Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas de Equações Lineares
Métodos Diretos

UNESP - Universidade Estadual Paulista

São José do Rio Preto, SP, Brazil.

Os objetivos

Dada a matriz A e/ou dado o sistema de equações lineares $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

determinar numericamente:

i) o determinante da matriz A ;

ii) o valor do vetor x ;

iii) a inversa de A.

Recordamos que $A\,x = b$ representa o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

Por exemplo,

se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ então $Ax = b$ representa

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 & = & 5 \\ -5x_1 \qquad\quad + 4x_3 & = & -3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Pode ocorrer diferentes situações:

Determinante de A é diferente de zero:

- Dizemos que a matriz A é não singular.
- O sistema $A\,x = 0$ tem apenas a solução nula
- O sistema $A\,x = b$ tem uma única solução

Determinante de A é zero:

- Dizemos que a matriz A é singular.
- O sistema $A\,x = 0$ tem infinitas soluções
- O sistema $A\,x = b$ pode ter infinitas soluções ou **nenhuma** solução.

Exemplos

Vamos analisar os seguintes sistemas lineares usando o método do escalonamento:

$Ax = b$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Temos $\det(A) = 1$

Fazendo
$\{2\} \Leftarrow \{2\} - 2 \times \{1\}$
$\{3\} \Leftarrow \{3\} - \{1\}$
obtemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ - x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$\tilde{A}x = \tilde{b}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Temos $\det(\tilde{A}) = 0$

Fazendo
$\{2\} \Leftarrow \{2\} - 2 \times \{1\}$
$\{3\} \Leftarrow \{3\} - 5 \times \{1\}$
obtemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ - x_2 - 3x_3 &= -4 \\ - 3x_2 - 9x_3 &= -11 \end{aligned}$$

$\tilde{A}x = \hat{b}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Temos $\det(\tilde{A}) = 0$

Fazendo
$\{2\} \Leftarrow \{2\} - 2 \times \{1\}$
$\{3\} \Leftarrow \{3\} - 5 \times \{1\}$
obtemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ - x_2 - 3x_3 &= -4 \\ - 3x_2 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Exemplos: Continuação

Os sistemas originais e os seguintes sistemas que vêm do passo anterior são, respectivamente, equivalentes.

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ x_2 + 2x_3 &=& 3 \end{array}$$

Fazendo

$\{3\} \Leftarrow \{3\} + \{2\}$

obtemos

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ - x_3 &=& -1 \end{array}$$

Obtemos o sistema equivalente

$Ux = c$

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ - 3x_2 - 9x_3 &=& -11 \end{array}$$

Fazendo

$\{3\} \Leftarrow \{3\} - 3 \times \{2\}$

obtemos

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ 0x_3 &=& 1 \end{array}$$

Obtemos o sistema equivalente

$\tilde{U}x = \tilde{c}$

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ - 3x_2 - 9x_3 &=& -12 \end{array}$$

Fazendo

$\{3\} \Leftarrow \{3\} - 3 \times \{2\}$

obtemos

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 &=& 3 \\ - x_2 - 3x_3 &=& -4 \\ 0x_3 &=& 0 \end{array}$$

Obtemos o sistema equivalente

$\tilde{U}x = \hat{c}$

Exemplos: Continuação

Podemos concluir dos sistema equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 - 3x_3 &= -4 \\ -x_3 &= -1 \end{aligned}$$

A solução tem o valor único

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Também observe que

$\det(U) = 1 = \det(A)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 0x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Não tem solução. Pois a última linha é inconsistente

Também observe que

$\det(\tilde{U}) = 0 = \det(\tilde{A})$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Infinitas soluções. Pois com qualquer escolha para α, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 \\ -3\alpha + 4 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Também observe que

$\det(\tilde{U}) = 0 = \det(\tilde{A})$

Os métodos utilizados para resolver o problema $A\,x = b$ encaixam em duas categorias:
Métodos Diretos e Métodos Iterativos.

Métodos Diretos:

Eliminação de Gauss: método simples $\diamondsuit$
método com pivoteamento parcial
método com pivoteamento completo

Fatoração LU: via método de eliminação de Gauss
via método **compacto** de eliminação de Gauss $\diamondsuit$
método de Doolittle
método de Crout
método de Cholesky (matrizes definidas positivas)

Métodos Iterativos:

Método de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

Eliminação de Gauss simples: Escalonamento simples

Vamos considerar o método direto mais simples para resolução do sistema

$$A\,x = b.$$

A ideia por trás deste método é aplicações sucessivas das seguintes operações elementares até obter um sistema linear equivalente (que tem mesma solução) com matriz dos coeficientes triangular superior.

- Multiplicar uma linha do sistema por um constante e subtrair de uma outra linha do sistema.

\- Este procedimento converte o sistema $Ax = b$ no novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$. Então,

  - Os dois sistemas tem a mesma solução para x.
  - $\det(A) = \det(\tilde{A})$.

- Se necessitar, trocar duas linhas do sistema.

\- Este procedimento converte o sistema $Ax = b$ no novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$. Então,

  - Os dois sistemas tem a mesma solução para x.
  - $\det(A) = -\det(\tilde{A})$.

