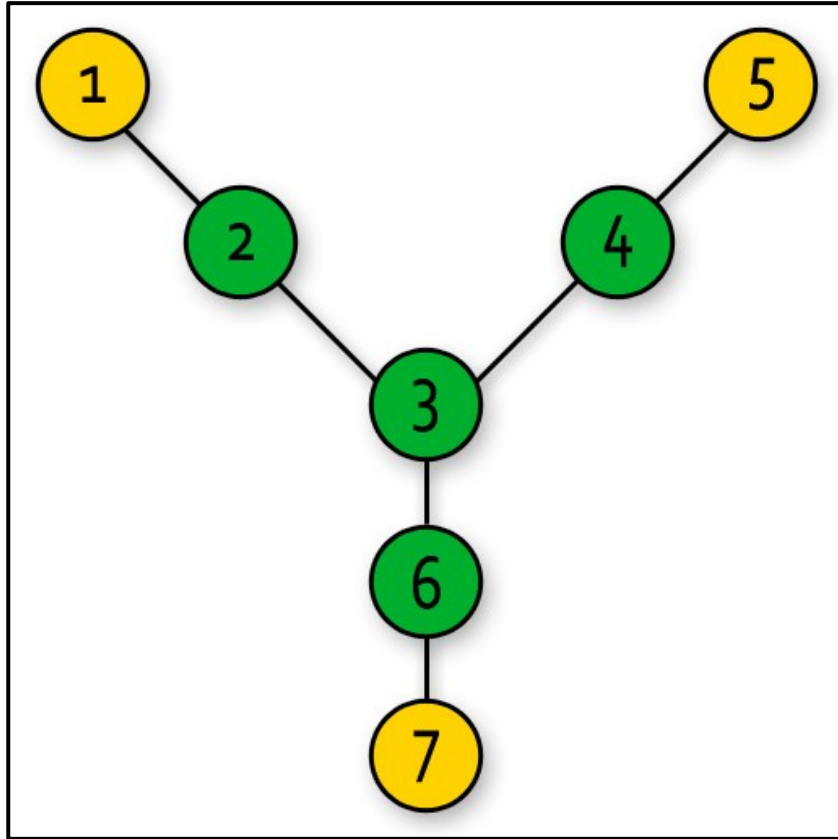


Grafo.

1	-1	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0
0	-1	3	-1	0	-1	0
0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	-1	1	0	0
0	0	-1	0	0	2	-1
0	0	0	0	0	-1	1

Matriz laplaciana do grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

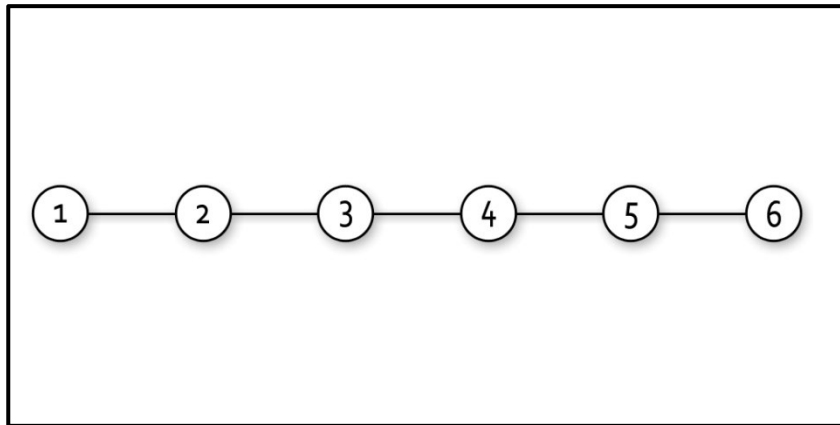


Corte espectral do grafo.

0.0	3.8	3.8	1.6	2.6	2.6	4.4
0.4	-0.1	-0.7	-0.4	0.3	0.3	0.1
0.4	-0.1	-0.4	0.2	-0.6	-0.4	-0.4
0.4	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.8
0.4	-0.3	0.3	0.2	0.6	-0.2	-0.4
0.4	-0.5	0.5	-0.4	-0.4	0.2	0.1
0.4	0.4	0.1	0.2	-0.1	0.7	-0.4
0.4	0.7	0.2	-0.4	0.1	-0.4	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

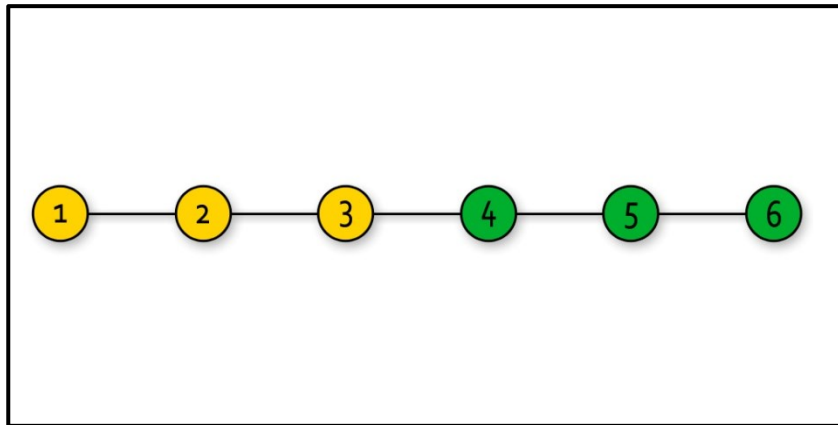


Grafo.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz laplaciana do grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

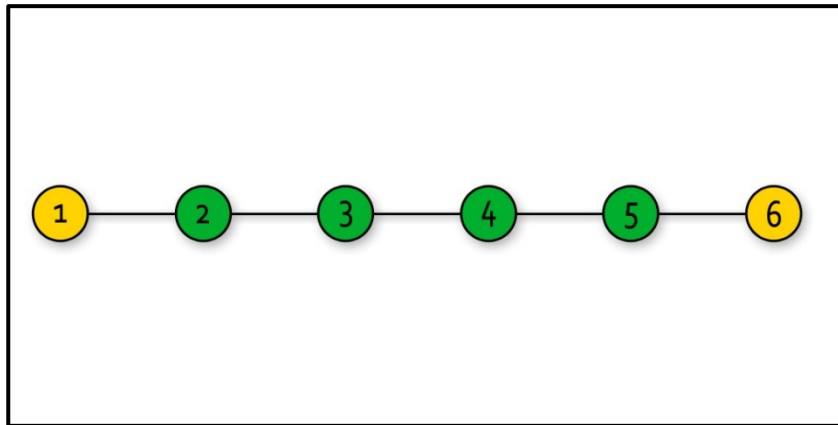


Corte espectral do grafo.

	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
0.0	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
-0.4	-0.4	-0.6	-0.5	-0.4	0.2	-0.1
-0.4	-0.4	-0.4	0.0	0.4	-0.6	0.4
-0.4	-0.4	-0.1	0.5	0.4	0.2	-0.6
-0.4	-0.4	0.1	0.5	-0.4	0.2	0.6
-0.4	-0.4	0.4	0.0	-0.4	-0.6	-0.4
-0.4	-0.4	0.6	-0.5	0.4	0.2	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

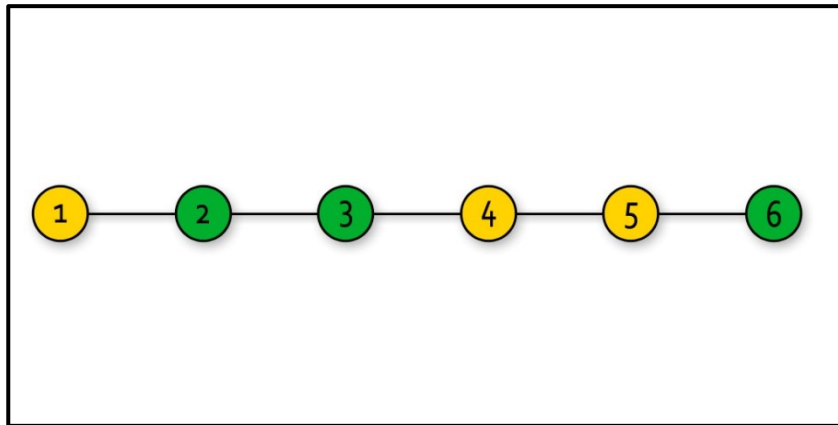


Corte espectral do grafo.

