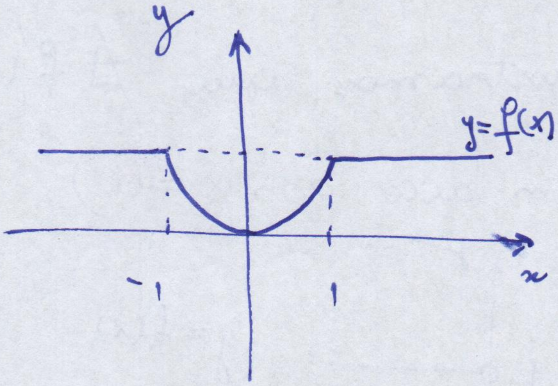
Teorema: Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Obs: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira, isto é, se f é contínua em a, isso não implica que f é diferenciável nesse pto. Veja como exemplo a fç módulo, $f(x) = |x|$ que é contínua em $x=0$, mas não é diferenciável nesse pto.

Exercício: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$. Faça o gráfico de f, verifique em quais ptos f é diferenciável, calcule $f'(x)$ e faça o gráfico de f'.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}.$$



• $x < -1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

$\therefore \boxed{f'(x) = 0 \text{ se } x < -1}$

• $x > 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \quad \therefore \boxed{f'(x) = 0, \text{ se } x > 1.}$$

• $-1 < x < 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x.$$

Portanto, $\boxed{f'(x) = 2x, \text{ se } -1<x<1}$.

Agora, calculemos $f'(-1)$ e $f'(1)$ se elas existirem.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0. \text{ e}$$

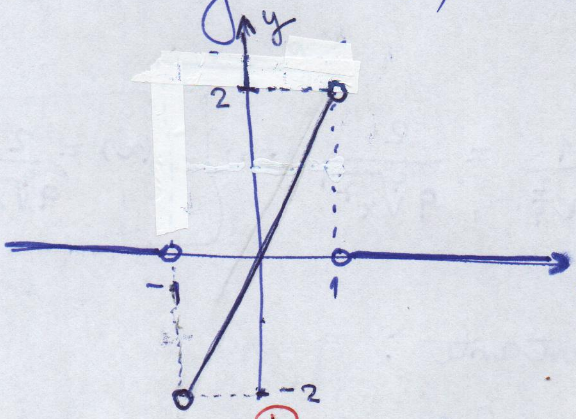
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{1}+2h+h^2\cancel{-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 2+h = 2.$$

Portanto, $\nexists\, f'(1)$ já que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0 \neq$

$$\neq 2 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Analogamente, mostra-se que $\nexists\, f'(-1)$. (exercício)



$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } -1<x<1 \\ 0 \text{ se } x<-1 \text{ ou } x>1 \end{cases}$$

Regras de Derivação

Vamos agora estabelecer algumas regras de derivação para certas funções:

1) Função constante: Se $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$ $\forall x$.

② Regra da potência: Se $n \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}.$$

Exemplo: Calcule a derivada das funções

ⓐ $f(x) = \frac{1}{x^3}$, ⓑ $g(x) = x\sqrt{x}$; ⓒ $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[9]{x^4}}$.

ⓐ $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{3}{x^4}.}$$

ⓑ $g(x) = x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Daí,

$$g'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.}$$

ⓒ $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[9]{x^4}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{9}}} = x^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{9}} = x^{\frac{6-4}{9}} = x^{\frac{2}{9}}$. Daí,

$$h'(x) = \frac{2}{9} x^{\frac{2}{9}-1} = \frac{2}{9} x^{-\frac{7}{9}} = \frac{2}{9}\frac{1}{x^{\frac{7}{9}}} = \frac{2}{9\sqrt[9]{x^7}} \Rightarrow \boxed{h'(x) = \frac{2}{9\sqrt[9]{x^7}}}$$

③ Regra da Multiplicação por Constante:

Se c for uma cte e f uma fç diferenciável, então $g(x) = c f(x)$ é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\boxed{g'(x) = c f'(x)}$$

④ Regra da Soma: Se f e g forem diferenciáveis e $h(x) = f(x) + g(x)$, então h é diferenciável e

$$\boxed{h'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

⑤ Regra da Diferença: Se f e g são diferenciáveis, então $h(x) = f(x) - g(x)$ é diferenciável e

$$\boxed{h'(x) = f'(x) - g'(x)}$$

Exemplos: ① Calcule as derivadas das funções

ⓐ $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x} + 6x^5$; ⓑ $g(x) = \dfrac{2x^3 - x^4}{\sqrt{x}}$; ⓒ $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

