$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{x \cdot x \cdot (1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ⓒ $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(4x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(3x) \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(4x)} = \lim_{x\to 0} 3x \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)}$$

$$\cdot \frac{4x}{\operatorname{sen}(4x)} \cdot \frac{1}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x}}{4\cancel{x}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}} =$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(3x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}} = \frac{3}{4}$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)} = \frac{3}{4}$.

② Calcule os limites

ⓐ $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ ; ⓑ $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$. ⓒ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

ⓐ $$\overset{(*)}{\lim_{x\to +\infty}} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{u\to 0^+} (1+u)^{\frac{2}{u}} = \lim_{u\to 0^+} \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^2 =$$

Chame de $u = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{u}$, qdo $x \to +\infty \Rightarrow u \to 0^+$. (*)

$$= \left[\lim_{u\to 0^+} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^2 = e^2.$$

ⓑ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} = e.1 = e.$$

c) Faça $u = 2x$. Daí, $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$.

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{u}{2}$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

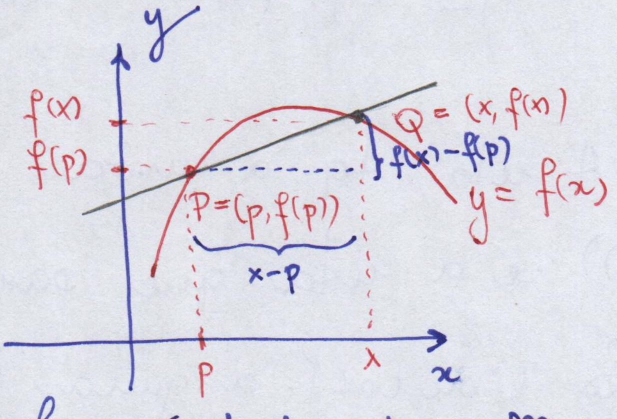
Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{\frac{u}{2}} = \lim_{u\to 0} (e^{u}-1).\frac{2}{u} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} . 2 = 2\lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 2\underbrace{\ln(e)}_{=1} = 2.$$

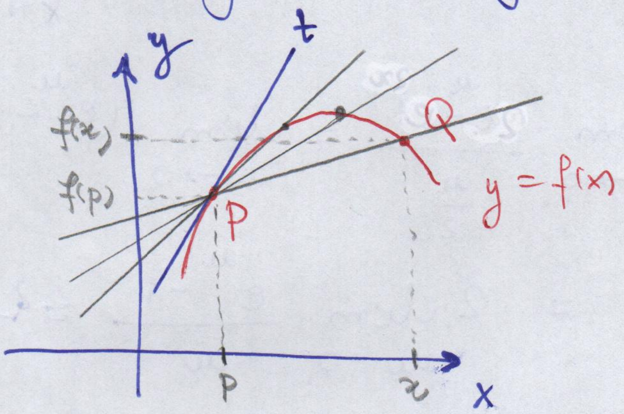
# Derivadas

**Tangentes:** Considere o problema de definir a reta tangente ao gráfico de f em um pto $P = (p, f(p))$. Para resolvermos esse problema, consideramos um pto vizinho $Q = (x, f(x))$, $x \neq p$ e calculamos a inclinação (ou coef. angular) da reta secante passando por P e Q.




Essa inclinação é dada por $m_x = \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Note que ao fazermos o pto Q tender ao pto P, estamos fazendo x tender a p e consequentemente, a reta secante passando por P, Q está tendendo a uma reta tangente ao gráfico de f no pto (p, f(p)).




Olhando para os coef. angulares das retas secantes, qdo fazemos x tender a p, estamos calculando o limite

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}}$$

Se esse limite existe e é igual a m, então m é coeficiente angular (ou inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no pto (p, f(p)). Portanto, temos a seguinte definição:

Definição: A reta tg à curva $y = f(x)$ em um pto $P = (p, f(p))$ é a reta que passa por P e que tem inclinação (ou coef. angular) $m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ desde que esse limite exista.

Exemplos: 1) Encontre a equação da reta tg à parábola $y = x^2$ no pto $P = (1, f(1)) = (1,1)$.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um pto sobre o gráfico de $y = x^2$.