0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
-0.4	-0.6	-0.5	-0.4	0.2	-0.1
-0.4	-0.4	0.0	0.4	-0.6	0.4
-0.4	-0.1	0.5	0.4	0.2	-0.6
-0.4	0.1	0.5	-0.4	0.2	0.6
-0.4	0.4	0.0	-0.4	-0.6	-0.4
-0.4	0.6	-0.5	0.4	0.2	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

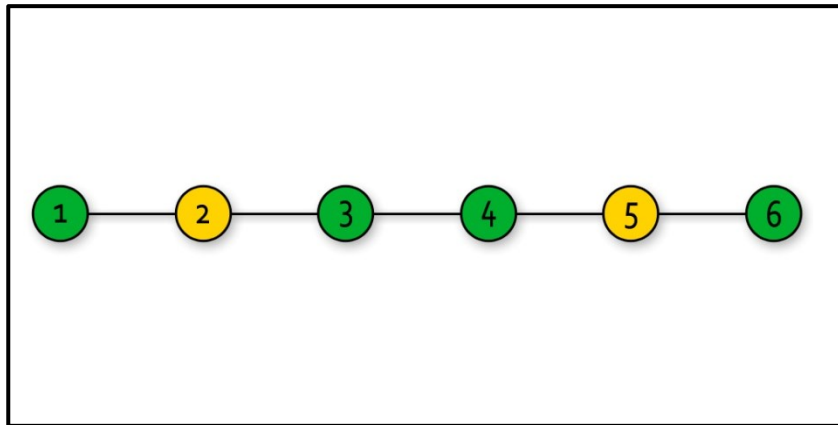


Corte espectral do grafo.

	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
0.0	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
-0.4	-0.4	-0.6	-0.5	-0.4	0.2	-0.1
-0.4	-0.4	-0.4	0.0	0.4	-0.6	0.4
-0.4	-0.4	-0.1	0.5	0.4	0.2	-0.6
-0.4	-0.4	0.1	0.5	-0.4	0.2	0.6
-0.4	-0.4	0.4	0.0	-0.4	-0.6	-0.4
-0.4	-0.4	0.6	-0.5	0.4	0.2	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples

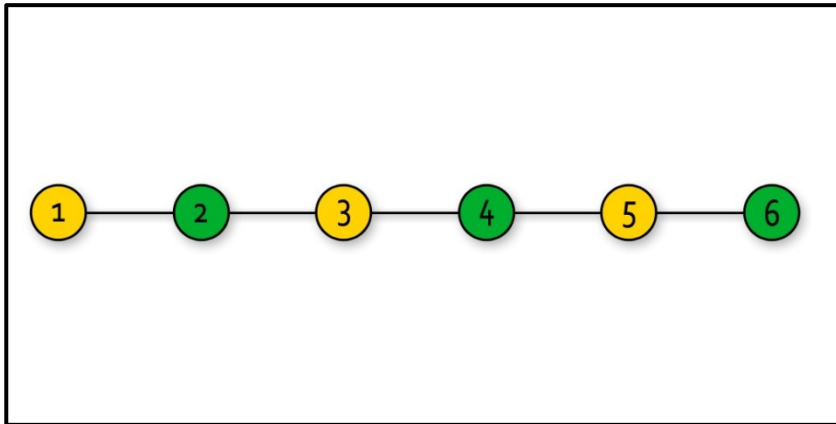


Corte espectral do grafo.

	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
0.0	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
−0.4	−0.4	−0.6	−0.5	−0.4	0.2	−0.1
−0.4	−0.4	−0.4	0.0	0.4	−0.6	0.4
−0.4	−0.1	0.5	0.4	0.4	0.2	−0.6
−0.4	0.1	0.5	−0.4	−0.4	0.2	0.6
−0.4	0.4	0.0	−0.4	−0.4	−0.6	−0.4
−0.4	0.6	−0.5	0.4	0.4	0.2	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

Operadores laplacianos – exemplo em um grafo simples



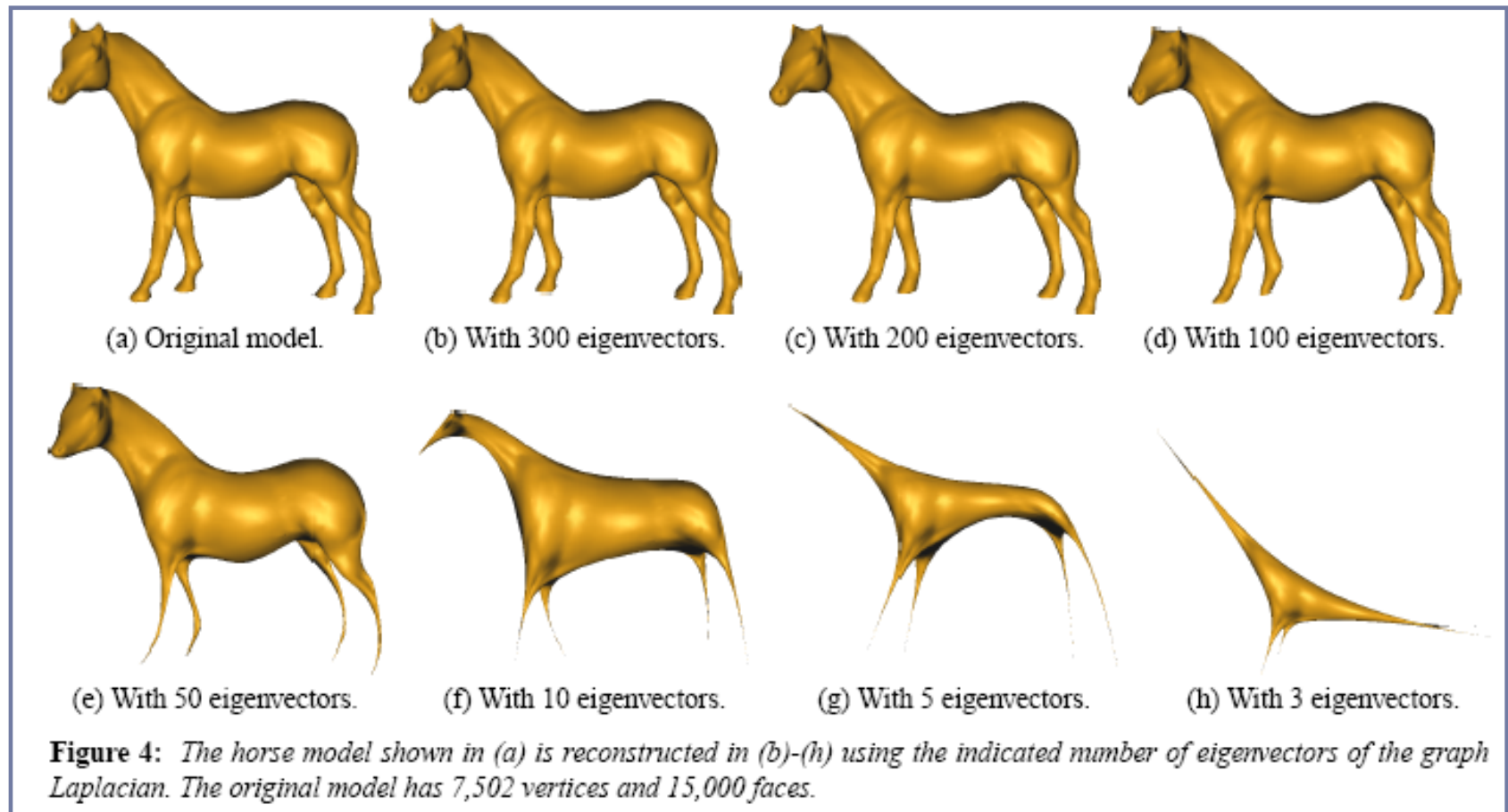
Corte espectral do grafo.

	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
0.0	0.0	0.3	1.0	2.0	3.0	3.7
-0.4	-0.4	-0.6	-0.5	-0.4	0.2	-0.1
-0.4	-0.4	-0.4	0.0	0.4	-0.6	0.4
-0.4	-0.4	-0.1	0.5	0.4	0.2	-0.6
-0.4	-0.4	0.1	0.5	-0.4	0.2	0.6
-0.4	-0.4	0.4	0.0	-0.4	-0.6	-0.4
-0.4	-0.4	0.6	-0.5	0.4	0.2	0.1

Autovalores e autovetores associados ao grafo.

