団散乱図入門

中西 知樹 (名大)

大阪公大 (I-site なんば)
2022年 10月12日 (水) Lect 1
13日 (木) Lect 2-4

参考文献

[GHKK] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, M. Kontsevich
Canonical bases for cluster algebras
J. AMS 31 (2018) 497-608

[KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman
Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and mirror symmetry
Lect Notes Unione Ital. 15 (2014) 197-308

[N] T. Nakanishi
Cluster algebras and scattering diagrams
Part III Cluster scattering diagrams
arXiv: 2111.00800 (ver 5)

1. 構造群 G_Ω

✻ 初期データ Ω

$\Omega = (\omega_{ij})$　$r \times r$ 反対称 有理行列

＋ 補助データ $\begin{cases} N \simeq \mathbb{Z}^r & \text{rank } r \text{ の自由アーベル群} \\ e_1, \dots, e_r & N \text{ の基底} \end{cases}$

以下が定まる

① 反対称形式 $\{\cdot,\cdot\}: N \times N \to \mathbb{Q}$

$\{e_i, e_j\} = \omega_{ij}$

② N の正元　$N^+ = \{ n = \sum a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \neq 0 \}$

半群

✻ N^+-graded Lie 代数 $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\Omega = \bigoplus_{n \in N^+} \mathbb{Q} X_n, \quad X_n \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の基底}$$

Lie カッコ　$[X_n, X_{n'}] := \{n, n'\} X_{n+n'}$

Jacobi id. $[X_{n_1}, [X_{n_2}, X_{n_3}]] = \{n_2, n_3\} [X_{n_1}, X_{n_2+n_3}]$

$= \{n_2, n_3\}(\{n_1, n_2\} + \{n_1, n_3\}) X_{n_1+n_2+n_3}$

$= (\{n_1, n_2\}\{n_2, n_3\} - \{n_2, n_3\}\{n_3, n_1\}) X_{n_1+n_2+n_3}$

cyclic の形

✻ 完備化 $\hat{\mathfrak{g}}$

$n \in N^+$,　$\deg(n) := \sum a_i$

$\hat{\mathfrak{g}}$: deg に関する完備化

つまり, $\hat{\mathfrak{g}}$ の元 $\sum_{n \in N^+} c_n X_n$ $(c_n \in \mathbb{Q})$ 形式的無限和

✻ 群 G

$\exp: \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} G$　形式的全単射

$X \mapsto \exp(X)$

積　Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式

$\exp(X)\exp(Y)$

$:= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \cdots \right)$

$\hat{\mathfrak{g}}$: N^+-graded $\Rightarrow$ well-defined　G は群になる

以上の構成は [KS] による.

G を散乱図 (Lec 2) の**構造群**という

☆ Gの無限積

$l \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(N^+)^{>l} := \{ n \in N^+ \mid \deg(n) > l \}$

$(N^+)^{\leq l} := \{ \;\text{〃}\; \mid \;\text{〃}\; \leq l \}$

$G^{>l} := \{$ すべての $\exp(\sum_{n \in (N^+)^{>l}} c_n X_n)$ 無限和 $\}$

は Gの正規部分群 (∵ BCH公式)

$G^{\leq l} := G/G^{>l} \ni \exp(\sum_{n \in (N^+)^{\leq l}} c_n X_n)$ 代表元

「mod $G^{>l}$ で考える」= deg が l でカット

$\pi_l : G \longrightarrow G^{\leq l}$ 標準射影, $G = \varprojlim G^{\leq l}$

Gの無限積 = $G^{\leq l}$で有限積
π_l と compatible

☆ 平行部分群 $G_n^{\parallel}$

$n \in N^+$ は原始的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $n = tn'$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}, n' \in N^+$) ならば $t=1$.

$N^+_{pr} = \{ n \in N^+ \mid n$ は原始的 $\}$

$n \in N^+_{pr}$ に対して, $G_n^{\parallel} := \{$ すべての $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{jn})\}$

アーベル群. nの平行部分群

☆ 有理べき

$\begin{cases} g = \exp(X) \\ c \in \mathbb{Q} \text{ に対して} \end{cases}$ $g^c := \exp(cX)$ と定める.

2. y表現

$y=(y_1,\cdots,y_r)$ 変数 r：Ωの次数.

$\mathbb{Q}[[y]]$ yの形式的べき級数環.

$Q:=N^+\sqcup\{0\}$

$\mathbb{Q}[[y]]$の元 $\sum_{n\in Q} c_n y^n$ $(c_n\in\mathbb{Q})$ 無限和．と同一視

$y^{e_i}=y_i$.

$n\in N^+$, $\tilde{X}_n\in \mathrm{End}(\mathbb{Q}[[y_n]])$

$\tilde{X}_n(y^{n'})=\{n,n'\}y^{n+n'}$ と定める

このとき $\begin{cases}\cdot\ X_n\mapsto \tilde{X}_n \text{ は } \hat{\mathfrak{g}} \text{ の表現} \\ \cdot\ X_n \text{ は derivation}\end{cases}$ ex

これより $\rho_y : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[[y]])$

algebra auto

$\exp(X)\mapsto \mathrm{Exp}(\tilde{X}):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{X}^k$

は Gの表現 (Gのy表現)

Fact： ρ_yは忠実 $\Leftrightarrow$ Ωは正則 $(\det\Omega\neq 0)$

3. 二重対数元

☆ Euler 二重対数関数 (dilogarithm)

$$\mathrm{Li}_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j^2} \quad |x|<1 \text{で収束}$$

$$-\mathrm{Li}_2(-x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}x^j$$

$$x\frac{d}{dx}\left(-\mathrm{Li}_2(-x)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}x^j=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots=\log(1+x)$$

よって, $-\mathrm{Li}_2(-x)=\int_0^x\frac{\log(1+y)}{y}dy$ (積分表示.)