Vamos entender as etapas necessárias do método trabalhando com um exemplo simples.

Exemplo: Dado o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 4.0 \\ -11.0 \end{bmatrix},$$

determinar pelo método da eliminação de Gauss:

a) o determinante da matriz A;

b) o valor do vetor x;

Etapa 1 (Eliminação na linha 2) usando linha 1:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 & | & 4.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição $(2, 1)$ igual a zero, multiplicando a 1^a linha por uma constante ($m_{2,1}$) e subtrair da 2^a linha.

Constante multiplicador: $m_{2,1} = a_{2,1}/a_{1,1} = 1.0/2.0 = 0.5$,

Determinação da nova linha 2: $\{2\} = \{2\} - 0.5 \times \{1\}$

Procedimento: para $j = 1, 2, 3$

$$a_{2,j} = a_{2,j} - m_{2,1}\, a_{1,j}$$

$$b_2 = b_2 - m_{2,1}\, b_1$$

Resultado:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

Etapa $k = 1$ (Eliminação na linha $i = k + 1 = 2$) usando linha $k = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 & | & 4.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição (i, k) igual a zero, multiplicando a linha k por uma constante $(m_{i,k})$ e subtrair da linha i.

Constante multiplicador: $m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = 1.0/2.0 = 0.5$,

Determinação da nova linha i: $\{i\} = \{i\} - m_{i,k} \times \{k\}$

Procedimento: para $j = k, k + 1, \ldots, n\ (= 3)$

$$a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j}$$

$$b_i = b_i - m_{i,k}\, b_k$$

Resultado:

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

Etapa 1 (Eliminação na linha 3) usando linha 1:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição $(3, 1)$ igual a zero, multiplicando a 1^a linha por uma constante ($m_{3,1}$) e subtrair da 3^a linha.

Constante multiplicador: $m_{3,1} = a_{3,1}/a_{1,1} = -1.0/2.0 = -0.5$,

Determinação da nova linha 2: $\{3\} = \{3\} - (-0.5) \times \{1\}$

Procedimento: para $j = 1, 2, 3$

$$a_{3,j} = a_{3,j} - m_{3,1}\, a_{1,j}$$

$$b_3 = b_3 - m_{3,1}\, b_1$$

Resultado:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 & | & -7.5 \end{array}$$

Etapa $k = 1$ (Eliminação na linha $i = k + 2 = 3$) usando linha $k = 1$:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & | & -11.0 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição (i, k) igual a zero, multiplicando a linha k por uma constante $(m_{i,k})$ e subtrair da linha i.

Constante multiplicador: $m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = -1.0/2.0 = -0.5$,

Determinação da nova linha i: $\{i\} = \{i\} - m_{i,k} \times \{k\}$

Procedimento: para $j = k, k + 1, \ldots, n\ (= 3)$

$$a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j}$$

$$b_i = b_i - m_{i,k}\, b_k$$

Resultado:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 & | & -7.5 \end{array}$$

Etapa 2 (Eliminação na linha 3) usando linha 2:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 & | & -7.5 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição $(3,2)$ igual a zero, multiplicando a 2^a linha por uma constante $(m_{3,2})$ e subtrair da 3^a linha.

Constante multiplicador: $m_{3,2} = a_{3,2}/a_{2,2} = -4.0/(-1.0) = 4.0$,

Determinação da nova linha 2: $\{3\} = \{3\} - (4.0) \times \{2\}$

Procedimento: para $j = 2, 3$

$$a_{3,j} = a_{3,j} - m_{3,2}\, a_{2,j}$$

$$b_3 = b_3 - m_{3,2}\, b_2$$

Resultado:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & -9.5 & | & -9.5 \end{array}$$

Etapa $k = 2$ (Eliminação na linha $i = k + 1 = 3$) usando linha $k = 2$:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 & | & -7.5 \end{array}$$

O objetivo é tornar o elemento na posição (i, k) igual a zero, multiplicando a linha k por uma constante $(m_{i,k})$ e subtrair da linha i.

Constante multiplicador: $m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = -4.0/(-1.0) = 4.0$,

Determinação da nova linha 2: $\{i\} = \{i\} - m_{i,k} \times \{k\}$

Procedimento: para $j = k, k+1, \ldots, n \ (= 3)$

$$a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j}$$

$$b_i = b_i - m_{i,k}\, b_k$$

Resultado:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & | & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & | & b_3 \end{array} = \begin{array}{ccccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 & | & 7.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 & | & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & -9.5 & | & -9.5 \end{array}$$

O método nos forneceu o sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ dado por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 \\ 0.0 & 0.0 & -9.5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 0.5 \\ -9.5 \end{bmatrix}.$$

$\tilde{A}x = \tilde{b}$ dado por

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.5 \\ 0.0 & 0.0 & -9.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 0.5 \\ -9.5 \end{bmatrix}.$$

Como é um sistema triangular superior, podemos obter a solução por substituição regressiva:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}} = \frac{-9.5}{-9.5} = 1.0,$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{2,3}x_3}{a_{2,2}} = \frac{0.5 - 2.5 \times 1.0}{-1.0} = 2.0,$$
$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3}{a_{1,1}} = \frac{7.0 - 1.0 \times 2.0 - (-1.0) \times 1.0}{2.0} = 3.0$$

