

Thinking Techniques - 2

고찰 테크닉 - 2

競技プログラミングの鉄則 - 米田優峻

KPSC Algorithm Study 25/2/6 Thu.

by Haru_101

Thinking Techniques

- 저번 시간에 이어 사고력을 기를 수 있는 문제들을 몇 개 풀어보겠습니다.

Thinking Techniques

- 다음 문제를 풀어봅시다. (https://atcoder.jp/contests/tessoku-book/tasks/tessoku_book_ao)

問題文

N 枚のタイルがあり、最初はすべて白色で塗られています。太郎君は以下の操作を繰り返すことで、左から i 番目のタイルの色を文字 S_i (R のとき赤色、 B のとき青色) にしたいです。

- 連続する 3 つのタイルを赤色で塗り替える
- 連続する 3 つのタイルを青色で塗り替える

$$3 \leq N \leq 200000$$

太郎君が目的を達成できるかどうかを判定するプログラムを作成してください。

- N 장의 타일이 있고, 처음에는 모든 타일이 흰색으로 칠해져 있습니다. 타로군은 아래의 행동을 여러번 해서 왼쪽부터 i 번째 타일의 색을 문자 S_i 로 하고 싶어합니다.
 - 인접한 3개의 타일을 빨간색으로 칠한다.
 - 인접한 3개의 타일을 파란색으로 칠한다.
- 타로군이 목적을 달성할 수 있는지 판정하는 프로그램을 작성하시오.

Thinking Techniques

- 먼저 생각해야 할 부분은, 인접한 타일을 같은 색으로 칠하기 때문에 마지막에는 항상 3개의 인접한 타일이 같게 색칠이 됩니다.

W	W	B	B	B	W	W
---	---	---	---	---	---	---

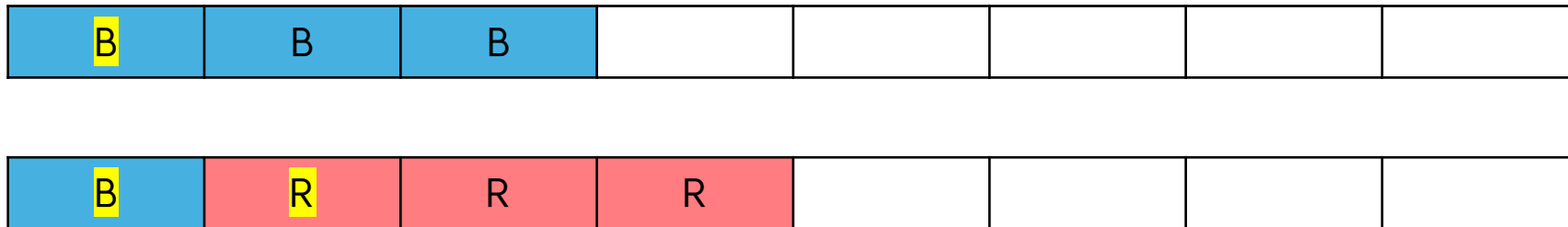
- 그렇다면, 3개의 인접한 타일이 같을 때는, 나머지 타일의 색깔을 색칠하는 방법이 있을까요?

Thinking Techniques

- 그건 바로, 나머지 색깔을 확정 짓게끔 색칠하고 마지막에 3개의 인접한 타일이 같은 색인 타일을 칠하면 됩니다.
- 아래 순서대로 칠하면 조건에 맞게 칠해지게 됩니다.
 - 3개가 같은 색인 인접한 타일의 위치를 $p, p + 1, p + 2$ 라고 하자.
 - 먼저 $x < p$ 인 타일에 대해 타일의 색을 확정짓는다.
 - 그 다음 $p + 2 < x$ 인 타일에 대해 타일의 색을 확정짓는다.
 - 마지막에 $p, p + 1, p + 2$ 를 같은 색으로 칠한다.
- 예시로 한번 검증해봅시다. $N = 8$ 이고 $S = BRBBBRBRR$ 이라고 합시다.

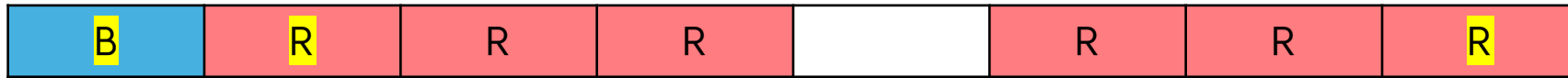
Thinking Techniques

- 먼저 $1 \leq p \leq N - 2$ 이라고 할 때, $p = 3$ 인 3개의 같은 색인 인접한 타일이 위치해야 합니다.
- 따라서 $x = 1, 2$ 타일을 먼저 색칠합니다. (확정된 색깔은 형광펜 표시)



Thinking Techniques

- 그 다음, $x = 6, 7, 8$ 타일을 색칠합니다. (확정된 색깔은 형광펜 표시)



- 이제 남은 $x = 3, 4, 5$ 타일을 같은 색으로 칠해주면 됩니다.



- 따라서 인접한 3개의 타일이 같은 색인 곳이 하나라도 존재하면 정답은 Yes가 됩니다.

