2022 제 1 회 미적확통컵 문제지

수학 영역

성명		수험번호	2	0	2	2	—	1	2	2	4

○ 문제지의 해당란에 성명을 정확히 기재하시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

희망의 보름달 휘영청 떠오를 때까지

○ 대회 시작 전에 작성된 코드를 사용하는 것은 가능하나, 대회 중 응시자끼리 풀이를 공유하면 안 됩니다.

○ 총 12 문항이며, 모든 문항의 배점은 100 점입니다.

○ 대회는 300 분 (5 시간, 12 월 24 일 10:00 ~ 15:00) 동안 진행됩니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 선택과목 페이지 안내

※ 대회가 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

미적확통컵

○ 문제지에 모든 문제가 있는지 확인하시오.

○ 문제는 각 과목별로 난이도 순으로 정렬되어 있습니다.

○ 모든 문제의 메모리 제한은 1024 MB 입니다.

과목	문제 번호	문제 이름
미적분	A	연속인가? ?
	B	수열의 극한값
	C	함수와 최소 스패닝 트리
	D	다항함수의 적분과 쿼리
	E	연립방정식
	F	이차함수와 직선
확률과 통계	G	균등분포와 정규분포
	H	방향 정하기
	I	빙고
	J	살얼음판 걷기
	K	당근과 채찍
	L	이항분포에서 가장 큰 직사각형

A. 연속인가? ? [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

실수 t 에 대하여, 함수 $f(x)$ 가 $x=t$ 에서 정의되어 있고, $\lim_{x\to t} f(x) = f(t)$ 인 경우

"$f(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이다"라고 한다. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x \le k) \\ cx+d & (x > k) \end{cases}$ 가 주어질 때, 이 함수가 $x=k$ 에서 연속인지 판별하자.

입력

첫 번째 줄에 정수 k 가 주어진다. $(-10^7 \le k \le 10^7)$

두 번째 줄에 정수 a, b, c, d 가 공백으로 구분되어 주어진다. $(-10^7 \le a, b, c, d \le 10^7;\ a, c \ne 0)$

출력

$f(x)$ 가 $x=k$ 에서 연속이라면, Yes 와 $f(k)$ 의 값을 공백으로 구분하여 출력하고, 아니라면 No 를 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 6 2 5 4	Yes 14
-7 -9 -6 -7 -8	No

B. 수열의 극한값 [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

초항 a_1, a_2 가 정해져 있고 $a_i = b \cdot a_{i-1} + c \cdot a_{i-2} \quad (i \geq 3)$ 가 성립하는 수열 a 에서 n 이 무한히 증가할 때

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 의 극한을 구하여라. 이 값은 항상 수렴함을 증명할 수 있다.

입력

첫 번째 줄에 정수 b, c, a_1, a_2 가 공백으로 구분되어 주어진다. $(1 \leq b, c, a_1, a_2 \leq 10^9)$

출력

식의 극한값을 출력한다. 절대/상대 오차는 10^{-6} 까지 허용한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
1 1 1 1	1.618033989

C. 함수와 최소 스패닝 트리 [100점]

[시간제한 3 초 | 메모리 제한 1024 MB]

1 부터 V 까지 번호가 붙은 정점이 V 개, 간선이 E 개인 단순 연결그래프가 주어진다.

각 간선의 가중치는 시간 t 에 따라 변화하는 이차함수 $at^2+b_it+c_i$ 꼴이다. 모든 간선에 대해 a 는 동일하다.

이때 함수 $f(t)$ 를 시간 t 에서의 최소 스패닝 트리의 가중치의 합으로 정의하자.

정수 t_1, t_2 가 주어지면 $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ 의 값을 구하시오.

최소 스패닝 트리란, 주어진 그래프의 모든 정점들을 연결하는 부분 그래프 중에서 그 가중치의 합이 최소인 트리이다.

입력

첫 번째 줄에 정수 V, E, a 가 공백으로 구분되어 주어진다. $(1 \le V \le 100; 1 \le E \le 250; -1000 \le a \le 1000; a \ne 0)$

다음 E 개의 줄에 간선의 정보를 나타내는 네 정수 X, Y, b_i, c_i 가 공백으로 구분되어 주어진다. $(1 \le X, Y \le V; -1000 \le b_i, c_i \le 1000)$

이는 X 번 정점과 Y 번 정점을 잇는 간선의 가중치가 $at^2+b_it+c_i$ 라는 뜻이다.

