Disciplina: Lógica Matemática

Aula 05: Métodos de Provas

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Métodos de Provas

É importante saber se um argumento é válido. Se

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow Q.$$

Quais métodos pode ser utilizados para comprovar que um argumento está correto?

Em linguagem Matemática os argumentos válidos (proposições verdadeiras) são classificados em teoremas, lemas, corolários, etc...

- Teoremas são argumentos válidos fortes e centrais na teoria.
- Lemas são argumentos válidos mais simples de uso restrito na teoria.
- Corolários são argumentos válidos que são consequências de teoremas ou de lemas.

Em geral, os enunciados dos Teoremas são do tipo

$$P \Rightarrow Q \qquad \text{ou} \qquad P \Leftrightarrow Q.$$

Métodos de Provas

Quando um teorema é do tipo $P \Rightarrow Q$, P é chamado de hipótese e Q é chamado de tese. No próximo resultado vemos que $P \Rightarrow Q$ pode ser mostrado de várias formas diferentes.

Teorema 5.1 As seguintes proposições são logicamente equivalentes

(a) $P \rightarrow Q$ é tautologia

(b) $\sim Q \rightarrow \sim P$ é tautologia (conhecida como contra recíproca)

(c) $\sim P \vee Q$ é tautologia

(d) $P \wedge \sim Q$ é contradição (conhecida como solução por absurdo)

Assim, para mostrar que $P \Rightarrow Q$, podemos mostrar que
$P \rightarrow Q$ é tautologia, ou que
$\sim Q \rightarrow \sim P$ é tautologia, ou que
$\sim P \vee Q$ é tautologia, ou que
$P \wedge \sim Q$ é contradição. O que for mais fácil.

Vamos mostrar o Teorema 5.1.
Obs. 1: Já mostramos algumas equivalências deste teorema, por exemplo, mostramos que

$$P \to Q \equiv \sim Q \to \sim P,$$

usando a tabela verdade.

Obs. 2: Para mostrar um resultado com várias equivalências, podemos mostrar que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a),$$

ou outro caminho que completa todas as equivalências. No Teorema 5.1, vamos mostrar que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a) \quad \text{e} \quad (c) \Leftrightarrow (d).$$

Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$
hipótese: $P \to Q$ é tautologia
tese: $\sim Q \to \sim P$ é tautologia.

Obs.: assumindo que a hipótese é verdadeira, temos que mostrar que a tese é verdadeira, ou seja, temos que mostrar que quando $\sim Q$ é verdadeira, então $\sim P$ também é verdadeira.

De fato, suponhamos que $\sim Q$ é verdadeira. Da hipótese sabemos que $P \to Q$ é tautologia e usando a Regra de Inferência Modus Tollens, temos

$$\sim Q \wedge (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad \sim P.$$

Logo, $\sim P$ também é verdadeira, como queríamos demonstrar.

Vamos mostrar que $(b) \Rightarrow (c)$

hipótese: $\sim Q \rightarrow \sim P$ é tautologia

tese: $\sim P \vee Q$ é tautologia.

Obs.: Assumindo que a hipótese é verdadeira, temos que mostrar a tese.

De fato, vamos dividir em 2 casos, pois $\sim P \vee Q$ é tautologia no caso que "Q é verdadeira" ou no caso que "Q é falsa".

1) Suponhamos Q verdadeira, então pela Regra de Inferência da Adição, $\sim P \vee Q$ é também verdadeira, ou seja, $\sim P \vee Q$ é tautologia.

2) Suponhamos Q falsa, então $\sim Q$ é verdadeira. Por hipótese $\sim Q \rightarrow \sim P$ é tautologia, então usando a Regra e Inferência Modus Pones, temos

$$\sim Q \wedge (\sim Q \rightarrow \sim P) \quad \Rightarrow \quad \sim P,$$

ou seja, $\sim P$ é verdadeira e pela Adição temos que $\sim P \vee Q$ é também verdadeira.

