2.【現在までの研究状況】（図表を含めてもよいので、わかりやすく記述してください。様式の変更・追加は不可(以下同様)）
① これまでの研究の背景、問題点、解決方策、研究目的、研究方法、特色と独創的な点について当該分野の重要文献を挙げて記述してください。
② 申請者のこれまでの研究経過及び得られた結果について整理し、①で記載したことと関連づけて説明してください。その際、博士課程在学中の研究内容が分かるように記載してください。申請内容ファイルの「4.【研究遂行能力】」欄に記載した論文、学会発表等を引用する場合には、同欄の番号を記載するとともに、申請者が担当した部分を明らかにして記述してください。

申請者の研究分野は**多元環の表現論**という、与えられた多元環上の加群の構造を解明する分野である。申請者は**完全圏**という枠組みを用いてこれを研究してきた。

（多元環の表現論）

多元環の表現論は「与えられた多元環 Λ に対して有限生成 Λ 加群のなす圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の構造を調べる」ことを主な目的とする。この分野は近年、アーベル圏や三角圏など圏構造の解析や圏化の視点から、可換環論・Lie 理論・数理物理・代数幾何などと相互に関連して発展している。

（研究背景：部分圏の研究）

環の表現論の重要なテーマの一つに、加群圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ そのものだけでなく、$\operatorname{mod}\Lambda$ の**特定の条件を満たす部分圏に注目する**ものがある。例えば**ねじれ類**という加群圏の部分圏（＝拡大・剰余で閉じた部分圏）は、古くから基本的な対象かつ、近年は団代数など他分野との深い関わりも発見され、注目されている。

しかし先行研究では、**加群圏の部分圏の分類問題に主題が置かれ、各部分圏そのものの性質についてはほぼ研究されていなかった**。そこで申請者は部分圏それ自体の構造に関心を持った。ねじれ類など表現論的に重要な部分圏は拡大を取る操作で閉じ、よって Quillen が導入した**完全圏**という付加構造を持つ。ここで完全圏とは、どれを「短完全列」と呼ぶかが指定された加法圏のことである。申請者はこれに着目し、**加群圏の多様な部分圏を完全圏の観点から研究**してきた。

（研究成果 1 [論文 1,2]） (研究業績欄の番号に従う)

環の表現論における最初期からの重要な問題の一つに、**有限表現型**、つまり直既約 Λ 加群が同型を除いて有限個しかないような環 Λ の研究がある。このクラスの環は加群圏の構造が**箙（＝有向グラフ）**を用いて組合せ論的に記述でき、その構造論・分類論はこの分野の発展を促してきた。一方可換環論でも重要な **Cohen-Macaulay 加群**（以下 CM と略す）のなす部分圏 $\mathrm{CM}\,\Lambda$ を調べる **CM 表現論**と呼ばれる流れがある。そこでは直既約 CM 加群が有限個しかない **CM 有限な環**が重要な研究対象で、特に可換の場合は ADE 型単純特異点と対応することが知られているが、非可換での CM 有限性はあまり調べられていなかった。これに対して申請者は次のような **CM 有限な環の分類定理**を得た。

> **定理 1**. CM 有限な Gorenstein 環 Λ は、「大域次元有限な環 Γ と、その移動箙の巡回点線軌道の集合」という組で分類される。

その証明のため「与えられた圏上の可能な完全圏構造の分類（＊）」「いつ完全圏が CM 圏と同値かの判定条件」といった完全圏の基礎理論を構築した。与えられた圏上の**最大な完全圏構造の存在すらごく最近まで知られていなかったことを考えると、（＊）だけでも完全圏の一般論の大きな進展**であり、その上これを CM 表現論へ応用できることを見出した。実際 **[論文 2]** は Advances in Mathematics という著名な国際雑誌に掲載され、また他の研究者が提唱した予想 [BHLR] を肯定的に解決し、さらに（＊）に大いに基づいた研究 [FG, MRS] が複数なされた。

(研究成果 2 [論文 5])

加群圏では **Jordan-Hölder の定理**という、加群の組成因子の一意性、つまり加群を**単純加群**から作るのに必要な単純加群たちの一意性が知られている。この Jordan-Hölder 性（以下 JH 性と略す）は学部で学ぶほど基本的だが、加群圏の部分圏では一般に JH 性が成立しない。申請者はこれを調べるため完全圏 $\mathcal{E}$ の**単純対象**（単純加群の対応物）や JH 性の基礎理論を構築し、また **Grothendieck モノイド** $\mathsf{M}(\mathcal{E})$ という、Grothendeick 群より精緻な完全圏不変量を導入し、以下の判定法を得た。

