Função Racional

Uma função racional f é uma função dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são duas funções polinomiais. O domínio de f é o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, q(x) \neq 0\}$. (para não ocorrer divisão por zero!)

Exemplo: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 4\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\}.$$

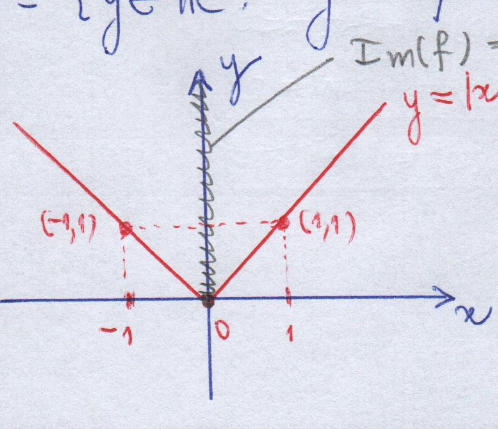
Função Modular

A função modular é dada por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \mathbb{R}^+$$

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = \lvert -1 \rvert = 1$
0	$f(0) = \lvert 0 \rvert = 0$
1	$f(1) = \lvert 1 \rvert = 1$



Exemplo: Esboce o gráfico de $f(x) = |x-1|+2$ e determine seu domínio e imagem.

Note que:

(i) $D(f) = \mathbb{R}$, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$ é possível calcular $f(x)$, ou seja, não há impedimento na lei da f.

(ii) $|x-1| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, daí $\underbrace{|x-1|+2}_{f(x)} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ e, então, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$ $= [2, +\infty)$.

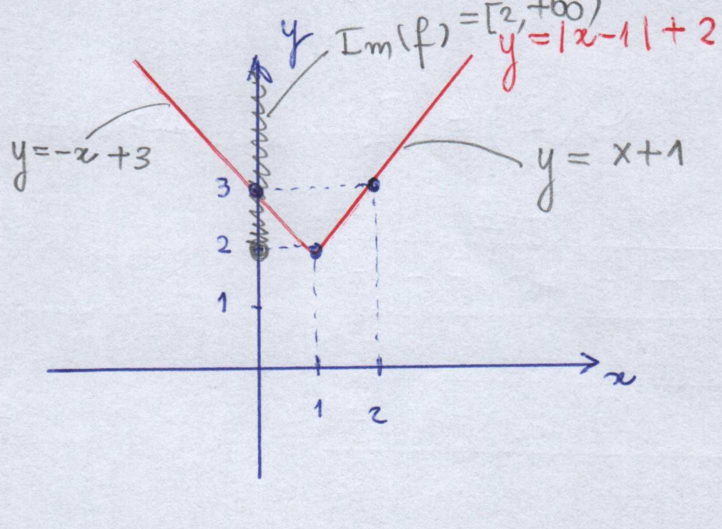
Gráfico: Note que

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Assim, ao somarmos 2 na expressão do módulo, teremos:

$$|x-1|+2 = \begin{cases} x-1+2, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1+2, & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+3, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

x	$f(x)$
0	$f(0) = -0+3 = 3$
1	$f(1) = 1+1 = 2$
2	$f(2) = 2+1 = 3$



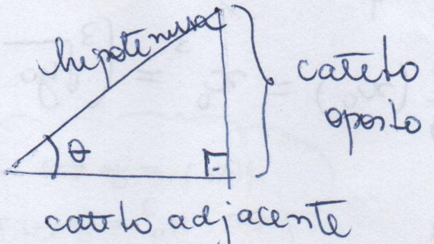
Funções Trigonométricas.

As fçs trigonométricas são as fçs $sen(\theta)$, $cos(\theta)$,

$tg(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$, $cotg(\theta) = \dfrac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$; $sec(\theta) = \dfrac{1}{cos(\theta)}$ e

$cosec(\theta) = \dfrac{1}{sen(\theta)}$.

Essas fçs são definidas, para um ângulo θ agudo, como razões entre os comprimentos dos lados de um triâng. retâng.