Logo, a solução é

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Como não houve troca de linhas

$$det(\mathrm{A}) = det(\tilde{\mathrm{A}}) = 2.0 \times (-1.0) \times (-9.5) = 19.0$$

De forma geral, a solução por **substituição regressiva** de um sistema **triangular superior** de ordem n pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{b_n}{a_{n,n}} \\
x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\
&\vdots \\
x_i &= \frac{b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1} + a_{i,i+2}x_{i+2} + \cdots + a_{i,n}x_n)}{a_{i,i}} \\
&\vdots \\
x_1 &= \frac{b_1 - (a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n)}{a_{1,1}} \ .
\end{aligned}$$

Para $i = n, n-1, ..., 2, 1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}} \ .$$

Observações:
Na etapa 1, se o elemento $a_{1,1}$ fosse zero a operação de divisão para obter o constantes multiplicadores falha. Neste caso, podemos contornar a situação trocando a linha 1 com uma linha a baixo dela, de tal forma o elemento na posição $(1, 1)$ é diferente de zero.

Se isto não é possível, o sistema não vai ter soluções ou, se tiver uma solução, esta solução não é única.

Na etapa 2, se o elemento $a_{2,2}$ fosse zero, de novo a operação de divisão falha. Neste caso, podemos contornar a situação cambiando a linha 2 com uma linha a baixo dela.

Novamente, se isto não é possível, o sistema não vai ter soluções ou, se tiver uma solução, esta solução não é única.

Na prática, não somente a divisão por zero causa problema. Dividir por valores próximos de zeros também pode causar problemas. Assim, do modo geral, incluindo no método que veremos, faremos troca de linhas de tal forma o elemento $a_{k,k}$ terá o maior valor em módulo entre os elementos $a_{k,k}, a_{k+1,k}, \ldots, a_{n,k}$ (chamado de pivoteamento parcial).

Método compacto de eliminação de Gauss

Agora vamos considerar um outro método direto para resolução do sistema

$$A\,x = b.$$

O método que vamos considerar é o

método **compacto** de eliminação de Gauss.

A palavra **compacto** é usada, pois o método utiliza um mínimo de espaço para o armazenamento dos valores.

Com pivoteamento parcial: quando fazemos troca de linhas de tal forma que o elemento $a_{k,k}$ terá o maior valor em módulo entre os elementos $a_{k,k}, a_{k+1,k}, \ldots, a_{n,k}$.

Neste método, começamos com a coleção de elementos $a_{i,j}$ (que são os elementos da matriz A) e, a partir de uma sequência de operações, chegamos em uma coleção nova com valores alterados de elementos.

Isto é,

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

de tal forma, a partir dos valores alterados, teremos $\mathrm{L\,U} = \mathrm{P\,A}$, onde

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Aqui, a matriz P é uma matriz de permutação.

Vamos entender o método com o exemplo simples que consideramos anteriormente.

Dado o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 4.0 \\ -11.0 \end{bmatrix},$$

determinar pelo método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial:

a) o determinante da matriz A;

b) o valor do vetor x;

c) a segunda coluna da inversa de A.

Método **compacto** de eliminação de Gauss

Fatoração LU **de** A:

Obter, a partir de A, duas matrizes L e U tais que

$$\mathrm{L}\,\mathrm{U} = \mathrm{P}\,\mathrm{A},$$

onde P é a matriz de permutação que representa as trocas feitas durante o processo de eliminação.

Durante o processo da eliminação, para registrar informações sobre P, usaremos um vetor v e escalar τ que são tomados inicialmente como

$$\tau = 1, \qquad \mathrm{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Cada vez que fizemos uma troca entre duas linhas, τ é substituida por $-\tau$ e os elementos correspondentes do vetor v também são trocados.

Etapa 1 (Parte Troca - Pivoteamento): com $n = 3$

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Procurar o maior elemento em módulo entre $a_{i,1}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\left.\begin{array}{|l} mx = 1 \\ \text{para } i = 2, 3 \\ \quad \text{se } |a_{i,1}| > |a_{mx,1}| \text{ então } mx = i \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Obter a posição do} \\ \text{maior elemento em módulo} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{|l} \text{se } mx > 1 \text{ então} \\ \quad \begin{array}{|l} \tau = -\tau \\ \text{para } j = 1, 2, 3 \\ \quad temp = a_{1,j}; \quad a_{1,j} = a_{mx,j}; \quad a_{mx,j} = temp \\ itmp = v_1; \quad v_1 = v_{mx}; \quad v_{mx} = itmp \end{array} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Se necessário} \\ \text{fazer troca de} \\ \text{linhas associadas} \end{array}$$

No exemplo $a_{mx,1} = a_{1,1} = 2.0$ é o maior em módulo. Então, não faremos troca entre linhas.

