Disciplina: Lógica Matemática

Aula 04: Regras de Inferência

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Resumo e Método Dedutivo

• Equivalência Lógica: Duas proposições $P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$ e $Q = Q(p_1, p_2, ..., p_n)$ para $n \geq 1$ são logicamente equivalentes se P e Q sempre assumem valores lógicos iguais, para os mesmos valores lógicos atribuídos a $p_1, p_2, ..., p_n$.

Em outras palavras: P e Q são logicamente equivalentes se, e somente se, a proposição bicondicional $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia.

• Implicação Lógica: Dizemos que a proposição $P = P(p_1, p_2, ..., p_n)$ implica logicamente a proposição $Q = Q(p_1, p_2, ..., p_n)$, se, toda atribuição de valores lógicos de $p_1, p_2, ..., p_n$ que tornam P verdadeira também tornam Q verdadeira.

Em outras palavras: P implica logicamente Q se, e somente se, a proposição condicional $P \to Q$ for uma tautologia.

• Método Dedutivo: quando mostramos as implicações e equivalências lógicas sem o uso da tabela verdade, usando apenas implicações e equivalências lógicas já conhecidas.

Argumentos

Definição: Chama-se argumento toda afirmação que uma dada sequência finita de proposições $p_1, p_2, ..., p_n$, $n \geq 1$, (chamadas de premissas ou hipóteses), tem como consequência uma proposição final Q (chamada de conclusão).

O argumento é dito válido se, e somente se, quando todas as premissas (hipóteses) são verdadeiras, a conclusão que também é verdadeira, ou seja,

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow Q$$

ou se

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow Q \quad \text{for tautologia.}$$

Exemplo 1:

1) Considere o seguinte diálogo:

– Maria foi à universidade.

– Como sabe?

– Pois, se ela fosse ao cinema, telefonaria.

Podemos escrevê-lo como um argumento:

p_1 : "Maria vai à universidade ou ao cinema"

p_2 : "Se for ao cinema, então telefona"

p_3 : "Maria não telefonou"

Q : "Maria foi à universidade"

Obtivemos um argumento com 3 hipóteses e a conclusão.

Como nas premissas são proposições compostas, vamos escrevê-las em termos de proposições simples.

Consideramos as seguintes proposições simples

p : "Maria vai à universidade"

q : "Maria vai ao cinema"

r : "Maria telefona"

Logo, $p_1 : p \vee q$, $p_2 : q \to r$, $p_3 :\sim r$, $Q : p$

Vamos verificar se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Rightarrow Q$, ou seja, se o argumento é verdadeiro.

p	q	r	$p_1 : p \vee q$	$p_2 : q \to r$	$p_3 :\sim r$	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$	$Q : p$	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to Q$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	F	V

Assim, como os valores lógicos que tornam $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$ verdadeiro também tornam Q verdadeiro, ou seja, $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p$ é tautologia e

$$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\sim r) \Rightarrow p$$

é um argumento válido.

Exemplo 2:

2) Considere o seguinte argumento:

p_1 : Se eu fosse artista, seria famoso.

p_2 : Eu não sou artista.

Q : Eu não sou famoso.

Podemos encontrar a proposições simples

p : sou artista.

q : sou famoso. Logo, $p_1 : p \to q$, $p_2 : \sim p$, $Q : \sim q$

Vamos verificar se $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow Q$, ou seja, se $(p \to q) \wedge (\sim p) \Rightarrow \sim q$

p	q	$p_1 : p \to q$	$p_2 : \sim p$	$p_1 \wedge p_2$	$Q : \sim q$	$(p_1 \wedge p_2) \to Q$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Assim, como os valores lógicos que tornam $(p_1 \wedge p_2)$ verdadeiro NÃO tornam Q verdadeiro, ou seja, $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow Q$ NÃO é tautologia e então

$$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p) \not\Rightarrow \sim q.$$

É um argumento INVÁLIDO.

Obs: Vamos aprender a usar Regras de Inferência ou Argumentos Fundamentais para mostrar que argumentos são válidos pelo Método Dedutivo, ou seja, sem precisar da tabela verdade.