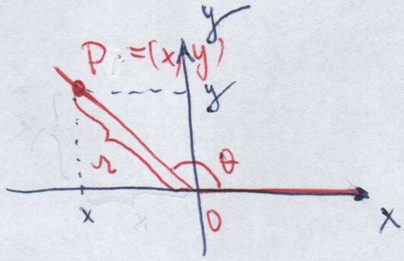
$sen\theta = \dfrac{cat.\ oposto}{hipotenusa}$

$cos\theta = \dfrac{cat.\ adj.}{hipotenusa}$

$tg\,\theta \overset{= \frac{sen\theta}{cos\theta}}{=} \dfrac{cat.\ oposto}{cat.\ adj.}$, $cosec\,\theta = \dfrac{hip.}{cat.\ oposto}$; $sec\,\theta = \dfrac{hip.}{cat.\ adj}$

$cotg\,\theta = \dfrac{cat.\ adj.}{cat.\ oposto}$.

Esta def. não se aplica se θ é obtuso ou negativo. Para o caso geral toma-se $P=(x,y)$ um pto qq. sobre o lado final do θ e considera-se $r = |OP|$. Assim, define-se



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{x}{y}$.

Note que $\operatorname{tg}\theta$ e $\sec\theta$ não estão definidas qdo $x = 0$ e $\operatorname{cossec}\theta$ e $\operatorname{cotg}\theta$ não estão def. qdo $y = 0$.

Identidades Trigonométricas

(1) As fçs $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ variam no intervalo $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{x^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$ Pitágoras

(3) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ (dividir (2) por $\cos^2 x$)

(4) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$ (dividir (2) por $\operatorname{sen}^2 x$)

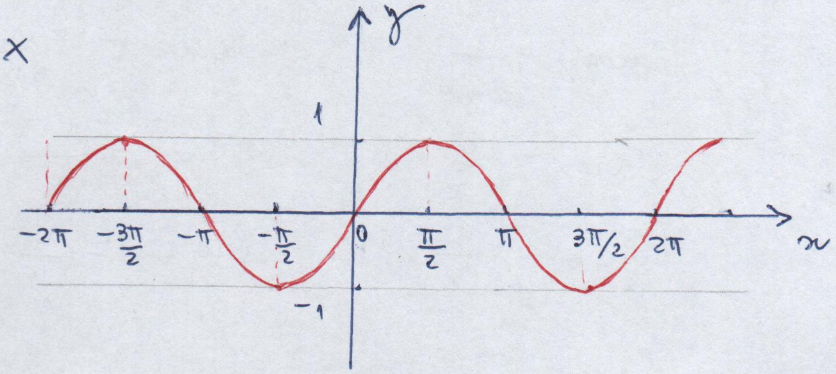
(5) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(-x) = \cos x$, isto é, seno é ímpar e cosseno é par.

(6) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.

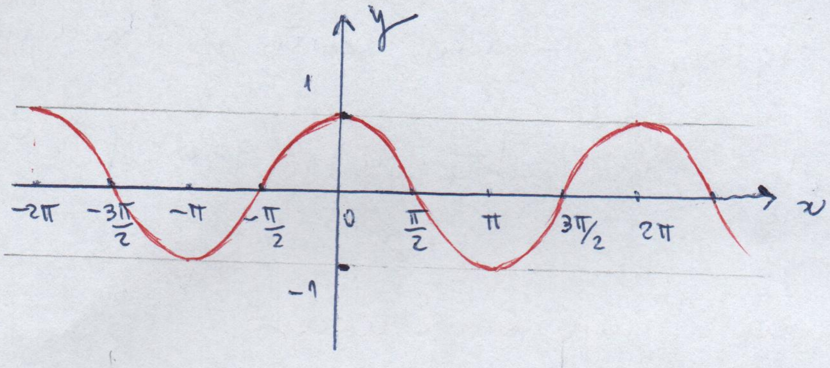
(7) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Gráficos das funções trigonométricas.