☆ Gの二重対数元

各$n\in N^+$に対して,

$$\Psi[n]:=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}X_{jn}\right)\in G^{\parallel}_{n_0} \quad \begin{pmatrix} n_0\in N^+_{\mathrm{pr}} \\ n=tn_0\ (t\in\mathbb{Z}_{>0})\end{pmatrix}$$

これをnの二重対数元 (dilogarithm element) という

※ y表現の下で

$$\Psi[n](y^{n'}) = y^{n'} \exp\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\cancel{j^2}} \{\cancel{j}n, n'\}\, y^{jn}}\right)$$

$$\left(\tilde{X}_n(y^{n'}) = y^{n'}\{n,n'\}y^n\right)$$

$$= y^{n'} \exp\left(\{n,n'\} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} y^{jn}}_{\| \atop \log(1+y^n)}\right)$$

$$= y^{n'}(1+y^n)^{\{n,n'\}}$$

（これは団パターンのy変数の変異（の一部））

Fock-Goncharov分解

ポイント：$\Psi[n]$は変異の"代数化"

利点 $\left\{\begin{array}{l}\text{・}G\text{における関係式} \\ \text{・　〃　無限積}\end{array}\right.$ を考えられる.

3. 五角関係式

$\Psi[n]$はGにおける以下の関係式をみたす.

Thm 1　[KS], [GHKK], [N]

$n_1, n_2 \in N^+$,　$c_1, c_2, c \in \mathbb{Q}$

(1) 可換関係式　$\{n_2, n_1\} = 0$ のとき

$$\Psi[n_2]^{c_2}\Psi[n_1]^{c_1} = \Psi[n_1]^{c_1}\Psi[n_2]^{c_2}$$

∵　$[X_n, X_{n'}] = \{n,n'\}X_{n+n'} = 0$ + BCH 〃

(2) 五角関係式　$\{n_2, n_1\} = c \neq 0$ のとき

$$\Psi[n_2]^{1/c}\Psi[n_1]^{1/c} = \Psi[n_1]^{1/c}\Psi[n_1+n_2]^{1/c}\Psi[n_2]^{1/c}$$

（$c=1$ が [KS]（上の変種）, [GHKK]（x表現））

(2)の証明 ・y表現 ρ_y を用いる.

・n_1, n_2を含むランク2の格子N'に制限すると ρ_y は忠実

★ (2) の証明 (ex)

(LHS)(y^n)

$$= \Phi[n_2]^{1/c}\Big(\underbrace{\Phi[n_1]^{1/c}(y^n)}_{=\, y^n(1+y^{n_1})^{\{n_1,n\}/c}}\Big)$$

$$= y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}\Big(1+y^{n_1}(1+y^{n_2})^{\overbrace{\boxed{\{n_2,n_1\}/c}}^{=1\ \text{仮定}}}\Big)^{\{n_1,n\}/c}$$

- こちらは特に何もやらなかった
- 右辺も同じ結果になる (こちらが非自明)

(RHS)(y^n)

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\,\Phi[n_1+n_2]^{1/c}\Big(\underbrace{\Phi[n_2]^{1/c}(y^n)}_{=\, y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}}\Big)$$

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\Big(y^n(1+y^{n_1+n_2})^{\{n_1+n_2,n\}/c} \times \Big(1+y^{n_2}(1+y^{n_1+n_2})^{\underbrace{\boxed{\{n_1+\cancel{n_2},n_2\}/c}}_{=-1}}\Big)^{\{n_2,n\}/c}\Big)$$

$$= \Phi[n_1]^{1/c}\Big(y^n(1+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}\,(1+y^{n_2}+y^{n_1+n_2})^{\{n_2,n\}/c}\Big)$$

$$= y^n(1+y^{n_1})^{\{n_1,n\}/c}\Big(1+y^{n_1+n_2}(1+y^{n_1})^{\boxed{\{n_1,n_1+n_2\}/c}=-1}\Big)^{\{n_1,n\}/c}$$
$$\times\Big(1+y^{n_2}(1+y^{n_1})^{\underbrace{\boxed{\{n_1,n_2\}/c}}_{=-1}}+y^{n_1+n_2}(1+y^{n_1})^{\underbrace{\boxed{\{n_1,n_1+n_2\}/c}}_{=-1}}\Big)^{\{n_2,n\}/c}$$

$$= y^n(1+y^{n_1}+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}$$
$$\times(1+y^{n_1})^{-\{n_2,n\}/c}\Big(\underbrace{1+y^{n_1}+y^{n_2}+y^{n_1+n_2}}_{=\,(1+y^{n_1})(1+y^{n_2})}\Big)^{\{n_2,n\}/c}$$

$$= y^n(1+y^{n_2})^{\{n_2,n\}/c}(1+y^{n_1}+y^{n_1+n_2})^{\{n_1,n\}/c}$$

● 以上の計算は、本質的に A_2 型団パターンの y 変数の 五項周期 の計算と同じ

Lect 2 整合的散乱図

1. 散乱図

復習 $\Omega=(\omega_{ij})$ $r\times r$ 反対称有理行列

$$\begin{cases} N\simeq \mathbb{Z}^r \\ e_1,\dots,e_r : N\text{の基底}\end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $G=G_\Omega$ 構造群

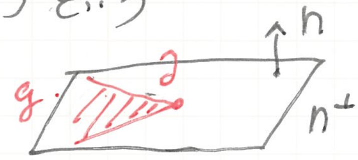
☆ 壁

$M\simeq \mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z})$, $M_{\mathbb{R}}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$

$\langle\cdot,\cdot\rangle : N\times M_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ 標準ペアリング

$n\in N^+$, $n^\perp=\{z\in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n,z\rangle=0\}\subset M_{\mathbb{R}}$