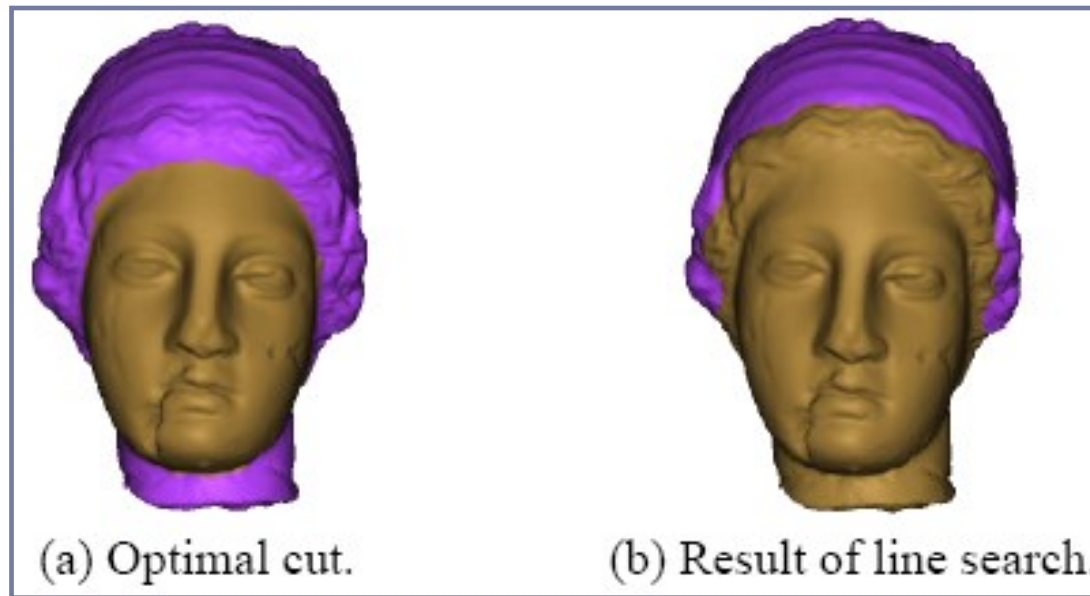
Operadores laplacianos – exemplos

□ *Reconstrução e compressão em malhas de superfícies*



Operadores laplacianos – exemplos

□ Corte “ótimo” de malhas de superfície/grafos

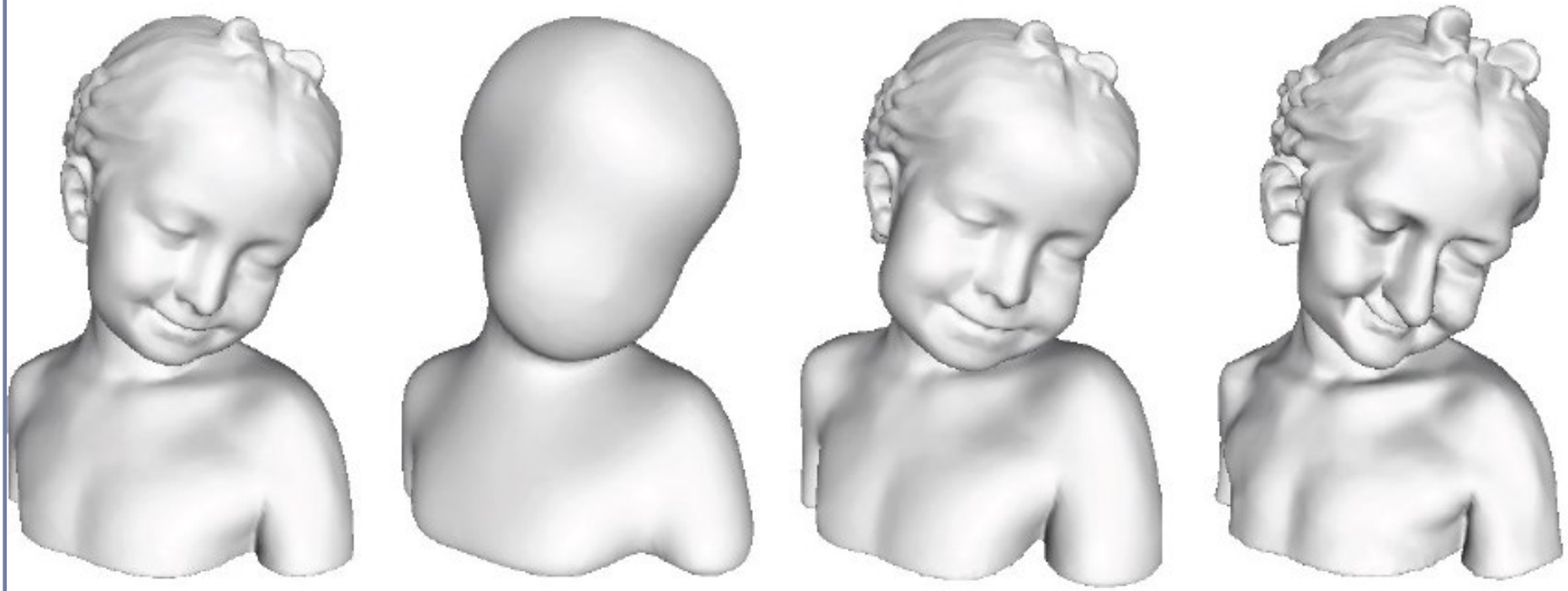


Corte ótimo x algoritmo base do estado-da-arte.

Operadores laplacianos – exemplos

□ Edição e manipulação de superfícies

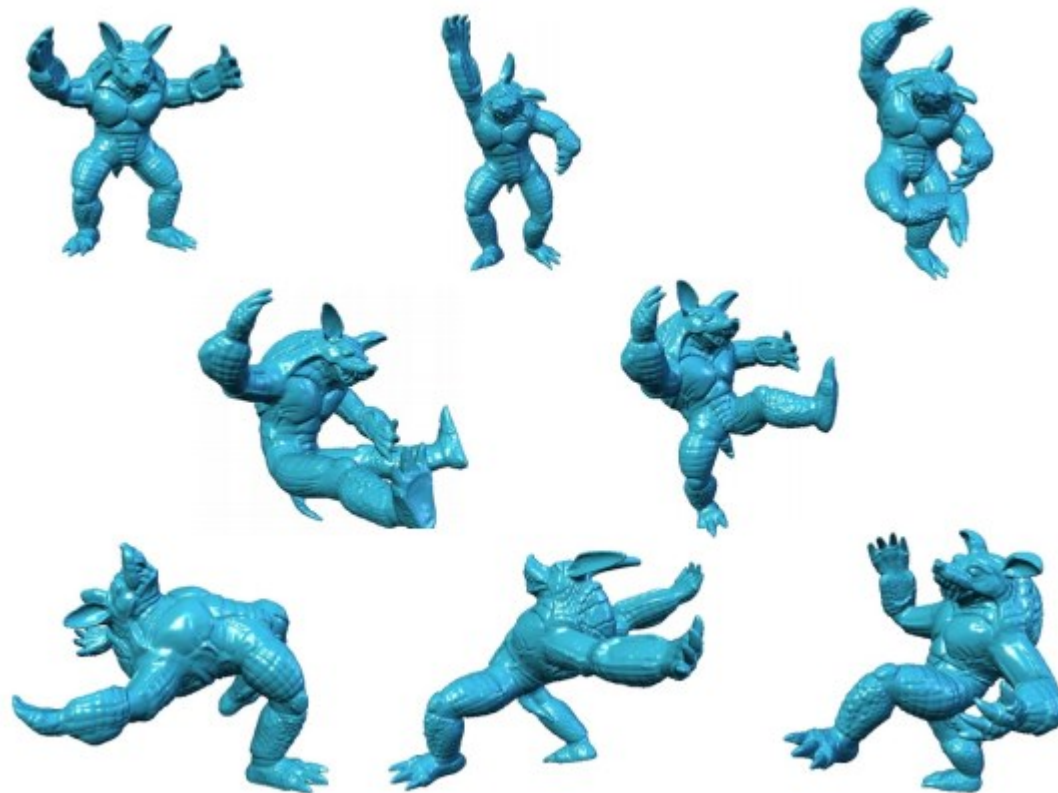
$$\vec{x}_F = F(\sqrt{\lambda_0})\langle \vec{x}, f^0 \rangle f^0 + F(\sqrt{\lambda_1})\langle \vec{x}, f^1 \rangle f^1 + \dots$$



Diferentes resultados em função da escolha de F .

Operadores laplacianos – exemplos

❑ *Identificação de formas/poses*



Identificação de formas via descritores de formas.

