Fictitious Play

山岸　敦

2014/6/28

構成

- Fictitious Play とは？
- シミュレーション結果の解説
  - Matching Pennies Game
  - Coordination Game
- Python コードの解説

Fictitious Play の解説

- Ficititious play では、相手の前回の行動により、「相手がどの手をどんな確率で出してくるか」についての予想（信念）が変化する状況が想定されます。
- さらにどの時点でも、プレイヤーは「その時点での自信の信念に照らして最適」な行動をするとします。このとき、各人の信念の動きはどうなるのでしょうか？
- 信念の推移を定式化すると、（導出は省略しますが）

$x_0(t)$ は

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \frac{1}{t+2}(a_1(t) - x_0(t))$$

と再帰的に書くことができます。

Fictitious Play の解説

- Ficititious play では、相手の前回の行動により、「相手がどの手をどんな確率で出してくるか」についての予想（信念）が変化する状況が想定されます。
- さらにどの時点でも、プレイヤーは「その時点での自信の信念に照らして最適」な行動をするとします。このとき、各人の信念の動きはどうなるのでしょうか？
- 信念の推移を定式化すると、（導出は省略しますが）

  $x_0(t)$ は

$$x_0(t+1) = x_0(t) + \frac{1}{t+2}(a_1(t) - x_0(t))$$

  と再帰的に書くことができます。

Fictitious Play の解説

- Ficititious play では、相手の前回の行動により、「相手がどの手をどんな確率で出してくるか」についての予想（信念）が変化する状況が想定されます。
- さらにどの時点でも、プレイヤーは「その時点での自信の信念に照らして最適」な行動をするとします。このとき、各人の信念の動きはどうなるのでしょうか？
- 信念の推移を定式化すると、（導出は省略しますが）

  $x_0(t)$ は

  $$x_0(t+1) = x_0(t) + \frac{1}{t+2}(a_1(t) - x_0(t))$$

  と再帰的に書くことができます。

Matching Pennies Game の解説

- Matching Pennies Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

です。ナッシュ均衡は両戦略に確率 (0.5,0.5）ずつ付与する混合戦略のみであることがわかります。

- お互いの信念が (0.5,0.5) に収斂するならば、ナッシュ均衡が実現する、と考えてよいでしょう
- 本当にそうなるか、シミュレーションした結果を示します。

Matching Pennies Game の解説

- Matching Pennies Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

  です。ナッシュ均衡は両戦略に確率 (0.5,0.5）ずつ付与する混合戦略のみであることがわかります。

- お互いの信念が (0.5,0.5) に収斂するならば、ナッシュ均衡が実現する、と考えてよいでしょう
- 本当にそうなるか、シミュレーションした結果を示します。

Matching Pennies Game の解説

- Matching Pennies Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

  です。ナッシュ均衡は両戦略に確率 (0.5,0.5）ずつ付与する混合戦略のみであることがわかります。

- お互いの信念が (0.5,0.5) に収斂するならば、ナッシュ均衡が実現する、と考えてよいでしょう
- 本当にそうなるか、シミュレーションした結果を示します。

