6ª. Lista de Cálculo I – Computação

Livro Cálculo 1 – James Stewart – 7ª. Edição

Página 261 e 262 – exercícios: 1, 3, 5, 9, 11, 15, 17, 19, 25, 34 e 35.

Página 269 e 270 – exercícios: 1, 5, 9, 11, 13, 15, 16, 19, 20, 25, 33, 39, 46, 49 e 51.

Página 278 – exercícios: 9, 11, 13, 17, 21, 23, 25, 31, 33, 35, 41, 43, 45, 49, 51, 53, 55, 59 e 61.

Página 286 – exercícios: 3, 5, 9, 13, 15, 19, 23, 31, 39 e 45.

EXEMPLO 6 Demonstre a identidade $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Embora não seja necessário o cálculo para demonstrar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos os valores de x. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de C, fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ exatamente). Então

$$C = f(1) = \text{tg}^{-1}1 + \text{cotg}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

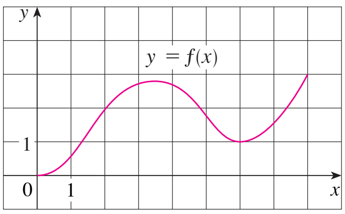
Assim, $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

4.2 Exercícios

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$
4. $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?
6. Seja $f(x) = \text{tg}\, x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?
7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9–12 Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $[0, 2]$
10. $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$
11. $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$, $[1, 4]$

13–14 Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo dado. Desenhe o gráfico da função, a reta secante passando pelas extremidades, e a reta tangente em $(c, f(c))$. A reta secante e a reta tangente são paralelas?

13. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$
14. $f(x) = e^{-x}$, $[0, 2]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?
16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17-18 Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

17. $2x + \cos x = 0$
18. $x^3 + e^x = 0$

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.
20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.
21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem, no máximo, três raízes reais.
    (b) Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.
22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
    (b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
    (c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?
23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno $f(4)$ pode ser?
24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$. [*Dica*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e é derivável em toda parte. Demonstre que para todo o número positivo b, existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b.$$

30. Se $f'(x) = c$ (c é uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Sejam $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2), \qquad x \geqslant 0.$$

33. Demonstre a identidade.

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Ás 14 h da tarde o velocímetro do carro mostra 50 km/h. Às 14 h 10, ele mostra 65 km/h. Prove que em algum momento entre 14 h e 14 h 10 a aceleração era exatamente de 90 km/h².

35. Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade. [*Dica:* Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde g e h são as duas posições dos corredores.]

36. Um número a é chamado **ponto fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todos os números reais x, então f tem no máximo um ponto fixo.

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

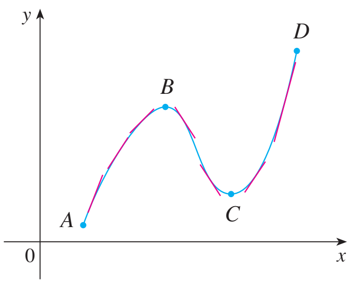


FIGURA 1

Vamos abreviar o nome deste teste para Teste C/D.

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos forneçam informações sobre $f(x)$.

O que f' diz sobre f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

DEMONSTRAÇÃO

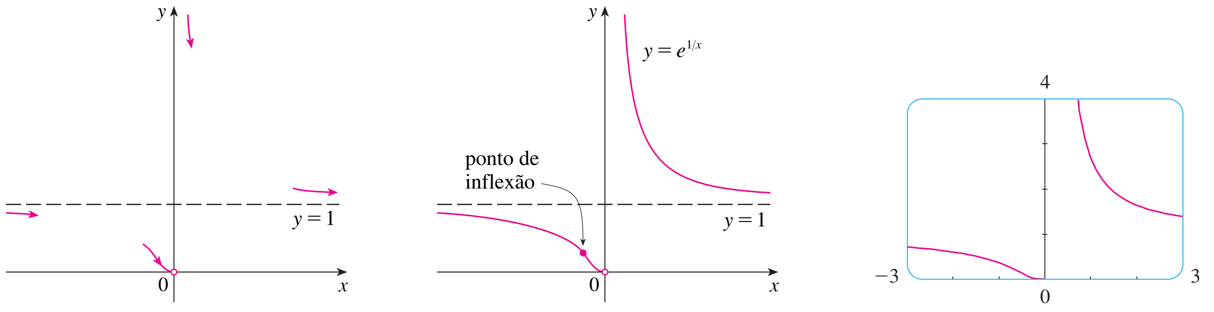
(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) > 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da Equação 1 é positivo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$



(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação computacional

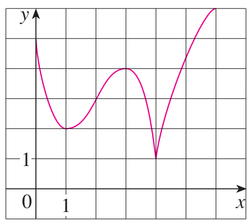
FIGURA 13

4.3 Exercícios

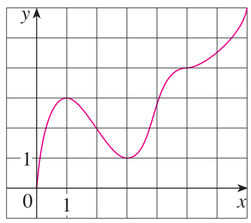
1–2 Usar o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:

(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.
(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.

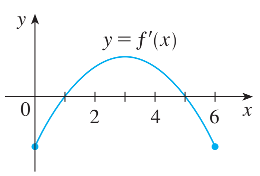


3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

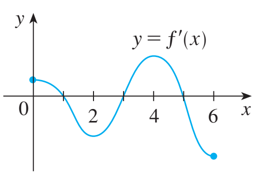
4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5-6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?

