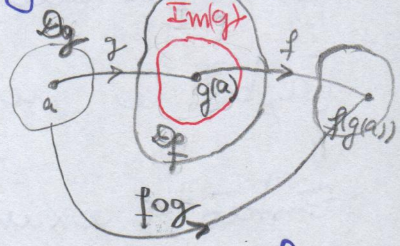
Teorema: Se g for contínua em a e f contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.



Consequentemente, temos:

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Denote $g(x) = x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Observe que f e g são funções contínuas em toda a reta real; em particular g é contínua em 0 e f é contínua em $g(0) = \frac{\pi}{2}$. Além disso, podemos escrever

$$\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Logo, a fç $\operatorname{sen}\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}\right)$ é a composta de duas funções contínuas. Assim, pelo teorema anterior $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}\right)$ tb é contínua em 0.

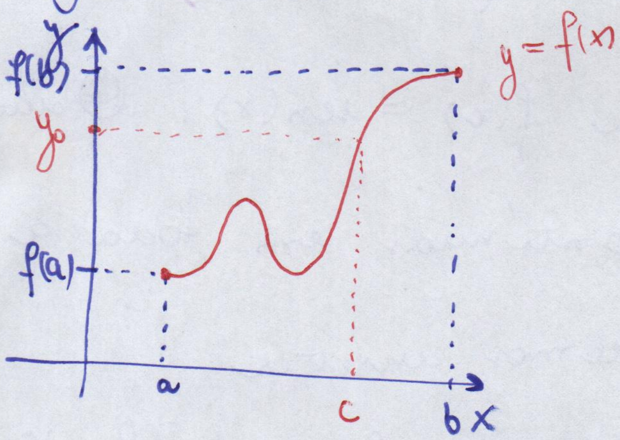
Daí, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{2}\right) = f(g(0)) = \operatorname{sen}\left(0^2 - 2.0 + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

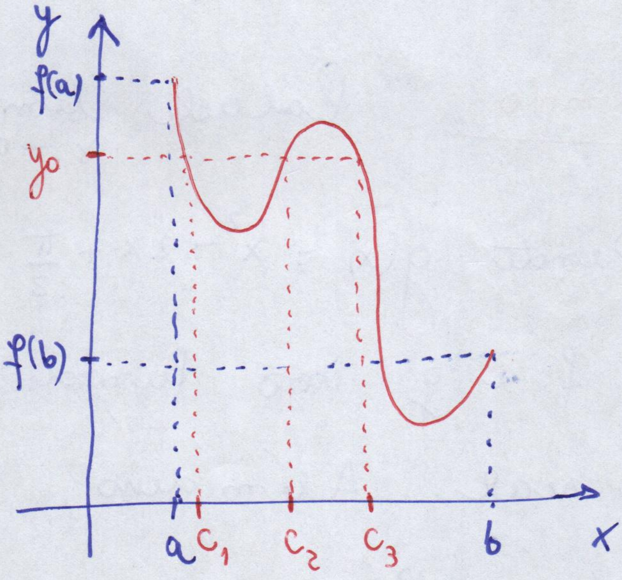
Veremos agora um dos principais teoremas sobre funções contínuas.

Teorema (do Valor Intermediário): Seja f uma fç contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$ e seja y_0 um nº qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$. Então, existe pelo menos um nº c em (a,b) tal que $f(c) = y_0$.

Geometricamente,



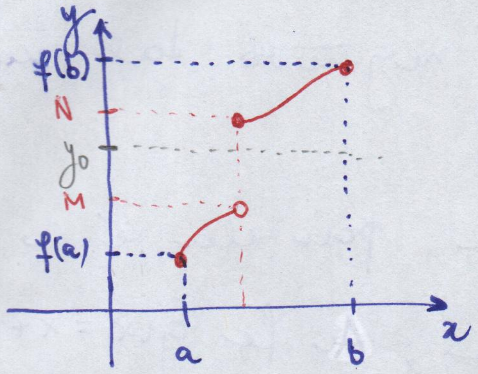
$f(c) = y_0$

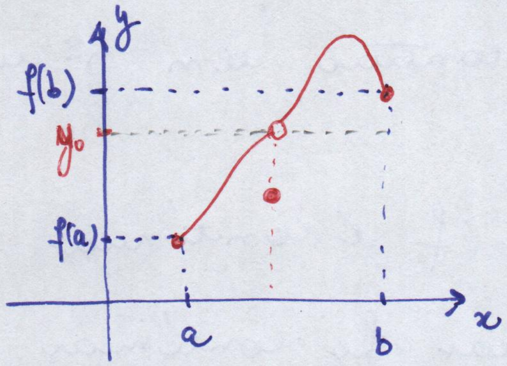


$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = y_0$

Geometricamente, esse teorema nos diz que qualquer reta horizontal $y = y_0$ passando pelo eixo y entre $f(a)$ e $f(b)$ cruza o gráfico da fç $y = f(x)$ em pelo menos um pto com x entre a e b.