Etapa $k = 1$ (Parte Troca - Pivoteamento):

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Procurar o maior elemento em módulo entre $a_{i,k}$, $i = k+1, k+2, \ldots, n$.

$$\left.\begin{array}{|l} mx = k \\ \text{para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad \text{se } |a_{i,k}| > |a_{mx,k}| \text{ então } mx = i \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Obter a posição do} \\ \text{maior elemento em módulo} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{|l} \text{se } mx > k \text{ então} \\ \quad \begin{array}{|l} \tau = -\tau \\ \text{para } j = 1, 2, \ldots, n \\ \quad temp = a_{k,j}; \quad a_{k,j} = a_{mx,j}; \quad a_{mx,j} = temp \\ itmp = v_k; \qquad v_k = v_{mx}; \qquad v_{mx} = itmp \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Se necessário} \\ \text{fazer troca de} \\ \text{linhas associadas} \end{array}$$

No exemplo $a_{mx,k} = a_{k,k} = 2.0$ é o maior em módulo. Então, não faremos troca entre linhas.

Etapa 1 (Eliminação na linha 2):

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

$$m_{2,1} = a_{2,1}/a_{1,1} = 1.0/2.0 = 0.5,$$

$$\begin{array}{l} (2) = (2) - m_{2,1} \times (1) \\ \text{para } j = 2,3 \\ \quad a_{2,j} = a_{2,j} - m_{2,1}\, a_{1,j} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

No lugar do elemento $a_{2,1}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{2,1}$. (Isto é, $a_{2,1} \Leftarrow m_{2,1} = 0.5$)

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

Etapa $k = 1$ (Eliminação na linha $i = k + 1$):

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

$i = k + 1 \qquad m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = 1.0/2.0 = 0.5,$

$(i) = (i) - m_{i,k} \times (k)$
para $j = 2, 3$
$a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j}$

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

No lugar do elemento $a_{i,k}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{i,k}$.
(Isto é, $a_{i,k} \Leftarrow m_{i,k} = 0.5$)

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

Etapa 1 (Eliminação na linha 3):

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{array}$$

$$m_{3,1} = a_{3,1}/a_{1,1} = -1.0/2.0 = -0.5,$$

(3) = (3) − $m_{3,1}$ × (1)
para $j = 2, 3$
$a_{3,j} = a_{3,j} - m_{3,1}\, a_{1,j}$

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ & -4.0 & 0.5 \end{array}$$

No lugar do elemento $a_{3,1}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{3,1}$. (Isto é, $a_{3,1} \Leftarrow m_{3,1} = -0.5$)

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \end{array}$$

Etapa $k = 1$ (Eliminação na linha $i = k + 2$):

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{matrix}$$

$$m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = -1.0/2.0 = -0.5,$$

$(i) = (i) - m_{i,k} \times (k)$
para $j = 2, 3$
$a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j}$

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ & -4.0 & 0.5 \end{matrix}$$

No lugar do elemento $a_{i,k}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{i,k}$. (Isto é, $a_{i,k} \Leftarrow m_{i,k} = -0.5$)

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \end{matrix}$$

Etapa 2 (Parte Troca - Pivoteamento): com $n = 3$

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Procurar o maior elemento em módulo entre $a_{i,2}$, $i = 2, 3$.

$$\left.\begin{array}{|l} mx = 2 \\ \text{para } i = 3 \\ \quad \text{se } |a_{i,2}| > |a_{mx,2}| \text{ então } mx = i \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Obter a posição do} \\ \text{maior elemento em módulo} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{|l} \text{se } mx > 2 \text{ então} \\ \begin{array}{|l} \tau = -\tau \\ \text{para } j = 1, 2, 3 \\ \quad temp = a_{2,j}; \quad a_{2,j} = a_{mx,j}; \quad a_{mx,j} = temp \\ itmp = v_2; \qquad v_2 = v_{mx}; \qquad v_{mx} = itmp \end{array} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Se necessário} \\ \text{fazer troca de} \\ \text{linhas associadas} \end{array}$$

No exemplo $a_{mx,2} = a_{3,2} = -4.0$ é o maior em módulo. Então, faremos troca de linha 2 com linha 3.

Etapa $k = 2$ (Parte Troca - Pivoteamento):

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{rrr} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Procurar o maior elemento em módulo entre $a_{i,2}$, $i = 2, 3$.

$$\left|\begin{array}{l} mx = k \\ \text{para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad \text{se } |a_{i,k}| > |a_{mx,k}| \text{ então } mx = i \end{array}\right\} \text{Obter a posição do maior elemento em módulo}$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{se } mx > k \text{ então} \\ \left|\begin{array}{l} \tau = -\tau \\ \text{para } j = 1, 2, 3 \\ \quad temp = a_{k,j}; \quad a_{k,j} = a_{mx,j}; \quad a_{mx,j} = temp \\ itmp = v_k; \quad v_k = v_{mx}; \quad v_{mx} = itmp \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{Se necessário fazer troca de linhas associadas}$$

Nosso exemplo $a_{mx,k} = a_{3,k} = -4.0$ é o maior em módulo. Então, faremos troca de linha mx com linha k.