Thinking Techniques

- 다음 문제를 풀어봅시다. (https://atcoder.jp/contests/tessoku-book/tasks/tessoku_book_ap)

問題文

情報高校の1年1組には N 人の生徒が在籍しています。各生徒には体力と気力を表す整数値が定められており、生徒 i ($1 \leq i \leq N$) の体力は A_i 、気力は B_i です。

1年1組の担任である太郎君は、レクリエーションの一環として、生徒のうち何人かを選んでサッカーをすることにしました。もし参加者のレベル差が大きい場合、一部の人がだけが活躍して面白くないので、以下の条件を満たすようにしたいです。

- どの2人の参加者も、体力の差が K 以下である
- どの2人の参加者も、気力の差が K 以下である

最大何人でサッカーをすることができるか、出力するプログラムを作成してください。

- $1 \leq N \leq 300$
- $1 \leq K \leq 100$
- $1 \leq A_i \leq 100$ ($1 \leq i \leq N$)
- $1 \leq B_i \leq 100$ ($1 \leq i \leq N$)

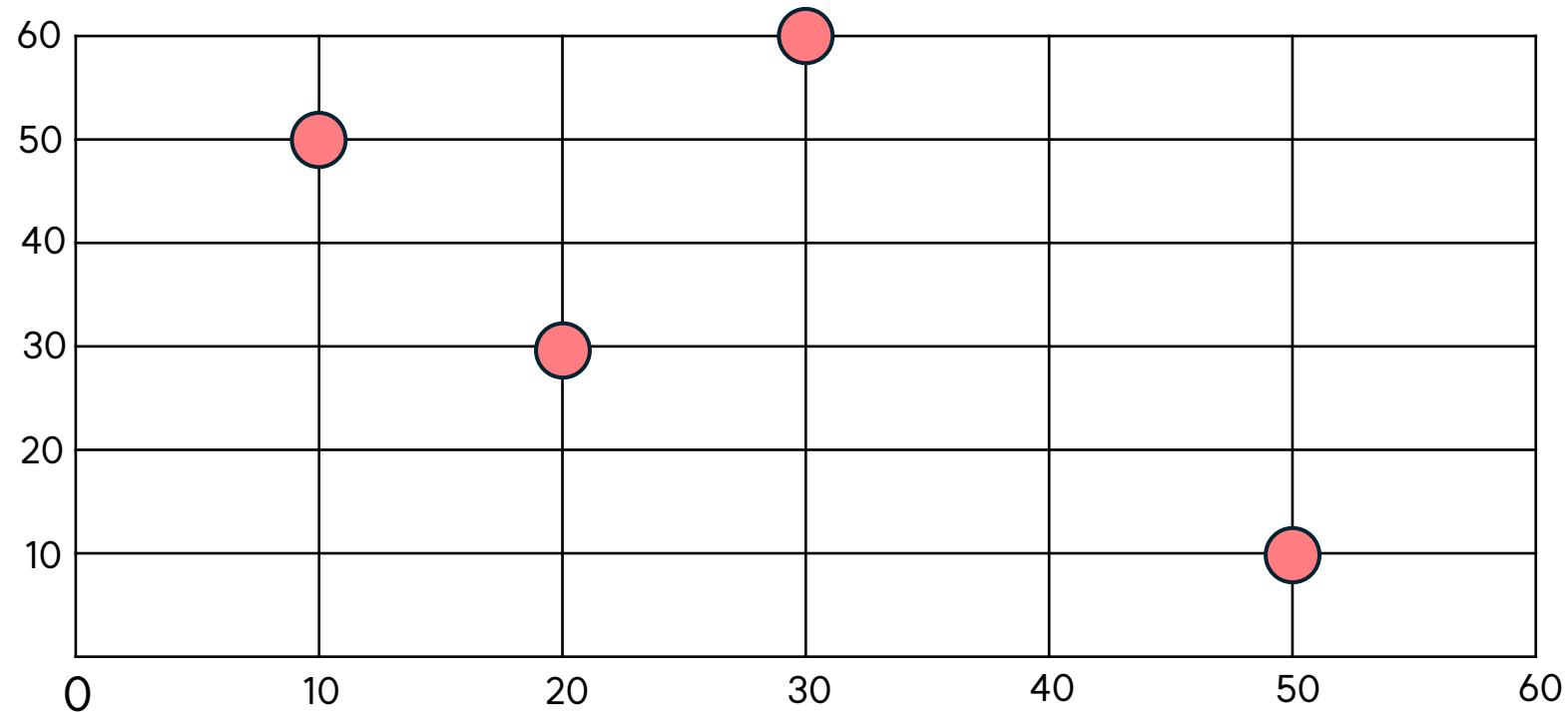
- 고등학교 1학년 1반에는 N 명의 학생이 있습니다. 각 학생에게는 체력과 기력을 뜻하는 정수값이 정해져있고, 학생 i 의 체력은 A_i , 기력은 B_i 입니다.
- 타로군은 레크레이션의 일환으로 학생 중 몇 명을 선택해서 축구를 하기로 했습니다. 만약 참가자의 레벨차가 크면 일부 학생들이 재미없어 하므로, 아래의 조건을 만족하게 하여 참가자를 고르고 싶습니다.
 - 모든 임의의 2명의 참가자에 대해 체력의 차가 K 이하, 기력의 차가 K 이하
- 최대 몇 명의 사람이 축구를 할 수 있는지 출력하는 프로그램을 작성하세요.

Thinking Techniques

- 이 문제는 각 사람을 기준으로 잡으면 문제를 풀기 어려워집니다. ($O(2^N)$)
- 따라서 다르게 풀어보아야 할 듯 합니다.