Def 以下の三つ組 $w=(\mathfrak{d},g)_n$ を壁(wall)という



- 法ベクトル $n\in N^+_{pr}$
- 台 $\mathfrak{d}\subset n^\perp$;(凸有理多面)錐 次元が r−1
- 壁元 $g\in G_n^{\parallel}=\{\text{すべての}\exp(\sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{jn})\}$

例: $(n^\perp, \Psi[tn]^c)_n$ $t\in\mathbb{Z}_{>0}$, $c\in\mathbb{Q}$

☆ 散乱図

Def $\mathfrak{D}=\{w_\lambda=(\mathfrak{d}_\lambda,g_\lambda)_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ が以下をみたすとき散乱図(scattering diagram)という

有限性条件: 任意の $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$\pi_\ell(g_\lambda)\neq id$ となる w_λ は有限個

($\pi_\ell: G\to G^{\le \ell}:=G/G^{>\ell}$ 標準射影)

またこのとき、$\mathfrak{D}_\ell=\{w_\lambda \mid \pi_\ell(g_\lambda)\neq id\}$ を $\mathfrak{D}$ の degree ℓ の縮小という。(有限集合となる)

---

2. 整合性

以下 $\mathfrak{D}$: 散乱図

✲ 道順序積

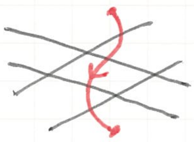
$$\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{d}_\lambda$$

$$\mathrm{Sing}\,\mathfrak{D} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \partial\mathfrak{d}_\lambda \;\cup \bigcup_{\lambda,\lambda'} \mathfrak{d}_\lambda\cap\mathfrak{d}_{\lambda'}$$

$\dim(\mathfrak{d}_\lambda\cap\mathfrak{d}_{\lambda'}) = r-2$

(Φではなく、法ベクトルが異なる)

Def 曲線 $\gamma:[0,1]\to M_{\mathbb{R}}$ は許容曲線



- γ はなめらか
- γ の端点は $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D}$ にない
- γ は $\mathrm{Sing}\,\mathfrak{D}$ と交わらない
- γ は $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{D}$ と横断的に交わる.

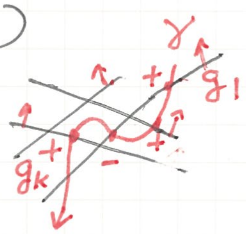
以下, 曲線は許容曲線とする.

Def 上の $\mathfrak{D}$, γ に対して, 道順序積 $P_{\gamma,\mathfrak{D}}\in G$ (path-ordered product) を以下で定める.

各 $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$P_{\gamma,\mathfrak{D}_\ell} = g_k^{\epsilon_k}\cdots g_1^{\epsilon_1}$$

ϵ_i: 交差符号 (右図)



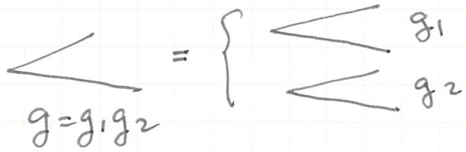
$$P_{\gamma,\mathfrak{D}} = \lim_{\ell\to\infty} P_{\gamma,\mathfrak{D}_\ell} \quad \text{well-defined}$$

✲ 同値/整合性

Def 散乱図 $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ は同値

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の γ に対して, $P_{\gamma,\mathfrak{D}} = P_{\gamma,\mathfrak{D}'}$

同値なものは無数にある

台の分割  壁元の分割 

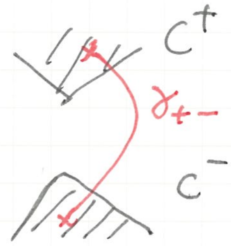
最も重要な概念.

Def 散乱図 $\mathfrak{D}$ は整合 (consistent)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の曲線 γ に対して, $P_{\gamma,\mathfrak{D}}$ は γ の端点にしかよらない

$\iff$ 任意の閉曲線 γ に対して $P_{\gamma,\mathfrak{D}} = \mathrm{id}$

3. 存在定理



以下 $\mathfrak{D}$：整合散乱図

$$C^+ = \{ z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z \rangle \geq 0 \ (i=1,\dots,r) \}$$
$$C^- = \{ \ \text{〃} \mid \ \text{〃} \leq \text{〃} \ \}$$

Fact：任意の $n \in N_{pr}^+$ に対して

$$n^\perp \cap \mathrm{Int}\, C^\pm = \phi$$

$n^\perp \subset \partial$ support

よって $\gamma_\pm$：$\begin{cases} \text{始点} \in \mathrm{Int}\, C^+ \\ \text{終点} \in \mathrm{Int}\, C^- \end{cases}$ なる曲線に対して

$g(\mathfrak{D}) := p_{\gamma_{+-}, \mathfrak{D}} \in G$ は γ_{+-} の取り方によらない

Thm 1 [KS] 以下の写像は全単射.

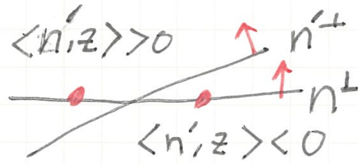
$$\varphi : \{\text{すべての整合散乱図}\}/\sim \ \longrightarrow G$$
$$\mathfrak{D} \longmapsto g(\mathfrak{D})$$

証明のポイント.