Etapa 2 (Eliminação na linha 3):

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \end{matrix}$$

$$m_{3,2} = a_{3,2}/a_{2,2} = -1.0/-4.0 = 0.25,$$

$(3) = (3) - m_{3,2} \times (2)$

para $j = 3$

$a_{3,j} = a_{3,j} - m_{3,2}\, a_{2,j}$

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & & 2.375 \end{matrix}$$

No lugar do elemento $a_{3,2}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{3,2}$. (Isto é, $a_{3,2} \Leftarrow m_{3,2} = 0.25$)

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 2.375 \end{matrix}$$

Etapa $k = 2$ (Eliminação na linha $i = k + 1$):

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & -1.0 & 2.5 \end{array}$$

$$m_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k} = -1.0/-4.0 = 0.25,$$

$$\begin{array}{l} (i) = (i) - m_{i,k} \times (k) \\ \quad \text{para } j = 3 \\ \qquad a_{i,j} = a_{i,j} - m_{i,k}\, a_{k,j} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & & 2.375 \end{array}$$

No lugar do elemento $a_{i,k}$ que deve ficar como 0.0 guardar o valor de multiplicador $m_{i,k}$.
(Isto é, $a_{i,k} \Leftarrow m_{i,k} = 0.25$)

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} = \begin{array}{ccc} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -0.5 & -4.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 2.375 \end{array}$$

As matrizes L e U

Obtemos:

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a_{2,1} & 1.0 & 0.0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0.0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0.0 & 0.0 & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 2.375 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

e $\tau = -1$.

Observe que

$$A = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \text{ mas } LU = PA = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 \\ 1.0 & -0.5 & 2.0 \end{bmatrix}.$$

Obtenção de determinante da A

No final do processo de eliminação, τ assumirá o valor $+1$ se o número de trocas for **par** e assumirá o valor -1 se o número de trocas for **ímpar**.

De $\mathsf{L}\,\mathsf{U} = \mathsf{P}\,\mathsf{A}$ temos

$$det(\mathsf{L})\, det(\mathsf{U}) = det(\mathsf{P})\, det(\mathsf{A}).$$

Entretanto,

- $det(\mathsf{L}) = 1$, pois os elementos diagonais da matriz triangular inferior L são todos iguais a 1.
- $det(\mathsf{P}) = \tau$, pois o determinante da **P** é ± 1, depende do número de trocas.
- Assim, $det(\mathsf{A}) = \tau \times det(\mathsf{U})$.

a) **Para obter o determinante de** A no exemplo é simples:

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0.0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0.0 & 0.0 & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 2.375 \end{bmatrix}$$

e $det(\mathrm{A}) = \tau \times det(\mathrm{U})$.

Então,

$$\begin{aligned} det(\mathrm{A}) &= \tau \times a_{1,1} \times a_{2,2} \times a_{3,3}, \\ &= (-1) \times 2.0 \times (-4.0) \times 2.375 \\ &= 19.0 \end{aligned}$$

Solução de x em $A\,x = b$

Observe que

$$
\begin{aligned}
A\,x = b \quad & \iff \\
P\,A\,x = P\,b \quad & \iff \\
L\,U\,x = P\,b = \tilde{b}. &
\end{aligned}
$$

Assim, tomando $U\,x = y$, temos que resolver dois sistemas triangulares para obter o valor do vetor x.

$$L\,y = \tilde{b}, \qquad U\,x = y.$$

Como a informação sobre a matriz de permutação P foi registrada no vetor v, o vetor $\tilde{b}$ é obtido a partir do vetor b da seguinte forma:

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{v_1} \\ b_{v_2} \\ b_{v_3} \end{bmatrix}.$$

b) **Para determinar o valor de** x no nosso exemplo simples:

Temos,

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathrm{b}} = \mathrm{P\,b} = \begin{bmatrix} b_{v_1} \\ b_{v_2} \\ b_{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Agora, temos que resolver o sistema $\mathrm{L\,y} = \tilde{\mathrm{b}}$, isto é resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Então obtemos,

$$y_1 = 7.0,$$

$$y_2 = -11.0 + 0.5 * y_1 = -7.5,$$

$$y_3 = 4.0 - 0.5 * y_1 - 0.25 * y_2 = 2.375$$

Com o vetor y obtido anteriormente, temos que resolver o sistema $U x = y$, isto é resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 2.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0 \\ -7.5 \\ 2.375 \end{bmatrix}$$

Então temos,

$$x_3 = 2.375/2.375 = 1.0,$$
$$x_2 = (-7.5 - 0.5 * x_3)/(-4.0) = 2.0,$$
$$x_1 = (7.0 - 1.0 * x_2 + 1.0 * x_3)/2.0 = 3.0$$

A solução encontrada é

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Para obter a inversa de A

A inversa da matriz A é uma matriz C tal que

$$AC = I.$$

Se denortamos por c_1, c_2 e c_3 as colunas de C e por e_1, e_2 e e_3 as colunas de I, então podemos escrever

$$A[c_1, c_2, c_3] = [e_1, e_2, e_3] \iff Ac_1 = e_1, \quad Ac_2 = e_2, \quad Ac_3 = e_3.$$

Por exemplo, para obter a segunda coluna da inversa de A, temos que resolver o sistema $A\,x = b$, onde $b = e_2$. Então,

$$\begin{aligned} A\,x = e_2 &\iff \\ P\,A\,x = P\,e_2 &\iff \\ L\,U\,x = P\,e_2 = \tilde{e}_2. \end{aligned}$$