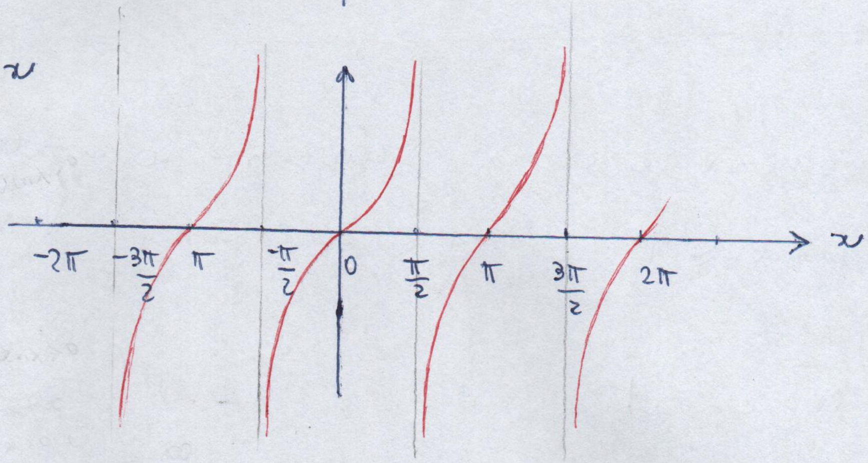
(a) $y = \operatorname{sen} x$



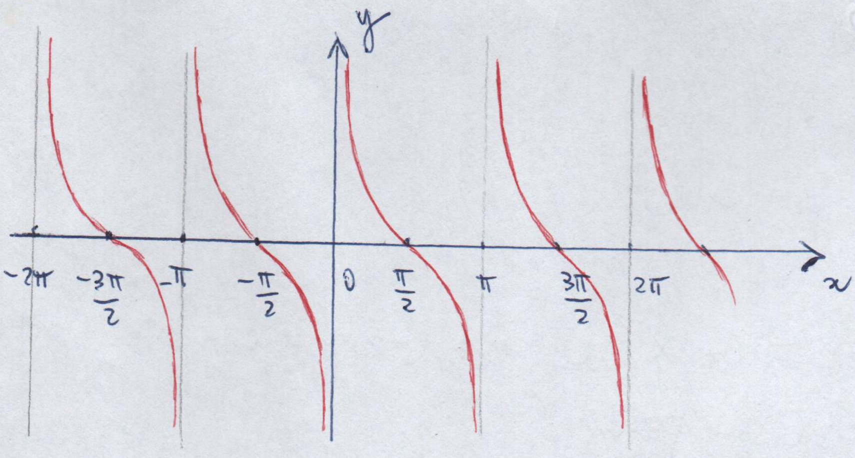
(b) $y = \cos x$



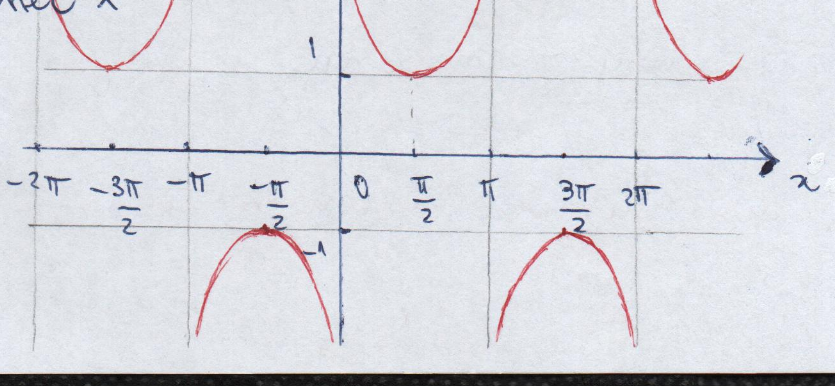
(c) $y = \operatorname{tg} x$



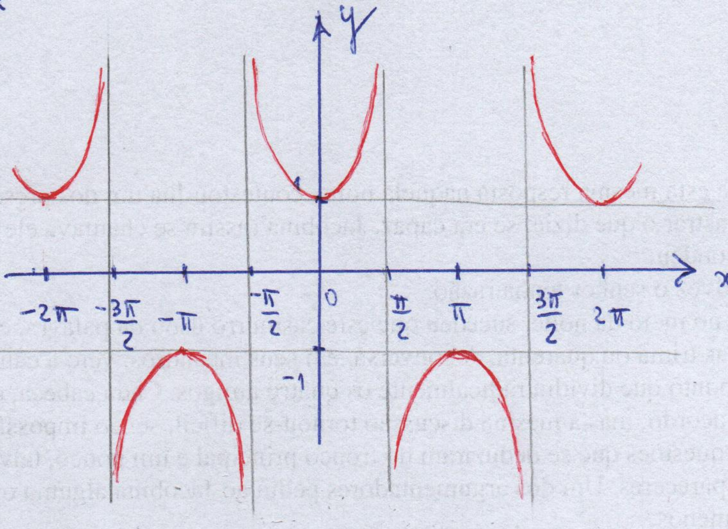
(d) $y = \operatorname{cotg} x$



(e) $y = \operatorname{cosec} x$



f) $y = \sec x$



Transformações de Funções

O que faremos agora é descrever o que ocorre com o gráfico de uma função quando efetuamos certas operações.