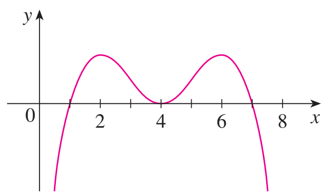
5.



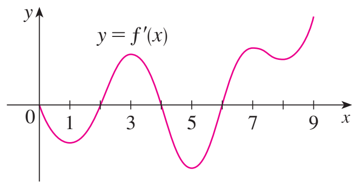
6.



7. Em cada item, indique as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Dê razões para suas escolhas.
(a) Esta curva é o gráfico de f.
(b) Esta curva é o gráfico de f'.
(c) Esta curva é o gráfico de f''.



8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo locais de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2\,\text{sen}\, x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando os Testes da Primeira e da Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que podemos dizer sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que podemos dizer sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

24. Assíntota vertical $x = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < -2$,
$f'(x) < 0$ se $x > -2$ $(x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$, ponto de inflexão $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $x \neq 2$

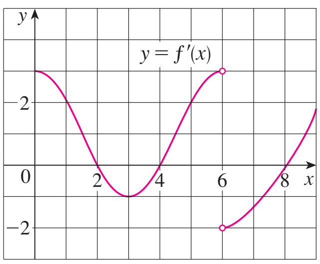
28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x

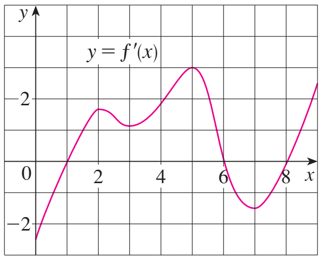
30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
(a) Esboce um gráfico possível de f.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? E decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo local? E no mínimo local?
(c) Em que intervalos f é côncava para cima? E côncava para baixo?
(d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44
(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

34. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

38. $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

39. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

40. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $S(x) = x - \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

45–52
(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais.
(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56
(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

4.4 Exercícios

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \quad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)p(x)]$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}[h(x)p(x)]$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}[p(x)q(x)]$

3. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)-p(x)]$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}[p(x)-q(x)]$

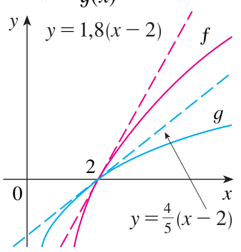
(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}[p(x)+q(x)]$

4. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)]^{p(x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to a}[h(x)]^{p(x)}$

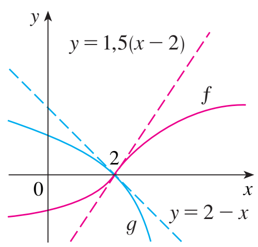
(d) $\displaystyle\lim_{x\to a}[p(x)]^{f(x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to a}[p(x)]^{q(x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Use os gráficos de f e g e suas retas tangentes em (2, 0) para encontrar $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7-66 Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

7. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2}\frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

13. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

15. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos 2\theta}$

16. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{cossec}\theta}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{sen}\pi x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$

21. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t^8-1}{t^5-1}$

22. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{8^t-5^t}{t}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

24. $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x-x}{x^3}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{x}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x3^x}{3^x-1}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos\pi x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x+x-1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,e^{-x/2}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{cotg} 2x\operatorname{sen} 6x$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln x$

45. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x^2}$

46. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\operatorname{tg}(1/x)$

47. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\ln x\operatorname{tg}(\pi x/2)$

48. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}\cos x\sec 5x$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

50. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{cossec} x-\operatorname{cotg} x)$

51. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)$

53. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$

54. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}[\ln(x^7-1)-\ln(x^5-1)]$

55. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} 2x)^x$

57. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

58. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

59. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$

61. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

62. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}$

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

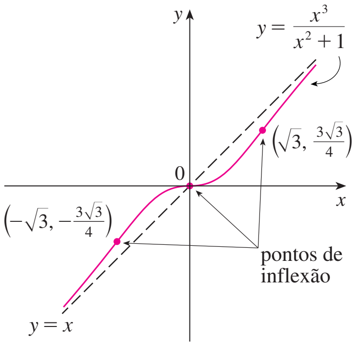


FIGURA 13

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13.

4.5 Exercícios

1–54 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x(x - 4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

15. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x - 2}$

21. $y = (x - 3)\sqrt{x}$

22. $y = 2\sqrt{x} - x$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \text{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \,\text{tg}\, x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \text{tg}\, x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \frac{1}{2}x - \text{sen}\, x, \quad 0 < x < 3\pi$

38. $y = \sec x + \text{tg}\, x, \quad 0 < x < \pi/2$

39. $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{2 + \cos x}$

41. $y = \text{arctg}(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x}\,\text{sen}\, x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = x - \ln x$

46. $y = e^{2x} - e^x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\text{sen}\, x)$

50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

54. $y = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

55. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

56. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico mostra sobre a força?

57. Um modelo para dispersão de um rumor é dado pela equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são constantes positivas.

(a) Quando a metade da população terá ouvido um rumor?

(b) Quando ocorre a maior taxa de dispersão do boato?

(c) Esboce o gráfico de p.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com