ⓐ $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(3x^2 - \sqrt{x} + 6x^5\right) = \dfrac{d}{dx}\left(3x^2\right) - \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) +$

$+ \dfrac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 3\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) - \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + 6\dfrac{d}{dx}\left(x^5\right) = 3.2x^{2-1} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} +$

$+ 6.5x^{5-1} = 6x - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 30x^4 = 6x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 30x^4$.

ⓑ $g(x) = \dfrac{2x^3 - x^4}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x^3 - x^4}{x^{\frac{1}{2}}} = \left(2x^3 - x^4\right)x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{3-\frac{1}{2}} - x^{4-\frac{1}{2}} =$

$= 2x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}}$.

Logo, $g'(x) = 2.\dfrac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \dfrac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = 5x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = 5\sqrt{x^3} -$

$- \dfrac{7}{2}\sqrt{x^5}$.

ⓒ $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \left(x^2 - 1\right)x^{-1} = x^{2-1} - x^{-1} = x - x^{-1}$.

Logo, $h'(x) = 1x^{1-1} - (-1)x^{-1-1} = 1 + x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$.

(2) Ache os pt$\underline{os}$ sobre a curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$, onde a reta tangente é horizontal.

Uma reta horizontal possui coeficiente angular igual a zero e como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f num pt$\underline{o}$ $(a, f(a))$ é igual à derivada da fç f em a, segue que devemos encontrar os pt$\underline{os}$ a onde $f'(a) = 0$.

Logo, se $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$, então

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 36 = 6(x^2 - x - 6).$$

Então $f'(x) = 0 \iff 6(x^2 - x - 6) = 0 \iff x^2 - x - 6 = 0$

$$\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

Portanto, as retas tg. ao gráfico de f são horizontais nos pt$\underline{os}$ $(-2, f(-2))$ e $(3, f(3))$.

Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja $f(x) = a^x$. Vamos calcular $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}}_{\text{limite fundamental}} = a^x \ln(a) .$$

Portanto, se $f(x) = a^x$ então $\boxed{f'(x) = \ln(a) \,.\, a^x}$

Em particular, tomando $a = e$, temos:

Se $f(x) = e^x$, então $\boxed{f'(x) = e^x \underbrace{\ln(e)}_{1} = e^x .}$

$\ln e = y \iff e^y = e \iff \boxed{y = 1}$

Exemplo: Seja $f(x) = 2x^3 - \sqrt[5]{x^2} + e^{x+1}$. Calcule $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - \sqrt[5]{x^2} + \underbrace{e^{x+1}}_{e^x . e}\right) = 2\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{5}}\right) + e\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= 6x^2 - \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} + e \cdot e^x = 6x^2 - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} + e^{x+1} .$$

Portanto, $\boxed{f'(x) = 6x^2 - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} + e^{x+1}}$

Agora, se $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De fato;

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \underset{h\to 0 \Rightarrow u\to 0}{\overset{u = \frac{h}{x}}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{1}{ux} \ln(1+u)$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \ln(e) = \frac{1}{x} .$$

Exemplo: ① (a) Calcule a derivada de $f(x) = 3\ln(x) + e^x$.

(b) Qual a eq. da reta tg a $y = \ln x$ no pto $(1, 0)$?

(a) $f'(x) = \frac{d}{dx}(3\ln x + e^x) = 3\frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{d}{dx}(e^x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + e^x =$

$= \frac{3}{x} + e^x = \frac{3 + xe^x}{x}$.

(b) Calculemos agora o coef. ang. da reta procurada.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$. Logo, $m = y'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Daí, a eq. da reta é:

$y - 0 = 1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = x - 1}$

② Em que pto da curva $y = e^x$ a reta tangente é paralela à reta $y = 3x - 1$.

Lembremos que duas retas são paralelas se os seus coef. angulares são iguais.

coef. angular

$y + 1 = 3(x - 0)$

$\Updownarrow$

Seja r a reta $y = 3x - 1$. Note que $m_r = 3$.