Def $z \in M_{\mathbb{R}}$ は一般(の点) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $z \in n^\perp$ なる $n \in N_{pr}^+$ は高々一つ

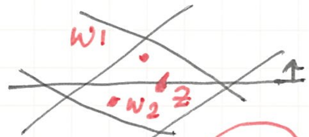
z：一般　分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+^z \oplus \mathfrak{g}_0^z \oplus \mathfrak{g}_-^z$

$$\mathfrak{g}_0^z = \bigoplus_{\substack{n \in N_+ \\ \langle n, z \rangle = 0}} \mathfrak{g}_n , \quad \mathfrak{g}_\pm^z = \bigoplus_{\substack{n \in N_+ \\ \langle n, z \rangle \gtrless 0}} \mathfrak{g}_n \qquad \mathfrak{g}_n = \mathbb{Q} X_n$$



ポイント① 上の分解は $n^\perp$ 上で一定ではない
(wall-crossing のメカニズムの起源)

対応する群の分解 $G = G_+^z G_0^z G_-^z$
$$g = g_+^z \, g_0^z \, g_-^z \ (\text{一意的})$$

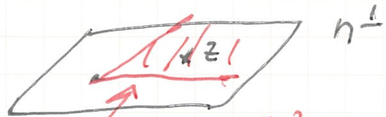


ポイント② 右図において　$n \in (N_{pr}^+)_{\leq \ell}$ のもの

局所整合性 $g_0^z \equiv (g_+^{w_2})^{-1} g_+^{w_1} \mod G^{>\ell}$

∵
$$g = \overbrace{g_+^z \, g_0^z}^{g_+^{w_1}} \overbrace{g_-^z}^{g_-^{w}} \Big\} \mod G^{>\ell}$$
$$\underbrace{g_+^z}_{g_+^{w_2}} \ \underbrace{g_0^z \, g_-^z}_{g_-^{w_2}}$$

φ の逆写像　$g \in G$ に対して



wall にのせる

$$g_0^z = \exp\Big(\sum_{j>0} c_j X_{jn} \Big)$$
$$= \prod_{j>0} \boxed{\exp(c_j X_{jn})}$$

局所整合性
$\Rightarrow \mathfrak{D}$ の整合性

4. ランク2の例

・Thm 1 の構成は G の抽象的な分解にもとづく

以下，特別な整合散乱図を二重対数元と五項関係式で構成

復習: $n\in N^+$, $\Psi[n]=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}x_{jn}\right)$

$\{n',n\}=c$ のとき

$$\Psi[n']^{1/c}\,\Psi[n]^{1/c}=\Psi[n]^{1/c}\,\Psi[n+n']^{1/c}\,\Psi[n']^{1/c}$$

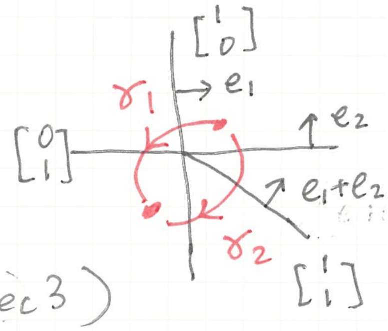
以下 $r=2$ $\Omega=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とする

$\{e_2,e_1\}=1$

$$\Psi[e_2]\,\Psi[e_1]=\Psi[e_1]\,\Psi[e_1+e_2]\,\Psi[e_2]$$

(☆) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{A_2\text{型の正ルート}}$ と略記

例1 A_2型



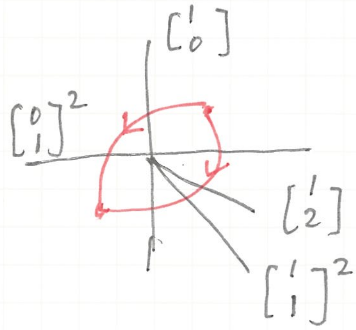
(☆)は右の散乱図の整合条件とみなせる

$$\mathfrak{p}_{\gamma_1,\mathfrak{D}}=\mathfrak{p}_{\gamma_2,\mathfrak{D}}$$

これは A_2型の団散乱図 (CSD) (定義はLec3)

A_2型の G扇ともみなせる。

例2 B_2型



$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big)$$

反整列 $\frac{0}{1}<\frac{1}{0}$

注 $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right\}=bc-ad=-\det\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

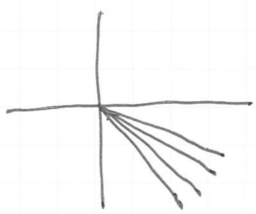
$$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

$\frac{1}{0}>\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{0}{1}$ 整列

B_2型の正ルート

B_2型の CSD / G扇
(たてにリスケール)

例3 G_2型



$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\right)$$

$$\overset{ex}{=}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3$$

整列 G_2型の正ルート

G_2型の CSD / G扇
(たてにリスケール)

Lect 3. 団散乱図

1. 平行部分群

Ω : $r\times r$ 反対称有理行列

$G = G_\Omega$: Ωから定まる群

$n \in N^+_{pr}$ に対して $G^{\parallel}_n = \{\exp(\sum_j c_j X_{jn})\}$

平行部分群 (アーベル群)

$\mathfrak{g}$ の n による分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^n_+ \oplus \mathfrak{g}^n_0 \oplus \mathfrak{g}^n_-$$

$$\mathfrak{g}^n_0 = \bigoplus_{\substack{n'\in N^+ \\ \{n',n\}=0}} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}^n_\pm = \bigoplus_{\substack{n'\in N^+ \\ \{n',n\}\gtrless 0}} \mathfrak{g}_{n'}$$

分解 $G = G^n_+ G^n_0 G^n_-$ を induce.