Obs: A continuidade do T.V.I. é uma hipótese fundamental, ou seja, se f for descontínua em um pto do intervalo $[a,b]$, então o teorema não é válido, como mostra as figuras abaixo:



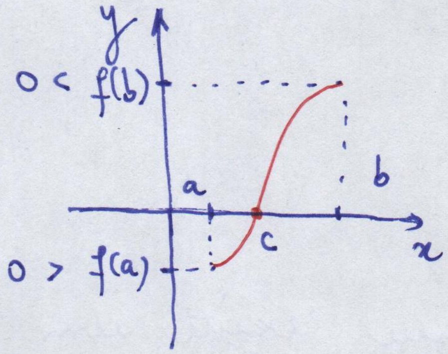


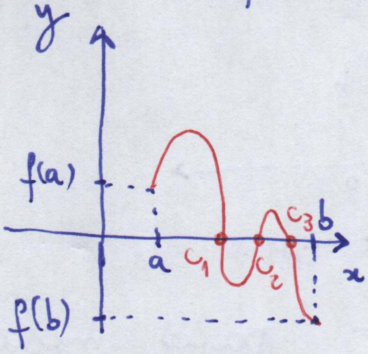
(a) P/ Qualquer reta horizontal $y = y_0$ interceptando o eixo y entre M e N, não existe um pto $c \in (a,b)$ tq. $f(c) = y_0$.

(b) A reta horizontal $y = y_0$ não intersecta o gráfico de f, ou seja, $\nexists\, c \in (a,b)$ tq. $f(c) = y_0$.

Uma consequência importante do TVI é o seguinte teorema:

Teorema do Anulamento: Se f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existirá pelo menos um $c \in (a,b)$ tq. $f(c) = 0$.





Exemplos: (1) Mostre que a fç $f(x) = x + 1 + \text{sen}(x)$ possui uma raiz negativa.

Para mostrar que f possui uma raiz negativa, devemos encontrar um nº real c negativo tal que $f(c)=0$.

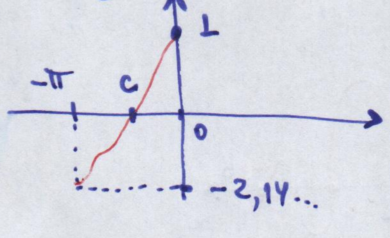
Note que f é contínua em $\mathbb{R}$, pois ela é a soma de duas fç contínuas em $\mathbb{R}$, a fç $g(x)=x+1$ e a fç $h(x)=\operatorname{sen} x$.

Portanto, considerando o intervalo $[-\pi, 0]$, podemos aplicar ~~o teorema~~ do anulamento para uma fç f com $a=-\pi$, $b=0$, já que

$$f(-\pi) = -\pi+1+\underbrace{\operatorname{sen}(-\pi)}_{0} = -\pi+1 \simeq -2{,}14\ldots < 0.$$

$$f(0) = 0+1+\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} = 1 > 0.$$

Portanto, pelo T. do Anulamento, $\exists\, c \in (-\pi, 0)$, ou seja $c<0$, tq. $f(c)=0$. Assim, garantimos a existência de uma raiz negativa, como queríamos.



(2) Use o T.V.I. para mostrar que existe um nº que somado a 1 dá exatamente o seu cubo.