A eq. da reta tg. t nesse pto é dada por:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0),}$$

em que m é a inclinação dessa reta, ou seja,

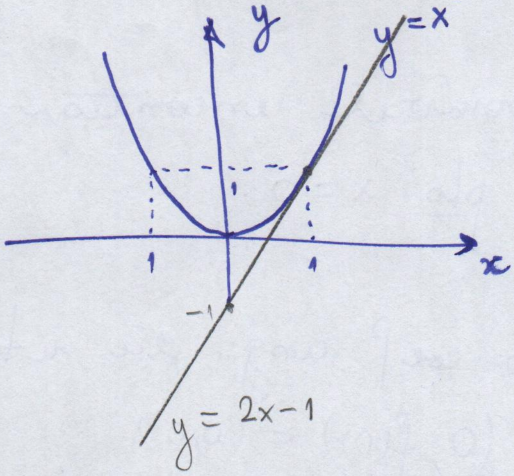
se $f(x) = x^2$, então

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Portanto, a eq. dessa reta é:

$$y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$




$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

2) Encontre a eq. da reta tg ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no pto $(4, 2)$.

Calculamos a inclinação da reta tg ao gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$ no pto $(4,2)$.

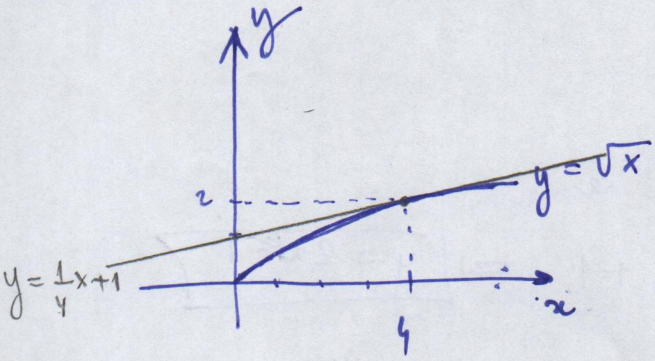
$$m = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

Portanto, a reta tg tem equação:

$$y-2 = \frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - 1 + 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x+1}$$




$x=0 \Rightarrow y=1$

$x=4 \Rightarrow y=2$

3 Verifique se é possível encontrar a eq. da reta tg a $f(x)=|x|$ no pto $x=0$.

Devemos calcular o coef. ang. da reta tangente (se é que ela existe) no pto $(0,f(0))=(0,0)$.

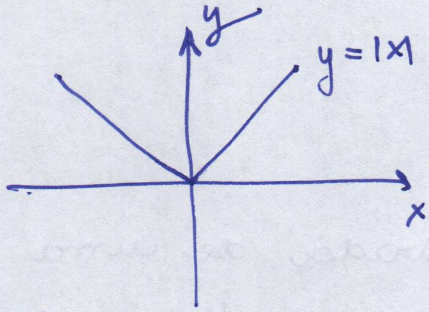
$$m = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Note que $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$

e $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$

Logo, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$

Portanto, não existe reta tg. ao gráfico de $f(x) = |x|$ no pto $(0, 0)$.




Obs: Apresentaremos agora, uma outra forma de se escrever a inclinação da reta tg, que em alguns casos pode ser mais fácil de se trabalhar:

Fazemos primeiramente a seguinte mudança de variável: $x - p = h$.

Logo, $\boxed{x = p + h}$ e qdo $x \to p$, tem-se $h \to 0$.

Assim, podemos escrever

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Encontre a inclinação da reta tangente ao gráfico f no pto $(a, f(a))$, $a \neq 0$.

21.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{a}-\cancel{a}-h}{(a+h)a}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\cancel{h}}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Vamos agora definir a derivada de uma fç $f(x)$ em um pto $a$.

Definição: A derivada de uma função $f$ em um pto $a$, denotada por $f'(a)$ (lê-se: "$f$ linha de $a$"), é:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$ ou equivalentemente,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ se o limite existe.

Portanto, $f'(a)$, ou seja a derivada da fç $f$ no pto $a$, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no pto $(a, f(a))$.