さらに

$$\mathfrak{g}^n_0 = \mathfrak{g}^{\parallel}_n \oplus \mathfrak{g}^{\perp}_n$$ ← $\mathfrak{g}^n_0$ のイデアル

$$\mathfrak{g}^{\parallel}_n = \bigoplus_{n'\in \mathbb{Z}n} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}^{\perp}_n = \bigoplus_{\substack{n'\notin \mathbb{Z}n \\ \{n',n\}=0}} \mathfrak{g}_{n'}$$

$$G^{\parallel}_n \cong G^n_0 / G^{\perp}_n$$

分解 $G \ni g = g^n_+ \underset{\downarrow}{g^n_0} g^n_-$ を用いて

projection $g^{\parallel}_n$

写像 $\psi : G \longrightarrow \mathcal{S}^{\parallel} := \prod_{n\in N^+_{pr}} G^{\parallel}_n$ が定まる.

$$g \longmapsto (g^{\parallel}_n)$$

Thm 1. [GHKK] ψ は全単射 (group iso ではない)

(⊃) 逆写像 $\psi^{-1} : \mathcal{S}^{\parallel} \longrightarrow G$ の作り方

$$\mathbb{h} = (h_n) \mapsto g$$

$g_1, g_2, \ldots$ を以下のように作り, $g = \lim_{\ell\to\infty} g_\ell$

g_1: $g_1 = \prod_{n\in (N^+_{pr})^{\le 1}} h_n$ ← 順序に依存

$g_\ell \to g_{\ell+1}$: $(g_\ell)^{\parallel}_n h'_n = h_n$ となる h'_n を用いて

$$g_{\ell+1} = g_\ell \prod_{n\in (N^+_{pr})^{\le \ell+1}} h'_n$$

//

$$\{\text{整合散乱図}\}/\sim \xrightarrow[\sim]{\text{Lect 2}} G \overset{\text{Thm 1}}{\simeq} \mathcal{S}''$$

$$\mathfrak{D} \longleftrightarrow g \longleftrightarrow \mathbb{h}=(h_n)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{h})$$

$\mathfrak{D}(\mathbb{h})$ の別の特徴づけを与える.

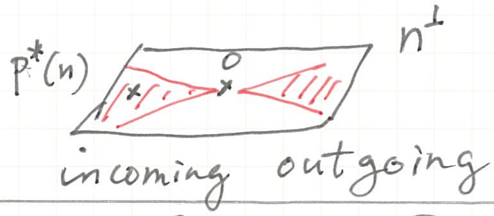
$$p^*: N \longrightarrow M_{\mathbb{R}}$$
$$n \longmapsto \{\cdot, n\}$$

このとき, $p^*(n) \in n^\perp$

$\because$ $\langle n, p^*(n)\rangle = \{n, n\} = 0$ //

Def 壁 $w=(\partial, g)_n$ は incoming (内への) $\Longleftrightarrow p^*(n) \in \partial$

outgoing (外への) $\Longleftrightarrow p^*(n) \notin \partial$



$\mathfrak{D}_{in} :=$ {すべての $\mathfrak{D}$ の内への壁}

Thm 2 [GHKK]

任意の $\mathbb{h} \in \mathcal{S}''$ に対して

$$\mathfrak{D}_{in} = \{(n^\perp, h_n)_n \mid n \in N^+_{pr}\}$$

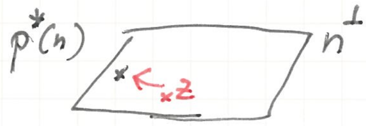
をみたす整合散乱図 $\mathfrak{D}$ が存在する

また，そのような $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}(\mathbb{h})$ と同値

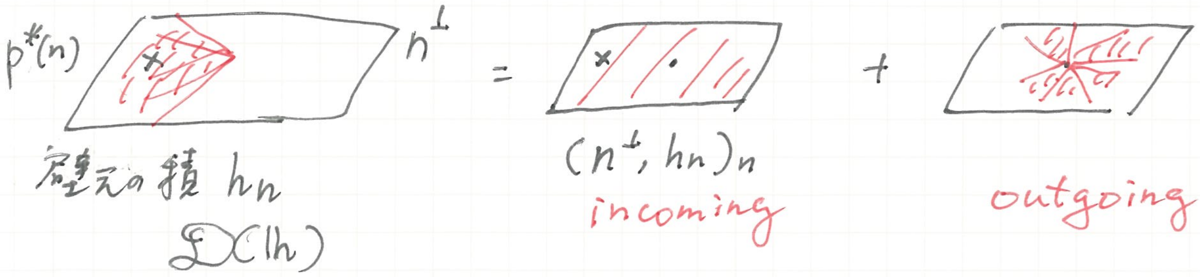
証明のキー: 任意の $g \in G$ と $n \in N^+_{pr}$ に対して

$$g''_n = \lim_{\substack{z \to \boxed{p^*(n)} \\ z \in n^\perp,\ \text{general}}} g^z_0$$

Lect 2



これを認めると



//

2. 団散乱図 (CSD)

初期行列 $B = (b_{ij})^{r\times r}$ 反対称化可能整数行列

⇕

(ある正有理対角行列 D が存在して、DB は反対称)

分解 $B = \Delta\Omega$ をひとつ決める。

Ω : 反対称有理行列

Δ : 正整数対角行列

- たとえば $\Delta = \lambda D^{-1}$ 　$\lambda > 0$
- 分解は一意的でないが問題にならない。

今まで通り

$$\begin{cases} \Omega \\ N \simeq \mathbb{Z}^r \\ e_1, \dots, e_r : N \text{の基底} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_\Omega : \text{群} \\ M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \\ e_1^*, \dots, e_r^* : \text{双対基底} \end{cases}$$

一方 $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ より。

$$\begin{cases} N^\circ := \bigoplus \delta_i e_i \subset N \\ M^\circ := \bigoplus \delta_i^{-1} e_i^* \end{cases} \qquad M \subset M^\circ \subset M_{\mathbb{R}}$$

また、各 $n \in N^+$ に対して、$\delta(n)\, n \in N^\circ$ となる最小の正の有理数

$\delta(n)$ を n の正規化因子という

例 $\delta(e_i) = \delta_i$ 　　$\delta(tn) = t^{-1}\delta(n)$
$t \in \mathbb{Z}_{>0}$

Thm 2 より

Thm-Def $\mathfrak{D}_{in} = \{ (e_i^{\perp}, \Psi[e_i]^{\delta_i})_{e_i} \mid i = 1, \dots, r \}$ をみたす