Translação: As translações correspondem a deslocamentos verticais ou horizontais, em c unidades, no gráfico de uma função f dada.

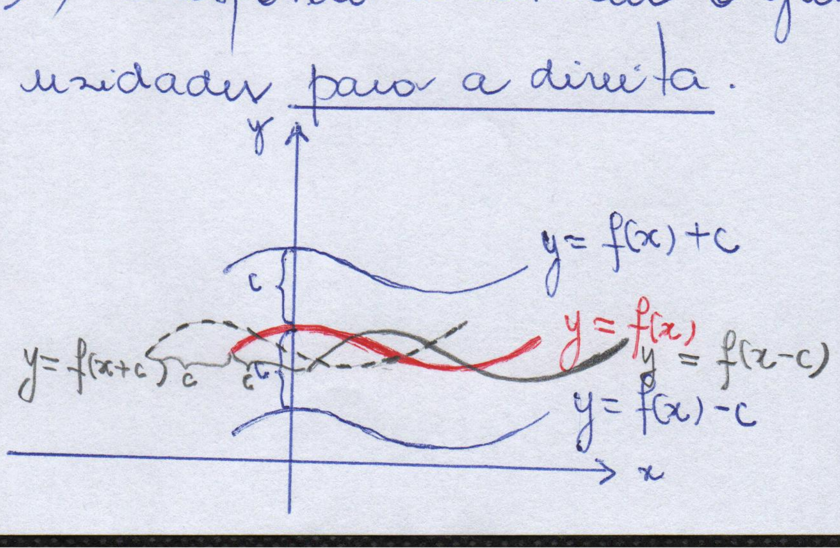
Considere $c > 0$ e f uma função dada. Temos 4 possíveis tipos de translações (para a direita, para a esquerda, para baixo e para cima):

(i) $y = f(x) + c$, corresponde a deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades <u>para cima</u>.

(ii) $y = f(x) - c$, corresponde a deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades <u>para baixo</u>.

(iii) $y = f(x+c)$, corresponde a deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades <u>para a esquerda</u>.

(iv) $y = f(x-c)$, corresponde a deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades <u>para a direita</u>.



Reflexões e esticamentos horizontais e verticais:

Suponha que $c > 1$. Para obter o gráfico de:

① $y = c\,f(x)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator c.

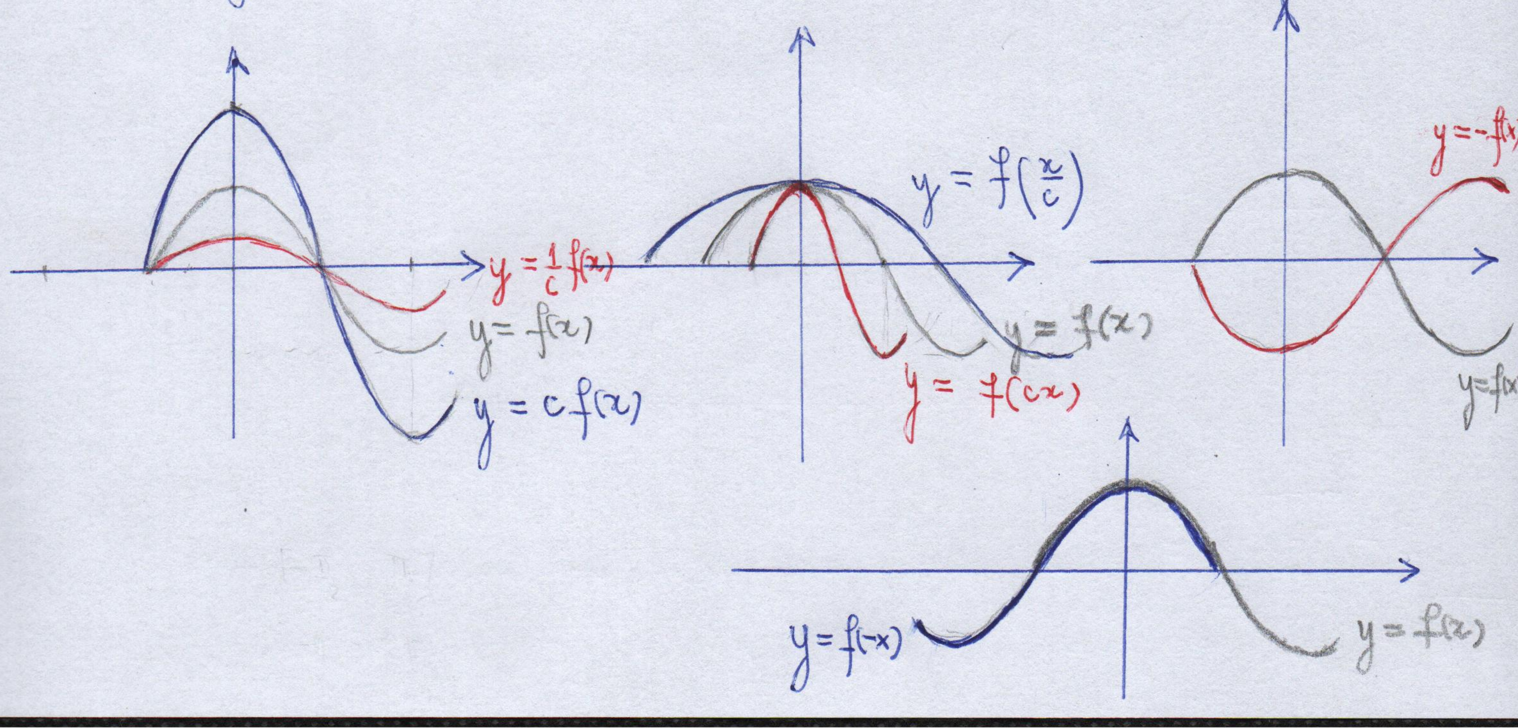
② $y = \left(\frac{1}{c}\right) f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator c.