Portanto, para que a reta tg a $y = e^x$ seja // a r, devemos ter seu coef. ang. igual a 3, ou seja se $f(x) = e^x$, então $m = f'(x) = 3$.

Agora, $f'(x) = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \ln 3}$.

Portanto, no pto $(\ln(3), e^{\ln(3)}) = (\ln(3), 3)$ a reta tg é // a r.

Regra do Produto.

Vimos agora uma regra para calcular a derivada do produto de duas funções:

Sejam f e g funções diferenciáveis, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x).g'(x).}$$

Exemplos: 1) Calcule a derivada das funções abaixo usando a regra do produto.

a) $f(x) = x^2 e^x$; b) $g(x)=\sqrt{x}\,(2 - e^{2x})$

a) $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 e^x) = \frac{d}{dx}(x^2)e^x + x^2\frac{d}{dx}(e^x) = 2x e^x + x^2 e^x$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = (2x + x^2)\,e^x.}$$

Outra notação:

$f'(x) = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' =$
$= 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)\,e^x.$

b) $g'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,(2-e^{2x}) + \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}(2-e^{2x}) =$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)(2-e^{2x}) + \sqrt{x}\left[\overset{0}{\overbrace{\frac{d}{dx}(2)}} - \frac{d}{dx}(e^x.e^x)\right] =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2-e^{2x}) + \sqrt{x}\left(-\left[\frac{d}{dx}(e^x)\,e^x + e^x\frac{d}{dx}(e^x)\right]\right) =$

$= \frac{2-e^{2x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,(e^x.e^x + e^x.e^x) = \frac{2-e^{2x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}.2.e^{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{2-e^{2x}}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\,e^{2x}}$$

② Se $f(x) = e^x g(x)$, $g(1) = 1$ e $g'(1) = -2$, então calcule $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x g(x)\right) = \frac{d}{dx}(e^x)g(x) + e^x \frac{d}{dx}(g(x)) =$$

$$= e^x g(x) + e^x g'(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) = e^x\left(g(x) + g'(x)\right).}$$

Então, $f'(1) = e\left(g(1) + g'(1)\right) = e(1-2) = -e$.

Portanto, $\boxed{f'(1) = e.}$

Regra do Quociente

Apresentaremos agora uma regra para a derivada do quociente de duas funções diferenciáveis:

Se f e g são duas funções diferenciáveis, então

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}_{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Exemplo: ⓐ Calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{xe^x - 1}{x+1}$. ⓑ Em quais pontos a reta tg a $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ é horizontal?

ⓐ Usando a regra do quociente para f, temos:

$$f'(x) = \frac{(xe^x - 1)'(x+1) - (xe^x - 1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - (xe^x - 1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{xe^x + e^x + x^2e^x + \cancel{xe^x} - \cancel{xe^x} + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+x+1)\ e^x + 1}{(x+1)^2}.$$

ⓑ $g'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln(x))' \cdot x - \ln(x) \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} =$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

A reta tg é horizontal em um pto $(a, g(a))$ se $g'(a) = 0$. Daí, $g'(x) = 0 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff$
$\iff \ln(x) = 1 \iff \boxed{x = e.}$

Portanto, a reta tg a $g(x)$ é horizontal, somente no pto $(e, g(e)) = \left(e, \frac{\ln(e)}{e}\right) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$.

Derivadas das Funções Trigonométricas

Para as funções trigonométricas, são válidas:

ⓐ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

ⓑ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

ⓒ $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

ⓓ $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

ⓔ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$

ⓕ $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

Exercício: Encontre os ptos sobre a curva $y = \frac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$ nos quais a reta tg é paralela ao eixo x.

Note que queremos encontrar os ptos sobre o gráfico de $f(x) = \frac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}$ em que a reta tg é horizontal,

isto é $f'(x) = 0$.

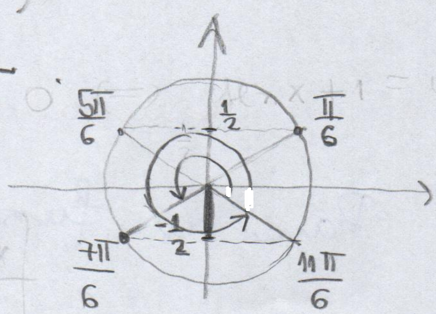
$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dx}(2)}} + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\cos x)(2+\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(2+\operatorname{sen} x)}{(2+\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x(2+\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot (\cos x)}{(2+\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(2+\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen} x - 1}{(2+\operatorname{sen} x)^2} = 0 \iff 2\operatorname{sen} x = -1 \iff \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$= x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$



Portanto as retas tg. à curva $y = \frac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}$ nos ptos $\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, f\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$ e $\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, f\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ são paralelas ao eixo x.