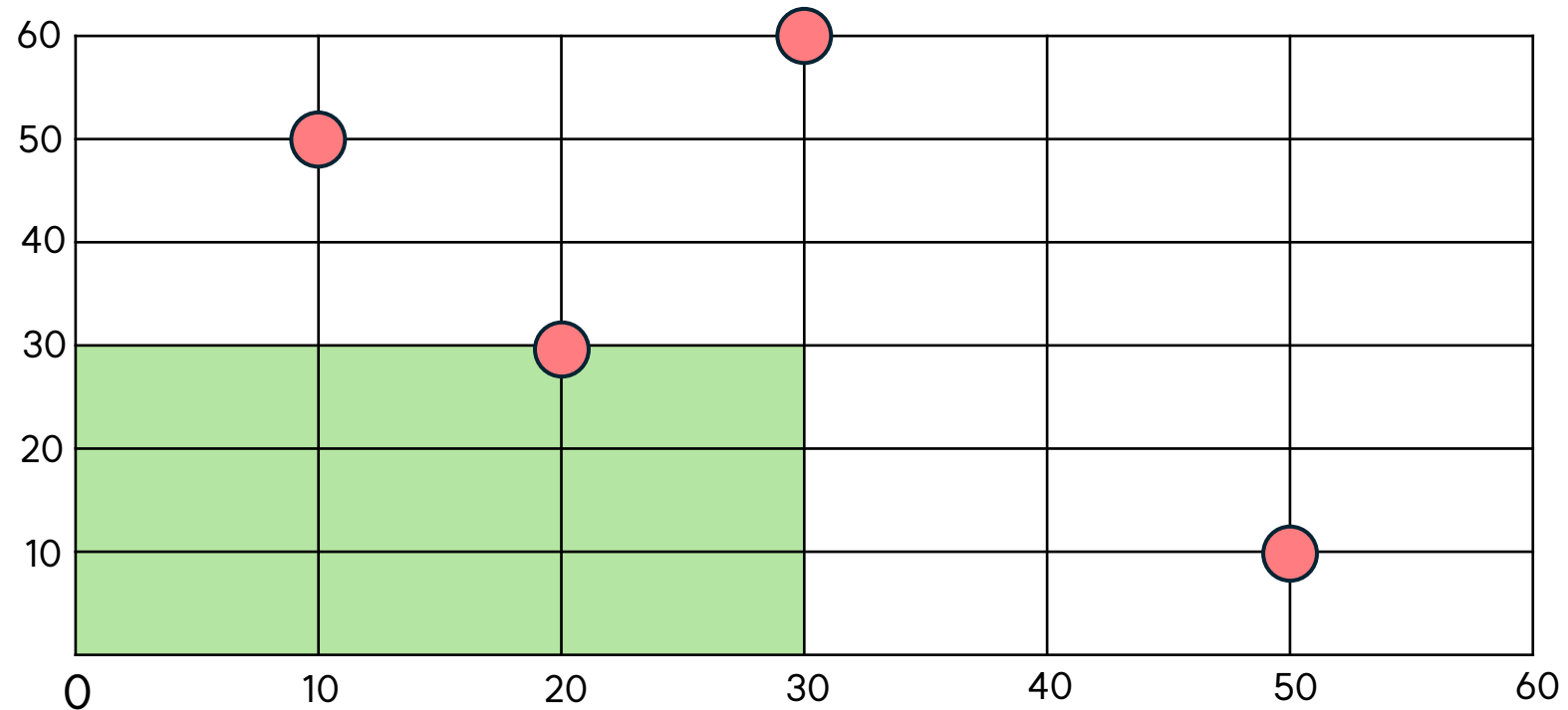
Thinking Techniques

- 각 사람의 체력과 기력이 A_i, B_i 이니깐, 이를 2차원 평면에 찍어서 탐색해보면 되지 않을까요?
- x 축을 A_i , y 축을 B_i 로 설정하면, 다음과 같이 표시할 수 있을 것 같습니다.
- $(A_i = 20, 10, 50, 30, B_i = 30, 40, 10, 60)$



