Lista de Exercicios para P2 - PAA

Prof$^{\underline{a}}$ Vitoria Zanon Gomes

1. Descreva um algoritmo de programação dinâmica para o problema de seleção de atividades. Suponha que na entrada as atividades estão ordenadas por tempo de término como em aula. Compare o tempo de execução do seu algoritmo com o algoritmo guloso.

2. Seja A[1 ... n] um vetor de números inteiros e seja x um número inteiro. Projete um algoritmo de complexidade O(n log n) que retorna (se existir) dois elementos distintos A[i] e A[j] tais que A[i] + A[j] = x.

3. Considere o algoritmo aleatorizado de contratação visto nas aulas 7 e 8 (09/10 e 16/10). Qual é a probabilidade de você contratar exatamente uma vez? Qual é a probabilidade de você contratar exatamente n vezes?

4. É verdade que $2^{n+1} \epsilon$ O(2^n)? E $2^{2n} \epsilon$ O(2^n)?

5. O tempo de execução de um algoritmo A é descrito pela recorrência $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Outro algoritmo B tem complexidade de tempo descrita por $T(n) = xT(n/4) + n^2$. Qual é o maior inteiro x que torna B assintoticamente mais rápido que A? *(Dica: Use o Teorema Mestre).*

7. Em que situações um algoritmo guloso pode ser melhor que um algoritmo baseado em programação dinâmica?

6. Leia sobre o problema de corte de hastes na seção 15.1 no livro Algoritmos - Teoria e Prática (Cormen) - 3^a edição. Suponha que tivéssemos também o limite l_i para o número de peças de comprimento i que era permitido produzir, para i = 1, 2,...,n. Mostre que a propriedade de subestrutura ótima descrita no livro deixa de ser válida.

8. O problema de multiplicação de cadeia de matrizes consiste na parentização de uma cadeia de matrizes a serem multiplicadas de modo a evitar o menor número de multiplicações escalares. Exemplo: A_{10*100}, B_{100*5} e C_{5*50}:

- Se utilizarmos a parentização $((A*B)*C)$, teremos 7500 multiplicações escalares ao todo
- Se utilizarmos $(A*(B*C))$, no entanto, teremos um total de 75000 multiplicações escalares.

Para resolver esse problema, podemos utilizar o seguinte algoritmo:

```
MATRIX-CHAIN-ORDER (p)
n = p.comprimento − 1
sejam m[1 .. n, 1 .. n] e s[1 .. n − 1, 2 .. n] tabelas novas
for i = 1 to n
   m[i, i] = 0
for l = 2 to n                     // l é o comprimento da cadeia
   for i = 1 to n − l + 1
       j = i + l − 1
       m[i, j] = ∞
       for k = i to j − 1
           q = m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i-1} p_k p_j
           if q < m[i, j]
               m[i, j] = q
               s[i, j] = k
return m e s
```

Figura 1: Caption

Calcule a complexidade do algoritmo acima e diga qual tipo de estratégia esse algoritmo utiliza.

9. Considere uma variante do problema da multiplicação de cadeias de matrizes na qual a meta é parentizar a sequência de matrizes de modo a maximizar, em vez de minimizar, o número de multiplicações escalares. Esse problema exibe subestrutura ótima?

10. Determine a maior subsequência comum de "10010101"e "010110110"utilizando o algoritmo citado no material "Maior Subsequência em Comum".

11. Escreva um algoritmo para encontrar, ao receber uma cadeia de caracteres de entrada, a **subsequência palíndrômica mais longa**. Por exemplo, dada a entrada "caractere"o algoritmo retornaria "carac". Calcule a complexidade do seu algoritmo.

12. Utilize o exemplo para o problema de seleção de atividades visto em aula e suponha que, em vez de selecionar a primeira turma a terminar, selecionemos a última atividade a começar que seja compatível com todas as atividades selecionadas anteriormente. Descreva como essa abordagem é um algoritmo guloso e prove que ela produz uma solução ótima.

13. Explique com suas palavras o que é uma subestrutura ótima e como ela é utilizada dentro de programação dinâmica e estratégias gulosas.

14. O problema da mochila (*knapsack problem*) é um problema de otimização que considera uma situação onde é necessário preencher uma mochila, considerando os diversos itens disponíveis e seus respectivos pesos, sem ultrapassar sua capacidade. Mostre que esse problema tem propriedade de escolha gulosa e subestrutura ótima.

15. Considerando o algoritmo apresentado no material sobre Códigos de Huffman, qual é o código de Huffman ótimo para o conjunto de frequências a seguir, baseado nos oito primeiros números de Fibonacci? a:1 b:1 c:2 d:3 e:5 f:8 g:13 h:21

16. Considere o problema de dar troco de uma compra em centavos (Ex: R$ 3.50 = 350 centavos) usando o menor número de moedas. Descreva um algoritmo guloso para dar um troco utilizando moedas de 25 centavos, 10 centavos, 5 centavos e 1 centavo. Prove que seu algoritmo produz uma solução ótima.

17. O que justifica a mudança na complexidade dos algoritmos vistos na aula sobre grafos quando mudamos a representação usada?

18. Dê uma representação por lista de adjacências e por matriz de adjacências para uma árvore binária completa em sete vértices. Qual dessas representações você utilizaria caso estivesse implementando um algoritmo? Justifique.

19. Reescreva o procedimento de busca em profundidade em grafos utilizando uma pilha para eliminar recursão. Qual a complexidade?

20. Dê exemplos diferentes dos mencionados em aula de problemas que podemos utilizar grafos para representação.

21. Escreva um algoritmo baseado em programação dinâmica para o problema da mochila. Ele é um algoritmo de tempo polinomial? Explique sua resposta.

22. Considere o seguinte pseudocódigo para o algoritmo de Dijkstra:

```
DIJKSTRA(G, w, s)
1   INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2   S = ∅
3   Q = V[G]
4   while Q ≠ ∅
5       u = EXTRACT-MIN(Q)
6       S = S ∪ {u}
7       for cada vértice v ∈ G.Adj[u]
8           RELAX(u, v, w)
```

Suponha que mudemos a linha 4 para **while** |Q| > 1. Essa mudança faz o laço ser executado |V| - 1 vezes ao invés de |V|. O algoritmo modificado continua correto?

23. Considere as seguintes afirmativas:

1. Existem problemas na classe P que não estão na classe NP.
2. Se o problema A pode ser eficientemente transformado no problema B e B está na classe P, então A está na classe P.
3. Se P = NP, então um problema NP-completo pode ser solucionado eficientemente.
4. Se P é diferente de NP, então existem problemas na classe P que são NP-completos.

Quais são verdadeiras e quais são falsas? Justifique suas respostas.

24. Cite situações do mundo real nas quais nos deparamos com os problemas citados na aula do dia 13/11.