다음 줄에 시간을 나타내는 정수 t_1 과 t_2 가 공백으로 구분되어 주어진다. $(-1000 \le t_1 \le t_2 \le 1000)$

출력

$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ 의 값이 정수 m, 양의 정수 n 에 대하여 기약분수 $\frac{m}{n}$ 일 때, $m \times n^{-1} \bmod (10^9+7)$ 을 출력한다.

n^{-1} 은 n 의 모듈러 곱셈에 대한 역원이다. 답이 10^9+7 의 배수가 아닌 n 에 대해 위와 같은 꼴로 표현됨을 증명할 수 있다.

다음 페이지에 계속

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 1 3 2 1 1 4 -3 7	430
3 3 3 1 2 2 -3 3 1 1 6 2 3 -4 12 -1 10	800001995

참고

필요하다면 $(ab^{-1}) + (cd^{-1}) \equiv (ad+bc)\times(bd)^{-1} \pmod{10^9+7}$ 임을 이용할 수 있다.

D. 다항함수의 적분과 쿼리 [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

길이가 $N+1$ 인 수열 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_N$ 이 주어질 때, N 개의 다항함수 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_N(x)$ 와 함수 $g(x)$ 가 다음 조건에 따라 정해진다.

〈 조건 〉

- N 이하인 모든 음이 아닌 정수 n 에 대해서 $g(n) = A_n$ 이다.
- N 이하인 모든 양의 정수 n 에 대해서 $n-1 \le x \le n$ 이면 $g(x) = f_n(x)$ 이다.
- $g(x)$ 는 구간 $(0, N)$ 에서 미분가능하다.
- $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_N(x)$ 의 차수를 나열한 수열이 사전 순으로 가능한 한 앞에 위치하도록 한다.

이때, 다음 쿼리를 수행하는 프로그램을 작성하시오.

- `1 i v` : A_i 를 v 로 바꾼다.
- `2 a b` : $6 \times \int_a^b g(x)dx$ 를 출력한다.

입력

첫 번째 줄에 N 이 주어진다. $(1 \le N \le 200\,000)$

두 번째 줄에 $N+1$ 개의 정수 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_N$ 이 공백으로 구분되어 주어진다. $(-100\,000 \le A_i \le 100\,000)$

세 번째 줄에 쿼리의 개수 M 이 주어진다. $(1 \le M \le 200\,000)$

다음 M 개의 줄에 쿼리의 정보가 한 줄에 하나씩 주어진다. $(0 \le i \le N;\ -100\,000 \le v \le 100\,000;\ 0 \le a \le b \le N)$

모든 입력 데이터에서 2 번 쿼리가 하나 이상 존재함이 보장된다. 입력되는 모든 수는 정수이다.

출력

각 2 번 쿼리의 결과를 한 줄에 하나씩 순서대로 출력한다. 2 번 쿼리의 결과가 항상 정수임을 증명할 수 있다.

다음 페이지에 계속

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 0 1 8 3 2 0 2 1 0 1 2 1 2	24 20

참고

초기에 $g(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 6(x - \frac{11}{12})^2 + \frac{23}{24} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이므로 첫 번째 쿼리의 결과는 $6 \times \int_0^2 g(x)dx = 24$ 이다.

두 번째 쿼리를 실행한 이후 $g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 7(x-1)^2 + 1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이므로 세 번째 쿼리의 결과는 $6 \times \int_1^2 g(x)dx = 20$ 이다.

E. 연립방정식 [100점]

[시간제한 2 초 | 메모리 제한 1024 MB]

n 개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 이 주어진다. 다음 조건을 만족하는 n 개의 정수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이 존재한다면

이들을 10^9+7 로 나눈 나머지를 한 줄에 공백으로 구분하여 출력하고, 존재하지 않는다면 NO 를 출력하시오.