③ $y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator c.

④ $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, estique o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator c.

⑤ $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.

⑥ $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.



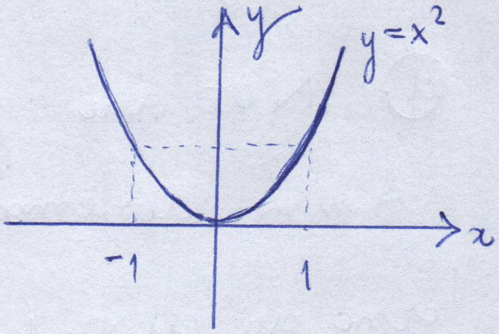
Exemplos: ① Considere o gráfico de $f(x) = x^2$.

Use as transformações anteriores para obter os gráficos de:

ⓐ $y = x^2 + 2$, ⓑ $y = x^2 + 4x + 4$, ⓒ $y = x^2 - 4x + 4$

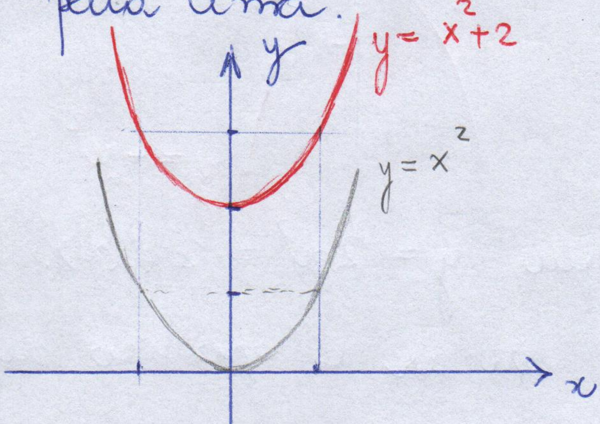
ⓓ $y = -x^2$, ⓔ $y = 2x^2$, ⓕ $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Solução: Gráfico de $f(x) = x^2$



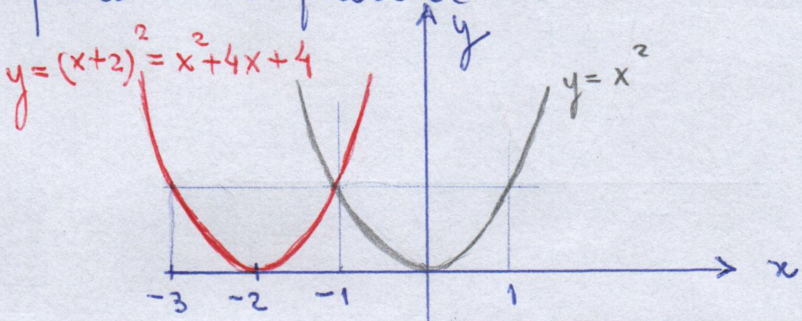
ⓐ Note que $y = \overbrace{f(x)}^{x^2} + 2$.

