Disciplina: Lógica Matemática

Aula 07: Métodos de Contagem

Cleonice F. Bracciali

UNESP - Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto

Combinatória é o ramo da Matemática que trata da contagem. A contagem é importante sempre que temos recursos finitos. E quando queremos responder perguntas como:

- Quanto espaço consome um banco de dados?
- Quantos usuários esta rede pode suportar?

Vamos estudar os Princípios Fundamentais da Contagem.

- Princípio da Multiplicação

Exemplo: Uma criança pode escolher uma entre duas balas (Vermelha ou Roxa) e uma entre três gomas (Amarela, Branca ou Lilás).
Pergunta: Quantas possibilidades de escolha há?

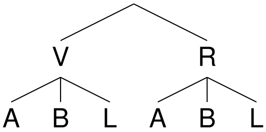
Métodos de Contagem - Princípios Fundamentais

Uma maneira de responder a pergunta é usando Diagrama da Árvore ou Árvore de Decisão.

No exemplo temos o conjunto A de escolhas de balas, e o conjunto B de escolhas de gomas:
A = { V (vermelha), R (roxa) } com 2 elementos
B = { A (amarela), B (branca), L (lilás) } com 3 elementos.

- Iniciamos a árvore de decisão com as possíveis escolhas do conjunto A:

- Depois, para cada possibilidade, adicionamos as possíveis escolhas do conjunto B:



- Agora podemos exibir todas as escolhas: (V, A), (V, B), (V, L), (R, A), (R, B), (R, L).

Resposta: $2 \times 3 = 6$ possibilidades de escolha.

Métodos de Contagem - Princípios Fundamentais

- Princípio da Multiplicação

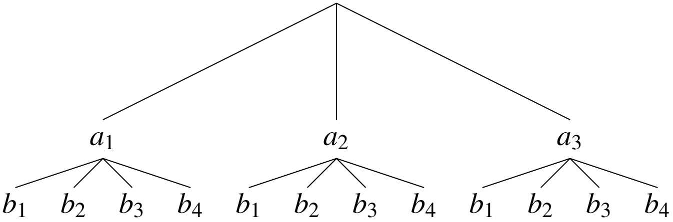
De maneira geral, dados os conjuntos

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ com m elementos

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ com n elementos

Podemos formar $m \times n$ pares ordenados (a_i, b_j), onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

- Exemplo:



São 3 $\times$ 4 = 12 pares ordenados.

- Princípio da Multiplicação: Se existem n_1 possibilidades para o primeiro evento/conjunto e n_2 possibilidades para o segundo evento/conjunto, então existem $n_1 \times n_2$ possibilidades para a sequência de 2 elementos (pares ordenados).

Exercício: Pelo princípio de indução matemática, mostre que para $r \geq 2$ conjuntos
$A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n_1}\}$ com n_1 elementos,
$A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n_2}\}$ com n_2 elementos,
$\vdots$
$A_r = \{a_{r,1}, a_{r,2}, \ldots, a_{r,n_r}\}$ com n_r elementos,
o número de r-úplas ordenadas $(a_{1,i}, a_{2,j}, \ldots, a_{r,p})$, onde $a_{1,i} \in A_1,\ a_{2,j} \in A_2, \ldots,\ a_{r,p} \in A_r,$ é

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r.$$

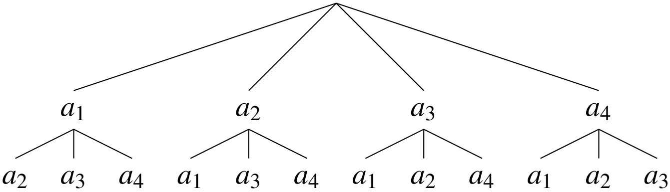
Exemplo: Um homem tem 4 ternos, 8 camisas e 5 gravatas. De quantas maneiras diferentes ele pode compor seu vestuário?
Resposta: $4 \times 8 \times 5 = 160$.

Métodos de Contagem - Princípios Fundamentais

• Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos:

Suponhamos que temos um único conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ com m elementos, e queremos pares ordenados do tipo (a_i, a_j) com $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Qual é o número dos possíveis pares ordenados?