整合散乱図 $\mathfrak{D}_B$ が(同値を除き)一意的に存在する。

これを B に附随する団散乱図式 (cluster scattering diagram $=$ CSD) という

☺ Thm 2 で、$h_n = \begin{cases} \Psi[e_i]^{\delta_i} & n = e_i \ (i = 1, \dots, r) \\ \mathrm{id} & \text{その他} \end{cases}$ とする。 //

3. rank 2 CDS と整列補題

$$B=\begin{pmatrix}0 & -\delta_1\\ \delta_2 & 0\end{pmatrix}=\underset{\Delta}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}\delta_1 & \\ & \delta_2\end{pmatrix}}}\underset{\Omega}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}}$$

$(\delta_1,\delta_2\in\mathbb{Z}_{>0})$ Lect 2

Incoming の条件

$$p^*: N \longrightarrow M_{\mathbb{R}},\quad n\longmapsto \{\cdot, n\}$$

$$\begin{cases} N \text{ の基底 } & e_1, e_2\\ M_{\mathbb{R}} \ 〃 & \delta_1^{-1}e_1^*,\ \delta_2^{-1}e_2^*\end{cases}$$

このとき, p^* の表現行列は B となる

$\because\ \langle \delta_i e_i, p^*(e_j)\rangle=\{\delta_i e_i, e_j\}=\delta_i\omega_{ij}=b_{ij}$ 〃

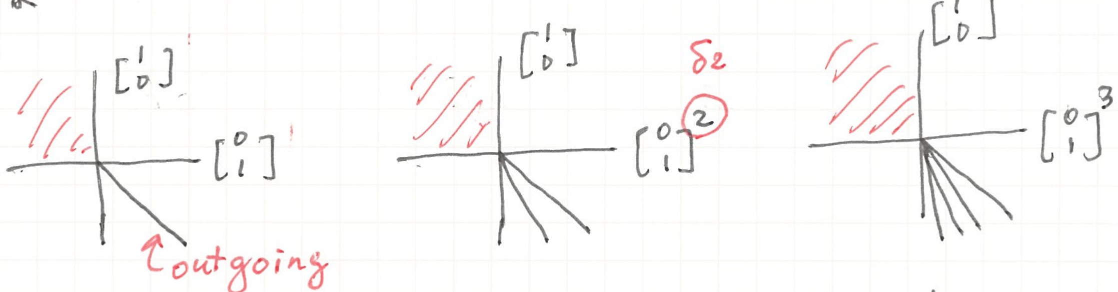
ゆえに, $p^*(n)=B\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\delta_1 n_2\\ \delta_2 n_1\end{pmatrix}$ $(n\in N^+_{pr})$

$M_{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{R}^2$

第2象限に含まれる

以下, $M_{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{R}^2$ は上の基底による.

Lect2の例



B $\quad\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$A_2 \qquad B_2 \qquad G_2$

に付随するCSD.

一般の B のCSDの整合関係式

$$(*)\quad \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{\delta_2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\delta_1}}_{\text{反整列}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\delta_1}\cdots\cdots\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^{\delta_2}}_{\text{整列}}$$

Thm 3 (整列補題 [N21])

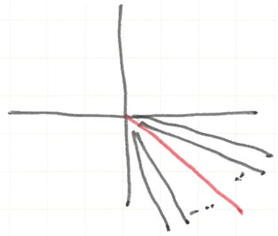
$\Psi[n]^{\delta(n)}$ の反整列(有限)積は, 五角関係式を(必要なら無限回)適用し, $\Psi[n]^{\delta(n)}$ の整列(無限)積に直せる.

- アルゴリズムがある
- プログラム(SageMath)もある

} [N21]

例1 $(\delta_1,\delta_2)=(2,2)$ $A_1^{(1)}$ 型

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\cdots\left(\prod_{j=0}^{\infty}\begin{bmatrix}2^j\\2^j\end{bmatrix}^{2^{2-j}}\right)\cdots\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$



式は [Reineke12]

五角による導出 [松下21]

参考：発見的導出.

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2 \underset{\text{五角}}{=} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2 \underset{>}{\,}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2 \underset{>}{\,}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{<}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^2 \underset{>}{\,}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \underset{>}{\,}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2 \qquad (\#)$$

not ordered

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=2$$

mod $G^{>3}$ では $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は可換

$$(\#)\text{の右辺} \equiv \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^4\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

degree を上げる

$$\text{五角}\quad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_2^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_2^2\underbrace{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_2}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_2^2$$

not ordered （#と同じ構造）

$$[\ \ ]_2=[\ \ ]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=4$$

mod $G^{>7}$ では可換

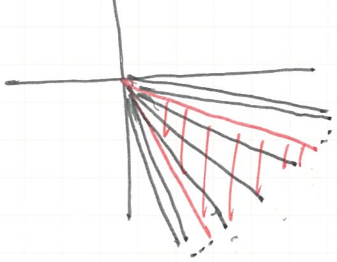
$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^2\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^4\right)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^2\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2$$

例2 $(\delta_1,\delta_2)=(3,3)$ nonaffine

SageMath

mod $G^{>5}$ で

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}^3\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^9\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}^{39}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^9\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}^{18}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{39}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^9\right)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^3 \\ \text{deg}\quad 1\quad 4\quad 3\quad 5\quad 2\quad 4\quad 5\quad 3\quad 4\quad 1 \end{array}$$



← $\delta_1=\delta_2$ すべての有理傾き

The Badlands

[Davison-Mandel]

Lect 4 団散乱図の正実現

1. CSD の正実現

☆ 正実現

一般に

・ $g \in G_\Omega$ は $\exp(X_n)^c$ $(n \in N^+, c \in \mathbb{Q})$ の(無限)積で表せる

・ $\Psi[n] = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} X_{jn}\right)$ を逆転させて

g は $\Psi[n]^c$ $(n \in N^+, c \in \mathbb{Q})$ の(無限)積で表せる

CSDでは特別なことがおこる

Thm 1 [GHKK] CSD $\mathfrak{D}_B$ のすべての壁元を

$\Psi[n]^{\underbrace{\delta(n)}_{\geq 0}}$ の積にとることができる.