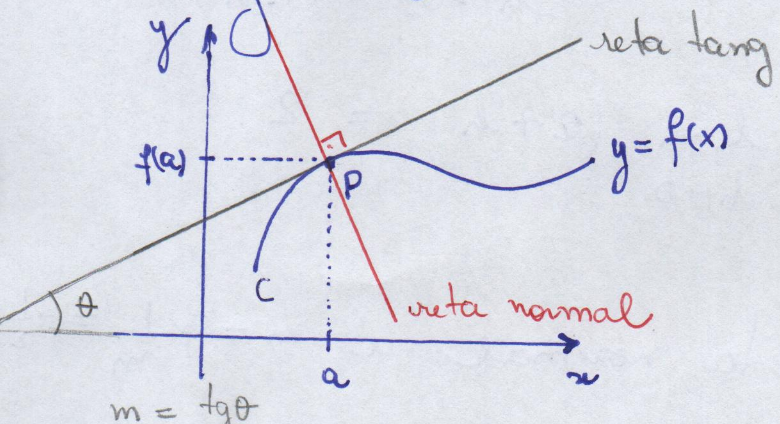
Logo, a eq. da reta tg. é dada por:

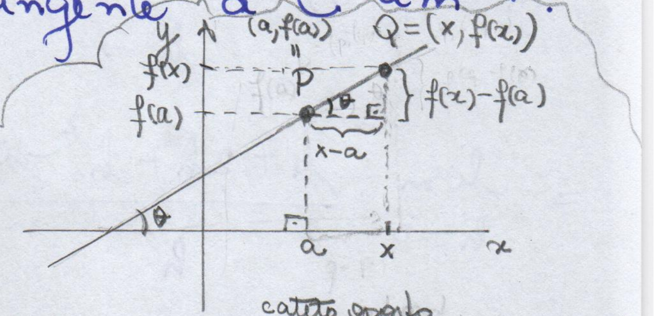
$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

Nos exemplos 1 e 2 vimos que se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então $f'(1) = 2$ e $g'(4) = \frac{1}{4}$.

# Reta Normal

Seja C o gráfico de uma fç $y = f(x)$ e $P = (a, f(a))$ um pto de C. A reta normal à C em P é a reta que passa por P e é perpendicular (forma um ângulo de $90°$) à reta tangente à C em P.




$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hip}}}{\frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip}}} = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat adj}}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$$

Para determinarmos a eq. da reta normal, precisamos de um pto (já temos o pto P) e da sua inclinação $m'$ que é dada por $m' = -\frac{1}{m}$, em que m é a inclinação (ou coef. ang) da reta tangente à C em P e $m \neq 0$.

__Obs__: Note que $m' = tg(\theta + 90°) = \frac{sen(\theta + 90°)}{cos(\theta + 90°)} =$

$$= \frac{sen\theta \, \underbrace{cos 90°}_{0} + cos\theta \, \underbrace{sen 90°}_{1}}{cos\theta \, \underbrace{cos 90°}_{0} - sen\theta \, \underbrace{sen 90°}_{1}} = \frac{cos\theta}{-sen\theta} = -\frac{1}{\frac{sen\theta}{cos\theta}} = -\frac{1}{tg\theta} = -\frac{1}{m}.$$

Exemplo: Determine a equação da reta normal ao gráfico da parábola $f(x) = x^2 + 1$, qdo $x = 2$.

Note que se $x=2$, então $f(x) = f(2) = 2^2+1 = 5$, ou seja, $P=(2,5)$.

Calculemos $m = f'(2)$ = coef. ang. da reta tangente ao gráfico de $f$ no pto $P=(2,5)$.

$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+1-5}{h} =$$

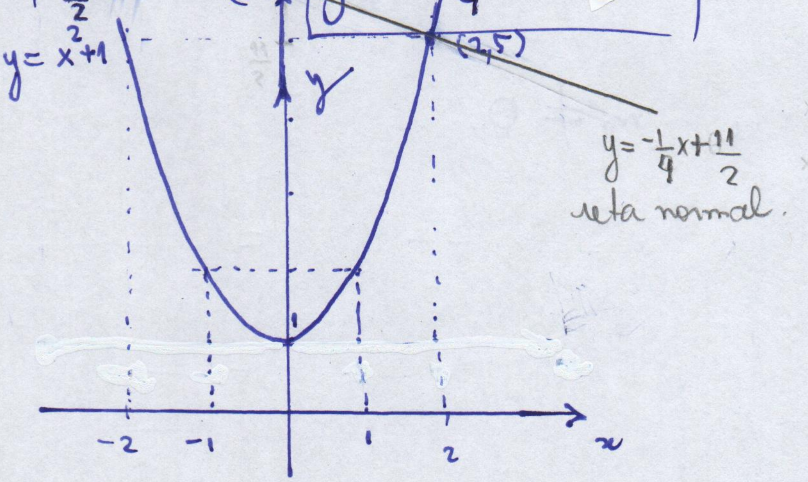
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4}+4\cancel{h}+h^{\cancel{2}}-\cancel{4}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (4+h) = 4.$$

Portanto, o coef. angular da reta normal é $m = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{4}$.