Operadores laplacianos – exemplos

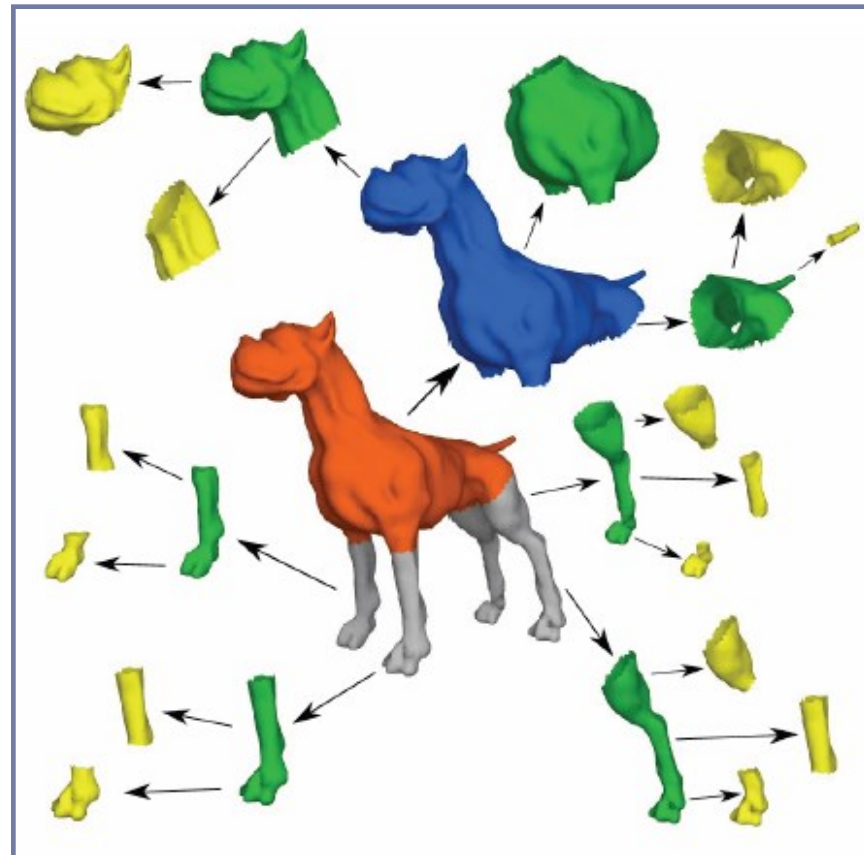
□ Segmentação semântica (malhas)



Exemplos de segmentação semântica de diferentes objetos.

Operadores laplacianos – exemplos

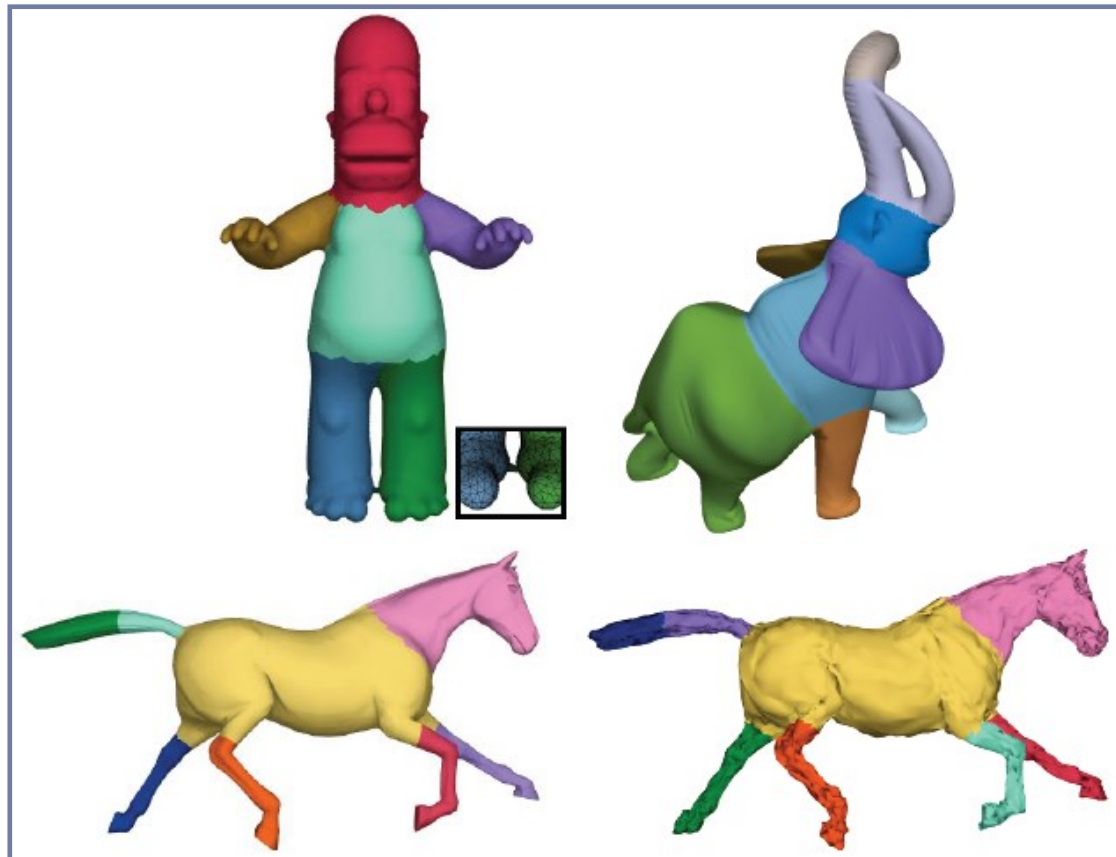
☐ Segmentação semântica



Segmentação semântica: possibilita particionamento hierárquico.

Operadores laplacianos – exemplos

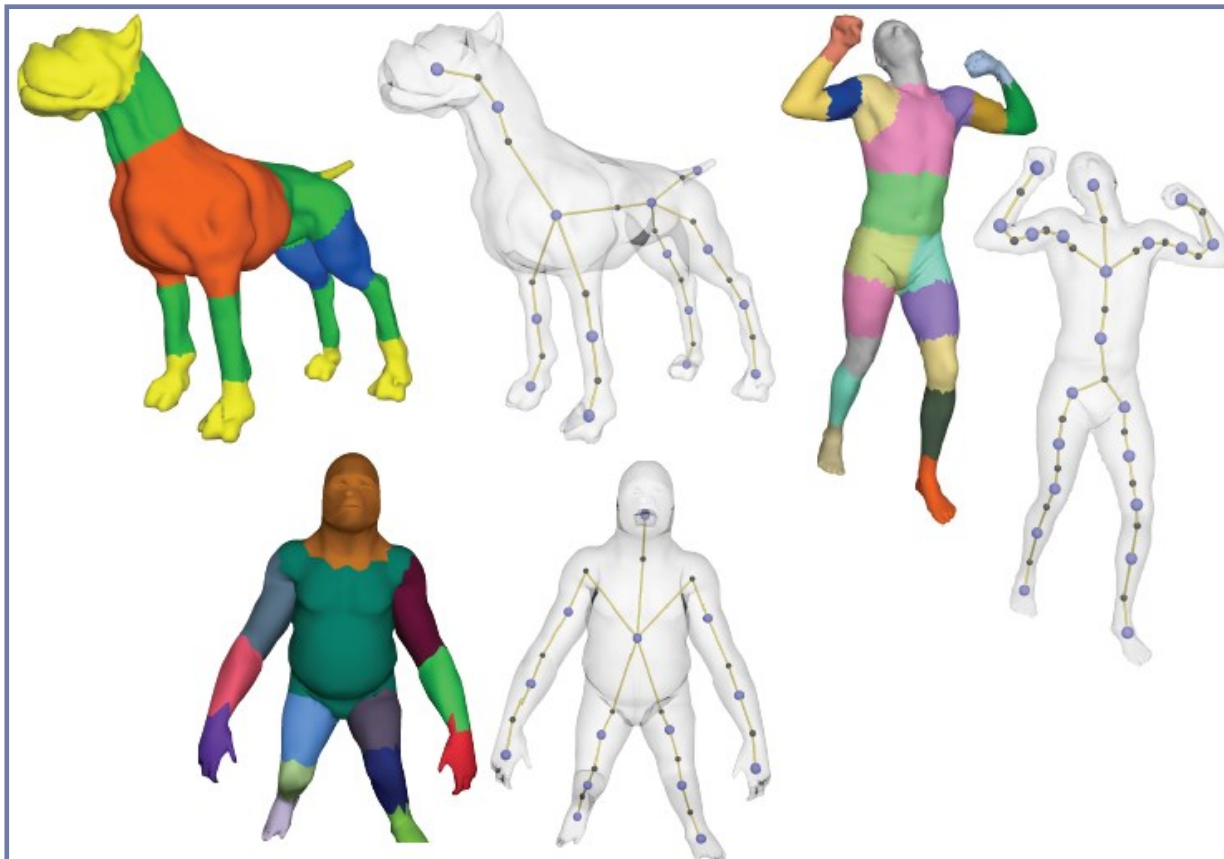
☐ Segmentação semântica



Segmentação semântica: robusta à ruído e à captura de detalhes mais finos.

