Primeira Lista de Matemática Discreta - 2022

1. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 1 \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 < x < 2\}$. Determine $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $A - B$, A_B^c e B_A^c.
2. Determine $\mathcal{P}(A)$, onde $A = \emptyset$, $A = \{\emptyset\}$ e $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. Determine todas as relações binárias sobre o conjunto $E = \{a, b, c\}$.
4. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} - \{0\} : \frac{30}{x} = n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 3n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\}$. Determine $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $A - B$, A_B^c e B_A^c.
5. Seja R uma relação. Se R é de equivalência (ordem), mostre que R^{-1} é uma relação de equivalência (ordem).
6. Se R é uma relação, mostre que $R \cup R^{-1}$ é simétrica.
7. Sejam $E = \mathbb{C}$ e R definida por $(x + yi)R(s + ti) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = s^2 + t^2$.
   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
   (b) Determine a classe $\overline{1 + i}$.
8. Seja a relação R sobre $\mathbb{Q}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
   (b) Determine a classe $\overline{100}$.
9. Seja a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$.
   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
   (b) Determine a classe de equivalência de $(1, 2)$ e $(0, 5)$.
10. Sejam $E = \{x \in \mathbb{Z} :\mid x \mid\leq 3\}$ e a relação R sobre E definida por $xRy \Leftrightarrow x+ \mid x \mid= y+ \mid y \mid$.
    (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
    (b) Descreva o conjunto quociente E/R.
11. Seja a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \mid c$ e $b \mid d$.
    (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial. É ordem total?
    (b) Determine os limites inferiores, limites superiores, supremo, infímo, máximo e mínimo de $A = \{(3, 4), (4, 5)\}$.
12. Seja a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \mid c$ e $b \leq d$.
    (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial.
    (b) Determine os limites inferiores, limites superiores, supremo, infímo, máximo e mínimo de $A = \{(1, 2), (2, 1)\}$.
13. Em relação a ordem de divisibilidade sobre $\mathbb{N}$, quais dos seguintes conjuntos são totalmente ordenados $A = \{24, 2, 6\}$, $B = \{3, 15, 5\}$, $C = \{15, 5, 30\}$ e $D = \mathbb{N}$.
14. Sejam $E = \mathbb{C}$ e R uma relação binária sobre E definida por $(a + bi)R(c + di) \Leftrightarrow a \mid c$.
    (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
    (b) Determine a classe de equivalência do elemento $2 + 3i$.
15. Sejam $E = \mathbb{C}$ e R uma relação binária sobre E definida por $(a + bi)R(c + di) \Leftrightarrow a = c$.
    (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.
    (b) Determine a classe de equivalência do elemento $3 + 4i$.
16. Sejam $E = \mathbb{N}$ e R uma relação binária sobre E definida por $(a, b)R(c, b) \Leftrightarrow a \leq c$ and $b \mid d$.
    (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial.
    (b) Ache os limites superiores, limites inferiores, supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto $A = \{(3, 4); (4, 3)\}$.
17. Seja R uma relação sobre $E = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ definida por $ARB \Longleftrightarrow A \subseteq B$, para todo $A, B \in E$.
    (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial sobre E.
    (b) Determine os limites inferiores, limites superiores, ínfimo, supremo, mínimo e máximo do conjunto $S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.