〈 조건 〉

- $0 \le m \le n-1$ 인 모든 정수 m 에 대하여, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i{}^m}{x_i} = \begin{cases} 0 & (0 \le m < n-1) \\ 1 & (m = n-1) \end{cases}$

입력

첫 번째 줄에 양의 정수의 개수 n 이 주어진다. $(2 \le n \le 5000)$

두 번째 줄에 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 이 공백으로 구분되어 주어진다. $(1 \le a_i \le 10^9)$

출력

조건을 만족하는 n 개의 정수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이 존재한다면 이들을 10^9+7 로 나눈 나머지를 한 줄에 공백으로 구분하여 출력하고,

존재하지 않는다면 NO 를 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 1 2	1000000006 1
4 1 4 5 2	999999995 1000000001 12 6

예제에서, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$ 이면서 $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}=1$ 이려면 $x_1=-1, x_2=1$ 이 되어야 한다.

참고

이 조건을 만족하는 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이 존재한다면 유일함을 보일 수 있다.

임의의 정수 a 와 양의 정수 b 에 대해서, $a = bq + r\,(0 \le r < b)$ 이 되는 정수 q 와 r 이 유일하다.

이때 r 을 a 를 b 로 나눈 나머지로 정의한다.

F. 이차함수와 직선 [100점]

[시간제한 python/pypy : 0.5 초, java : 0.4 초, 그 외 : 0.1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

Azber과 Biou는 2차원 좌표평면에서 게임을 한다. Azber는 게임이 시작하기 전에 자신이 그릴 수 있는 N 개의 이차함수를 가지고 있다. Azber가 가지고 있는 이차함수의 이차항 계수는 1 아니면 -1 이다. 처음에 Azber는 자신이 가진 이차함수 중 몇 개를 좌표평면 위에 그린다.
Biou가 모든 이차함수와 만나지 않는 직선을 그릴 수 있으면 Biou의 승리고,
어떠한 직선을 그려도 적어도 하나의 이차함수와 만나게 되면 Azber의 승리이다.
Azber는 이길 수 있다면 최소 개수의 이차함수를 좌표평면에 그려서 게임을 이기고 싶다.
Azber가 게임에 이길 수 있는지, 이길 수 있다면 좌표평면에 그려야 하는 최소 이차함수의 개수를 구하고 그 경우에 좌표평면에 그리는 이차함수를 구하시오.

입력

첫 번째 줄에는 그릴 수 있는 이차함수의 개수 N 이 주어진다. $(1 \le N \le 20000)$
다음 N 개의 줄에 세 정수 X_i, Y_i, Z_i 가 주어진다. $(1 \le i \le N;\ |X_i| = 1;\ -5000 \le Y_i \le 5000;\ -2.5 \times 10^7 \le Z_i \le 2.5 \times 10^7)$
이는 Azber가 가지고 있는 i 번째 이차함수가 $y = X_i x^2 + Y_i x + Z_i$ 라는 뜻이다.

출력

만약 Azber가 Biou를 이길 수 없다면 -1 을 출력한다.
이길 수 있다면, Azber가 사용하는 이차함수의 최소 개수를 출력하고 다음 줄에는 Azber가 사용하는 이차함수의 번호를 공백으로 구분해서 출력한다. 최소 개수의 이차함수를 사용해서 이기는 경우가 여러 개 존재한다면 그중 아무거나 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 1 0 1 -1 0 -1	-1
2 1 0 -1 -1 0 1	2 1 2
4 1 -2 1 1 2 1 -1 6 -8 -1 -6 -8	3 2 3 4

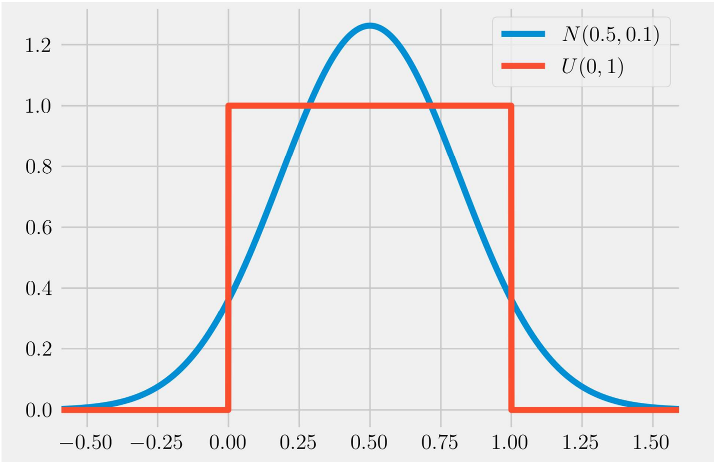
▷ 이어서, 「 확률과 통계 」 6 문제가 제시됩니다.
(G 번 ~ L 번)