Portanto, de 1) e 2) a tese está mostrada.

Vamos mostrar que $(c) \Rightarrow (a)$

hip. : $\sim P \vee Q$ é tautologia

tese: $P \rightarrow Q$ é tautologia.

Obs.: Precisamos mostrar que Q é verdadeira quando P é verdadeira, sabendo da hipótese que $\sim P \vee Q$ é tautologia.

De fato, suponhamos P é verdadeira, pelo Silogismo Disjuntivo

$$(\sim P \vee Q) \wedge P \quad \Rightarrow \quad Q.$$

Logo, Q é verdadeira, e $P \rightarrow Q$ é verdadeira.

No caso em que P é falsa, sabemos que $P \rightarrow Q$ é verdadeira.

Portanto, $P \rightarrow Q$ é tautologia.

Vamos mostrar que $(c) \Leftrightarrow (d)$

(c) : $\sim P \vee Q$ é tautologia

(d): $P \wedge \sim Q$ é contradição.

De fato, aqui apenas usamos a Lei de DeMorgan

$$\sim P \vee Q \quad \text{é tautologia} \quad \Leftrightarrow \quad \sim(\sim P \vee Q) \quad \text{é contradição}$$

$$\overset{DeMorgan}{\Leftrightarrow} \quad P \wedge \sim Q \quad \text{é contradição.}$$

Há algumas técnicas de prova de argumentos matemáticos bem conhecidos, por exemplo:

• Prova pelo princípio de indução matemática. Esta técnica consiste em mostrar o resultado em 3 passos:
i) mostra-se o resultado para um valor de n inicial, por exemplo, $n = 0$ ou $n = 1$.

ii) supõe-se que o resultado vale para um valor de n arbitrário. (Este passo é chamado de hipótese de indução).

iii) usando a hipótese de indução, mostra-se que o resultado vale para o valor $n+1$.

Estes 3 passos concluem que o resultado é válido para qualquer valor de n.

Exemplo: Mostre que

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Exemplo: Mostre que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

i) vamos mostrar que (1) vale para o valor inicial, aqui temos que escolher $n=1$, pois queremos mostrar que (1) vale para $n=1,2,3,\ldots$

Para $n=1$, temos

$$1=\frac{(1)(2)}{2},$$

ou seja, o resultado (1) vale para $n=1$.

ii) Hipótese de indução: suponhamos que (1) vale para n, ou seja, suponhamos que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

iii) Vamos mostrar que (1) vale para $n+1$, ou seja, usando a hipótese de indução ii), vamos mostrar que

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

vamos mostrar (1) vale para $n+1$. Note que

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+n+(n+1) &\overset{ii)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Logo, (1) vale para $n+1$,

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Exemplo 2: Mostre pelo princípio de indução matemática que

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n \geq 0.$$

i) Vale para $n = 0$, pois $2^0 = 2^1 - 1$.
ii) Suponhamos que vale para $n - 1$, ou seja, vale o seguinte

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

iii) Vale para n, pois

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n &= \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}} + 2^n \\ &\overset{ii)}{=} 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Obs.:

Um número inteiro par, n, pode ser escrito com $n = 2k$, onde k é um inteiro.

Um número inteiro ímpar, n, pode ser escrito com $n = 2k + 1$, onde k é um inteiro.

Um número inteiro ímpar, n, pode ser escrito com $n = 2k - 1$, onde k é um inteiro.

Um número inteiro é par ou é ímpar, nunca os dois ao mesmo tempo.

• Demonstração Direta: quando a implicação $P \Rightarrow Q$ é provada supondo de que P é verdadeira e deduzindo que Q é verdadeira, usando regras de inferência ou teoremas já demonstrado. Este tipo de técnica de prova foi feito na prova do Teorema 5.1 $(a) \Rightarrow (b)$.