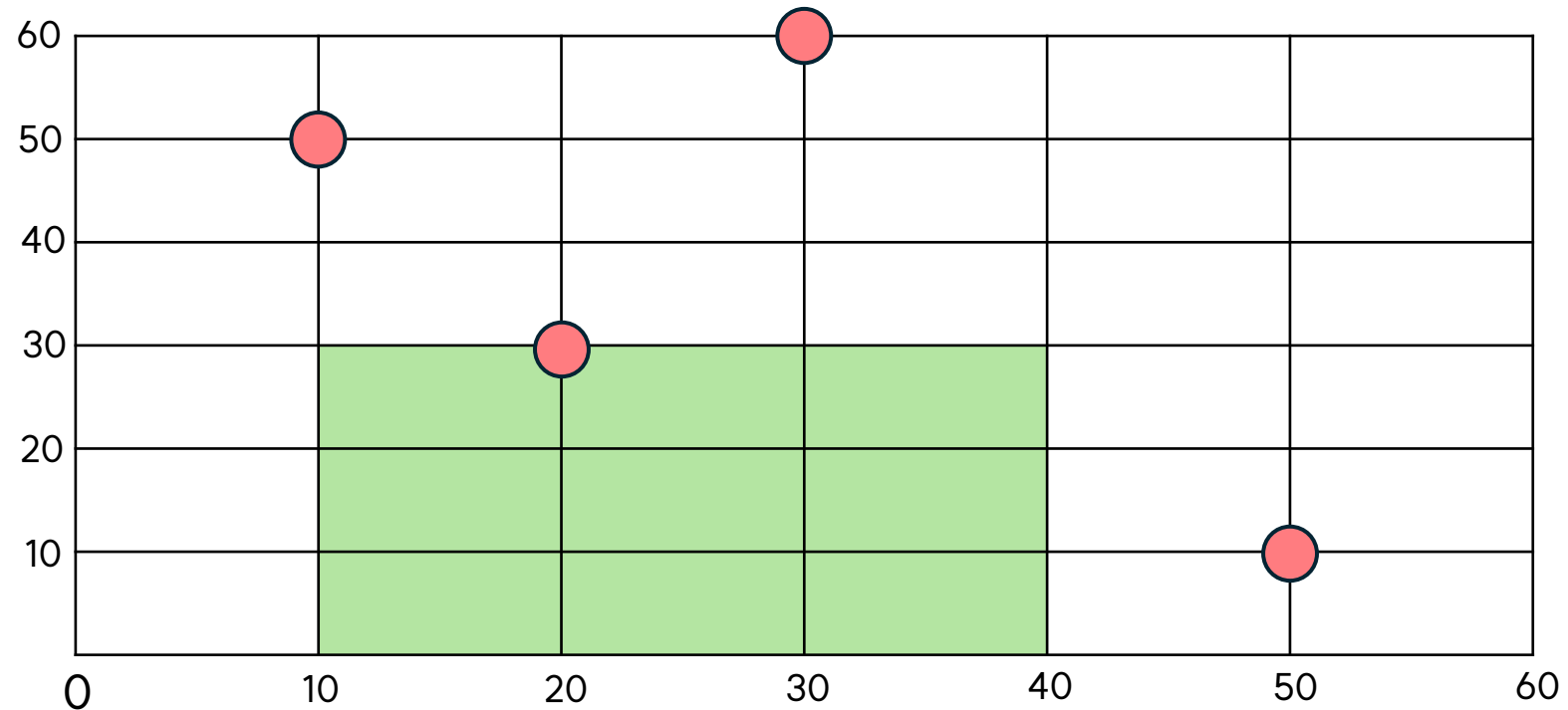
Thinking Techniques

- 이제, $K = 30$ 이라고 가정하고, 어떻게 카운트를 하면 좋을지 예시를 보면서 알아보시다.
- 먼저 최소 체력 0, 최소 기력이 0이면, 최대 체력이 30, 최대 기력이 30이 됩니다.
이 범위에 있는 학생 수는 1이므로 일단 정답은 1입니다.



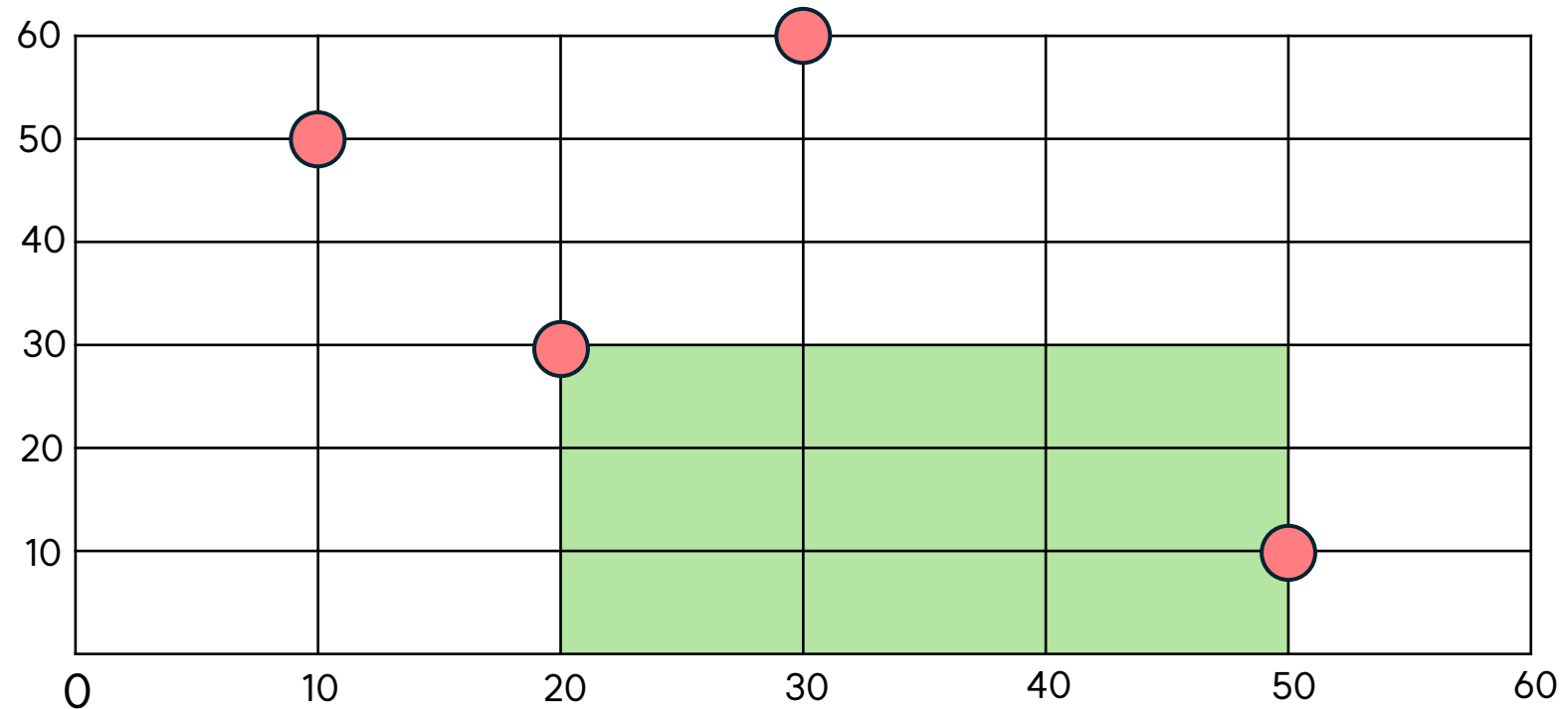
Thinking Techniques

- 그 다음 최소 체력 10, 최소 기력이 0이면, 최대 체력이 40, 최대 기력이 30이 됩니다.
이 범위에 있는 학생 수는 1이므로 아직은 정답이 1입니다.