> **定理 2**. ねじれ類などの加群圏のよい部分圏 $\mathcal{E}$ が JH 性を満たすことと、$\mathsf{M}(\mathcal{E})$ が自由モノイドなことと、$\mathcal{E}$ の単純対象の個数が $\mathcal{E}$ の直既約射影対象の個数と等しいことは同値である。

この結果は各部分圏の**単純対象の分類**や **JH 性の判定**という新たな問題意識と手法を多元環の表現論にもたらすものであり、さらに以下の研究を発展させる動機づけとなった。

申請者登録名　榎本 悠久

（現在までの研究状況の続き）

（研究成果 3 [論文 6]）

多元環の最も重要なクラスに Dynkin 箙 Q の**道多元環** kQ がある。ここで kQ 加群は箙 Q の表現と同一視ができ、次の **Gabriel の定理**は、Q の表現論と **Lie 理論**との繋がりを与える重要な定理である：

定理 (Gabriel). Q の表現 M に対して次元ベクトル $\underline{\dim}\, M$ を対応させることで、直既約 Q 表現の同型類の集合と、Q に対応するルート系 Φ の正ルートの集合 Φ^+ に全単射がある。

道多元環 kQ の自然な拡張として**前射影的多元環** Π_Q という環があり、これは Klein 特異点の特異点解消や量子群の結晶基底など多くの分野と関連する重要な研究対象である。先行研究により、Φ の Weyl 群 W の元 w に対して Π_Q のねじれ類 $\mathcal{T}_w$ が定まる。この圏は、多元環側では $\mathsf{mod}\,\Pi_Q$ のねじれ類の分類を、Lie 理論では代数群の冪単胞体の座標環の団構造を圏化する [GLS] など、**両分野で重要な圏であるが、$\mathcal{T}_w$ 自体の圏論的性質は全く研究されてこなかった。**申請者は**研究成果 2** を踏まえ $\mathcal{T}_w$ の単純対象を考察し、各単純対象が**煉瓦 (brick)** というよい性質を持つ加群であることを発見し、以下の結果を得た。

> **定理 3**. $\mathcal{T}_w$ の煉瓦の次元ベクトルは w の転倒ルートの集合 $\mathsf{inv}(w)$ に属し、この対応で $\mathcal{T}_w$ の単純対象の集合 $\mathsf{sim}\,\mathcal{T}_w$ は w の **Bruhat 転倒**の集合 $\mathsf{Binv}(w)$ と全単射がある。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{mod}\,kQ & \overset{\text{Gabriel}}{\longleftrightarrow} & \Phi^+ \\
\downarrow \text{拡張} & & \\
\mathsf{mod}\,\Pi_Q & \longleftrightarrow & \Phi^+ \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{T}_w & \longleftrightarrow & \mathsf{inv}(w) \\
\cup & & \cup \\
\mathsf{sim}\,\mathcal{T}_w & \xrightarrow[\sim]{\dim} & \mathsf{Binv}(w)
\end{array}
$$

ここで転倒ルートや Bruhat 転倒についての詳細は省くが、共に Lie 理論で非常に自然な対象である。**定理 3** は「$\mathcal{T}_w$ は w の転倒集合 $\mathsf{inv}(w)$ の圏化を与え、$\mathcal{T}_w$ の単純対象という完全圏不変量が Lie 理論的量と対応する」という、前射影的多元環と Lie 理論との新たな繋がりを明らかにした。

（研究成果 4 [論文 8,9] ）

2014 年に [AIR] は、関手的有限という条件を満たすねじれ類を、ねじれ類の射影対象を用いることで**台 τ 傾加群**と呼ばれる加群により分類した。この論文は 200 以上引用されるなど現在不可欠なものであるが、**関手的有限でないねじれ類への有効なアプローチは今まで存在しなかった。**申請者は、これまでの研究に着想を得て、射影対象の代わり**単純対象**に着目し次の分類を与えた。

> **定理 4**. 長さ有限アーベル圏 $\mathcal{A}$ のねじれ類は、単純対象を取る操作で、$\mathcal{A}$ の単煉瓦のうち共終閉という条件を満たすものと一対一に対応する。

ここで**単煉瓦 (monobrick)** とは、煉瓦の集合であって、その間の非ゼロ射が全て単射なものをいう。申請者は実際は、ねじれ類や**広大 (wide) 部分圏**（拡大で閉じたアーベル部分圏）を含む**右 Schur 部分圏**という広いクラスを単煉瓦により分類した。ねじれ類と広大部分圏は現代の表現論で基本的なクラスの部分圏であり、この結果は（ねじれ類と広大部分圏と全単射など）**これら二つの部分圏について知られている多くの結果の再証明や明快な解釈**を与えた。さらに**関手的有限性や多元環の加群圏という制約がなく広い適用範囲を持つ驚くべきもの**である。

