Sexta Lista de Matemática Discreta - 2022

1. Seja $A = \mathbb{Z}_2$ um anel de Boole.
   (a) Calcule $1.0 + \overline{(0+1)}$.
   (b) Calcule $(1.1) + \overline{0}$.

2. Calcule a imagem das seguintes funções $f : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ é um anel de Boole.
   (a) $f(x, y) = x\overline{y}$.
   (b) $f(x, y) = xy + \overline{x}$.

3. Calcule a imagem das seguintes funções $f : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ é um anel de Boole.
   (a) $f(x, y, z) = x\overline{y} + z$.
   (b) $f(x, y, z) = xy + \overline{z}$.

4. Seja A um anel.
   (a) Se $a + b = a + c$, onde $a, b, c \in A$, mostre que $b = c$.
   (b) Se $a^2 = a$, para todo $a \in A$, mostre que A é um anel comutativo.

5. Verifique se:
   (a) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ é um anel de Boole.
   (b) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ não é um anel de Boole.

6. Sejam A um anel de Boole e $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ com as operações $(a_1, a_2 \ldots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \otimes (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$.
   (a) Mostre que A^n é um anel de Boole.
   (b) Determine os elementos neutros das operações $\oplus$ e $\otimes$.
   (c) Determine o oposto de um elemento $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com relação a operação $\oplus$.

7. Determine os seguintes valores em $\mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ é um anel de Boole.
   (a) $a = 1.\overline{0}$ (b) $a = 1 + \overline{1}$ (c) $a = \overline{0}.0$ (d) $a = \overline{1 + 0}$.

8. Determine a em $\mathbb{Z}_2$ (como anel de Boole) nas seguintes expressões:
   (a) $a.1 = 0$ (b) $a + a = 0$ (c) $a.1 = a$ (a) $a.\overline{a} = 1$.

9. Em uma álgebra de Boole, mostre que:
   (a) $1.1 + (\overline{0.1} + 0) = 1$.
   (b) $\overline{1}.\overline{0} + 1.\overline{0} = 1$.

10. Faça a tabela das seguintes funções $f : A^3 \to A$, onde $A = \{0, 1\}$ é uma álgebra de Boole.
    (a) $f(a, b, c) = \overline{a}b + b$.
    (b) $f(a, b, c) = a\overline{a} + b$.
    (c) $f(a, b, c) = a\overline{b} + \overline{abc}$.
    (d) $f(a, b, c) = a(bc + \overline{b}.\overline{c})$.

11. Faça a tabela das seguintes funções $f : A \to A$, onde $A = \{0, 1\}$ é uma álgebra de Boole.
    (a) $f(a, b, c) = \overline{c}$.
    (b) $f(a, b, c) = \overline{a}b + \overline{b}c$.
    (c) $f(a, b, c) = a\overline{b}c + \overline{abc}$.
    (d) $f(a, b, c) = \overline{b}(bc + \overline{a}.\overline{c})$.

12. Determine os valores de $a, b \in \mathbb{Z}_2$, como anel de Boole, tal que:

(a) $ab = a + b$.

(b) $\overline{a} + b = a + \overline{b}$.

13. Sejam A uma álgebra booleana e $a, b, c \in A$. Mostre que:

    (a) $a\overline{b} + b\overline{c} + \overline{a}c = \overline{a}b + \overline{b}c + a\overline{c}$.

    (b) $\overline{a}.\overline{b} = \overline{a + b}$.

14. Seja A uma álgebra de Boole com uma ordem $\preceq$.

    (a) Mostre que $a \preceq (b + c)$, para todo $a, b, c \in A$.

    (b) Se $a \preceq b$ e $c \preceq d$, mostre que $ac \preceq bd$.

15. Seja A uma álgebra de Boole com uma ordem $\preceq$.

    (a) Mostre que ab é um limite inferior de a e b.

    (b) Mostre que ab é o ínfimo de $\{a, b\}$.

16. Seja A uma álgebra de Boole com uma ordem $\preceq$.

    (a) Mostre que quaisquer dois elementos $a, b \in A$ tem um limite superior.

    (b) Mostre que $a + b$ é o supremo de $\{a, b\}$.

17. Sejam A uma álgebra de Boole com uma ordem $\preceq$ e $a, b \in A$.

    (a) Mostre que $a \preceq b$ se, e somente se, $ab = a$.

    (b) Mostre que $a \preceq b$ se, e somente se, $\overline{a} + b = 1$.

18. Sejam A uma álgebra booleana com uma ordem $\preceq$ e $a, b \in A$.

    (a) Mostre que $ab \preceq a$ e $a \preceq (a + b)$.

    (b) Mostre que $a \preceq b$ se, e somente se, $a.\overline{b} = 0$.