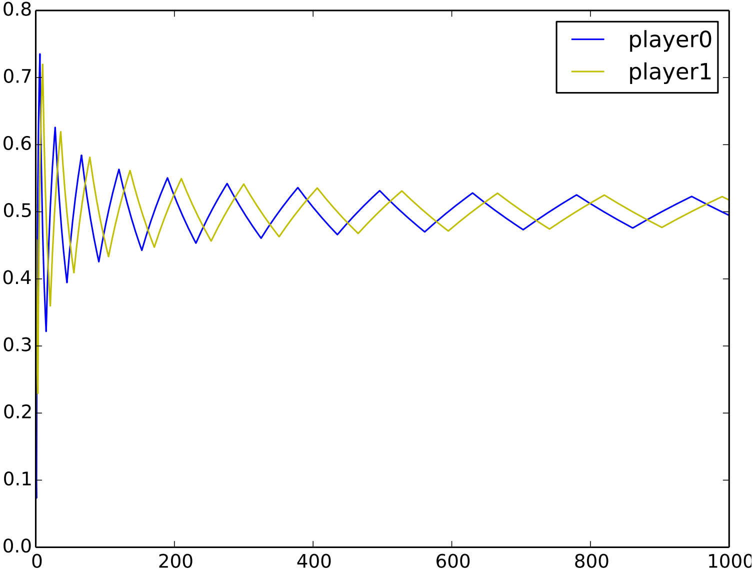


Figure : Matching Pennies Game

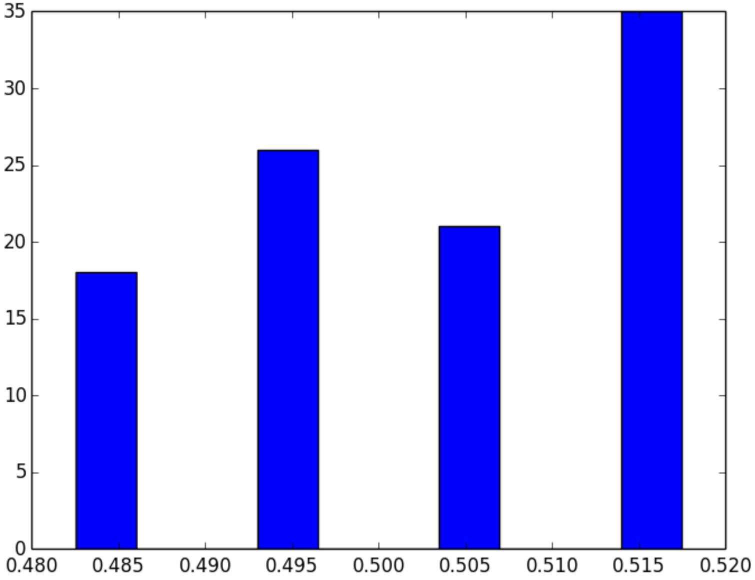


Figure : Matching Pennies Game

Coordination Game の解説

- Coordination Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (0,3) \\ (3,0) & (2,2) \end{pmatrix}$$

です。ナッシュ均衡は純粋戦略の組（0,0)、(1,1) および、２人とも確率 (2/3,1/3）ずつ付与する混合戦略の３つです。

- 先程とちがって、ナッシュ均衡が複数あります。このケースではどのようなプレイがなされるのでしょうか
- シミュレーションした結果を示します。

Coordination Game の解説

- Coordination Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (0,3) \\ (3,0) & (2,2) \end{pmatrix}$$

です。ナッシュ均衡は純粋戦略の組（0,0)、(1,1) および、２人とも確率 (2/3,1/3）ずつ付与する混合戦略の３つです。

- 先程とちがって、ナッシュ均衡が複数あります。このケースではどのようなプレイがなされるのでしょうか
- シミュレーションした結果を示します。

Coordination Game の解説

- Coordination Game の利得行列は

$$\begin{pmatrix} (4,4) & (0,3) \\ (3,0) & (2,2) \end{pmatrix}$$

  です。ナッシュ均衡は純粋戦略の組（0,0)、(1,1) および、２人とも確率 (2/3,1/3）ずつ付与する混合戦略の３つです。
- 先程とちがって、ナッシュ均衡が複数あります。このケースではどのようなプレイがなされるのでしょうか
- シミュレーションした結果を示します。