Assim, tomando $U\,x = y$, temos que resolver dois sistemas simples

$$L\,y = \tilde{e}_2, \qquad U\,x = y,$$

para obter o valor do vetor $c_2 = x = [x_1, x_2, x_3]^T$.

c) **Determinação do segunda coluna** c_2 **da inversa de** A, no nosso exemplo simples:

Temos que resolver o sistema $Ac_2 = e_2$, or equivalentimente, resolver o sistema $LUc_2 = \tilde{e}_2$. Resolução desta última pode ser tratada por meio da resolução dos dois sistemas simples $Ly = \tilde{e}_2$ e $Uc_2 = y$.

$$e_2 = \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_{2,2} \\ e_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{e}_2 = P\, e_2 = \begin{bmatrix} e_{v_1,2} \\ e_{v_2,2} \\ e_{v_3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_{3,2} \\ e_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução do sistema $L\, y = \tilde{e}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.0, \\ y_2 &= 0.0 + 0.5 \times y_1 = 0.0, \\ y_3 &= 1.0 - 0.5 \times y_1 - 0.25 \times y_2 = 1.0 \end{aligned}$$

Resolução do sistema $U\,c_2 = y$:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 2.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1.0/2.375 = 8/19 = 0.42105263\cdots,$$

$$x_2 = (0.0 - 0.5 \times x_3)/(-4.0) = 1/19 = 0.05263158,$$

$$x_1 = (0.0 - 1.0 \times x_2 + 1.0 \times x_3)/2.0 = 7/38 = 0.184210526$$

Então,

$$c_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.18421053 \\ 0.05263158 \\ 0.42105263 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Considerar o sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 1.0 & -1.5 & -7.5 & 0.5 \\ -2.0 & 1.0 & 1.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6.0 \\ -12.5 \\ 1.5 \\ -10.0 \end{bmatrix}.$$

Resolver pelo método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial e obter:

a) a determinante da matriz A;

b) o valor do vetor x;

c) a quarta coluna da inversa de A.

$n = 4$, **Etapa** $k = 1$: Pivoteamento

Obter mx tal que
$|a_{mx,k}| \geq |a_{i,k}|$, $i = k, \ldots, n$

$mx = k$,
for $i = k + 1$ to n
if $|a_{mx,k}| < |a_{i,k}|$ then $mx = i$

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ -3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ 1.0	$a_{2.2}$ -1.5	$a_{2.3}$ -7.5	$a_{2.4}$ 0.5	v_2 2
$a_{3.1}$ -2.0	$a_{3.2}$ 1.0	$a_{3.3}$ 1.5	$a_{3.4}$ 2.0	v_3 3
$a_{4.1}$ -1.0	$a_{4.2}$ -4.5	$a_{4.3}$ 1.0	$a_{4.4}$ 1.5	v_4 4

No caso atual temos $mx = 1$.

if $mx > k$ then
$\tau \leftarrow -\tau$
$it = v_k$, $v_k = v_{mx}$, $v_{mx} = it$
for $j = 1$ to n
$rt = a_{k,j}$,
$a_{k,j} = a_{mx,j}$,
$a_{mx,j} = rt$,

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ -3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ 1.0	$a_{2.2}$ -1.5	$a_{2.3}$ -7.5	$a_{2.4}$ 0.5	v_2 2
$a_{3.1}$ -2.0	$a_{3.2}$ 1.0	$a_{3.3}$ 1.5	$a_{3.4}$ 2.0	v_3 3
$a_{4.1}$ -1.0	$a_{4.2}$ -4.5	$a_{4.3}$ 1.0	$a_{4.4}$ 1.5	v_4 4

Como $mx = k$, não houve

$n = 4$, **Etapa** $k = 1$: Escalonamento

Objetivo é fazer operações que torna $a_{2,1}$, $a_{3,1}$ e $a_{4,1}$ igual a 0.

for $i = k+1$ to n,
  $mult = a_{i,k}/a_{k,k}$
  $a_{i,k} \leftarrow mult \quad (= m_{i,k})$
  for $j = k+1$ to n,
    $a_{i,j} = a_{i,j} - mult \times a_{k,j}$

$a_{1,1}$ 2.0	$a_{1,2}$ 1.0	$a_{1,3}$ 0.0	$a_{1,4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2,1}$ 1.0	$a_{2,2}$ −1.5	$a_{2,3}$ −7.5	$a_{2,4}$ 0.5	v_2 2
$a_{3,1}$ −2.0	$a_{3,2}$ 1.0	$a_{3,3}$ 1.5	$a_{3,4}$ 2.0	v_3 3
$a_{4,1}$ −1.0	$a_{4,2}$ −4.5	$a_{4,3}$ 1.0	$a_{4,4}$ 1.5	v_4 4

$(ii) - m_{2,k} \times (i) \rightarrow (ii)$

$(iii) - m_{3,k} \times (i) \rightarrow (iii)$

$(iv) - m_{4,k} \times (i) \rightarrow (iv)$

$a_{1,1}$ 2.0	$a_{1,2}$ 1.0	$a_{1,3}$ 0.0	$a_{1,4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2,1}$ 0.5	$a_{2,2}$ −2.0	$a_{2,3}$ −7.5	$a_{2,4}$ 2.0	v_2 2
$a_{3,1}$ −1.0	$a_{3,2}$ 2.0	$a_{3,3}$ 1.5	$a_{3,4}$ −1.0	v_3 3
$a_{4,1}$ −0.5	$a_{4,2}$ −4.0	$a_{4,3}$ 1.0	$a_{4,4}$ 0.0	v_4 4