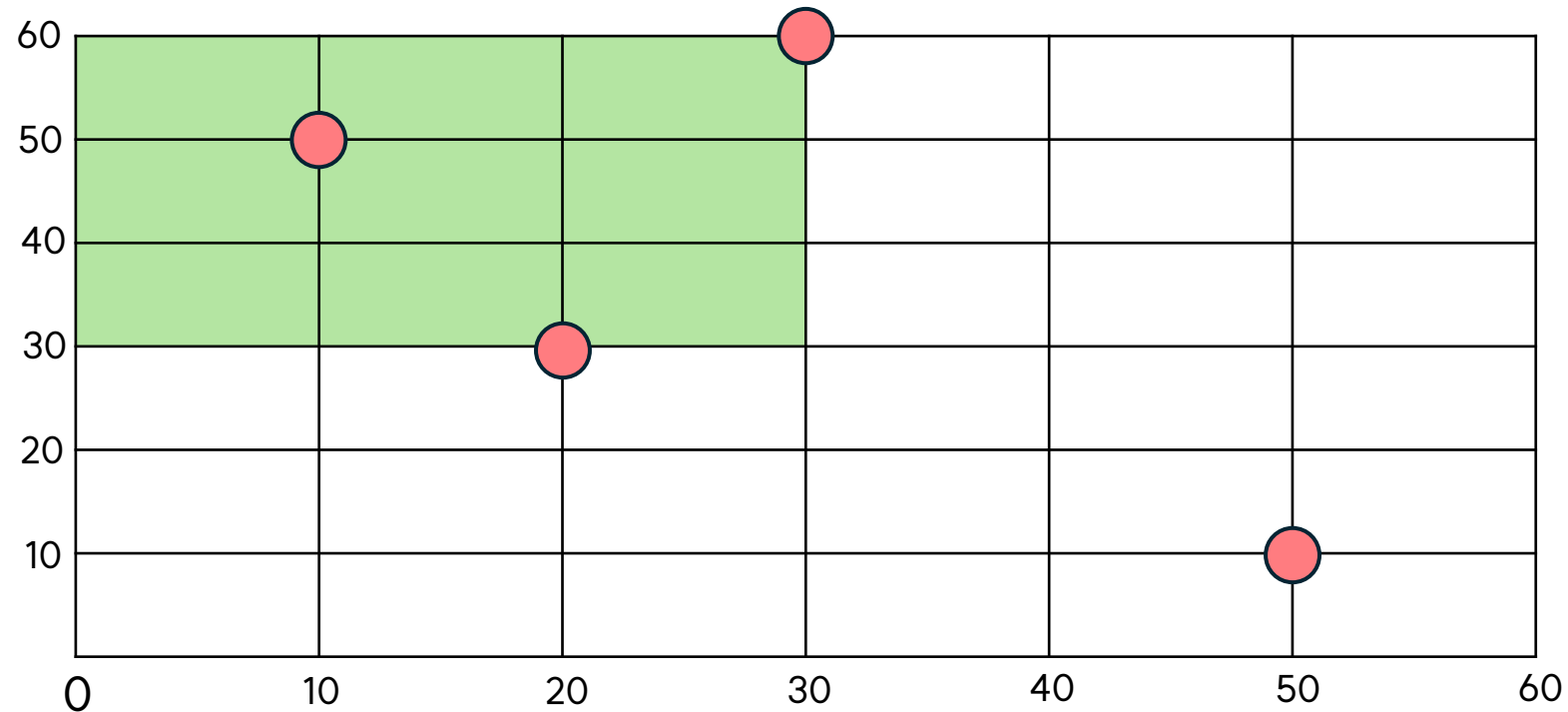
Thinking Techniques

- 그 다음 최소 체력 20, 최소 기력이 0이면, 최대 체력이 50, 최대 기력이 30이 됩니다.
이 범위에 있는 학생 수는 2이므로 정답이 2로 바뀝니다.



Thinking Techniques

- 이제 불필요한 연산을 빼고 정답이 바뀌는 부분만 봅시다.
- 최소 체력이 0, 최소 기력이 30이라고 할 때, 최대 체력은 30, 최대 기력은 60이 됩니다.
- 이 범위에 포함되어 있는 학생 수는 3이므로 정답이 3으로 바뀝니다. 이 뒤로는 정답이 바뀌는 일이 없으므로 정답은 3이 됩니다.



Thinking Techniques

- A_i, B_i 범위가 작으므로 $1 \sim 100, 1 \sim 100$ 까지 2중 반복문을 돌려서 탐색해서 정답의 최댓값을 찾으면 됩니다.
- 이때 시간복잡도는 $O(10000N)$ 입니다.
- * 이 시간복잡도를 줄이는 법이 있습니다. 누적합을 사용하면 $O(10000 + N)$ 이 됩니다.

Thinking Techniques

- 다음 문제를 풀어봅시다. (https://atcoder.jp/contests/tessoku-book/tasks/tessoku_book_aq)

問題文

全長 L メートルの ALGO トンネルには、現在 N 人がいます。人 i は西端から A_i メートルの位置にあり、方向 B_i へ歩いています (E のとき東、W のとき西)。