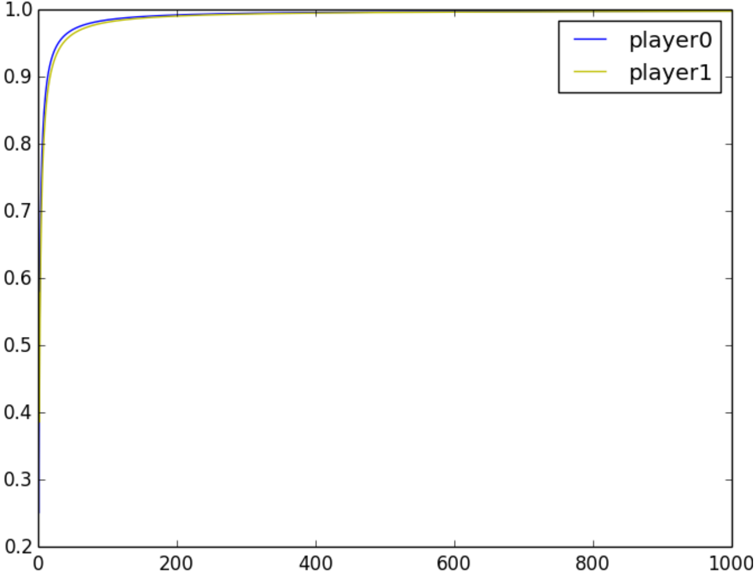
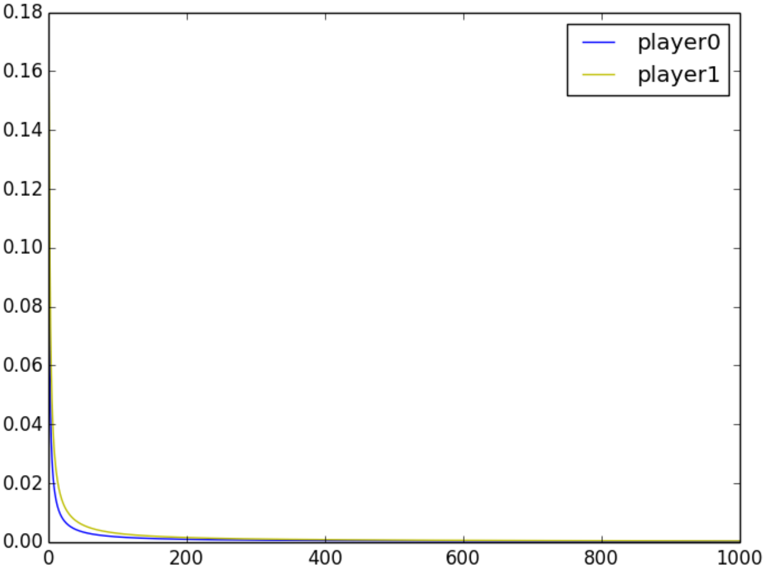


Figure : Coordination Game


0.18
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
200
400
600
800
1000
player0
player1