Logo, devemos transladar o gráfico de $y = f(x)$ duas unidades para cima.



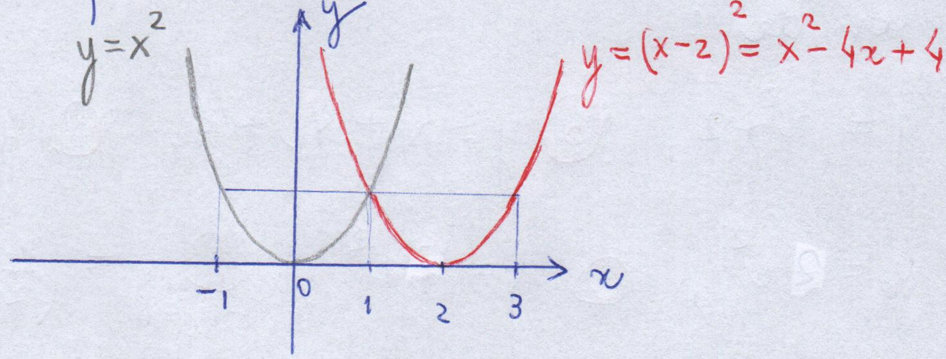
ⓑ Note que $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = f(x+2)$.

Logo, devemos transladar o gráfico de $y = f(x)$ em duas unidades para a esquerda.



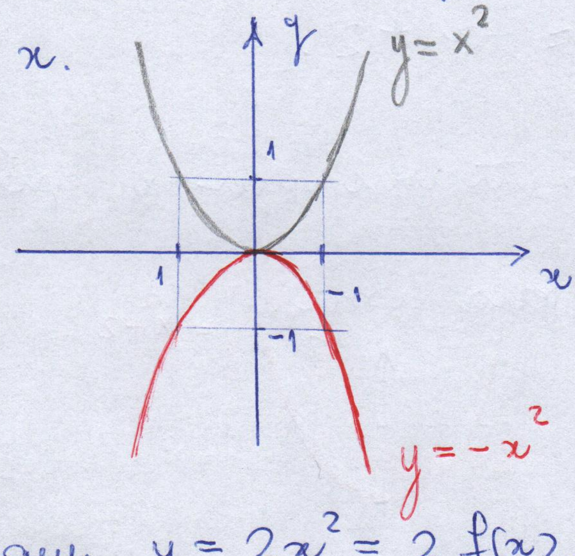
(c) Observe que $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = f(x-2)$

Logo, devemos transladar o gráfico de $y = f(x)$ em duas unidades para a direita.



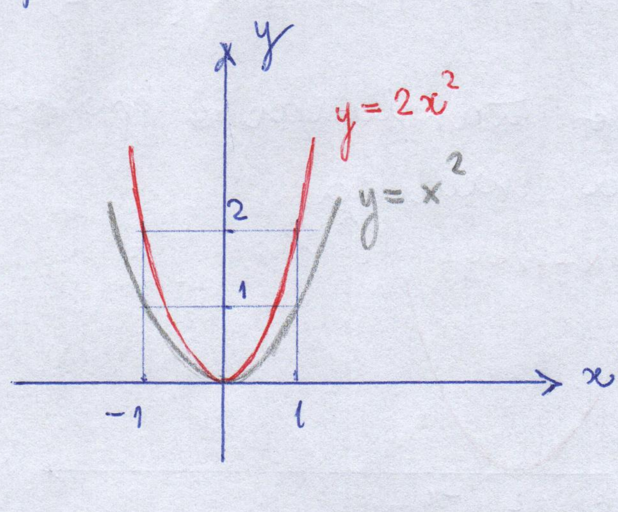
(d) Note que $y = -x^2 = -f(x)$.

Assim, devemos refletir o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.