右 Schur 部分圏の典型例として **ICE 閉（像・余核・拡大で閉じる）部分圏**がある。申請者は先の結果に着想を得て、Dynkin 箙 Q の道多元環 kQ の ICE 閉部分圏を次のように分類した。

> **定理 5**. $\mathsf{mod}\,kQ$ の ICE 閉部分圏は、射影対象を取る操作により、rigid 加群と一対一に対応する。

道多元環は最も基本的な多元環であり、**rigid 加群**は多元環の表現論で幾度となく現れる大切な加群である。この結果は **Dynkin 型道多元環という構造がよく分かっていると思われていた多元環に対する予期せぬ新現象**の発見である。さらに申請者は各 Dynkin 型について ICE 閉な部分圏を数える明示公式を与え、その数が **A 型の場合は Schröder 数という組合せ論的数と一致する**という新事実も見出した。

（特色と独創的な点）

申請者の研究は、加群圏の部分圏を扱う手法や理論を完全圏の立場から創設し、「単純対象の分類」「JH 性の判定」など新たな問題意識を環の表現論に投げかけ、個別の多元環についてそれを調べる中で Weyl 群や Schröder 数を用いた十分に具体的な結果を与えていることが特色である。

[AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ-tilting theory, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 3, 415–452.
[BHLR] T. Brüstle, S. Hassoun, D. Langford, S. Roy, Reduction of exact structures, *J. Pure Appl. Algebra* **224** (2020), no. 4, 106212.
[FG] X. Fang, M. Gorsky, Exact structures and degeneration of Hall algebras, arXiv:2005.12130.
[GLS] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Kac-Moody groups and cluster algebras, *Adv. Math.* **228** (2011), no. 1, 329–433.
[MRS] R. Marczinzik, M. Rubey, C. Stump, A combinatorial classification of 2-regular simple modules for Nakayama algebras, arXiv:1811.05846.

申請者登録名　榎本 悠久

3.【これからの研究計画】

(1) 研究の背景

これからの研究計画の背景、問題点、解決すべき点、着想に至った経緯等について参考文献を挙げて記入してください。

（研究計画の背景、着想に至った経緯）

A 加群圏の部分圏の分類問題は環の表現論の不可欠な問題意識であり、[AIR] による関手的有限ねじれ類の分類は最近の表現論における大きな流れを作った。また道多元環や前射影的多元環など特定のクラスを考えると、Weyl 群などの組合せ論的道具によりさらに詳細な分類がなされている。それとともに、申請者が行ってきた **B 各部分圏自体の構造の研究**は、**研究成果 3,4** のような豊富な様相を呈し、この分野に新たな流れをもたらすことを期待される。とくに各部分圏の単純対象や Grothendieck モノイドなどの完全圏不変量を求めることは、ねじれ類が応用される団代数や Lie 理論などの分野や、ベクトル束の圏などアーベル圏と限らない完全圏を用いる代数幾何などへも応用を期待される。

（問題点、解決すべき点）

A **研究成果 4** で定義された右 Schur 部分圏は、一般には直和因子で閉じないなど扱いにくく、扱いやすいクラスである ICE 閉部分圏についてはまだ単純対象（単煉瓦）で分類ができていない。また [AIR] では台 τ 傾加群の**変異**という理論が、与えられた台 τ 傾加群から別の台 τ 傾加群を作る方法を与える。一方、単純対象（単煉瓦）を用いる**研究成果 4** では、台 τ 傾加群より広いクラスを分類できる代わりに、いまのところ変異の理論は存在せず、具体的な計算に用いづらい。

B 個々の環のねじれ類に対する不変量の現在の研究は、申請者の**研究成果 3** の Dynkin 型前射影的多元環や道多元環の例のみであるが、非 Dynkin 型では、Dynkin 型の場合に用いた有限型ルート系の幾何学的議論を使うことができない。また Grothendieck モノイドは一般に計算は非常に困難なことがこれまでに分かっている。その計算にはモノイドが一般には消去的でない ($a+x=a+y$ でも $x=y$ と限らない) ことが障害となっており、Grothendieck モノイドが消去的である例もまだほぼ知られていない。

(2) 研究目的・内容（図表を含めてもよいので、わかりやすく記述してください）

① 研究目的、研究方法、研究内容について記述してください。
② どのような計画で、何を、どこまで明らかにしようとするのか、具体的に記入してください。
③ 共同研究の場合には、申請者が担当する部分を明らかにしてください。
④ 研究計画の期間中に異なった研究機関（外国の研究機関等を含む）において研究に従事することを予定している場合はその旨を記載してください。