Regra da Cadeia

Suponhamos que $f(x) = \cos(x^2+1)$ e que desejamos calcular sua derivada. Nenhuma regra apresentada até agora pode ser utilizada, pois f é a composta de duas funções; a saber: $g(x) = \cos x$ e $h(x) = x^2+1$ e

$f(x) = (g \circ h)(x)$.

Para calcular tal derivada, devemos apresentar uma nova regra de derivação para a composição. Esta regra é chamada de regra da cadeia.

Regra da cadeia: Se f e g forem funções diferenciáveis e $F = f \circ g$, então F é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\boxed{F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, tq $y = f(g(x))$ e f e g são diferenciáveis, então

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Exemplo: Calcule as derivadas das funções

(a) $F(x) = \cos(x^2+1)$.

Note que $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2+1$.

Pela regra da cadeia temos:

$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, mas $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $g'(x) = 2x$.

Daí, $F'(x) = -\operatorname{sen}(x^2+1) \cdot 2x = -2x \operatorname{sen}(x^2+1)$.

Usando a notação de Leibniz.

$y = F(x) = \cos(x^2+1)$.

Chame $u = x^2+1$ e $y = \cos u$. Então,

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} u \cdot 2x = -\operatorname{sen}(x^2+1) \cdot 2x =$$

$$= -2x \operatorname{sen}(x^2+1).$$

(b) $F(x) = \sqrt{x^3-2x+1}$

$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$. Daí,

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 3x^2 - 2$ e, portanto,

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+1}}.$$

Leibniz:

$y = F(x) = \sqrt{x^3-2x+1}$

Chame $u = x^3-2x+1$ e $y = F(u)$. Daí,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(F(u)) \cdot \frac{d}{dx}(x^3-2x+1) =$$

$$= \frac{d}{du}\left(\underset{\overset{\shortparallel}{u^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{u}}\right) \cdot (3x^2-2) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (3x^2-2) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+1}}.$$

(c) $y = e^{-5x} \cos(3x)$.

$y = F(x) \cdot G(x)$, onde $F(x) = e^{-5x}$ e $G(x) = \cos(3x)$.

Agora, $\begin{cases} F(x) = (f_1 \circ g_1)(x), \text{ onde } f_1(x) = e^x \text{ e } g_1(x) = -5x \\ \text{e} \\ G(x) = (f_2 \circ g_2)(x), \text{ onde } f_2(x) = \cos x \text{ e } g_2(x) = 3x \end{cases}$

Logo, $y' = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) =$

$$= (\underbrace{e^{-5x}}_{(f_1 \circ g_1)(x)})' \cos(3x) + (e^{-5x})(\underbrace{\cos(3x)}_{(f_2 \circ g_2)(x)})' = \overbrace{e^{-5x} \cdot (-5)}^{f_1'(g_1(x)) \cdot g_1'(x)} \cos(3x) +$$

$$+ e^{-5x} \underbrace{(-\text{sen}(3x)) \cdot 3}_{f_2'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)} = -5e^{-5x}\cos(3x) - 3e^{-5x}\text{sen}(3x).$$

d) $y = (1 + 2x - x^2)^{10}$.

$y = (f \circ g)(x)$, onde $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = 1 + 2x - x^2$.

Chame $u = 1 + 2x - x^2$. Assim,

$y = u^{10}$, onde $u = 1 + 2x - x^2$. Daí,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot (2 - 2x) = 10(1 + 2x - x^2)^9 (2 - 2x)$$

e) $y = \cos(\text{sen}(\sqrt{x}))$

$u = \text{sen}(\sqrt{x})$ e $y = \cos(u) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$ (I)

A função u tb é uma composta.

Chame $v = \sqrt{x}$ e $u = \text{sen}(v) \Rightarrow \boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$ (II)

Subst. (II) em (I) temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = -\text{sen}(u) \cdot \cos(v) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\text{sen}(\text{sen}\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$