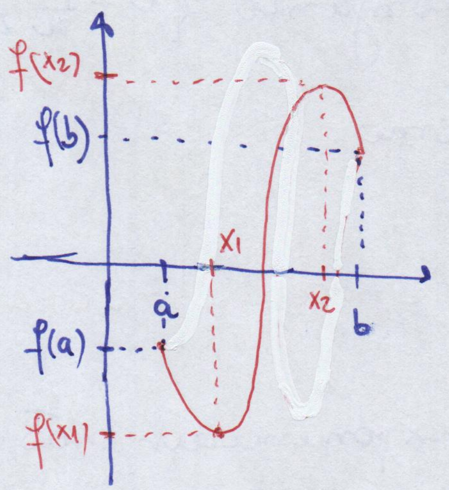
Devemos encontrar $c \in \mathbb{R}$ tq. $c+1=c^3$, ou equivalentemente $c^3-c-1=0$. Para isso, denote por $f(x) =$

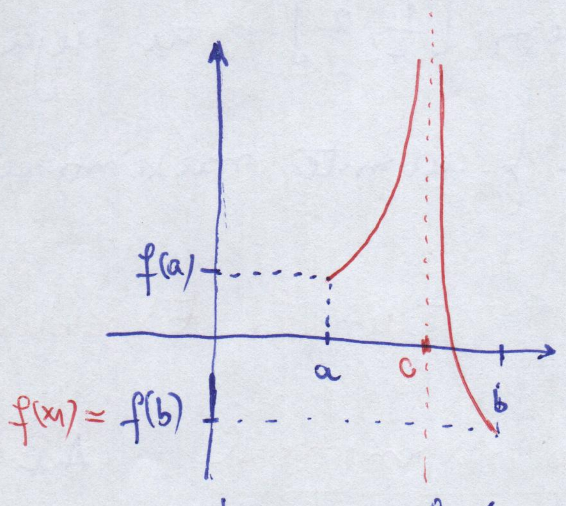
$x^3 - x - 1$ e note que o nº c procurado é exatamente uma raíz da função f.

Agora $f(1) = 1-1-1 = -1 < 0$ e $f(2) = 8-2-1 = 3 > 0$.

Logo, $0 \in (f(1), f(2)) = (-1, 3)$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular em $[1,2]$, pelo T.V.I, com $y_0 = 0$, temos que $\exists\, c \in (1,2)$ t.q. $f(c) = 0$, ou seja, $c + 1 = c^3$.

Teorema de Weierstrass: Se f for uma fç contínua em $[a,b]$, então existirão $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, para todo $x \in [a,b]$, ou seja, f admite um valor mínimo $f(x_1)$ e um valor máximo $f(x_2)$ em $[a,b]$.





Note que f é descontínua em c e o teorema falha, já que $\nexists\, x_2$ t.q. $f(x) \le f(x_2)$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Exemplo: O conjunto $\{x^2+\frac{1}{x}\,;\ \frac{1}{2}\leq x\leq 2\}$ admite máximo e mínimo?

Sim, admite. Para ver isto, basta definirmos a função $f:[\frac{1}{2},2]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$.

Note que o único pto em que f não está definida é em $x=0$, mas $0\notin[\frac{1}{2},2]$. Agora, para qualquer pto $a\in(\frac{1}{2},2)$, temos

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=a^2+\frac{1}{a}=f(a).$$

Além disso, $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}=f(\frac{1}{2})$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=f(2)$.

Portanto, f é contínua em $[\frac{1}{2},2]$. Daí, pelo teorema de Weierstrass, f admite valor máximo e mínimo em $[\frac{1}{2},2]$, ou seja, o conjunto $\{x^2+\frac{1}{x}\,;\ \frac{1}{2}\leq x\leq 2\}$ admite máximo e mínimo.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Função exponencial: As fçs exponenciais são funções da forma $f(x)=a^x$, em que $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ e $a\neq 1$. O nº a é chamado de base da fç exponencial $f(x)=a^x$.

Propriedades: Se $a>0$, $b>0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, então vale:

(i) $a^x . a^y = a^{x+y}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{x.y}$.

(iii) $(ab)^x = a^x . b^x$.

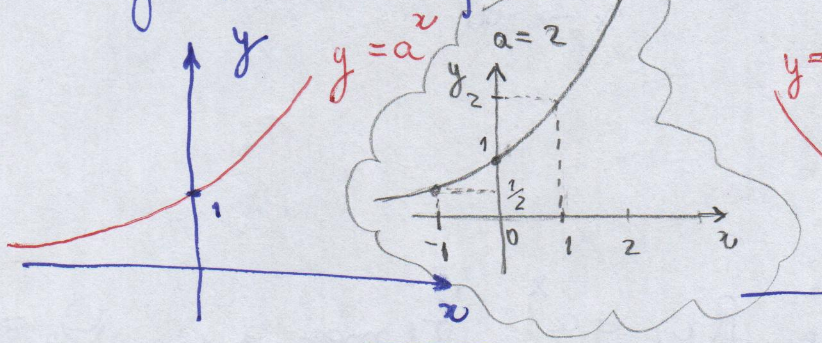
(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ e $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(v) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