G. 균등분포와 정규분포 [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

다음 중 하나의 방법으로 만들어진 크기 n 의 표본이 주어졌을 때, 어느 방법으로 만들어졌는지 알아내시오.
- 방법 A: 균등 분포 $U(0,1)$ 에서 크기 n 의 표본을 뽑는다.
- 방법 B: 정규 분포 $N(0.5, 0.1)$ 에서 관측값 하나를 뽑고, 이 값이 0 이상 1 이하이면 표본에 넣는다.
  이를 표본의 크기가 n 이 될 때까지 반복한다. 이때, 0.1은 이 분포의 분산이다.

다음은 두 분포의 확률밀도함수를 나타내는 그림이다.



입력

각 데이터는 정확히 100 개의 테스트케이스로 이루어져 있다. 각 테스트케이스에 대해, 표본의 관측값 n 개가 한 줄에 하나씩 주어진다.
표본의 각 관측값은 반올림하여 소수점 아래 4 번째 자리까지 주어진다.
모든 테스트케이스는 위에서 서술한 방법 중 하나를 통해 만들어졌으며, $n = 5000$ 이다.
n 의 값이 입력으로 주어지지 않음에 유의하라.
채점에 사용되는 입출력 데이터 파일은 정확히 10 쌍이다.

출력

각 테스트케이스마다 한 줄에 하나씩, 표본이 방법 A 로 만들어졌으면 A 를, 방법 B 로 만들어졌으면 B 를 출력한다.
모든 데이터에서 99 개 이상의 테스트케이스에 대해 정답을 출력해야 한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
입력의 크기가 매우 크므로 파일로 대체합니다.	A

https://upload.acmicpc.net/51af3d73-f729-47ef-8c6b-c4bb35956348/
해당 테스트케이스 1개로 이루어져 있으며, 실제 채점에는 사용되지 않는다.

참고

균등분포의 의미는 https://terms.naver.com/entry.naver?docId=3338148 에서 확인하면 된다.

H. 방향 정하기 [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

n 개의 점이 있다. 어떤 두 점을 잡더라도 항상 하나의 간선으로 이어져 있도록 간선이 총 $\frac{n(n-1)}{2}$ 개 있다.

조건을 만족하도록 모든 간선들에 방향을 정해주는 방법의 수를 구하자.

〈 조건 〉

- 각 점에서 출발해서 간선 방향을 따라 어떻게 이동해도 출발한 점으로 돌아올 수 없다.

입력

첫 번째 줄에 n 이 주어진다. $(2 \leq n \leq 1\,000\,000)$

출력

조건을 만족하는 방법의 수를 10^9+7 로 나눈 나머지를 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2	2

I. 빙고 [100점]

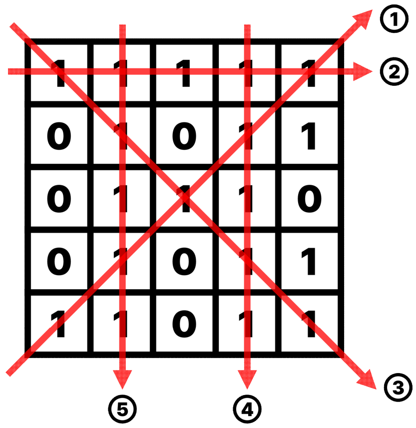
[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

확률과 통계 수강생들이 빙고를 하고 있다. 이들의 빙고 게임은 다음과 같은 규칙으로 진행된다.

1. 참가자들은 각자 $n \times n$ 정사각형 모양의 보드 위 각 칸에 1 부터 n^2 까지의 정수를 겹치지 않도록 하나씩 적어넣는다.
2. 매 라운드에, 사회자는 1 부터 n^2 까지의 정수 중 하나를 부른다. 이때 이미 부른 수는 고르지 않는다.
3. 참가자는 자신의 보드에서 사회자가 부른 수가 있는 위치를 찾아 색을 채운다.
4. 사회자가 더 이상 수를 부르지 않기로 하면, 게임이 끝나고 점수가 계산된다.