$n = 4$, **Etapa** $k = 2$: Pivoteamento

Obter mx tal que
$|a_{mx,k}| \geq |a_{i,k}|$, $i = k, \ldots, n$

$mx = k$,
for $i = k + 1$ to n
if $|a_{mx,k}| < |a_{i,k}|$ then $mx = i$

No caso atual temos $mx = 4$.

if $mx > k$ then
$\tau \leftarrow -\tau$
$it = v_k$, $v_k = v_{mx}$, $v_{mx} = it$
for $j = 1$ to n
$rt = a_{k,j}$,
$a_{k,j} = a_{mx,j}$,
$a_{mx,j} = rt$,

Como $mx > k$, linha mx foi

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ -3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ 0.5	$a_{2.2}$ -2.0	$a_{2.3}$ -7.5	$a_{2.4}$ 2.0	v_2 2
$a_{3.1}$ -1.0	$a_{3.2}$ 2.0	$a_{3.3}$ 1.5	$a_{3.4}$ -1.0	v_3 3
$a_{4.1}$ -0.5	$a_{4.2}$ -4.0	$a_{4.3}$ 1.0	$a_{4.4}$ 0.0	v_4 4

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ -3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ -0.5	$a_{2.2}$ -4.0	$a_{2.3}$ 1.0	$a_{2.4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3.1}$ -1.0	$a_{3.2}$ 2.0	$a_{3.3}$ 1.5	$a_{3.4}$ -1.0	v_3 3
$a_{4.1}$ 0.5	$a_{4.2}$ -2.0	$a_{4.3}$ -7.5	$a_{4.4}$ 2.0	v_4 2

$n = 4$, **Etapa** $k = 2$: Escalonamento

Objetivo é fazer operações que torna $a_{3,2}$ e $a_{4,2}$ igual a 0.

for $i = k + 1$ to n,
  $mult = a_{i,k}/a_{k,k}$
  $a_{i,k} \leftarrow mult \quad (= m_{i,k})$
  for $j = k + 1$ to n,
    $a_{i,j} = a_{i,j} - mult \times a_{k,j}$

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ −0.5	$a_{2.2}$ −4.0	$a_{2.3}$ 1.0	$a_{2.4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3.1}$ −1.0	$a_{3.2}$ 2.0	$a_{3.3}$ 1.5	$a_{3.4}$ −1.0	v_3 3
$a_{4.1}$ 0.5	$a_{4.2}$ −2.0	$a_{4.3}$ −7.5	$a_{4.4}$ 2.0	v_4 2

$(iii) - m_{3,k} \times (ii) \rightarrow (iii)$

$(iv) - m_{4,k} \times (ii) \rightarrow (iv)$

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ −0.5	$a_{2.2}$ −4.0	$a_{2.3}$ 1.0	$a_{2.4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3.1}$ −1.0	$a_{3.2}$ −0.5	$a_{3.3}$ 2.0	$a_{3.4}$ −1.0	v_3 3
$a_{4.1}$ 0.5	$a_{4.2}$ 0.5	$a_{4.3}$ −8.0	$a_{4.4}$ 2.0	v_4 2

$n = 4$, **Etapa** $k = 3$: Pivoteamento

Obter mx tal que
$|a_{mx,k}| \geq |a_{i,k}|$, $i = k, \ldots, n$

$mx = k$,
for $i = k + 1$ to n
  if $|a_{mx,k}| < |a_{i,k}|$ then $mx = i$

No caso atual temos $mx = 4$.

if $mx > k$ then
  $\tau \leftarrow -\tau$
  $it = v_k$, $v_k = v_{mx}$, $v_{mx} = it$
  for $j = 1$ to n
    $rt = a_{k,j}$,
    $a_{k,j} = a_{mx,j}$,
    $a_{mx,j} = rt$,

Como $mx > k$, linha mx foi

$a_{1,1}$ 2.0	$a_{1,2}$ 1.0	$a_{1,3}$ 0.0	$a_{1,4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2,1}$ −0.5	$a_{2,2}$ −4.0	$a_{2,3}$ 1.0	$a_{2,4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3,1}$ −1.0	$a_{3,2}$ −0.5	$a_{3,3}$ 2.0	$a_{3,4}$ −1.0	v_3 3
$a_{4,1}$ 0.5	$a_{4,2}$ 0.5	$a_{4,3}$ −8.0	$a_{4,4}$ 2.0	v_4 2

$a_{1,1}$ 2.0	$a_{1,2}$ 1.0	$a_{1,3}$ 0.0	$a_{1,4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2,1}$ −0.5	$a_{2,2}$ −4.0	$a_{2,3}$ 1.0	$a_{2,4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3,1}$ 0.5	$a_{3,2}$ 0.5	$a_{3,3}$ −8.0	$a_{3,4}$ 2.0	v_3 2
$a_{4,1}$ −1.0	$a_{4,2}$ −0.5	$a_{4,3}$ 2.0	$a_{4,4}$ −1.0	v_4 3