• Veja a árvore de decisão para $m = 4$:



Neste caso, o número de pares ordenados com elementos distintos é $4 \times 3 = 12$.

• De maneira geral vemos que o primeiro conjunto de escolhas tem m elementos e o segundo conjunto de escolhas tem $m-1$ elementos, logo o número de pares ordenados com elementos distintos é

$$m \times (m-1).$$

- Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos:

Exemplo: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1,2,3,4,5 e 6?

Resposta: $6 \times 5 = 30$.

Os números são 12, 13, 14, 15, 16,
21, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 34, 35, 36,
41, 42, 43, 45, 46,
51, 52, 53, 54, 56,
61, 62, 63, 64, 65.

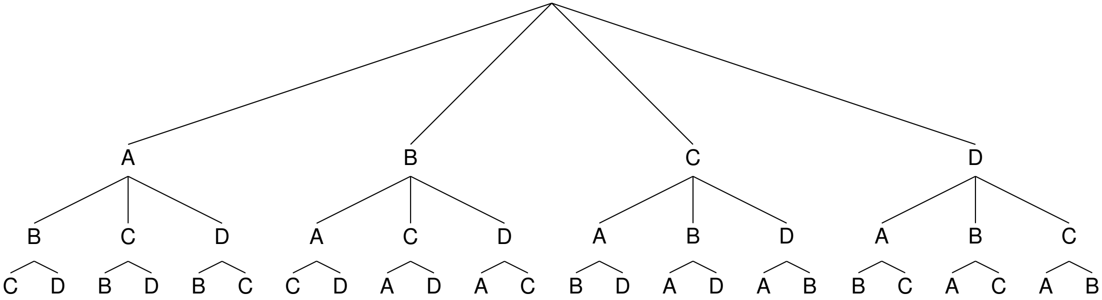
Exercício: Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1,2,3,4,5 e 6?

Métodos de Contagem - Princípios Fundamentais

- Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos:

Exemplo: Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos possíveis resultados existem para o primeiro, segundo e terceiro lugares?

Resposta: Sejam A, B, C e D os quatros atletas. Podemos montar a árvore de decisão



Logo, temos $4 \times 3 \times 2 = 24$ resultados distintos.

- **Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos:**

Pelo princípio da inducão matemática, podemos mostrar que:

seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ com $m \geq 2$ elementos e seja r tal que $1 \leq r \leq m$, então o número de r-úplas (sequência de r elementos) formadas por elementos distintos de A é

$$m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times (m-(r-1)).$$

Exemplo: Tenho uma paleta com 10 cores diferentes. Quero pintar uma caixa com 4 cores diferentes . Quantas opções de escolha eu tenho, sendo o fundo da primeira cor, a tampa da segunda cor, os lados da terceira cor e a parte de dentro da quarta cor escolhida?

Resposta: O conjunto de cores tem $m = 10$ cores diferentes, como vou utilizar apenas $r = 4$ cores, o número de possíveis combinações de cores é

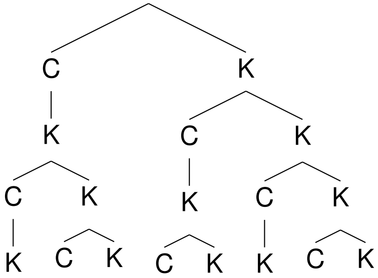
$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Métodos de Contagem - Princípios Fundamentais

Em alguns casos não podemos aplicar o Princípio da Multiplicação. Por exemplo, quando o número de possibilidades em cada nível sucessivo da árvore de decisão não é constante.

Exemplo: Vamos lançar uma moeda e contar de quantas formas podemos lançar a moeda 4 vezes sem obter 2 caras consecutivas.

Vamos montar a árvore de decisão com C = Cara e K = Coroa, e quando o resultado do lancamento for C eliminamos a possibilidade de ser C no próximo nível.



Logo, são 8 possibilidades de lançar a moeda 4 vezes sem obter 2 caras consecutivas.

- Princípio da Adição

Sejam A e B conjuntos distintos com n_1 e n_2 elementos respectivamente, então o número total de possibilidades para A e B é $n_1 + n_2$.

Exemplo: Uma empresa deseja comprar um veículo. Na loja encontram-se 23 carros e 10 camionetes. Quantas possíveis escolhas o comprador pode ter?
Resposta: 23 + 10 = 33 escolhas.