Operadores laplacianos – exemplos

□ Segmentação semântica



Segmentação semântica: geração de “esqueletos” (grafos “mínimos” de representação).

E no caso de imagens digitais?

Abordagem 1:

Cortes Espectrais em Grafos

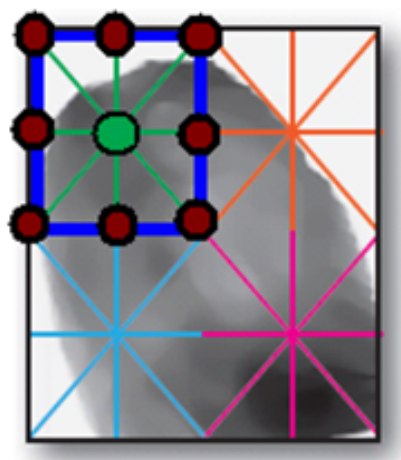


- ***Teoria envolvida:***
 - *Teoria Espectral em Grafos*
 - *Cortes Espectrais e Algoritmos de Clustering*
 - *Operadores Laplaciano do Grafo*
 - *Autovalores e Autovetores do Laplaciano*

Segmentação espectral

Passos iniciais:

- *Leitura da imagem*
- *Construção de um grafo de afinidade*
- ***Pesos** devem refletir as **intensidades dos pixels** da imagem*



P_i

$$e_{ij} = P_i P_j \quad P_i = v_i \in V$$



P_j

$$\|P_i - P_j\|_\infty < r, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i|)$$



e_{ij}

$$w_{ij} = w(e_{ij})$$

Segmentação espectral

- ❑ **Ideia chave:** resolução de um problema de autovalor generalizado

$$(\mathbf{D} - \mathbf{W})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{D}\mathbf{x}$$

- $\mathbf{W} = (w_{ij})$
- $\mathbf{D} = (d_{ii}) = \sum_{j \in N(i)} w_{ij}$

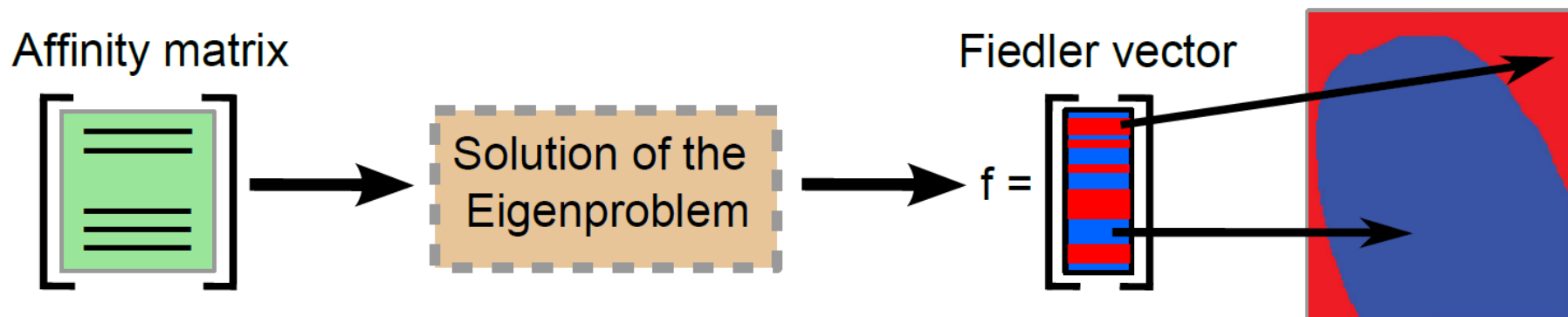
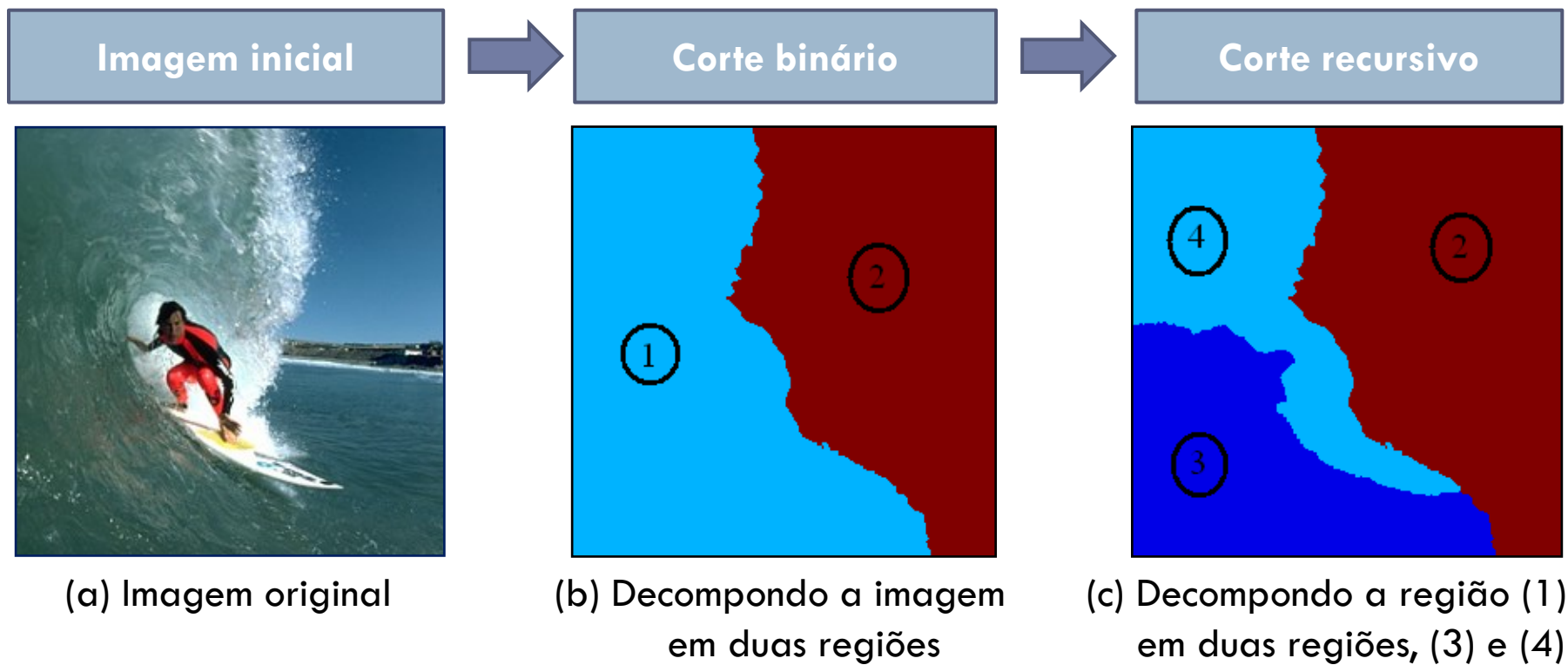


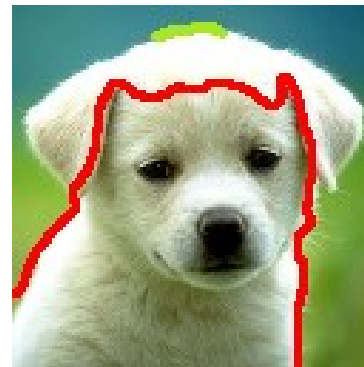
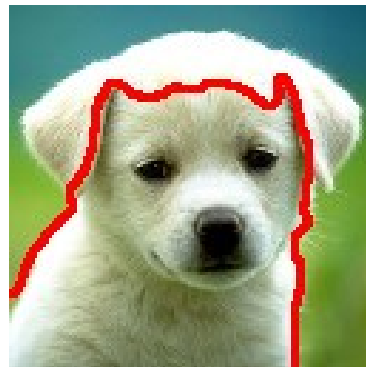
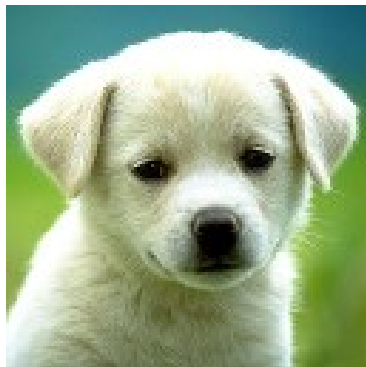
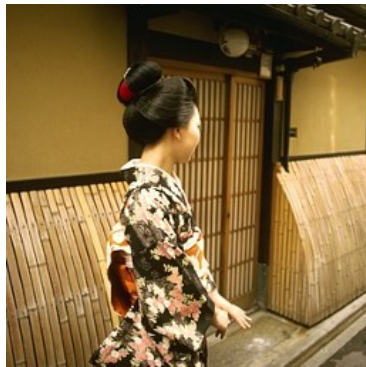
Ilustração do processo.