$n = 4$, **Etapa** $k = 3$: Escalonamento

Objetivo é fazer operações que torna $a_{3,2}$ e $a_{4,2}$ igual a 0.

for $i = k + 1$ to n,
  $mult = a_{i,k}/a_{k,k}$
  $a_{i,k} \leftarrow mult \quad (= m_{i,k})$
  for $j = k + 1$ to n,
    $a_{i,j} = a_{i,j} - mult \times a_{k,j}$

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ −0.5	$a_{2.2}$ −4.0	$a_{2.3}$ 1.0	$a_{2.4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3.1}$ 0.5	$a_{3.2}$ 0.5	$a_{3.3}$ −8.0	$a_{3.4}$ 2.0	v_3 2
$a_{4.1}$ −1.0	$a_{4.2}$ −0.5	$a_{4.3}$ 2.0	$a_{4.4}$ −1.0	v_4 3

$a_{1.1}$ 2.0	$a_{1.2}$ 1.0	$a_{1.3}$ 0.0	$a_{1.4}$ −3.0	v_1 1
$a_{2.1}$ −0.5	$a_{2.2}$ −4.0	$a_{2.3}$ 1.0	$a_{2.4}$ 0.0	v_2 4
$a_{3.1}$ 0.5	$a_{3.2}$ 0.5	$a_{3.3}$ −8.0	$a_{3.4}$ 2.0	v_3 2
$a_{4.1}$ −1.0	$a_{4.2}$ −0.5	$a_{4.3}$ −0.25	$a_{4.4}$ −0.5	v_4 3

$(iv) - m_{4,k} \times (iii) \rightarrow (iv)$

As matrizes L e U

Obtemos $\tau = 1$,

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ a_{2,1} & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1.0 & 0.0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -0.5 & -0.25 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0.0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0.0 & 0.0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & a_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -8.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 \end{bmatrix} \text{ e } \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$A = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 1.0 & -1.5 & -7.5 & 0.5 \\ -2.0 & 1.0 & 1.5 & 2.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}, \text{ mas } \; LU = PA = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & -3.0 \\ -1.0 & -4.5 & 1.0 & 1.5 \\ 1.0 & -1.5 & -7.5 & 0.5 \\ -2.0 & 1.0 & 1.5 & 2.0 \end{bmatrix}.$$

Linguagem Python: Método do Gauss Compacto

```
# Para entrar com a dimensão da matrix A
n = int(input("Digitar a dimensão n da matriz A: "))
# Para inicializar a matriz A e o vetor v
A = []; v = []
for i in range(0,n+1):
    v.append(i);   A.append([])
    for j in range(0,n+1):
        A[i].append(0.0)
# Para entrar com os valores de A[i,j]
for i in range (1,n+1):        # i varia de 1 para n
    for j in range (1, n+1):        # j varia de 1 para n
        print("Digitar o valor de A[", i,",",j,"]: ", end = ' ')
        A[i][j] = float(input())
ut = 1        # ut representa τ
for i in range(1,n+1):        # i varia de 1 para n
    v[i] = i
```

```
# Inicio do processo  A  ->  LU
for k in range(1,n):        # k varia de 1 para n-1
   # parte pivoteamento
   mx = k
   for i in range(k+1,n+1):        # i varia de k+1 para n
      if abs(A[i][k]) > abs(A[mx][k]) :  mx = i
   if mx > k :        # se mx > k trocar dos valores entre linha k e linha mx
      ut = - ut
      it = v[k];  v[k] = v[mx];  v[mx] = it
      for j in range(1,n+1):        # j varia de 1 para n
         rt = A[k][j];  A[k][j] = A[mx][j];  A[mx][j] = rt
   # parte eliminação
   for i in range(k+1,n+1):
      mult = A[i][k]/A[k][k]
      for j in range(k+1, n+1):
         A[i][j] = A[i][j] - mult * A[k][j]
      A[i][k] = mult
```

Para resolver o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

```
# Para inicializar os vetores b e x
b = []; x = []; y = []
for i in range(0,n+1):
    b.append(0.0)
    x.append(0.0)
    y.append(0.0)

# Para entrar com os valores de b[i]
for i in range(1,n+1):
    print("Digitar o valor de b[", i, "]: ", end = ' '),
    b[i] = float(input())
```

Para resolver o sistema $\mathbf{Ly} = \tilde{b}$

```
y[1] = b[v[1]]
for i in range(2, n+1):    # i varia de 2 para n
   sum = 0.0
   for j in range(1,i):    # j varia de 1 para i-1
      sum = sum + y[j]*A[i][j]
   y[i] = b[v[i]] - sum
```

Para resolver o sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

```
x[n] = y[n]/A[n][n]
for i in range(n-1, 0,-1):    # i varia de n-1 para 1
   sum = 0.0
   for j in range(i+1,n+1):    # j varia de i+1 para n
      sum = sum + x[j]*A[i][j]
   x[i] = (y[i] - sum)/A[i][i]

for i in range(1,n+1):
   print(x[i])
```