Cálculo Numérico
Lista de Exercícios SistEqLin-2

1. Encontre a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

   a) pelo método de Jacobi;

   b) pelo método de Gauss-Seidel.

   Tome $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ e faça as iterações até que o erro relativo seja menor que 0.02. Compare o número de iterações necessário para cada método atingir a precisão desejada.

2. Resolva o exercício anterior, pelo método de Gauss-Seidel, tomando-se $x^{(0)} = (2, 2, -1)$.

3. Seja $\alpha_k = (\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|)/|a_{kk}|$. Se $\alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k < 1$, mostre que o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente.
   (Dica: mostre, usando indução, que $\beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \ldots, n$.)

4. Verifique se os sistemas abaixo satisfazem o critério das Linhas e o critério de Sassenfeld:

$$\textbf{a)} \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 & = & 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 & = & 6 \end{array} \right. \quad \textbf{b)} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0.8 \\ -3x_2 + 0.5x_3 + x_4 & = & -6.6 \\ 5x_3 - x_4 & = & 4.5 \\ 2x_4 & = & 3. \end{array} \right.$$

   Faça 5 iterações do método de Jacobi, para o sistema do item (b), e verifique que a sequência obtida converge.

5. **a)** Coloque o sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 & = & 2 \\ 2x_1 + x_3 & = & 3 \\ 2x_3 + x_4 & = & 3 \end{array} \right.$ de forma que sempre convirja o método de Gauss-Seidel;

   b) Faça duas iterações do método, tomando $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.

6. **a)** Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma sequência convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} k\,x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \\ k\,x_1 + 6x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 & = 3 \end{cases}$$

   b) Escolha o menor valor inteiro, positivo, de k e faça 2 iterações do método de Gauss-Seidel para o sistema obtido.

7. Dado o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

   (a) para que valores de α haverá convergência se desejarmos utilizar o método de Jacobi?

   (b) Tomando $\alpha = 1$ e $x^{(0)} = (1, 2, 3)^t$, a aplicação do método de Jacobi fornece a tabela:

k	0	1	2	3
x_1	1	3	-1	-1
x_2	2	-2	2	2
x_3	3	-3	1	1

   O que voce observa? Existe alguma contradição com o item (a)?

8. Compare as soluções dos sistemas lineares abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 1.0001x_1 + 2x_2 & = & 3.0001 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 0.9999x_1 + 2x_2 & = & 3.0001 \end{cases}$$

   O que acontece e por quê?

9. Analise o sistema linear $Ax = b$, de ordem 3, quanto ao mal condicionamento, onde A é a matriz de Hilbert cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

10. Seja $\bar{x}$ uma aproximação para a solução do sistema $Ax = b$, A uma matriz não singular e $r = A(x - \bar{x})$ o vetor resíduo para $\bar{x}$. Mostre que, para qualquer norma de vetor e matriz consistentes,

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|r\| \, \|A^{-1}\| \;\; e \;\; \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}, \text{ para } x \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$