Exemplo: Mostre que "se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar".

hip. : n é inteiro ímpar

tese: n^2 é ímpar.

Demonstração: Por hipótese n é ímpar, logo existe k inteiro tal que $n = 2k+1$. Assim,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1,$$

que é a representação de um número ímpar, pois se $j = 2k^2+2k$, temos

$$n^2 = 2j+1.$$

Logo, n^2 é ímpar, como queríamos demonstrar.

• Demonstração pela Contra Recíproca: como $P \Rightarrow Q$ é logicamente equivalente a $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (veja Teorema 5.1), podemos mostrar que $\sim Q \Rightarrow \sim P$.
E dizemos que $P \Rightarrow Q$ está provado pela contra recíproca.

Exemplo: Mostre que "se $3n+2$ é um número inteiro ímpar, então n é ímpar".

$P =$ hip. : $3n+2$ é inteiro ímpar

$Q =$ tese: n é ímpar.

Demonstração: Suponhamos que a tese é falsa, ou seja, suponhamos que n é par, logo $n = 2k$, para algum k inteiro. Assim,

$$3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1),$$

logo concluímos que $3n+2$ é par, que é a negação da hipótese.

Mostramos que $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Portanto, mostramos que $P \Rightarrow Q$.

• Demonstração Trivial: quando a conclusão Q (a tese) é verdadeira independentemente da hipótese P. Neste caso, a demonstração de $P \Rightarrow Q$ é dita trivial.

Exemplo: Considere $U = \mathbb{N}$ e o predicado $P(n)$: "Se a e b são números inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$. Mostre que $P(0)$ é verdadeira.

Demonstração: Temos que mostrar $P(0)$, ou seja,
$P(0)$: "Se a e b são números inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$, aqui

hipótese: a e b inteiros positivos com $a \geq b$
tese: $a^0 \geq b^0$.

Como $a^0 \geq b^0$, isto é, $1 \geq 1$, a tese é verdadeira sempre. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

• Demonstração por Contradição ou por Absurdo: Se o teorema é do tipo $P \Rightarrow Q$ (ou seja, $\sim P \vee Q$ é verdadeira), este método consiste em supor que $P \wedge \sim Q$ é verdadeira (que é o contrário do que queremos mostrar). E, supondo que $P \wedge \sim Q$ é verdadeira, temos que chegar em algum absurdo, em alguma contradição.
Negando o que queremos provar, chegamos em um absurdo.
Assim, conclui-se que $P \wedge \sim Q$ é falsa e então $P \rightarrow Q$ é tautologia.

Exemplo: Mostrar, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Vamos supor por absurdo que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja,

$$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}, \quad \text{com} \quad b \neq 0, \quad | \quad \sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Suponhamos que a e b não têm fatores comuns diferentes de 1, ou seja, $\frac{a}{b}$ é irredutível.

Mas
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

Logo, a^2 é par e, portanto, a é par.

Como a é par, então $a = 2k$ para algum k inteiro. E, $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$

Note que,
$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 \\ 4k^2 &= 2b^2 \\ 2k^2 &= b^2, \end{aligned}$$

logo, concluímos que b também é par.

Chegamos que a e b são pares, eles têm o fator 2 em comum. Mas isso é um absurdo (uma contradição), pois a e b não têm fatores comuns diferentes de 1.

Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser racional. Então, $\sqrt{2}$ é irracional.

Exercícios: Mostre que

1. “Seja n um número inteiro, se n^2 é ímpar, então n é ímpar”.
2. “Seja n um número inteiro, se n^2 é par, então n é par”.
3. “Seja n um número inteiro, se n é par, então n^2 é par”.
4. “A soma de dois inteiros ímpares é par”.
5. “O produto de dois inteiros ímpares é ímpar”.
6. “A soma de um número irracional com um número racional é irracional” (Sugestão: demonstração por absurdo).

7. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: “O produto de dois números irracionais é irracional.”