   각 참가자의 점수는 색을 채운 칸들로만 이루어진 줄의 수이다.

   이때 고려하는 줄은 가로 n 줄, 세로 n 줄과 대각선 2 줄로, 총 $2n+2$ 개의 줄이 있다.



▲ 위 빙고판의 점수는 5 점이다.

사회자는 매우 공정하여, 매 차례에 부를 수 있는 수를 동일한 확률로 선택하여 부른다.

현재까지 진행된 게임의 상황을 반영한 참가자 A 의 빙고판이 주어진다.

사회자가 정확히 k 개의 수를 추가로 부를 예정이라고 할 때, A 가 받을 최종 점수의 기댓값을 구해 보자.

입력

첫 번째 줄에 두 정수 n, k 가 주어진다. $(1 \le n \le 100;\ 0 \le k \le n^2)$

두 번째 줄부터 n 개의 줄에 걸쳐 빙고판의 상태가 0 과 1 로 이루어진 길이 n 의 문자열로 주어진다.

0 은 칸에 색이 채워지지 않았음을, 1 은 칸에 색이 채워져 있음을 의미한다.

입력된 빙고판에는 채워지지 않은 칸이 적어도 k 개 있음이 보장된다.

다음 페이지에 계속

출력

A 가 얻는 최종 점수의 기댓값을 X 라고 할 때, 첫째 줄에 정수 $(n^2)! \times X$ 를 소수 10^9+7 로 나눈 나머지를 출력한다.

주어진 입력의 범위에서 $(n^2)! \times X$ 가 정수가 된다는 사실을 증명할 수 있다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
2 2 00 00	24
2 0 10 11	72
5 24 00000 00000 00000 00000 00000	831030901
5 4 00000 00000 00100 00000 00000	182548743
6 17 000010 000100 001000 010000 100000 000001	389132331

J. 살얼음판 걷기 [100점]

[시간제한 1 초 | 메모리 제한 1024 MB]

대입이 끝나 심심한 즈티는 빙판이 된 한강에 놀러 갔다. 하지만 아직 빙판이 얇아 오래 서 있을 수 없었고,

이대로 돌아가고 싶지 않았던 즈티는 다음과 같은 놀이를 생각해냈다.

한강은 땅 한 칸과 땅과 일자로 이어져 있는 빙판 $N-1$ 칸으로 모델링할 수 있다.

땅에는 1, 빙판에는 땅과 가까운 순서대로 2 부터 N 까지 번호를 부여하자. 즈티는 1 번 칸에서 출발하여 N 번 칸을 밟고

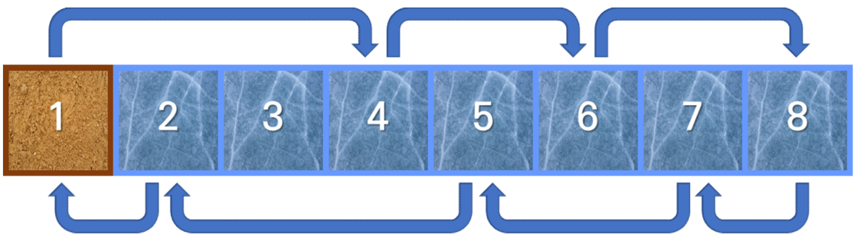
다시 1 번 칸으로 돌아오려고 한다. 이때, 모든 얼음 칸은 한 번 밟으면 녹아 없어져 다시 밟지 못한다.

즈티는 한 걸음에 1 개 이상 K 개 이하의 칸을 이동할 수 있으며, N 번 칸을 밟기 전까지는 땅에서 멀어지는 방향,

그 후로는 땅에 가까워지는 방향으로만 이동한다. 임의의 X 번 칸에서 Y 번 칸으로 한 걸음에 이동할 때 X 와 Y 사이에 있는 칸은

밟지 않는다. 1 번 칸과 N 번 칸 사이를 무사히 왕복하는 경우의 수를 구해 즈티의 놀이를 도와주자.