これを CSD の 正実現 という

[GHKK] の構成

degree についての induction

各 step で $\left\{ \begin{array}{l} \text{perturbation trick} \\ \text{lattice change trick} \end{array} \right.$ を用いる

ここではこれを 整列補題 でおきかえる

☆ 継目

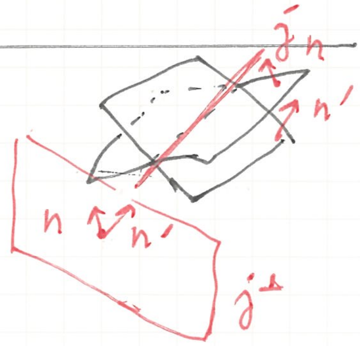
Def $\mathfrak{D}$ の壁 w_1, w_2 の台の交わり $\mathfrak{j} = \partial_1 \cap \partial_2$ の次元が $r-2$ のとき,

$\mathfrak{j}$ を継目(joint)という

継目 $\mathfrak{j}$ に対して

$\mathfrak{j}^{\perp} = \{ n \in N \mid \langle n, \mathfrak{j} \rangle = 0 \}$

N の rank 2 sublattice



① $\mathfrak{j}$ は平行 (parallel) $\overset{def}{\iff}$ $\{\ ,\ \}|_{\mathfrak{j}^{\perp}} = 0$

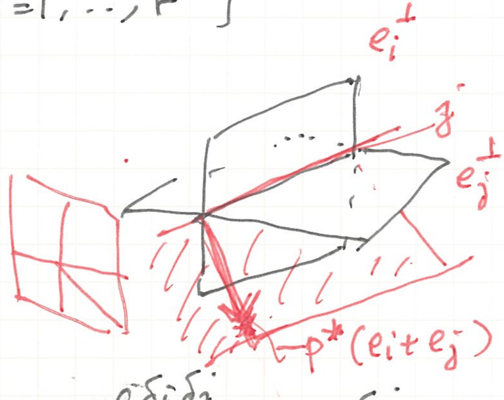
このとき, $G_n^{\parallel}$ と $G_{n'}^{\parallel}$ は可換

② $\mathfrak{j}$ は垂直 (perpendicular) $\overset{def}{\iff}$ $\{\ ,\ \}_{\mathfrak{j}^{\perp}} \neq 0$

✿ 正実現の構成

$\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \cdots$, $\mathfrak{D} = \lim \mathfrak{D}_\ell$ と作る.

<u>Step 1</u> $\mathfrak{D}_1 = \{ (e_i^\perp, \underbrace{\Phi[e_i]}_{\deg=1}{}^{\delta_i})_{e_i} \mid i=1,\dots,r \}$



<u>Step 2</u> $\mathfrak{D}_2$

継目 $j = e_i^\perp \cap e_j^\perp$: <u>垂直</u>のとき $(c \neq 0)$

たとえば, $\{e_j, e_i\} = c > 0$ とする

$$\Phi[e_j]^{\delta_j}\Phi[e_i]^{\delta_i} = \Phi[e_i]^{\delta_i}\,\underbrace{\Phi[e_i+e_j]}_{\deg 2}{}^{c\delta_i\delta_j}\,\Phi[e_j]^{\delta_j} \mod G^{>2}$$

anti-ordered ↑ 五角

このとき 壁 $(\underbrace{\sigma(j, -p^*(e_i+e_j))}_{\text{これらの張る cone outgoing}}, \Phi[e_i+e_j]^{c\delta_i\delta_j})_{e_i+e_j}$

を加える

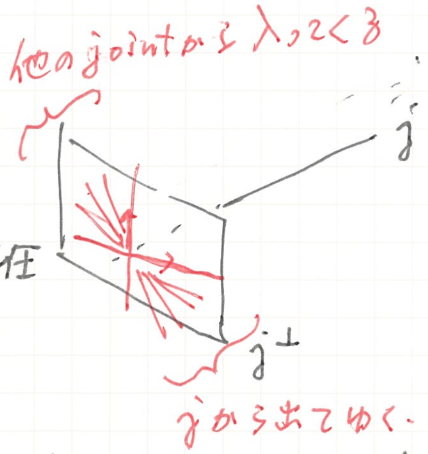
<u>Step ℓ</u> $\mathfrak{D}_{\ell-1} \rightsquigarrow \mathfrak{D}_\ell$

j: $\mathfrak{D}_{\ell-1}$ の垂直継目

$N_j^+ = N^+ \cap j^\perp$, $N^+_{j,pr} = N^+_{pr} \cap j^\perp$

以下をみたす $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in N^+_{j,pr}$ が一意的に存在

$$\begin{cases} N_j^+ \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}\tilde{e}_1 + \mathbb{Q}_{\geq 0}\tilde{e}_2 \\ \{\tilde{e}_2, \tilde{e}_1\} > 0 \end{cases}$$



j を含み, 上の第2象限にある壁元の反整列積を整列積で表し, $\deg(tn) = \ell$ の元 $\Phi[tn]^{s\delta(tn)}$ に対して

壁 $(\sigma(j, -p^*(n)),\ 〃\ )_n$ を加える.