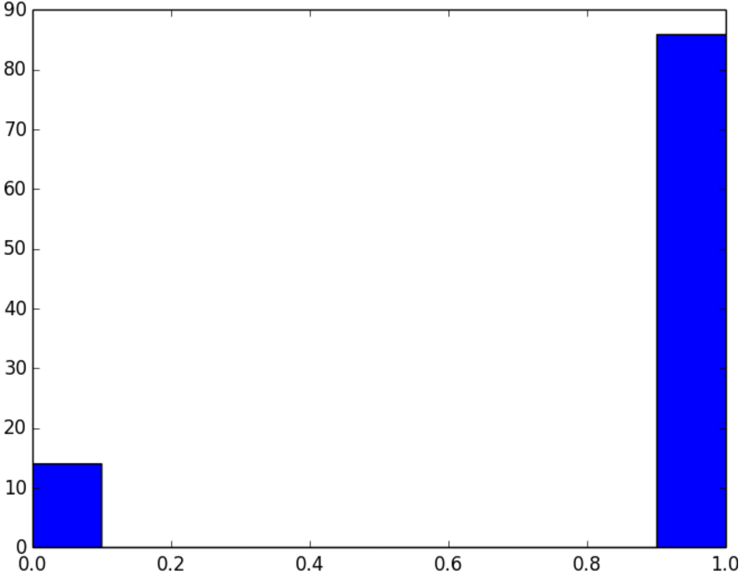


Figure : Coordination Game

補足:Coordination Game

- 各プレイヤーは「相手が 2/3 より大きい確率で 0 をプレイするなら 0 を、それが 2/3 より小さければ 1 を」必ず選択します。よって、混合戦略均衡で、たまたまお互いに 0 ないし 1 を取ればそちらの均衡に移るとわかります。ヒストグラムを眺めると、混合戦略に収斂した回数はゼロです。
- 「両者にとって、相手が均衡(純)戦略を取る確率が p 以上の時、自分もその均衡(純)戦略を取るのが最適である」ならば、その戦略の組み合わせは p-ドミナントと呼ばれます。
- (0,0) は 2/3 ドミナント、(1,1) は 1/3 ドミナントです。一般に「相手が均衡(純)戦略を取る確率がより低くても最適」という意味で p が小さいほうが安全で起こりやすい均衡と予想されます。
- ヒストグラムを眺めると、(0,0) 均衡と比して (1,1) 均衡がプレイされる頻度が圧倒的に大きいですが、これによりある(それなりにもっともらしい)信念形成過程を仮定した下で p ドミナントの性質が確認できた、と言えると思います。

補足:Coordination Game

- 各プレイヤーは「相手が 2/3 より大きい確率で 0 をプレイするなら 0 を、それが 2/3 より小さければ 1 を」必ず選択します。よって、混合戦略均衡で、たまたまお互いに 0 ないし 1 を取ればそちらの均衡に移るとわかります。ヒストグラムを眺めると、混合戦略に収斂した回数はゼロです。
- 「両者にとって、相手が均衡(純)戦略を取る確率が p 以上の時、自分もその均衡(純)戦略を取るのが最適である」ならば、その戦略の組み合わせは p-ドミナントと呼ばれます。
- (0,0) は 2/3 ドミナント、(1,1) は 1/3 ドミナントです。一般に「相手が均衡(純)戦略を取る確率がより低くても最適」という意味で p が小さいほうが安全で起こりやすい均衡と予想されます。
- ヒストグラムを眺めると、(0,0) 均衡と比して (1,1) 均衡がプレイされる頻度が圧倒的に大きいですが、これによりある(それなりにもっともらしい)信念形成過程を仮定した下で p ドミナントの性質が確認できた、と言えると思います。

補足:Coordination Game

- 各プレイヤーは「相手が 2/3 より大きい確率で 0 をプレイするなら 0 を、それが 2/3 より小さければ 1 を」必ず選択します。よって、混合戦略均衡で、たまたまお互いに 0 ないし 1 を取ればそちらの均衡に移るとわかります。ヒストグラムを眺めると、混合戦略に収斂した回数はゼロです。
- 「両者にとって、相手が均衡（純）戦略を取る確率が p 以上の時、自分もその均衡（純）戦略を取るのが最適である」ならば、その戦略の組み合わせは p-ドミナントと呼ばれます。
- (0,0) は 2/3 ドミナント、(1,1) は 1/3 ドミナントです。一般に「相手が均衡（純）戦略を取る確率がより低くても最適」という意味で p が小さいほうが安全で起こりやすい均衡と予想されます。
- ヒストグラムを眺めると、(0,0) 均衡と比して (1,1) 均衡がプレイされる頻度が圧倒的に大きいですが、これによりある（それなりにもっともらしい）信念形成過程を仮定した下で p ドミナントの性質が確認できた、と言えると思います。