Segmentação espectral

Exemplo de cortes espectrais recursivos



Segmentação espectral - Exemplos



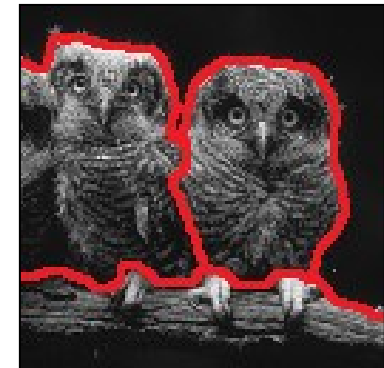
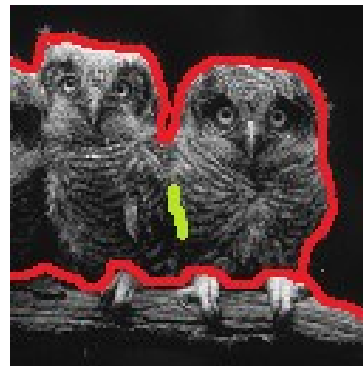
Exemplos de segmentações geradas a partir da metodologia proposta.

Resultados - Segmentação espectral

Sensibilidade textura + ruído



Interatividade com o usuário

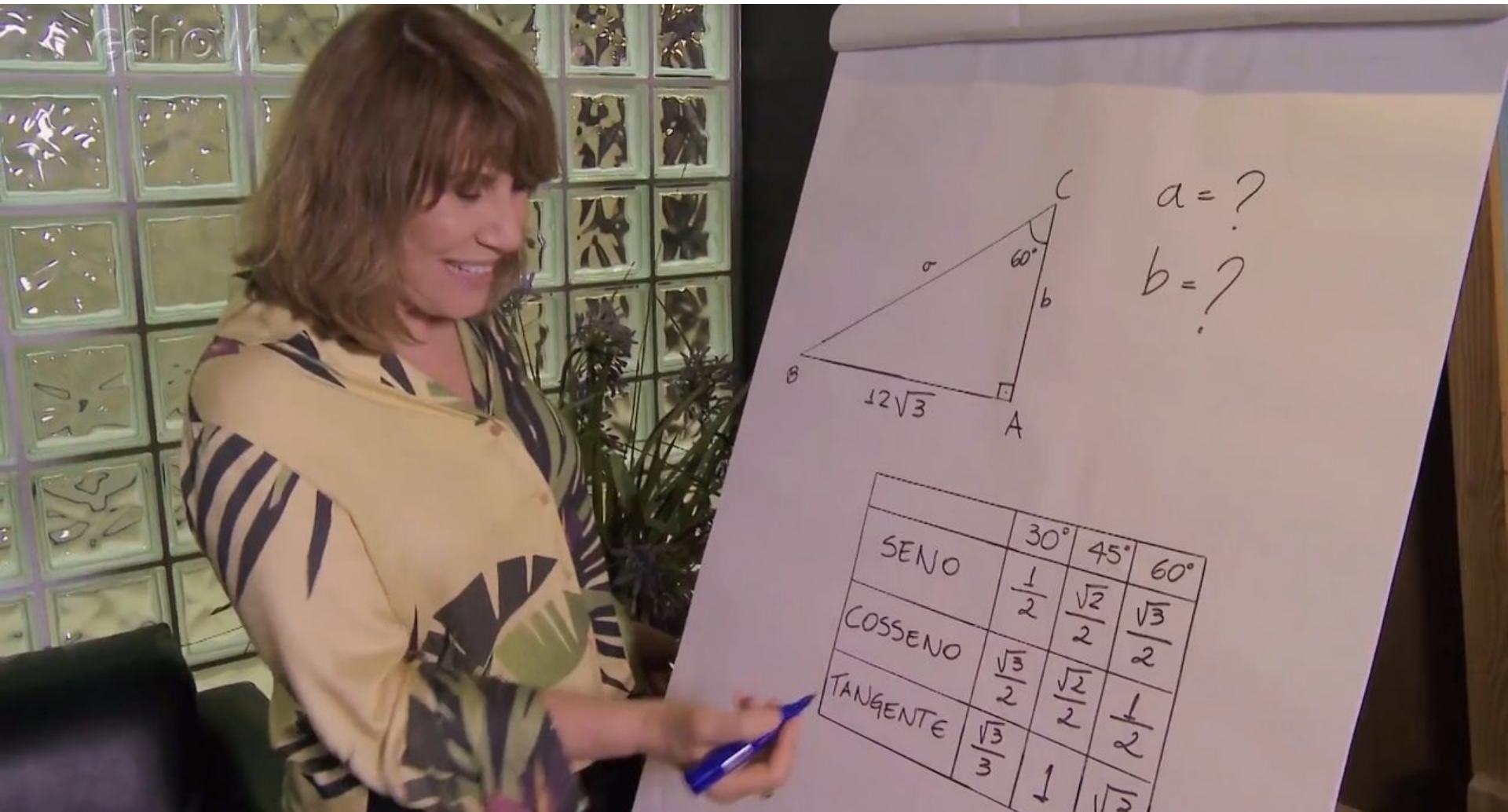


(a) *Imagem de entrada*

(b) *Brush feito pelo usuário*

(c) *Imagem reprocessada*

Abordagem 2 de segmentação



Segmentação de imagens

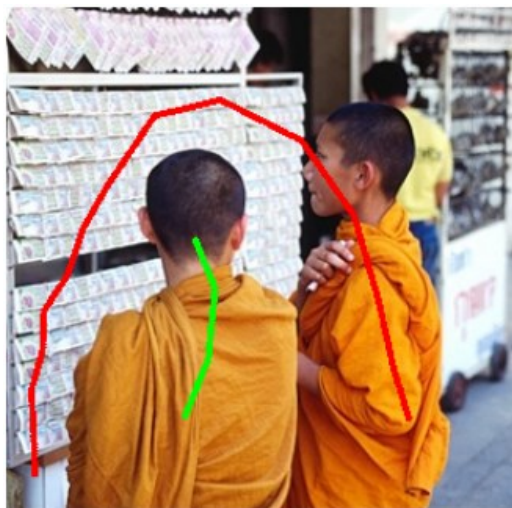
Abordagem 2:

Minimização de Funcionais de Energia



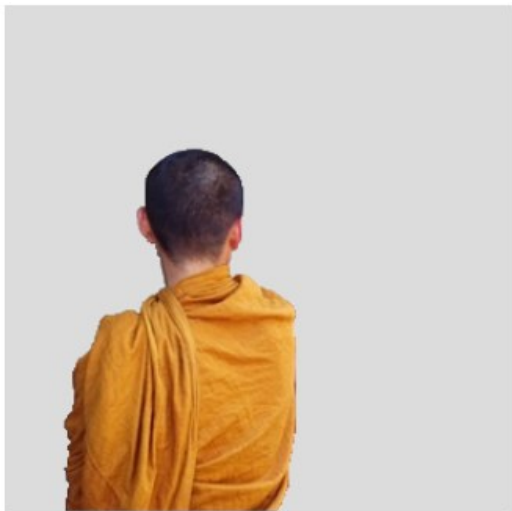
- ***Teoria envolvida:***
 - *Teoria dos Grafos*
 - *Análise Funcional*
 - *Operadores Laplaciano do Grafo*

Etapa inicial: autonomia do usuário



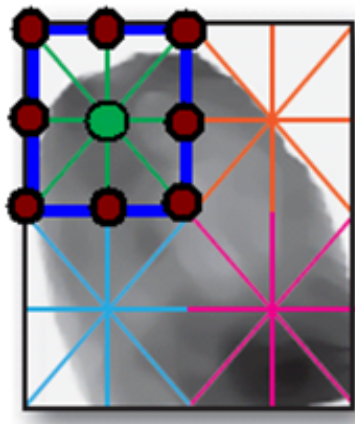
Pixels rotulados pelo usuário:

- **Vermelho:**
☐ pixel $P_i = 0$
- **Verde:**
☐ pixel $P_i = 1$



Coordenadas de Laplace (LC)

Etapa inicial: construção de um grafo de afinidade.