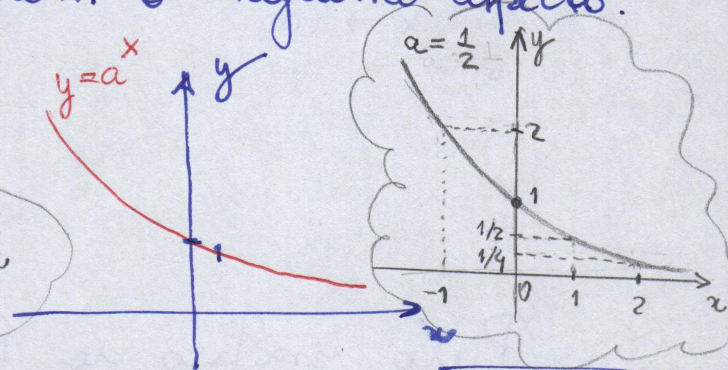
(vi) Se $a>1$ e $x<y$, então $a^x < a^y$.

(vii) Se $0<a<1$ e $x<y$, então $a^x > a^y$.

O gráfico de $f(x) = a^x$ tem o seguinte aspecto.



$f(x) = a^x$ para $\boxed{a>1}$

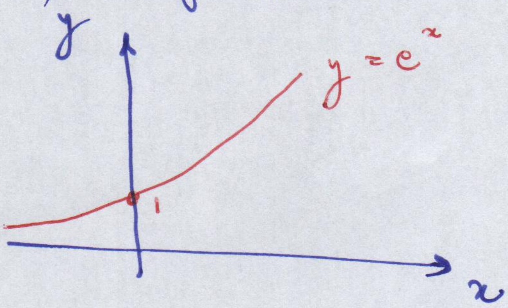


$f(x) = a^x$ para $\boxed{0<a<1.}$

Observações: (1) Dentre todas as bases possíveis para a fç exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. Essa base é dada pelo nº irracional e, que é aproximadamente

$$e \cong 2,71828\ldots$$

Como $e > 1$, o gráfico de $f(x) = e^x$ tem a forma



(2) Se $a > 1$, pelos gráficos de $f(x) = a^x$, observamos que:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

→ $y = 0$ é assíntota horizontal de $f(x) = a^x$.

(3) Se $0 < a < 1$, então pelo gráfico de $f(x) = a^x$, temos

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

→ $y = 0$ é assíntota horizontal de $f(x) = a^x$.

(4) Pelo gráfico de $f(x) = a^x$, vemos que $D_f = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, y > 0\}$.

Função Logarítmica

Teorema: Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$ dois nºs reais quaisquer. Então $\exists$ um único $y \in \mathbb{R}$ tq.

$$\boxed{a^y = x.}$$

Esse único nº real y tq. $a^y = x$ é chamado de logaritmo de x na base a e é indicado por $y = \log_a x$. Assim,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

>0

Pela definição acima, note que $\log_a x$ somente está definido para $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Portanto, se $f(x) = \log_a(x)$, então $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$.

Exemplo: Calcule: a) $\log_2 4$, b) $\log_2 \frac{1}{2}$, c) $\log_5 1$.

a) $\log_2 4 = y \iff 2^y = 4 \overset{(*)}{\iff} 2^y = 2^2 \iff y = 2.$

(*) A idéia é colocar ambos os lados na mesma base e usar a propriedade (v) de exponencial, isto é, $a^x = a^y \iff x = y$.

$\therefore \log_2 4 = 2.$

b) $\log_2 \frac{1}{2} = y \iff 2^y = \frac{1}{2} \iff 2^y = 2^{-1} \overset{(v)}{\iff} y = -1$

$\therefore \log_2 \frac{1}{2} = -1$

c) $\log_5 1 = y \iff 5^y = 1 \iff 5^y = 5^0 \iff y = 0.$

$\therefore \log_5 1 = 1.$

Observação: O logaritmo na base $e = 2{,}71\ldots$ é indicado por $\ln$, assim $\ln x = \log_e x$. Daí,

$$\boxed{y = \ln x \iff e^y = x.}$$

$$\ln x = \log_e x$$

Então, se $y = \ln x$ segue que $e^{\ln x} = e^y = x$, ou seja, $\boxed{e^{\ln x} = x}$. Mais geralmente, $e^{\ln(h(x))} = h(x)$.