Assim a eq. da reta normal ao gráfico de $f$ no pto $P=(2,\underset{f(2)}{5})$ é:

$$y - f(2) = m'(x-2) \iff y-5 = -\frac{1}{4}(x-2) \iff$$

$$\iff y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 5 \iff \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}}$$




| $x$ | $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{11}{2}$ |
| 2 | 5 |

## Diferenciabilidade e Continuidade

**Função derivada** Definimos anteriormente a derivada de uma fç em um pto a fixo, como

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Se fizermos o pto a variar, obtemos uma nova função, chamada de fç derivada de f e definida por:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}.$$

Exemplos: Calcule a fç derivada para:

(a) $f(x) = x^3 - 2x$ ; (b) $g(x) = \sqrt{x-1}$.

(a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^3}^{(x+h)^2(x+h)} - 2(x+h) - (x^3 - 2x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{2x} - 2h - \cancel{x^3} + \cancel{2x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3x\overset{0}{\cancel{h}} + \overset{0}{\cancel{h^2}} - 2) =$$

$$= 3x^2 - 2.$$

Portanto, $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2}$

(b) $$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h\cancel{-1}\cancel{-x}\cancel{+1}}{h\left(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Portanto, $\boxed{g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}$.

Observação: Denotando $y = f(x)$, temos algumas notações alternativas p/ as derivadas:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Definição: Uma fç $f$ é dita diferenciável (ou derivável) em $a$ se $f'(a)$ existir e é dita diferenciável em um intervalo aberto $I$ se ela for diferenciável em cada pto desse intervalo.

Exemplo: Calcule os ptos em que a fç $f(x) = |x|$ é diferenciável.

Devemos encontrar os ptos $x$ onde $f'(x)$ existe. Para isso, calculemos $f'(x)$.

(i) Suponhamos $x > 0$ e considere $h$ suf. pequeno tq. $x+h > 0$, daí,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\overbrace{x+h}^{>0}|-|\overbrace{x}^{>0}|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h}=1.$$

Portanto, se $x>0$, então $f'(x)=1$; ou seja, $f$ é diferenciável em $x>0$.

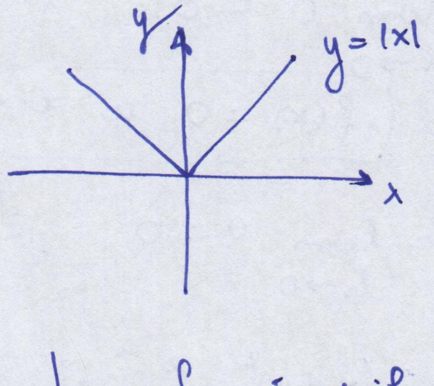
(ii) Suponhamos que $x<0$ e considere $h$ suf. pequeno tal que $x+h<0$, daí,

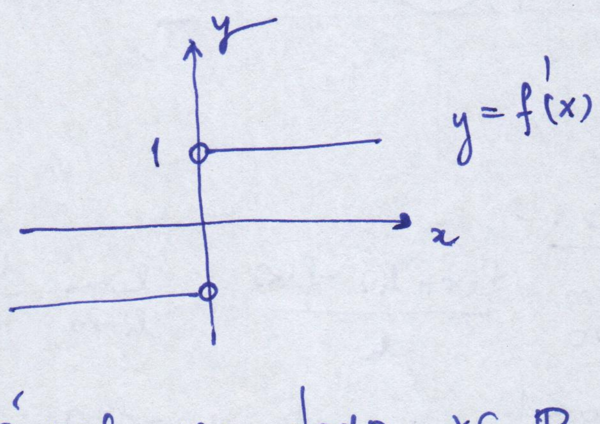
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\overbrace{x+h}^{<0}|-|\overbrace{x}^{<0}|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{x}-h+\cancel{x}}{h}=-1.$$

Portanto, $f'(x)=-1$, se $x<0$, ou seja, $f$ é diferenciável em $x<0$.

Agora, para $x=0$ já mostramos que $\nexists\, f'(0)$ (pois o gráfico de $f$ forma um bico em $x=0$).




Portanto, $f$ é diferenciável em todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.