아래 그림은 $(N, K) = (8, 3)$ 일 때 가능한 이동 중 하나이다. $(8, 5)$ 등의 예시도 될 수 있다.



입력

첫 번째 줄에 두 정수 N, K 가 주어진다. $(1 \le K < N \le 3000)$

출력

가능한 이동 방법의 수를 10^9+7 로 나눈 나머지를 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
4 3	9

K. 당근과 채찍 [100점]

[시간제한 4 초 | 메모리 제한 1024 MB]

여행자 Q 명이 있고, 각 여행자에게는 말이 한 마리씩 있다. 각 여행자는 그의 말을 타고 여행을 떠나기로 한다.

가는 과정에서 말이 배고프지 않게 하기 위한 당근과 앞으로 계속 가게 하기 위한 채찍이 필요하다.

말에게는 '기분' 이라는 수치가 있는데, 0 에서 시작하지만 당근을 먹을 때 기분이 b 만큼 오르고

채찍으로 때릴 때마다 기분이 a 만큼 감소한다. (a, b 는 서로소인 양의 정수로 말에 따라서 달라질 수 있지만, 여행 중에 변하지는 않는다.)

말은 기분이 0 미만이 되는 순간 주인을 버리고 달아나기 때문에, 매 순간 말의 기분은 0 이상이어야 한다.

각 여행자가 당근 a 개를 먹이고 채찍으로 b 번 때려서 여행을 마칠 수 있도록 당근과 채찍을 배열할 때, 가능한 방법의 수를 알려주자!

단, 당근을 먹는 경우와 채찍을 맞는 경우 외에 말의 기분은 변하지 않는다.

입력

첫 번째 줄에 여행자의 수 Q 가 주어진다. ($1 \le Q \le 100\,000$)

다음 Q 개의 줄에 서로소인 두 정수 a,b 가 공백으로 구분되어 주어진다. ($2 \le a,b \le 1\,000\,000$)

출력

한 줄에 하나씩 정답을 10^9+7 로 나눈 나머지를 출력한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
1 2 3	2

L. 이항분포에서 가장 큰 직사각형 [100점]

[시간제한 1.5 초 | 메모리 제한 1024 MB]

$B(n,p)$ 는 앞면이 나올 확률이 p 인 동전을 n 번 던질 때 앞면이 나오는 횟수에 대한 확률분포이다.

즉 확률변수 $X \sim B(n,p)$ 에 대해, $X=i$ 일 확률 $P(X=i)$ 는 동전을 던져서 앞면이 i 번 나올 확률과 같다.

이 확률변수 X 의 확률질량함수로 길이 $n+1$ 의 히스토그램을 만들자. 막대는 왼쪽부터 차례대로 $0, \cdots, n$ 의 번호가 붙어 있고,

막대 i 는 너비가 1 이고 높이가 $P(X=i)$ 이다.

히스토그램이 있으니 역시 히스토그램의 영역 안에 포함되는 가장 큰 직사각형의 넓이를 구해야 될 것 같다.

단, 직사각형의 한 변이 히스토그램의 밑변과 평행해야 한다.

$[l,r]$ 로 표현되는 쿼리 Q 개가 주어진다. 각 쿼리에 대해, 막대 l 부터 r 까지로만 이루어진 히스토그램에서 가장 큰 직사각형의 넓이를 구하시오.

입력

첫 번째 줄에 n, p, Q 가 주어진다. p 는 소수점 아래 최대 4자리까지 주어진다. $(1 \le n \le 200\,000;\ 0 < p < 1;\ 1 \le Q \le 200\,000)$

다음 Q 개의 줄에 정수 l 과 r 이 공백으로 구분되어 주어진다. $(0 \le l \le r \le n)$

출력

각 쿼리에 대해 가장 큰 직사각형의 넓이를 한 줄에 하나씩 출력한다. 절대/상대오차는 10^{-6} 까지 허용한다.

입출력 예시

표준 입력 (stdin)	표준 출력 (stdout)
10 0.5 3 0 10 2 5 5 5	0.615234375000 0.410156250000 0.246093750000

▷ 확인 사항

○ 문제지의 끝입니다.

○ 문제지에 제시된 문제는 총 12 문제이므로, 빠트린 문제가 있는지 확인하시오.

문제지의 뒷면입니다.