Propriedades: Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$ reais quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

① $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

② $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

③ $\log_a (x^r) = r \log_a x$.

④ Mudança de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

⑤ Se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$

⑥ Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a x > \log_a y$.

Obs: Note que se $\ln(e^x) = y$, então $e^y = e^x$, ou seja $y = x$. Logo, $\ln(e^x) = x$. Mais geralmente,

$\ln\left(e^{h(x)}\right) = h(x).$

O gráfico da fç $f(x) = \log_a x$ tem o seguinte aspecto:

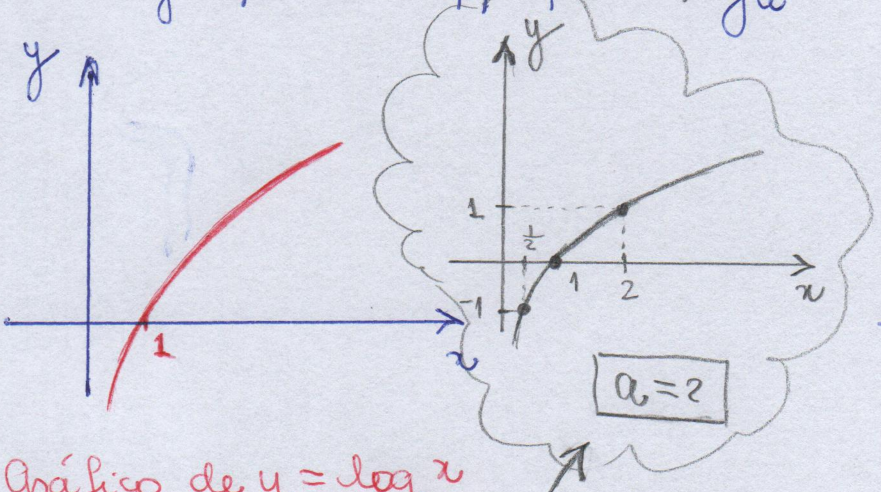


Gráfico de $y = \log_a x$ quando $a > 1$.

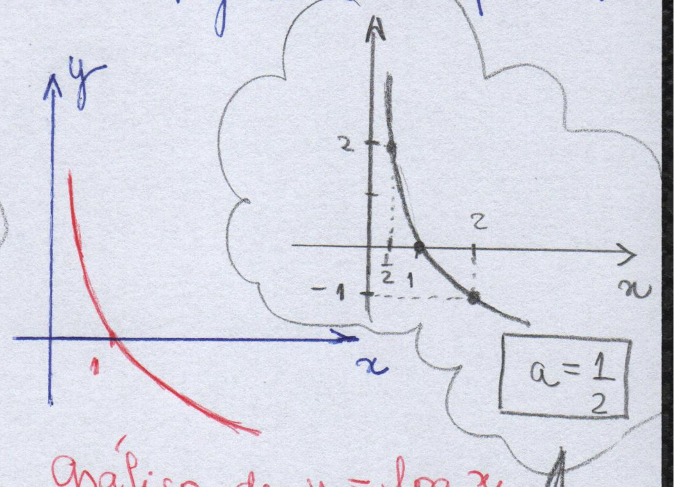


Gráfico de $y = \log_a x$ quando $0 < a < 1$.

x	$f(x) = \log_2 x = y$
1	$\log_2 1 = y \iff 2^y = 1 = 2^0 \iff y = 0$
2	$\log_2 2 = y \iff 2^y = 2 = 2^1 \iff y = 1$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = y \iff 2^y = \frac{1}{2} = 2^{-1} \iff y = -1$

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = y$
1	$\log_{\frac{1}{2}} 1 = y \iff \left(\frac{1}{2}\right)^y = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \iff y = 0$
2	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = y \iff \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \iff y = -1$
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = y \iff \left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \iff y = 1$

Note que, pela análise gráfica, concluímos que se $f(x) = \log_a x$, então

ⓐ $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > 0\}$, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\overbrace{\log_a 1 = 0}^{a^0 = 1 \;\Updownarrow}$.