Regras de Inferência ou Argumentos Fundamentais

Há certos tipos de argumentações válidas bastante comuns que são conhecidas por Regras de Inferência ou Argumentos Fundamentais. Eles ajudam a mostrar que outros argumentos são válidos. São elas:

- Regra 1: **Adjunção ou Conjunção (Adj)**: $p_1 : p, \quad p_2 : q$ e $Q : p \wedge q$
  ou seja, $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$.
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

- Regra 2: **Simplificação (S)**: $p_1 : p \wedge q$ e $Q : p$
  ou seja, $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ou ainda $(p \wedge q) \Rightarrow q$.
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline p \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$$

- Regra 3: **Adição (A)**: $p_1 : p$ e $Q : p \vee q$
  ou seja, $p \Rightarrow (p \vee q)$.
  Outra notação:

$$\frac{p}{p \vee q}$$

- Regra 4: **Modus Ponens (MP)**: $p_1 : p \to q$, $p_2 : p$ e $Q : q$
  ou seja, $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.
  Outra notação:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

- Regra 5: **Modus Tollens (MT)**: $p_1 : p \to q, \quad p_2 : \sim q$ e $Q : q$
  ou seja, $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.
  Outra notação:
$$\begin{array}{c} p \to q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

- Regra 6: **Dupla Negação (DN)**: $p_1 : \sim (\sim p)$ e $Q : p$
  ou seja, $\sim (\sim p) \Rightarrow p$ ou ainda $p \Rightarrow \sim (\sim p)$.
  Outra notação:
$$\begin{array}{c} \sim (\sim p) \\ \hline p \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} p \\ \hline \sim (\sim p) \end{array}$$

- Regra 7: **Absorção (Ab)**: $p_1 : p \to (p \wedge q)$ e $Q : p \to q$
  ou seja, $[p \to (p \wedge q)] \Rightarrow (p \to q)$.
  Outra notação:
  $$\frac{p \to (p \wedge q)}{p \to q}$$

- Regra 8: **Silogismo Hipotético (SH)**: $p_1 : p \to q,\ \ p_2 : q \to r$ e $Q : p \to r$
  ou seja, $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$.
  Outra notação:
  $$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

Regras de Inferência ou Argumentos Fundamentais

- Regra 9: **Silogismo Disjuntivo (SD)**: $p_1 : p \vee q,\ \ p_2 : \sim p$ e $Q : q$
  ou seja, $[(p \vee q) \wedge \sim p] \ \Rightarrow \ q$ ou ainda, $((p \vee q) \wedge \sim q) \ \Rightarrow \ p$
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

- Regra 10: **Regra da Bicondicional (RBC)**: $p_1 : p \rightarrow q,\ \ p_2 : q \rightarrow p,$ e $Q :\ (p \leftrightarrow q)$
  ou seja, $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \ \Rightarrow \ p \leftrightarrow q$ ou ainda, $(p \leftrightarrow q) \ \Rightarrow \ [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ \hline (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \end{array}$$

- Regra 11: **Dilema Construtivo (DC)**: $p_1 : p \rightarrow q,\ \ p_2 : r \rightarrow s,\ \ p_3 : p \vee r$ e $Q : q \vee s$
  ou seja, $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$.
  ou ainda $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \wedge r)] \Rightarrow (q \wedge s)$. Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \wedge r \\ \hline q \wedge s \end{array}$$

- R 12: **Dilema Destrutivo (DD)**: $p_1 : p \rightarrow q,\ p_2 : r \rightarrow s,\ \ p_3 : \sim q \vee \sim s$ e $Q : \sim p \vee \sim r$
  ou seja, $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$.
  ou ainda $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \wedge \sim s))] \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$.
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \sim p \vee \sim r \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \wedge \sim s \\ \hline \sim p \wedge \sim r \end{array}$$

- Regra 13: **Resolução (R)**: $p_1 : p \vee q$, $p_2 : \sim p \vee r$, e $Q : q \vee r$
  ou seja, $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)] \Rightarrow (q \vee r)$.
  Outra notação:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \vee r \\ \hline q \vee r \end{array}$$

Além disso, se r é a proposição q, temos

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)] \Rightarrow q.$$

Se r é a contradição, temos

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee C)] \equiv [(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q.$$

Exercício = Lista 04: Considere p, q, r, s proposições quaisquer. Mostre que as 13 **Regras de Inferência** dadas anteriormente são válidas.