P_i

$$e_{ij} = P_i P_j \quad P_i = v_i \in V$$



P_j

$$\|P_i - P_j\|_\infty < r, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i|)$$



e_{ij}

$$w_{ij} = w(e_{ij})$$

Pesos calculados pela fórmula:

$$w_{ij} = \exp \left(-\frac{\beta \|I_i - I_j\|_\infty^2}{\sigma} \right), \quad \sigma = \max_{(P_i, P_j) \in E} \|I_i - I_j\|_\infty$$

Coordenadas de Laplace (LC)

Objetivo: Minimizar a função $E(x)$ abaixo

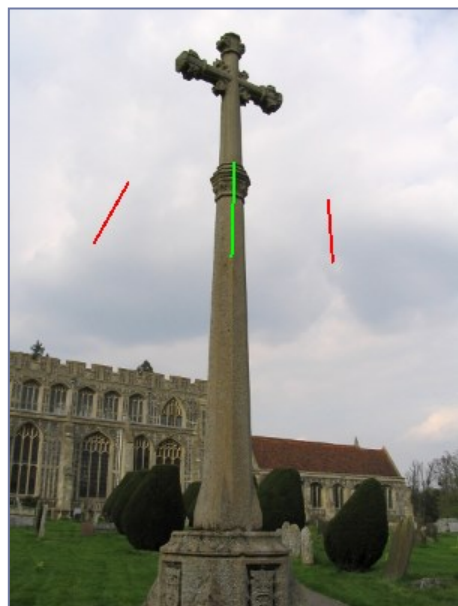
$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i \in B} \|x_i - x_B\|_2^2 + \sum_{i \in F} \|x_i - x_F\|_2^2 + \sum_{i \in V} \left\| d_i x_i - \sum_{j \in N(i)} w_{ij} x_j \right\|_2^2$$

$x_B = \mathbf{0}$ (background) $x_F = \mathbf{1}$ (foreground)

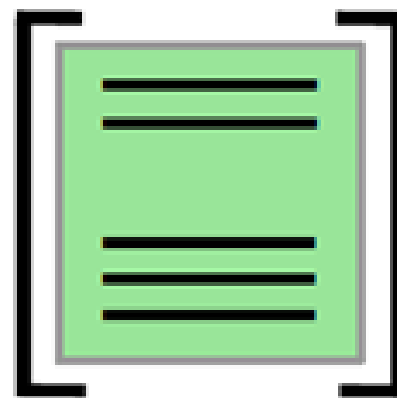
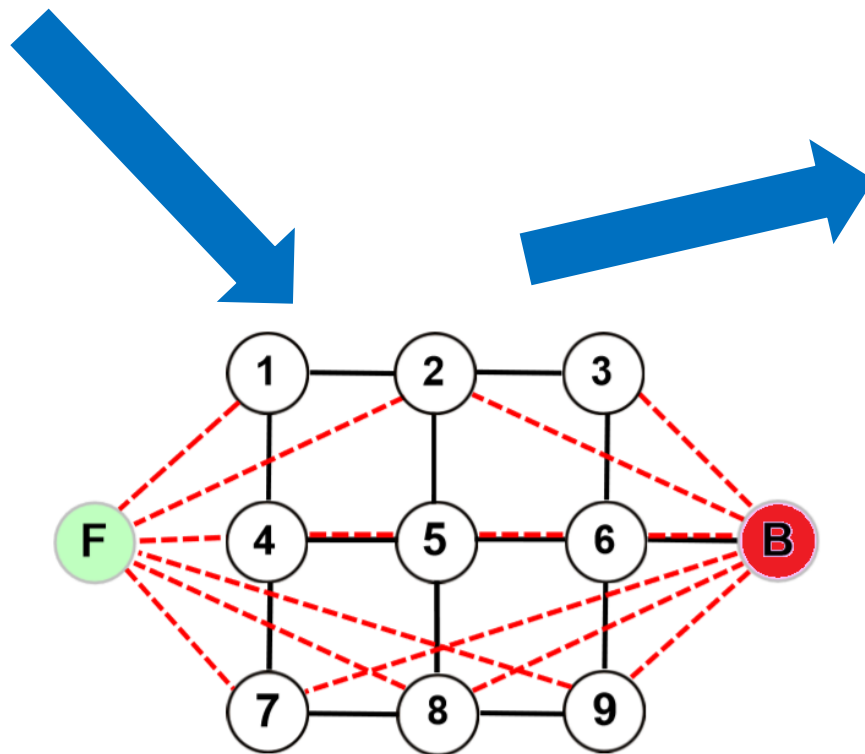
Propriedades

- ✓ **Alta aderência** nos contornos.
- ✓ Característica de **anisotropia**.
- ✓ Preservação da média entre as vizinhanças (a menos de d_i).
- ✓ Garantia de **unicidade de solução**.
- ✓ Problema de segmentação \rightarrow solução de um **sistema linear esparsos**.

Então, até agora o que temos?



*Imagem + delineações
(em verde e vermelho)*



*Matriz Laplaciana L ,
gerada a partir do
grafo*

Coordenadas de Laplace (LC)

Proposta: Minimizar o seguinte funcional de energia

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i \in B} \|x_i - x_B\|_2^2 + \sum_{i \in F} \|x_i - x_F\|_2^2 + \sum_{i \in V} \left\| d_i x_i - \sum_{j \in N(i)} w_{ij} x_j \right\|_2^2$$

$x_B = \mathbf{0}$ (*background*) $x_F = \mathbf{1}$ (*foreground*)



Manipulação algébrica

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t (\mathbf{I}_S + \mathbf{L}^2) \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t \mathbf{b} + c$$

Forma matricial (quadrática)



Minimização de $E(\mathbf{x})$

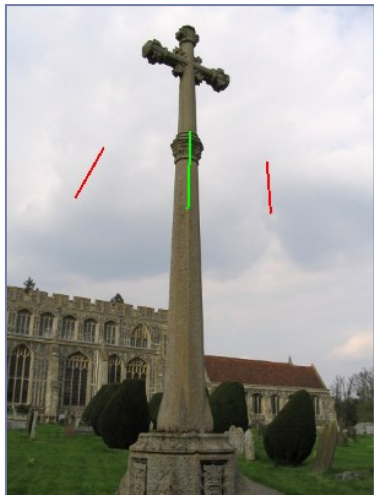
$$(\mathbf{I}_S + \mathbf{L}^2) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Sistema linear esparsos

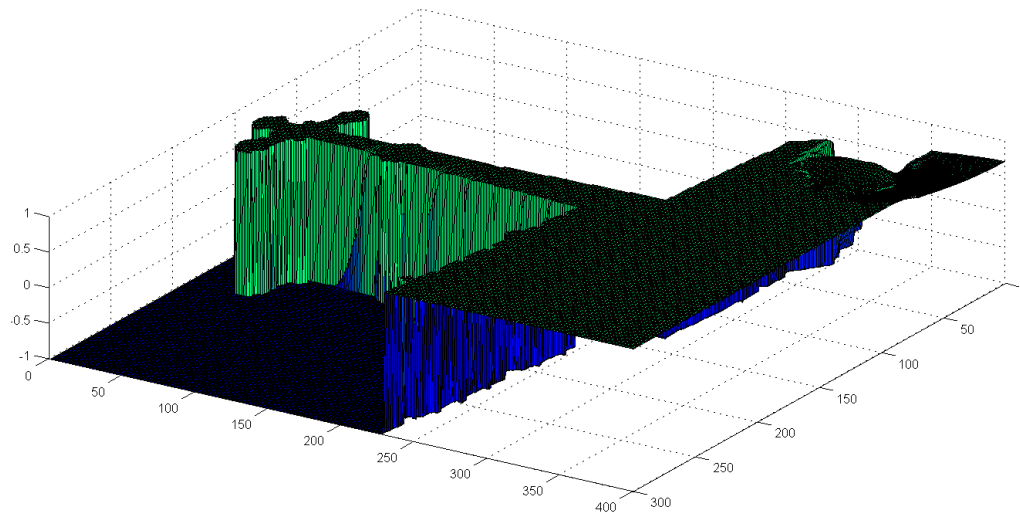
Coordenadas de Laplace (LC)