ⓑ Se $a > 1$, então

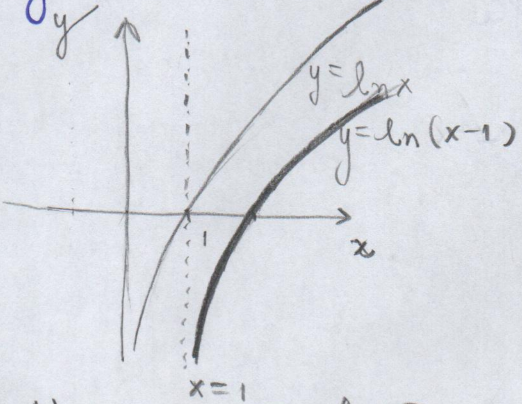
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

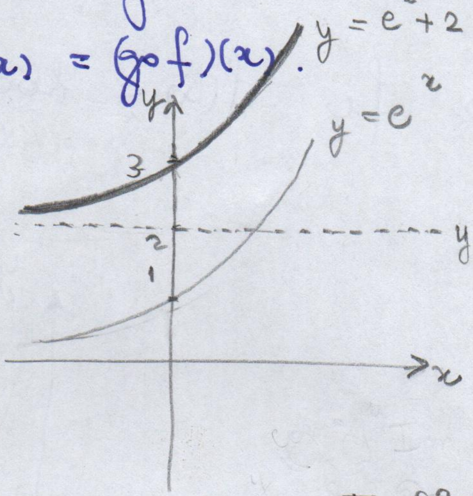
→ a reta $x = 0$ é assíntota vertical para $f(x) = \log_a x$.

ⓒ Se $0 < a < 1$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty.$$

Exercícios: ① Faça o gráfico das fçs $f(x) = \ln(x-1)$; $g(x) = e^x + 2$ e $h(x) = (g \circ f)(x)$.





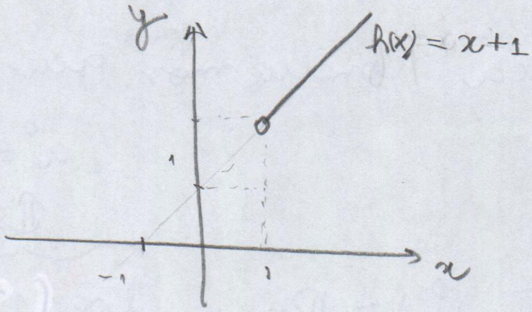
Note que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$ e $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, logo, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{D}_g$. Além disso,

$h(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} + 2 = e^{\ln(x-1)} + 2$

Se $y = \ln(x-1)$, então $e^y = x-1$, isto é, $e^{\ln(x-1)} = x-1$

$= x - 1 + 2 = x + 1$.

Note que $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > 1\} = (1, +\infty)$.



② Resolva as equações:

ⓐ $\dfrac{e^{2x-3}}{e^{2-x}} = 5$, ⓑ $\ln(x^2) + \ln(2x-1) - \ln(x) = 1$.

ⓐ $\dfrac{e^{2x-3}}{e^{2-x}} = 5 \iff e^{2x-3} \cdot e^{-(2-x)} = 5 \iff e^{2x-3} \cdot e^{-2+x} = 5 \iff e^{2x-3-2+x} = 5$

$\iff e^{2x-3-2+x} = e^{\ln 5} \iff 3x - 5 = \ln 5 \iff 3x = 5 + \ln 5$

$\iff \boxed{x = \dfrac{5 + \ln 5}{3}}$

ⓑ $\ln(x^2) + \ln(2x-1) - \ln x = 1 \iff \ln(x^2 \cdot (2x-1)) - \ln x = 1$

$\iff \ln(2x^3 - x^2) - \ln x = 1 \iff \ln\left(\dfrac{2x^3 - x^2}{x}\right) = 1 \iff \ln(2x^2 - x) = 1$

$\iff \ln(2x^2 - x) = \ln e^1 \iff 2x^2 - x = e \iff 2x^2 - x - e = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-e) = 1 + 8e$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8e}}{4} \quad \boxed{x = \frac{1+\sqrt{1+8e}}{4}} \, . \quad \boxed{x = \frac{1-\sqrt{1+8e}}{4}} \, .$$

Limites Fundamentais

Apresentaremos agora três importantes limites do cálculo, chamados de limites fundamentais. São eles:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ou equivalentemente $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

Exemplos: Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \operatorname{sen}(5x)}{5x}$.

Chame $u = 5x$ e note que $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5 \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = 5$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} =$