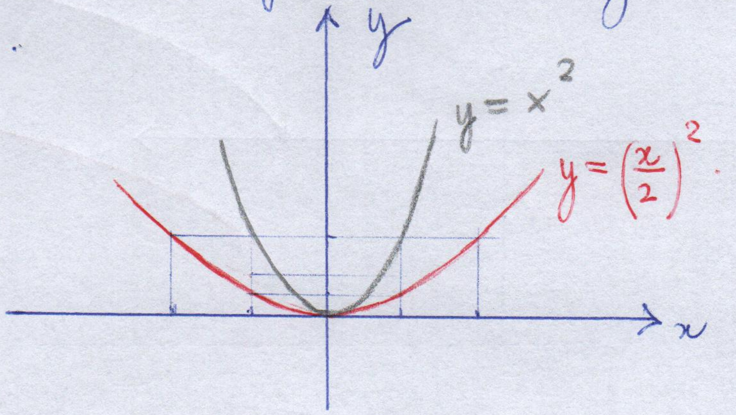


(e) Observe que $y = 2x^2 = 2f(x)$.

Daí, devemos esticar o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator 2.

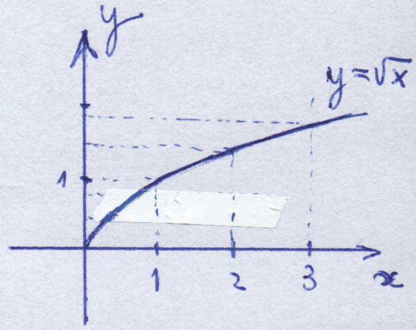


(f) Note que $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Logo, devemos esticar o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator 2.

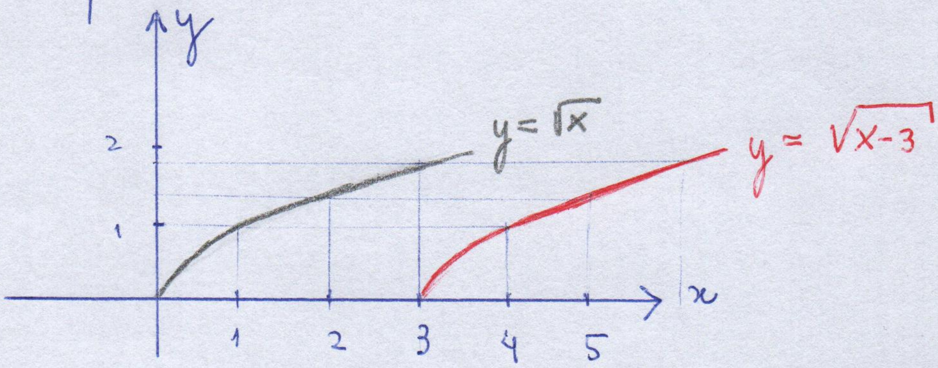


(2) Usando essas transformações, esboce o gráfico da fç $y = -\left[\sqrt{x-3} - 2\right]$ a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Solução: Gráfico de $y = \sqrt{x}$:

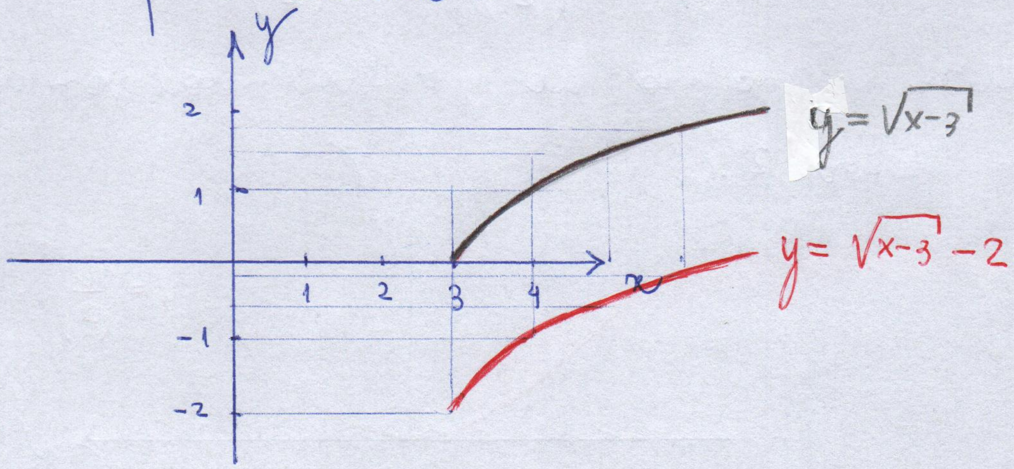


Primeiramente, esbocemos o gráfico de $y = \sqrt{x-3}$. Note que devemos transladar o gráfico de $y = \sqrt{x}$ três unidades para à direita.