Com o auxílio das 13 Regras de inferência pode-se demonstrar a validade de argumentos mais complexos.

Exemplo:
Considere o argumento “Se $2 > 3$, então $2^2 > 3^2$. E $2 > 3$. Conclui-se $2^2 > 3^2$.
Este argumento se escreve como a Regra Modus Ponens,

$$[(p \to q) \wedge p] \;\Rightarrow\; q,$$

onde $\quad p : 2 > 3 \quad$ e $\quad q : 2^2 > 3^2$.

Porém, note que $p : 2 > 3$ é sempre falsa, então a primeira parte $[(p \to q) \wedge p]$ é sempre falsa e não podemos validar o argumento com uma premissa falsa.

Também, não podemos validar um argumento com conclusão falsa.

Exemplo: Escreva em linguagem simbólica o seguinte argumento. Verifique se é válido usando as Regras de Inferência.

Sabendo-se que: “Esta tarde não está ensolarada e ontem fez frio”.
“Se formos à praia, a tarde estará ensolarada”.
“Se não formos à praia, iremos passear de barco”.
“Se formos passear de barco, estaremos de volta em casa ao por do sol”.
Conclusão: “Estaremos de volta em casa ao por do sol”.

Solução:

1) Primeiro vamos determinar as proposições simples

p : esta tarde está ensolarada
q : ontem fez frio
r : ir à praia
s : ir passear de barco
v : estar de volta em casa ao por do sol

2) Determinamos as premissas/hipóteses e a conclusão

$p_1 : \sim p \wedge q$

$p_2 : r \rightarrow p$

$p_3 : \sim r \rightarrow s$

$p_4 : s \rightarrow v \qquad\qquad Q : v$

3) Usando as regras de inferência vamos mostrar que

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \Rightarrow Q.$$

de fato,

$$\begin{aligned}
[\underbrace{(\sim p \wedge q)} \wedge (r \rightarrow p) \wedge (\sim r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow v)] &\overset{\mathbf{S}}{\Rightarrow} [\underbrace{\sim p \wedge (r \rightarrow p)} \wedge (\sim r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow v)] \\
&\overset{\mathbf{MT}}{\Rightarrow} [\underbrace{\sim r \wedge (\sim r \rightarrow s)} \wedge (s \rightarrow v)] \\
&\overset{\mathbf{MP}}{\Rightarrow} \underbrace{s \wedge (s \rightarrow v)} \\
&\overset{\mathbf{MP}}{\Rightarrow} v
\end{aligned}$$

Exemplo: Escreva em linguagem simbólica o seguinte argumento. Verifique se é válido usando as Regras de Inferência.

“Tomas está esquiando ou não está nevando”. “Está nevando ou Timon está jogando futebol”. Conclusão: “Tomas está esquiando ou Timon está jogando futebol”.

Solução: Com

p : Tomas está esquiando.

q : Está nevando.

r : Timon está jogando futebol.

O argumento é escrito em linguagem simbólica como

$$(p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \Rightarrow p \vee r,$$

que pela Regra Resolução é válido.

Exemplo: Mostre que a Regra da Resolução escrita da seguinte forma

$$(p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \Rightarrow p \vee r$$

é válida, usando apenas Equivalências e Argumentos Fundamentais já conhecidos.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(p \vee \sim q) \wedge \underbrace{(q \vee r)} &\overset{distr.}{\equiv} [p \wedge (q \vee r)] \vee \underbrace{[\sim q \wedge (q \vee r)]} \\
&\overset{distr.}{\equiv} [p \wedge (q \vee r)] \vee [\underbrace{(\sim q \wedge q)} \vee (\sim q \wedge r)] \\
&\overset{lei\ compl.}{\equiv} [p \wedge (q \vee r)] \vee \underbrace{[C \vee (\sim q \wedge r)]} \\
&\overset{identidade}{\equiv} \underbrace{[p \wedge (q \vee r)]} \vee \underbrace{[\sim q \wedge r]} \\
&\overset{\mathbf{S}}{\Rightarrow} p \vee r
\end{aligned}
$$