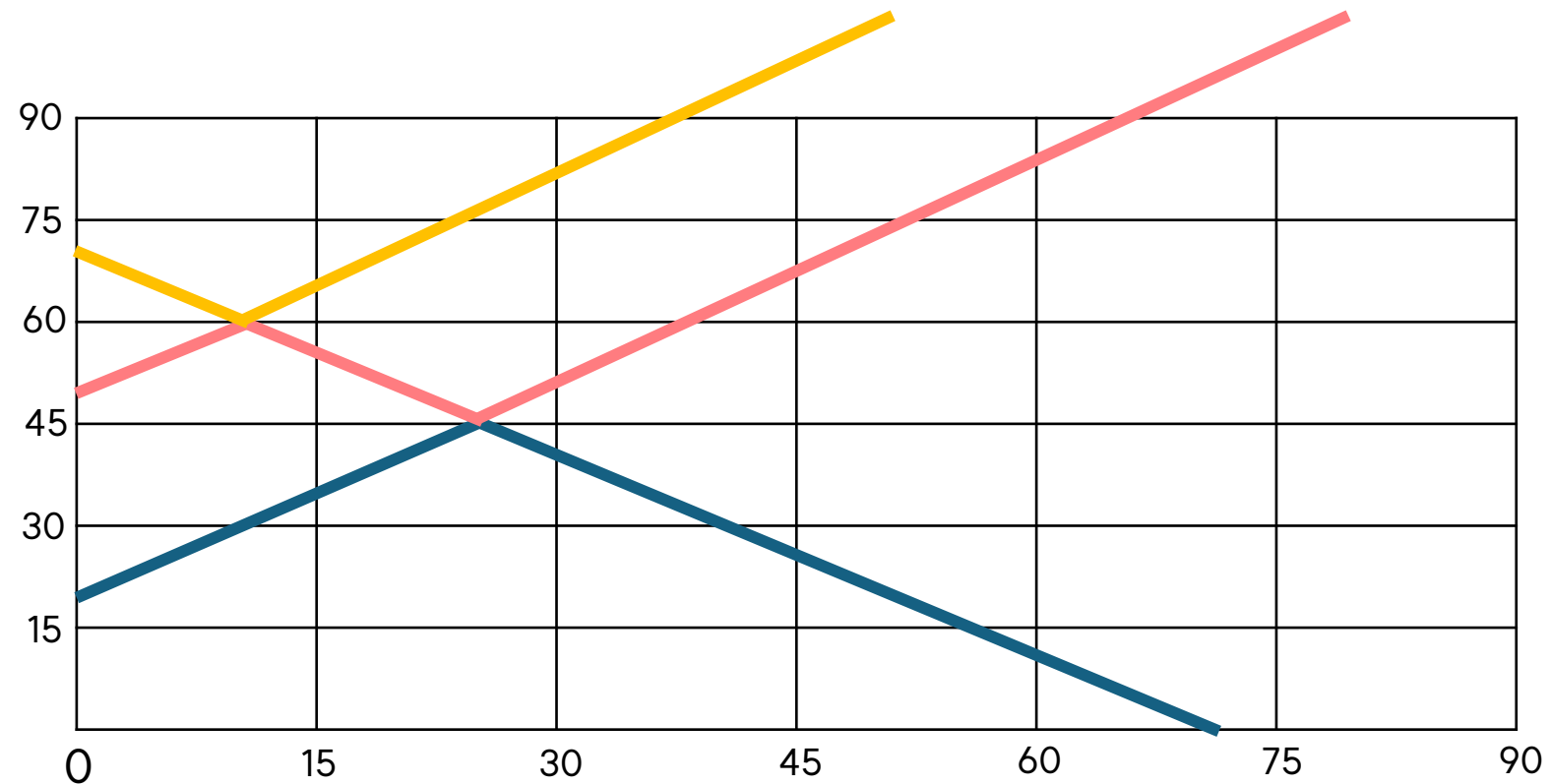
トンネルの幅は狭いため、2 人が同じ位置に来たら移動方向を変えます。全員が秒速 1 メートルで歩くとき、最後の人がトンネルの外に出るのは何秒後ですか。

- $1 \leq N \leq 200000$
- $1 \leq A_1 < A_2 < \dots < A_N < L \leq 10^9$

- 길이가 L 미터인 ALGO 터널에는 현재 N 명의 사람이 있습니다. 사람 i 는 서쪽에서 A_i 미터 떨어진 곳에, 방향 B_i 로 향하고 있습니다.
- B_i 가 E면 동쪽, B_i 가 W면 서쪽
- 터널의 폭이 좁기 때문에 2명의 사람이 동시에 같은 위치에 오면 이동방향이 둘 다 바뀝니다.
- 모두가 초속 1미터로 걸을 때, 마지막에 터널을 빠져나오는 사람은 몇 초 뒤에 빠져나오는지 출력하세요.