LC: Gerando a segmentação a partir da solução de $E(x)$

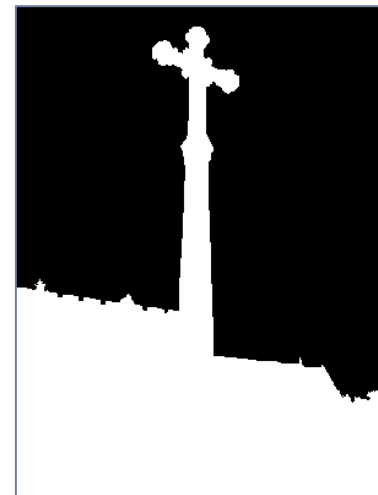
$$(\mathbf{I}_S + \mathbf{L}^2)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \longrightarrow \quad y_i = \begin{cases} x_B, & \text{if } x_i \geq \frac{x_B + x_F}{2} \\ x_F, & \text{otherwise} \end{cases}$$



(a) Entrada



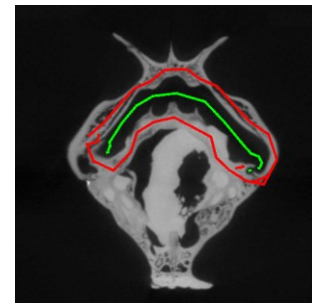
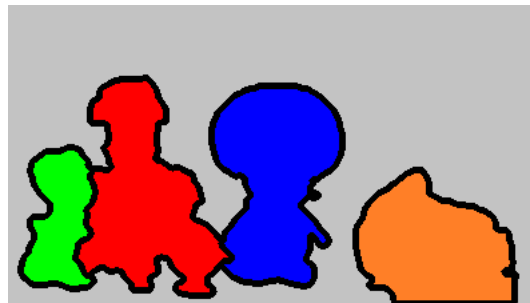
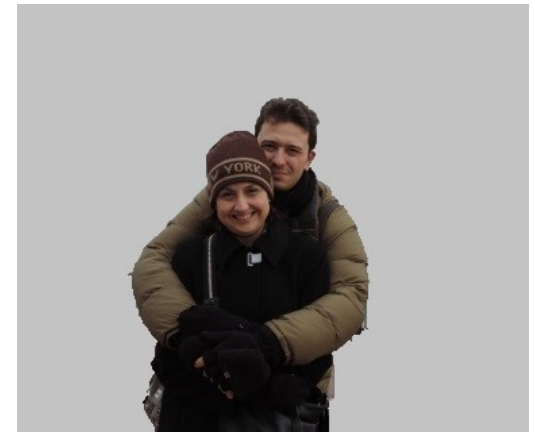
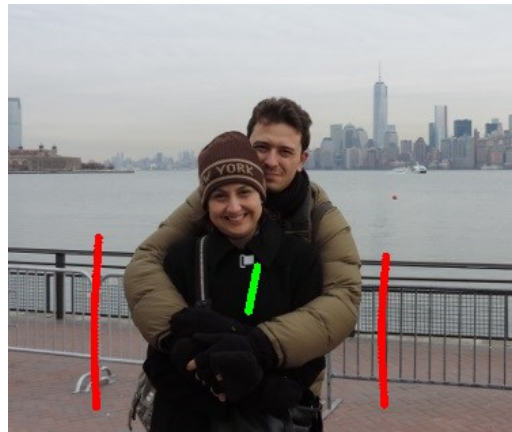
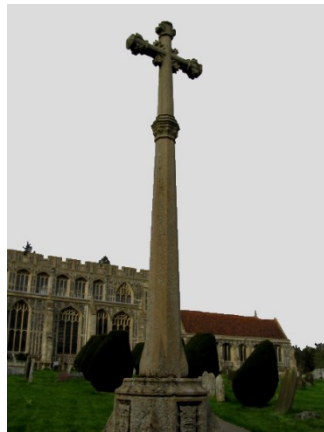
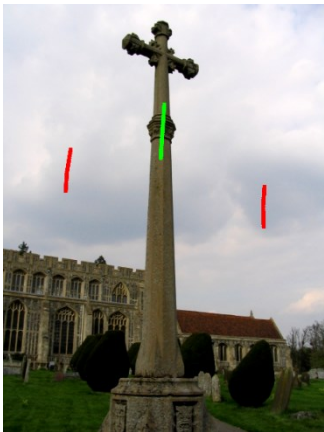
(b) Mapa de Saliência



(c) Segmentação

Segmentação interativa: Coordenadas de Laplace

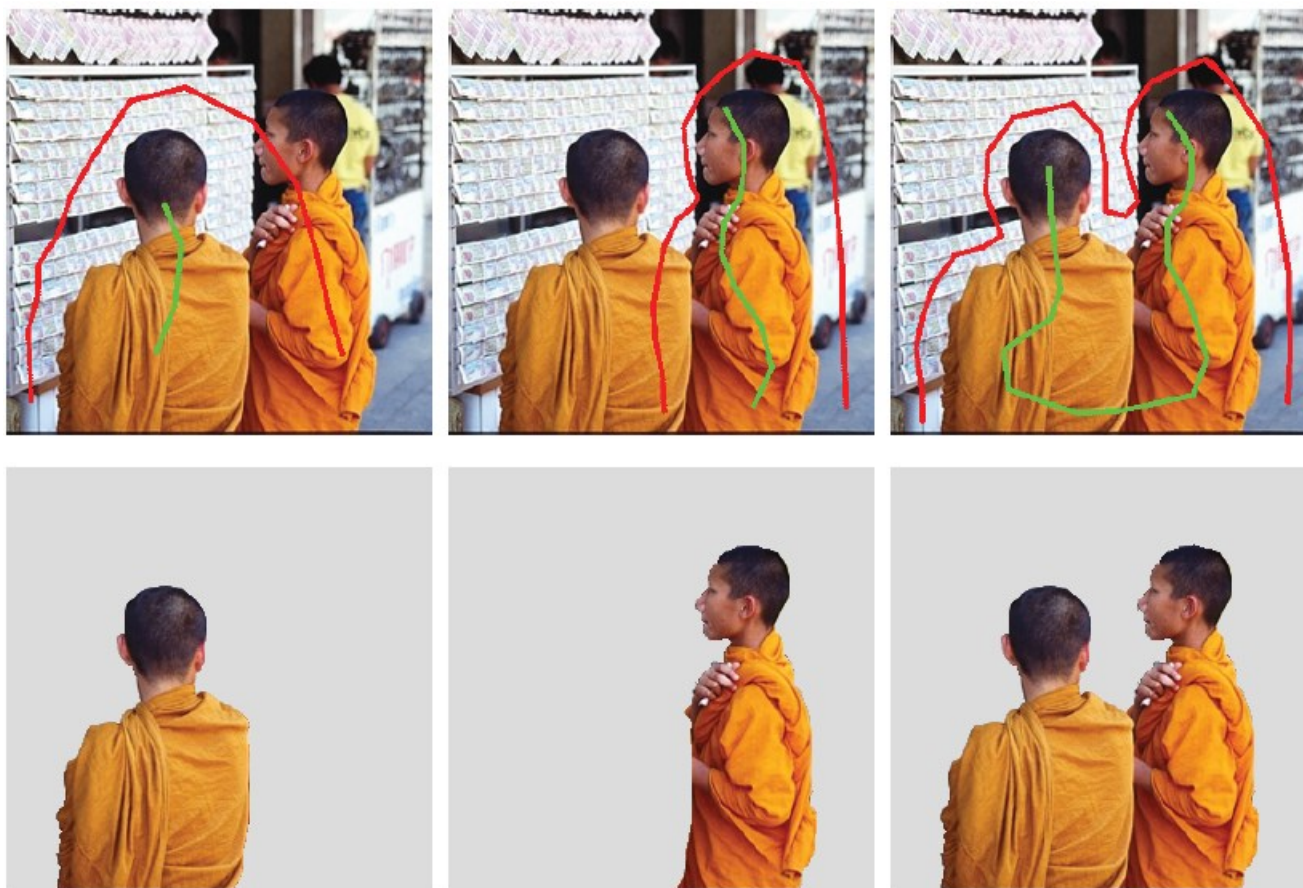
Alguns exemplos ilustrativos



Segmentações produzidas pelas Coordenadas de Laplace.

Coordenadas de Laplace - Propriedades

Flexibilidade e adaptabilidade



Selecionando diferentes objetos em uma mesma imagem.

Coordenadas de Laplace - vídeo

Laplacian Coordinates for Seeded Image Segmentation



Wallace Casaca^{1,2}, Luis Gustavo Nonato¹, Gabriel Taubin²

¹ICMC, University of São Paulo, Brazil

²School of Engineering, Brown University, USA

Paper ID: 2080

Available on

<http://goo.gl/jfyG0t>