Regras de Inferência ou Argumentos Fundamentais

Exemplo: Mostre que o seguinte argumento é válido

$$(q \vee p) \wedge (p \to r) \ \Rightarrow q \vee r,$$

usando Equivalências conhecidas e Argumentos Fundamentais.
De fato, vamos sair das premissas e chegar na conclusão usando apenas Equivalências conhecidas e Argumentos Fundamentais:

$$\begin{aligned}
(q \vee p) \wedge (p \to r) \quad & \stackrel{distributiva}{\equiv} \quad \underbrace{[q \wedge (p \to r)]} \vee [p \wedge (p \to r)] \\
& \stackrel{\mathbf{S}}{\Rightarrow} \quad q \vee \underbrace{[p \wedge (p \to r)]} \\
& \stackrel{\mathbf{MP}}{\Rightarrow} \quad q \vee r
\end{aligned}$$

Exercício: **Faça os exercícios (38) e (39) da página 76** do Livro A.F. da Silva e C.M. dos Santos, “Aspectos Formais da Computação”.

Falácias

Falácia é uma argumentação ou raciocínio baseada em argumentos errados (não válidos).

• Falácia da afirmação da conclusão

Ex. 1:

p_1 : “Se chover, então faz frio”.

p_2 : “Faz frio”.

Conclusão: “Choveu”.

é uma falácia, pois fazer frio não leva à conclusão de que choveu.

Lembre-se que

$$[(p \to q) \wedge q] \not\Rightarrow p.$$

A regra Modus Ponens é $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Ex. 2: (Os políticos usam muitas falácias).

“Se aplicar recursos na Educação, o ensino melhorará.”

Neste ano o ensino melhorou, isto não significa que recursos foram aplicados na Educação.

- Falácia da negação da hipótese

Ex. 1:

p_1 : “Se você fez todos os exercícios, então aprendeu a matéria”.
p_2 : “Você não fez todos os exercícios”.
Não podemos concluir que você não aprendeu a matéria.

Lembre-se que

$$[(p \to q) \wedge \sim p] \not\Rightarrow \ \sim q.$$

A regra Modus Tollens é $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

Você pode ter aprendido a matéria sem fazer todos os exercícios.

Regras de Inferência para Proposições Quantificadas

Obs: U é o conjunto universo do discurso.

• Universal Instantâneo é a regra de inferência que: dada a proposição quantificada "$\forall x \in U, P(x)$", conclui-se que $P(c)$, onde c é um elemento arbitrário de U, é verdadeiro.

$$\forall x \in U,\ P(x) \quad \Rightarrow \quad P(c).$$

Ex: De "Todo animal é mortal", conclui-se que "O gato é mortal".

• Generalização Universal é a regra de inferência que: sabendo-se que $P(c)$ é verdadeira para cada elemento c de U, conclui-se que "$\forall x \in U, P(x)$" é verdadeira.

$$P(c) \text{ para } c \text{ arbitrário} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in U,\ P(x).$$

Ex: Seja U o conjunto dos 30 estudantes de uma turma do ensino médio.
Verificou-se que cada estudante tem idade entre 14 e 17 anos.
Conclui-se que "$\forall x \in U, P(x)$", onde $P(x) : x$ é menor de idade.

Regras de Inferência para Proposições Quantificadas

Obs: U é o conjunto universo do discurso.

• Existencial Instantâneo é a regra de inferência que: dada a proposição quantificada "$\exists x \in U, P(x)$", conclui-se que $P(c)$, para algum c, elemento de U, é verdadeiro.

$$\exists x \in U,\ P(x) \quad \Rightarrow \quad P(c), \text{ para algum } c.$$

Ex: De "Existe animal vertebrado", conclui-se que "Algum animal é vertebrado".

• Generalização Existencial é a regra de inferência que sabendo-se que $P(c)$ é verdadeira para algum elemento c de U, conclui-se que "$\exists x \in U, P(x)$" é verdadeira.

$$P(c), \text{ para algum } c \quad \Rightarrow \quad \exists x \in U,\ P(x).$$

Ex: Seja U o conjunto dos 30 estudantes de uma turma do ensino médio.
Verificou-se que alguns estudantes têm idade maior do que 18 anos.
Conclui-se que "$\exists x \in U, P(x)$", onde $P(x)$: x é maior de idade.