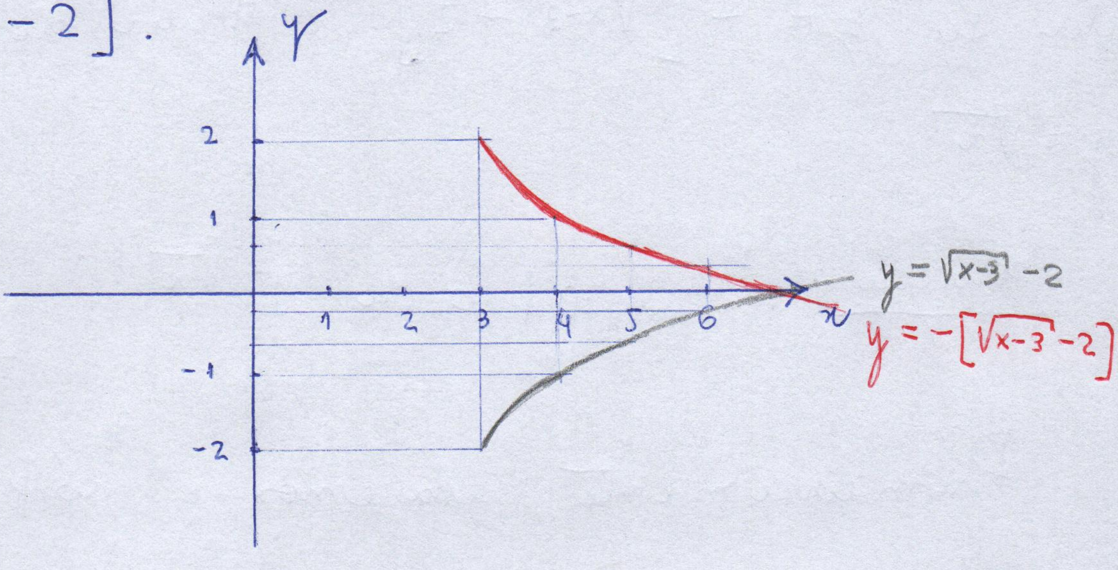


Agora, esboçaremos o gráfico de $y = \sqrt{x-3} - 2$. Observe que devemos transladar o gráfico de $y = \sqrt{x-3}$

duas unidades para baixo.



Por fim, devemos refletir o gráfico de $y=\sqrt{x-3}-2$ em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -\left[\sqrt{x-3}-2\right]$.

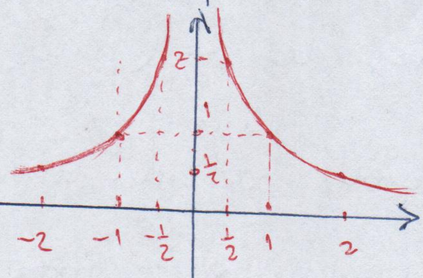


Limites de Funções.

O conceito de limites de função é extremamente importante dentro do cálculo. A idéia desse conceito é estudar o comportamento da fç f qdo os valores de x se aproximam de um determinado valor.

Por exemplo, considere a fç $f(x) = \dfrac{1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$

cujo gráfico é dado por:



O que acontece com $f(x)$ qdo x fica cada vez mais próximo de 2 e de 0?

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,5	0,666...	2,5	0,4
1,8	0,555...	2,3	0,4347
1,9	0,5263...	2,1	0,4761...
1,99	0,50251...	2,01	0,4975...
1,999	0,5002...	2,001	0,4997...

Note que qdo x esta cada vez mais próximo de 2 (à direita ou à esquerda), $f(x)$ está também próximo de $0{,}5 = f(2)$.

Agora,

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,5	2	−0,5	2
0,1	10	−0,1	10
0,01	100	−0,01	100
0,001	1.000	−0,001	1.000

Quando x se aproxima (ou tende) para zero, $f(x)$ fica cada vez maior, ou seja, $f(x)$ "explode" para o infinito.

Definição: Escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos "o limite de $f(x)$, qdo x tende a a é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L qto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a) mas não igual a a.

Note que o fato de que $x \neq a$, implica que a não precisa pertencer ao domínio de f, conforme o exemplo anterior onde $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ e $a = 0 \notin D_f$.