特に, 上で得られる $\mathfrak{D}$ は <u>平行継目</u> のまわりでも 整合 となる. //

(これは非自明)

また、上の構成より

Thm 2 [N21] CSDの任意の整合関係式は、可換関係式と五角関係式を(必要なら無限回)適用して自明なもの($g=g$)に帰着できる

∵ 継目 j のまわりの整合関係式のみ考えればよい

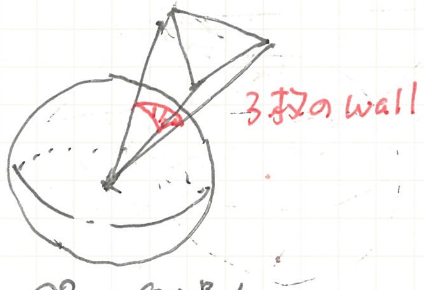
j が平行のとき $\Longrightarrow$ 可換関係式

垂直 $\Longrightarrow$ 〃 + 五角関係式

(整列補題の逆操作)

※ <u>構成の実例</u> rank 3 A_3 型

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

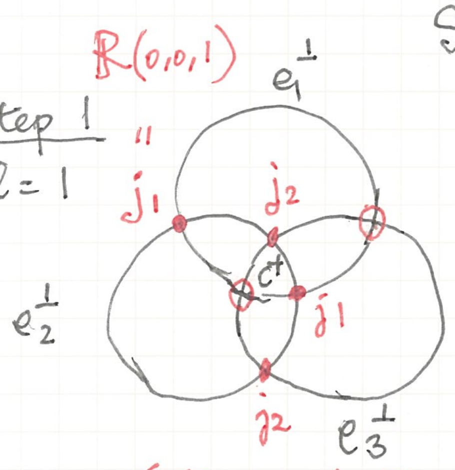


S^2 に射影

立体射影

<u>Step 1</u>

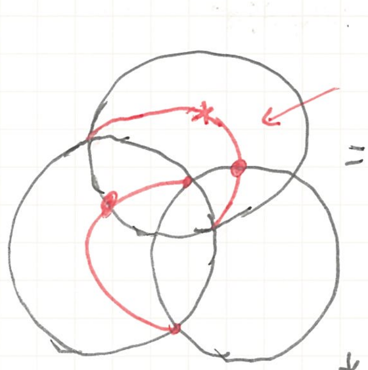
$l=1$



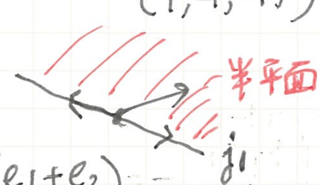
• 垂直 ○ 水平

<u>Step 2</u>

$l=1\to 2$



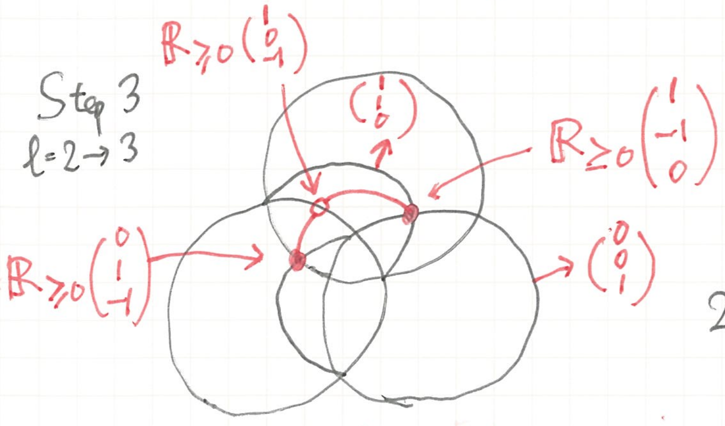
$$\sigma(j_1,-p^*(e_1+e_2))=\sigma((0,0,1),(0,0,-1),(1,-1,-1))$$



$$-p^*(e_1+e_2)=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Step 3

$l=2\to 3$



$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=1 \Longrightarrow$ 五角

$$-B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

2つの壁は○でつながる (○:水平)

ここで終 (有限型).

2. 団代数への応用

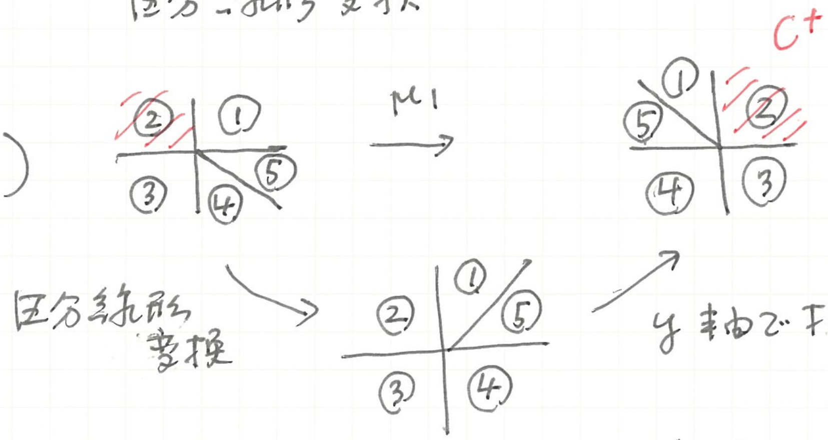
Thm 1 (CSDの正実現) とその構成
より

Thm 3 [GHKK] CSDの変異不変性

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "変異"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \mathfrak{D}(B) \arrow[r, dashed, "区分線形変換"'] & \mathfrak{D}(B') \end{tikzcd}$$

例

$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$B'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\mathfrak{D}(B')$のC^+(部屋 chamber)が$\mathfrak{D}(B)$のある部屋に対応
- 変異をくり返すことにより、$\mathfrak{D}(B)$の部屋構造が得られる
- 団代数のG扇$\Delta_G(B)$も同じ変異不変性を持つ.

これより、

Thm 4 [GHKK] (1) G扇$\Delta_G(B)$は(極小台を持つ)CSD $\mathfrak{D}(B)$の台に「埋め込まれる」

(2) cベクトルは壁の法ベクトルの定数倍
($\Longrightarrow$ cベクトルの符号同一性)

また、団単項式は$\mathfrak{D}(B)$のtheta関数の特別なもの
Thm 1より 係数が正値

Thm 5 [GHKK] 団代数のLaurent正値性.