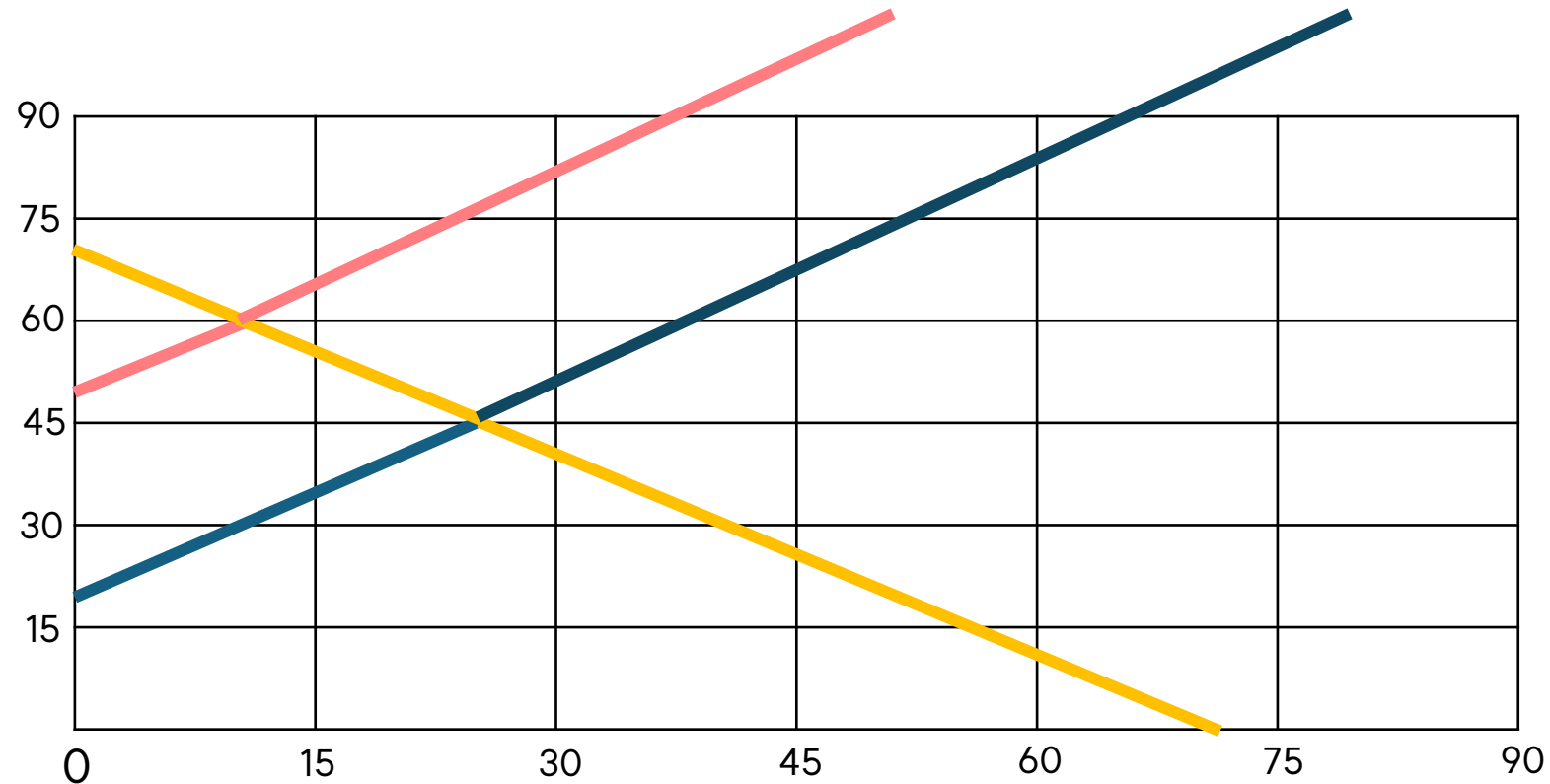
Thinking Techniques

- 먼저, $A_i = 20, 50, 70$ 이라고 하고, $B_i = E, E, W$ 라고 합시다.
- 이때의 시간-위치 그래프를 그려보면 아래와 같습니다. (x축이 시간, y축이 위치)