- Arranjo com repetição:

Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $r \geq 1$. Chamamos de arranjo com repetição dos m elementos de A tomados r a r, toda r-úpla ordenada (sequência de r elementos) formada com elementos de A (não necessariamente distintos).

Ex. Exiba todos os arranjos com repetição dos elementos de $A = \{a, b, c, d\}$ tomados 2 a 2.
Resposta: Os arranjos com repetição são:

aa, ab, ac, ad,
ba, bb, bc, bd,
ca, cb, cc, cd,
da, db, dc, dd. São $4 \times 4 = 4^2 = 16$ arranjos com repetição.

Exercício: Exiba todos os arranjos com repetição dos elementos de A tomados 3 a 3.

Usando o Princípio da Multiplicação podemos calcular o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r, que é denotado por $AR_{m,r}$, obtemos

$$AR_{m,r} = m \times m \times \cdots \times m = m^r.$$

• Arranjo (sem repetição):
Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e r $(1 \leq r \leq m)$. Chamamos de arranjo dos m elementos de A tomados r a r, toda r-úpla ordenada (sequência de r elementos) formada com elementos distintos de A.

Ex. Exiba todos os arranjos dos elementos de $A = \{a, b, c, d\}$ tomados 2 a 2.
Resposta: Os arranjos são: $ab,\ ac,\ ad,$
$ba,\ bc,\ bd,$
$ca,\ cb,\ cd,$
$da,\ db,\ dc.$ São $4 \times 3 = 12$ arranjos.

Exercício: Exiba todos os arranjos dos elementos de A tomados 3 a 3.

Usando o Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos podemos calcular o número de arranjos de m elementos tomados r a r, que é denotado por $A_{m,r}$, obtemos

$$A_{m,r} = m \times (m-1) \times \cdots \times (m-(r-1)).$$

Consequências dos Princípios Fundamentais da Contagem

- Arranjo: (sem repetição)

$$A_{m,r} = (m)(m-1)\cdots(m-(r-1)) = (m)(m-1)\cdots(m-r+1).$$

Como $1 \leq r \leq m$, então podemos escrever

$$m! = (m)(m-1)\cdots(m-r+1)\underbrace{(m-r)(m-r-1)\cdots(3)(2)(1)}.$$

Mas

$$(m-r)! = (m-r)(m-r-1)\cdots(3)(2)(1).$$

Logo, o número de arranjos de m elementos tomados r a r, também pode ser dado por

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

Ex. De um baralho com 52 cartas, 3 cartas são retiradas sem repetição. Quantas sequências de cartas é possível obter-se? Resposta: $A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = 52 \times 51 \times 50 = 132600.$

- Permutação:

Obs.: Alguns livros definem Permutação da mesma forma que Arranjo, outros livros definem Permutação como Arranjo com $r = m$. Aqui vamos definir Permutação como Arranjo com $r = m$, ou seja, permutação é arranjo de m elementos tomados m a m.

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos de A, toda m-úpla ordenada (sequência de m elementos) formada com os elementos de A.

Ex. Exiba as permutações dos elementos de $A = \{a, b, c\}$.
Resposta: As permutações são: abc, acb,
bac, bca,
cab, cba. São $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ permutações.

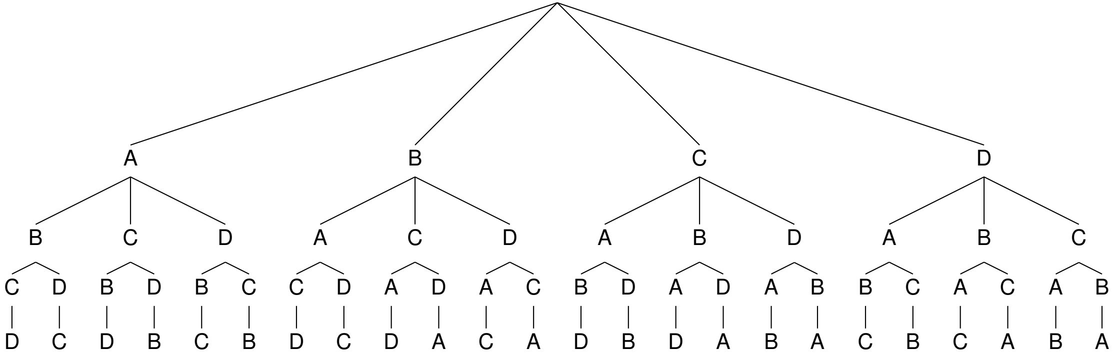
Usando o Princípio da Multiplicação com Elementos Distintos podemos calcular o número de permutações de m elementos, que é denotado por P_m, obtemos

$$P_m = m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = m!$$

- Permutação:

Ex. Exiba as permutações dos elementos de $S = \{A, B, C, D\}$ usando a árvore de decisões.

Resposta:



São $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ permutações.

• Combinação:

Obs.: Para as definiões de arranjo e permutação a ordem dos elementos é importante, pois são r-úplas ordenadas, são sequências ordenadas de elementos.
Mas para a definição de combinação a ordem não importa, pois combinação é um conjunto.

Def. Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e r $(1 \leq r \leq m)$. Chamamos de combinação dos m elementos de A tomados r a r, aos subconjuntos de A constituído por r elementos.

Ex. Exiba as combinações dos elementos de $A = \{a, b, c, d\}$, tomados 2 a 2.
Resposta: As combinações são: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$,
$\{b, c\}$, $\{b, d\}$,
$\{d, c\}$. Assim, são 6 combinações.

Obs.: No arranjo o par ordenado (a, b) é diferente do par ordenado (b, a), e são dois arranjos diferentes. Na combinação, como $\{a, b\} = \{b, a\}$, este subconjunto é contado apenas uma vez.

- Combinação:

Para $1 \leq r \leq m$, o número de combinações de m elementos de tomados r a r, denotado por $C_{m,r}$ ou por $\binom{m}{r}$, é dador por

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}.$$

Esta fórmula é válida pois, podemos observar que o número de arranjos de m elementos tomados r a r é dado por

$$A_{m,r} = r!\, C_{m,r},$$

logo,

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{r!} = \frac{m!}{(m-r)!r!}.$$

Consequências dos Princípios Fundamentais da Contagem

• Exemplo: Exiba os arranjos dos elementos de $A = \{a,b,c,d\}$, tomados 3 a 3.
$(a,b,c),(a,b,d),(a,c,b),(a,c,d),(a,d,b),(a,d,c),$
$(b,a,c),(b,a,d),(b,c,a),(b,c,d),(b,d,a),(b,d,c),$
$(c,a,b),(c,a,d),(c,b,a),(c,b,d),(c,d,a),(c,d,b),$
$(d,a,b),(d,a,c),(d,b,a),(d,b,c),(d,c,a),(d,c,b)$. São $\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ arranjos.

• Exemplo: Exiba as combinações dos elementos de $A = \{a,b,c,d\}$, tomados 3 a 3.
$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}$ e $\{b,c,d\}$. São 4 combinações.

Observe que cada combinação de 3 elementos, por exemplo, $\{a,b,c\}$ gera-se 6 arranjos
$(a,b,c),(a,c,b),\ldots,(c,b,a),$
pois o número de permutações de um conjunto com 3 elementos é $3! = 6$.

Assim, dados m elementos, cada combinação de r elementos gera $r!$ arranjos, e

$$A_{m,r} = r!\,C_{m,r} \qquad \Longrightarrow \qquad C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{r!} = \frac{m!}{(m-r)!r!}.$$

- Exemplo 1: Vamos formar uma comissão de 3 membros em uma sala com 12 alunos. Quantas comissões podem ser formadas?

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220 \quad \text{comissões.}$$

Obs: aqui usamos combinação, pois a ordem dos membros da comissão não importa. É conjunto de pessoas.

Mas se na comissão há 1 presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro, quantas comissões podem ser formadas?

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320 \quad \text{comissões}$$

ou, pode calcular assim: $A_{12,3} = 3!C_{12,3} = 6 \times 220 = 1320$ comissões.

Obs: aqui usamos arranjo, pois a ordem dos membros da comissão importa. É uma sequência de pessoas.

- E se na classe só tiver 3 alunos?

$C_{3,3} = \dfrac{3!}{0!\,3!} = 1$ comissão. E $P_3 = 3! = 6$ comissões com presidente, secretário e tesoureiro.