補足:Coordination Game

- 各プレイヤーは「相手が 2/3 より大きい確率で 0 をプレイするなら 0 を、それが 2/3 より小さければ 1 を」必ず選択します。よって、混合戦略均衡で、たまたまお互いに 0 ないし 1 を取ればそちらの均衡に移るとわかります。ヒストグラムを眺めると、混合戦略に収斂した回数はゼロです。
- 「両者にとって、相手が均衡（純）戦略を取る確率が p 以上の時、自分もその均衡（純）戦略を取るのが最適である」ならば、その戦略の組み合わせは p-ドミナントと呼ばれます。
- (0,0) は 2/3 ドミナント、(1,1) は 1/3 ドミナントです。一般に「相手が均衡（純）戦略を取る確率がより低くても最適」という意味で p が小さいほうが安全で起こりやすい均衡と予想されます。
- ヒストグラムを眺めると、(0,0) 均衡と比して (1,1) 均衡がプレイされる頻度が圧倒的に大きいですが、これによりある（それなりにもっともらしい）信念形成過程を仮定した下で p ドミナントの性質が確認できた、と言えると思います。

Matching Pennies Game:コードの解説

- まずは必要な物を import し、利得を nparray で設定します。これを用いると後々期待利得の計算などがラクになります。

```
from __future__ import division
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np



#defining variables and functions that are useful

payoff_0 = np.array([[1,-1],[-1,1]])
payoff_1 = np.array([[-1,1],[1,-1]])
```

Matching Pennies Game: コードの解説

- 次に、必要な関数を定義していきます。ついでに、初期信念もここで設定しています。

```
def set_intbelief():
int_belief = random.uniform(0,1)
return  np.array([1-int_belief,int_belief])
 # belief about the opponent's actions

belief0 = set_intbelief()
belief1 = set_intbelief()

def expected_value(payoff,beliefs):
return np.dot(payoff,beliefs)
# returns expected values of each action as a vector
```

Matching Pennies Game: コードの解説

- 引き続き、必要な関数を定義していきます。あと、後にグラフを書くのに使うリスト Trajectory を設定しています。

```
def take_action(x)
: # this takes a vector as an argument

if x[0] > x[1]:
return 0
elif x[0] < x[1]:
return 1
else:
return random.randint(0,1)

# lists used later to draw the graph
trajectory0 = [belief0[1]]
trajectory1 = [belief1[1]]
```

Matching Pennies Game: コードの解説

- for 文で、ゲームをプレイ。信念の軌跡は Trajectory に保存

```
for i in range(1000):

ev0 = expected_value(payoff_0,belief0)
ev1 = expected_value(payoff_1,belief1)

action0 = take_action(ev0)
action1 = take_action(ev1)

# updating beliefs
m = belief0[1] + (action1 - belief0[1])/(i + 2)
n = belief1[1] + (action0 - belief1[1])/(i + 2)
belief0 = np.array([1-m,m])
belief1 = np.array([1-n,n])

trajectory0.append(belief0[1])
trajectory1.append(belief1[1])
```

Matching Pennies Game: コードの解説

- 描画します。#を取ると画像が保存できます。

```
plt.plot(trajectory0, 'b-', label='player0')
plt.plot(trajectory1, 'y-', label='player1')
plt.legend()
#plt.savefig
#("fictitious_graph1.0.png"
,bbox_inches="tight",pad_inches=0)

plt.show()
```

- ヒストグラムもほぼ同様のプログラムです。このプログラムを、さらに for 文でメタ的に包み込む形になります。

まとめ

- 二種類のゲームをプレイさせて、どんな戦略の組が均衡になるか調べることができます。今回僕が試したゲーム以外では、永遠に均衡にたどり着かないケースもありそうです。
- ヒストグラムを描くときに for ループを二重にするという原始的手法を用いましたが、処理回数が指数的に増加しているのでもっさりしています。どう改善できるのでしょうか…
- 2 人 2 戦略ゲームについては、それなりに一般性の高いコードが書けたと思います。しかし、ここから n 人、n 戦略へと拡張するならば複雑性が増し、class を定義して整理していく必要が生まれそうです。
- 今回は、class については逆に複雑になる＋恩恵が薄い気がしたので避けましたが、もう少し複雑なバージョンを class で書いて将来的には使いこなせるように練習したい。