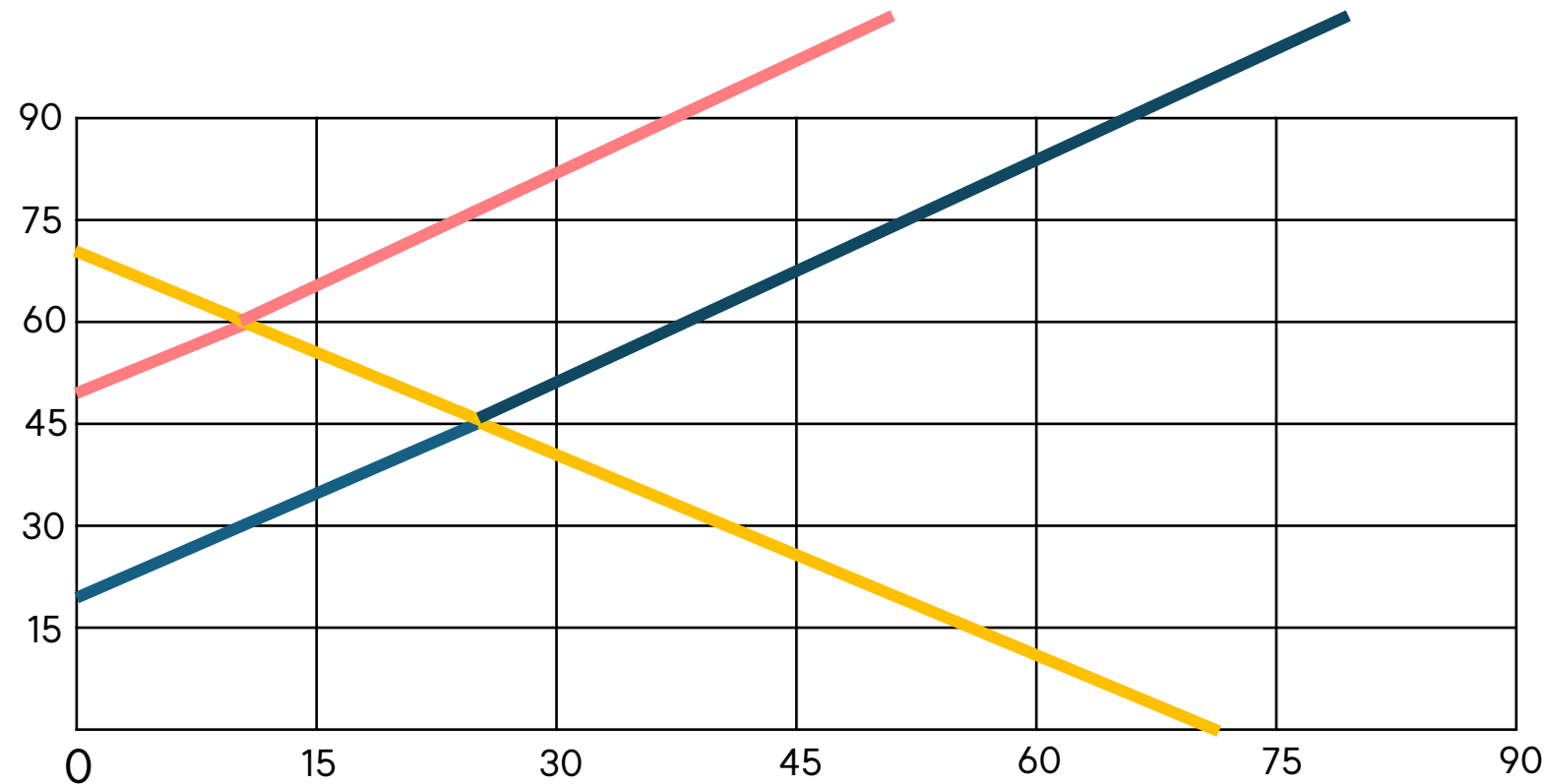
Thinking Techniques

- 근데 여기서 알 수 있는 사실은, 부딪혀도 그냥 방향이 유지된다고 바뀌어도 마지막에 나오는 사람의 시간은 변하지 않는다는 것을 알 수 있습니다.



Thinking Techniques

- 따라서, 그냥 방향을 바꾸는 것을 생각하지 않고, 그 사람이 터널을 빠져나오는 데에 걸리는 시간의 최댓값을 구해주면 됩니다.



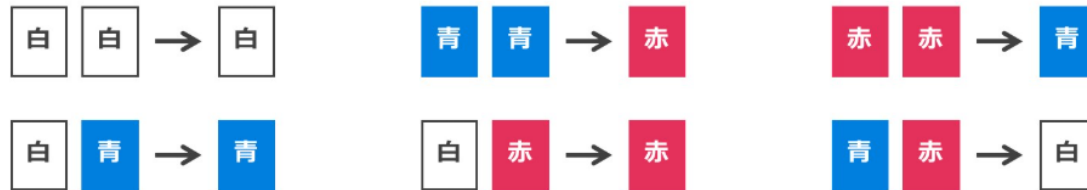
Thinking Techniques

- 다음 문제를 풀어봅시다. (https://atcoder.jp/contests/tessoku-book/tasks/tessoku_book_as)

問題文

太郎君は N 枚のカードを持っています。 i 枚目 ($1 \leq i \leq N$) のカードの色は文字 A_i で表され、 R が赤、 B が青、 W が白に対応します。

彼は、下図の6種類の操作を行うことができます。たとえば右下の操作は「青1枚と赤1枚を、白1枚に交換する操作」です。ここで、操作を $N - 1$ 回行くと1枚のカードが残ります。最後に残ったカードの色を C にすることが可能かどうか、判定するプログラムを作成してください。



$$\bullet 2 \leq N \leq 200000$$

- 타로군은 N 장의 카드를 들고 있습니다. i 번째 카드의 색은 문자 A_i 로 표현할 수 있고, R은 빨강, B는 파랑, W는 흰색을 나타냅니다.
- 그는 아래 6종류의 행동을 할 수 있습니다. 예를 들어서 오른쪽 아래의 조작은 파란색 카드 1장, 빨간색 카드 1장을 흰색 카드 1장으로 교환하는 행동입니다.
- 여기서 행동을 $N - 1$ 번하면 1장의 카드가 남습니다. 마지막에 남은 카드의 색을 C 로 만들 수 있는지 판정하는 프로그램을 작성하세요.

Thinking Techniques

- 이런 문제를 풀 때 유용한 불변량이라는 개념을 소개하겠습니다.
- 먼저, 각 카드 색깔에 대해 스코어라는 개념을 도입합니다.
- 흰색은 0, 파란색은 1, 빨간색은 2라고 합시다.
- 그런 다음 각 행동에 대해서 스코어의 변화량을 살펴봅시다.

Thinking Techniques

- 가능한 행동들에 대한 스코어의 변화량을 나열해보면,
- 흰+흰 \rightarrow 흰 = $0+0 \rightarrow 0 = -0$
- 파+파 \rightarrow 빨 = $1+1 \rightarrow 2 = -0$
- 빨+빨 \rightarrow 파 = $2+2 \rightarrow 1 = -3$
- 흰+파 \rightarrow 파 = $0+1 \rightarrow 1 = -0$
- 흰+빨 \rightarrow 빨 = $0+2 \rightarrow 2 = -0$
- 파+빨 \rightarrow 흰 = $1+2 \rightarrow 0 = -3$
- 즉, 모든 행동이 스코어가 0이 감소하거나 3이 감소하게 됩니다.
- 마지막에는 색깔이 C 인 카드 한 장 만이 남게끔 연산을 수행해야 하므로, 흰색을 만들고자 하면 초기 스코어가 0, 3, 6, ...,이 되어야 하고, 파란색이라면 1, 4, 7, ..., 빨간색이라면 2, 5, 8, ...이 되어야 합니다.

Thinking Techniques

- 이 행동들을 수행하면서 변하지 않는 값이 무엇인지 생각해보면...
- 스코어는 그 값 자체로는 변할 수 있으나, 스코어를 3으로 나눈 나머지는 어떤 행동을 하더라도 변하지 않습니다.
- 이 값을 불변량, 즉 어떤 행동을 해도 성질이 변하지 않는 값이라고 칭합니다.
- 이 값을 이용하면 문제를 쉽게 풀 수 있습니다.

Thinking Techniques - 2

끝.

다음주에는 Data Structures - 1로 찾아뵙겠습니다.