• Exemplo 2: Quantos produtos podemos obter se tomarmos 3 fatores distintos escolhidos entre os números 2, 3, 5, 7 e 9?

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10 \quad \text{produtos.}$$

Os possíveis produtos são:
$2\times 3\times 5, \quad 2\times 3\times 7, \quad 2\times 3\times 9, \quad 2\times 5\times 7, \quad 2\times 5\times 9, \quad 2\times 7\times 9$
$3\times 5\times 7, \quad 3\times 5\times 9, \quad 3\times 7\times 9$ e $5\times 7\times 9$.

• Exemplo 3: Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números pares de 3 algarimos distintos podemos formar?

Note que,
números terminados pelo algarismo 2, $\_\,\_\,2$ são $A_{5,2}$,
números terminados pelo algarismo 4, $\_\,\_\,4$ são $A_{5,2}$,
números terminados pelo algarismo 6, $\_\,\_\,6$ são $A_{5,2}$.
Resposta: $3\times A_{5,2} = 3\times(5\times 4) = 60$ números pares.

- Exemplo 4: Considere a palavra FILTRO, que é composta das letras F, I, L, T, R, O.

1. Quantos anagramas existem para a palavra FILTRO?
   FILTRO, FILTOR, FILORT, FILOTR, ...
   Resposta: $P_6 = 6! = 720$ anagramas.
2. Quantos anagramas existem usando apenas 4 letras ?
   FILT, FILR, FILO, FITR, ...
   Resposta: $A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$
3. Quantos anagramas começam com a letra T ?
   T_ _ _ _ _
   Resposta: $P_5 = 5! = 120.$
4. Quantos anagramas começam por vogal?
   I_ _ _ _ _
   O_ _ _ _ _
   Resposta: $2 \times P_5 = 2 \times 5! = 2 \times 120 = 240.$

5. Quantos anagramas existem, se as vogais devem ficar juntas e no início do anagrama?
   IO_ _ _ _
   OI_ _ _ _
   Resposta: $2 \times P_4 = 2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$.
6. Quantos anagramas existem, se as vogais devem ficar juntas?
   Considerar IO ou OI como uma única letra e permutar com as outras 4 letras, ou seja P_5 para OI e P_5 para IO.
   Resposta: $2 \times P_5 = 2 \times 5! = 2 \times 120 = 240$.
7. Quantos anagramas existem, se as letras F, I, L devem ficar juntas?
   Considerar FIL, FLI, LFI, ... como uma única letra e permutar com as outras 3 letras, ou seja P_4 para cada opção, e são 3! opções.
   FIL_ _ _,   FLI_ _ _,   etc..
   Resposta: $3! \times P_4 = 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$.

• Exemplo 5: Considere 20 pessoas, destas, 5 são estudantes. De quantas forma podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:

1. nenhum membro seja estudante
   Resposta: $C_{15,10} = \binom{15}{10}$ comissões.
2. todos os estudantes participem das comissões
   Resposta: $C_{15,5} = \binom{15}{5}$ comissões.
3. haja exatamente um estudante na comissão
   Resposta: $5 \times C_{15,9} = 5 \times \binom{15}{9}$ comissões.
4. pelo menos um membro da comissão é estudante
   Podemos calcular o número total de comissões e subtrair o número de comissões que não há estudantes.
   Resposta: $C_{20,10} - C_{15,10}$ comissões.

• Exemplo 6: Considere uma criança que tem a opção de escolher 2 balas entre balas de abacaxi, de chocolate, de laranja e de morango, que estão dentro de uma sacola. Calcule o número de opções de escolha se:

1. ela retirar simultamente as 2 balas da sacola, e na sacola há apenas uma bala de cada sabor.
2. ela retirar uma bala da sacola, comer a primeira bala, retirar outra bala da sacola e comer a segunda bala. Na sacola há apenas uma bala de cada sabor.
3. na sacola há 4 pedaços de papel com cada sabor de bala escrito, a criança pega um papel, anota o sabor da bala, devolve o papel na sacola, pega um papel novamente e anota o sabor da bala. Ela tem direito a 2 balas dos sabores anotados.

Explique o uso de cada fórmula.