Lista de Exercicios para P1 - PAA

Profª Vitoria Zanon Gomes

1. Qual é o menor valor de n para que um algoritmo com tempo de execução igual a $100n^2$ seja mais rápido que um algoritmo cujo tempo de execução é 2n?

2. Além da velocidade, que outras medidas de eficiência poderiam ser usadas em uma configuração real?

3. Mostre um problema real no qual apenas a melhor solução servirá. Em seguida, apresente um problema em que baste uma solução que seja "aproximadamente" a melhor.

4. Considere o problema de busca:

Entrada: Uma sequência de n números A = $\langle$a1, a2, ..., an$\rangle$ e um valor v.
Saída: Um índice i tal que v = A[i] ou NULL, se v não aparecer em A.

Escreva o pseudocódigo para busca linear, que faça a varredura da sequência, procurando por v. Usando um invariante de laço, prove que seu algoritmo é correto. Certifique-se de que seu invariante de laço satisfaz as três propriedades necessárias.

5. Expresse a função $n^3/1000 + 100n^2 + 100n + 3$ em termos da notação O.

6. A ordenação por inserção pode ser expressa como um procedimento recursivo da maneira descrita a seguir. Para ordenar A[1 .. n], ordenamos recursivamente $A\,[1...n-1]$ e depois inserimos A[n] no arranjo ordenado A[$1...n-1$]. Escreva uma recorrência para o tempo de execução de pior caso dessa versão recursiva da ordenação por inserção.

7. Use invariante de laço para verificar a corretude do algoritmo Bubblesort.

8. Explique por que a declaração "O tempo de execução no algoritmo A é no mínimo $O(n^2)$" não faz sentido.

9. Demonstre que o(g(n)) $\cap \omega(g(n))$ é o conjunto vazio.

10. Demonstre que para quaisquer duas funções f(n) e g(n), temos f(n) = Θ(g(n)) se e somente se f(n) = O(g(n)) e f(n) = Ω(g(n)).

11. Mostre que, para quaisquer constantes reais a e b, onde b $>$ 0, $(n + a)^b = \Theta(n^b)$.

12. Seja $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, onde $a_d > 0$, um polinômio de grau d em n, e seja k uma constante. Use as definições das notações assintóticas para provar as propriedades a seguir:

- Se k $\geq$ d, então p(n) = O(n^k)
- Se k $\leq$ d, então p(n) = Ω(n^k)
- Se k = d, então p(n) = Θ(n^k)
- Se k $>$ d, então p(n) = o(n^k)
- Se k $<$ d, então p(n) = ω(n^k)

13. Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela a seguir, se A é O, o, Ω, ω ou Θ de B. Considere k $\geq$ 1, $\varepsilon > 0$ e c $>$ 1.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{sen\, n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

14. Organize as funções a seguir em ordem crescente (ou seja, $f_i = O(f_{i+1})$).

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$\left(\sqrt{2}\right)^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

15. Mostre que a solução de $T(n) = T(n - 1) + n$ é $O(n^2)$.

16. Vimos que a solução de $T(n) = 2T(n/2) + n$ é $O(n \lg n)$. Mostre que a solução dessa recorrência é também $\Omega(n \lg n)$.

17. Use cada um dos métodos vistos em sala de aula para resolução de recorrências para resolver a recorrência $T(n) = 4T(n/2) + n$. Foi possível resolvê-la pelo método mestre?

18. Use uma árvore de recursão para dar uma solução assintoticamente justa para a recorrência $T(n) = T(n - a) + T(a) + cn$, onde $a \geq 1$ e $c > 0$ são constantes. Use o método de substituição para verificar sua resposta.

19. Use o método mestre para resolver a recorrência $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

20. O método mestre pode ser aplicado à recorrência $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$? Justifique sua resposta. Dê um limite superior assintótico para essa recorrência.

21. Use o método mestre para resolver a recorrência $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

22. Resolva as seguintes recorrências usando o método que preferir (considere $T(n)$ constante para n suficientemente pequeno):

- $T(n) = 4T(n/3) + n \lg n$
- $T(n) = 2T(n/2) + n/\lg n$
- $T(n) = 3T(n/3) + n/\lg n$

- $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \sqrt{n}$
- $T(n) = 3T(n/3 - 2) + n/2$
- $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$
- $T(n) = T(n - 1) + 1/n$
- $T(n) = T(n - 1) + \lg n$