本研究では、多元環の表現論において完全圏の視点から、加群圏やアーベル圏の種々の部分圏の分類と、各部分圏の不変量の計算を行う。具体的には大別して以下の**課題 A** と**課題 B** を研究する。

(課題 A) 長さ有限アーベル圏における ICE 閉部分圏の分類・基礎理論

- **研究成果 4** では ICE 閉部分圏を含むクラスである右 Schur 部分圏が単煉瓦によって分類された。これを利用し、次の問に答えるのが一つの目標である。

問. 右 Schur 部分圏がいつ ICE 閉部分圏となるかを、単煉瓦側の記述で特徴づけよ。

例えば**定理 4** は、ねじれ類という圏論的性質を、共終閉という単煉瓦についての順序集合的条件で特徴づけて得られた。この問を解決し、**長さ有限アーベル圏の ICE 閉部分圏を分類**することを目標とする。この問のため、申請者はすでに「任意の右 Schur 部分圏は、あるねじれ類の内部で、特定の組成因子を持つものとして記述できる」ことを観察した。よって**ねじれ類自体を全体と見て、その部分圏の研究**を行うことで問にアプローチする。とくにねじれ類は**準アーベル圏**という圏論的性質を満たすので、準アーベル圏の部分圏についての理論を構築しながらアプローチする。

- 関手的有限なねじれ類では**台 τ 傾加群の変異**が組合せ論的計算を可能にしている。詳しくは、二つのねじれ類 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が**極小包含関係**にあるとき（$\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ かつ間に他のねじれ類がないとき）、$\mathcal{T}_1$ の台 τ 傾加群から $\mathcal{T}_2$ の台 τ 傾加群を求める方法が知られている。変異の理論を右 Schur 部分圏一般で行うのは枠組みが大きすぎると考えられるので、**ねじれ類に限定して共終閉な単煉瓦の変異方法を与える**。そのため、ねじれ類の（極小）包含を二つの単煉瓦の情報から特徴づける戦略をとる。

申請者登録名　榎本 悠久

(課題 B) 箙の表現圏や前射影的多元環の加群圏での計算

● Dynkin 箙 Q の道多元環 kQ について、$\mathrm{mod}\,kQ$ のねじれ類 $\mathcal{T}$ の不変量を求める。[論文 **6**] で $\mathcal{T}$ の単純対象は求まったので、より精緻な不変量である Grothendieck モノイド $\mathsf{M}(\mathcal{T})$ を計算する。まずは $\mathsf{M}(\mathcal{T})$ の消去的商の構造を次元ベクトルを用いて決定し、次に潰れ具合を測定する方法を考察する。特に Q が **A 型のとき $\mathsf{M}(\mathcal{T})$ は消去的である**と予想しており、計算機による計算も援用して証明を試みる。

● 非 Dynkin 箙 Q の道多元環 kQ について、$\mathrm{mod}\,kQ$ の有限型（＝直既約が有限個しかない）ねじれ類 $\mathcal{T}$ の単純対象の決定を試みる。この場合もねじれ類は（無限）Weyl 群の元と対応することが知られており、**定理 3 と同様、（無限）ルート系の Bruhat 転倒を用いて単純対象が分類できると予想している**。このため、無限ルート系の理論を用いて**定理 3** と同様の手法を試みる。

● Affine 箙 Q の道多元環 kQ について、$\mathrm{mod}\,kQ$ の**関手的有限と限らないねじれ類を分類**する。そのため**定理 4** を利用し共終閉な単煉瓦を分類する。Affine 型では直既約加群は無限個あるが、全ての直既約加群の分類が知られている。Dynkin 型より加群の構造は複雑になるが、まずは簡単な $\widetilde{A_n}$ の場合から**煉瓦の間の射**を具体的に計算し、**単煉瓦**になる条件を組合せ論的に書き下す戦略を取る。

● Dynkin 箙 Q の前射影的多元環 Π_Q について、$\mathrm{mod}\,\Pi_Q$ の **ICE 閉部分圏を分類**する。**研究成果 3** で述べたように $\mathrm{mod}\,\Pi_Q$ のねじれ類は Weyl 群の元 w を用いて $\mathcal{T}_w$ と表せる。一方、課題 A で述べたように ICE 閉部分圏は必ずねじれ類の内部のよい部分圏として実現できる。これに注目して、まず w を固定した上で $\mathcal{T}_w$ の ICE 閉部分圏の分類を試みる。**申請者はすでに $\mathcal{T}_w$ の煉瓦や単純対象を扱うプログラムを開発しており**、これを利用して計算実験を行い、分類方法を予測しつつ研究する。

(3) 研究の特色・独創的な点

次の項目について記載してください。
① これまでの先行研究等があれば、それらと比較して、本研究の特色、着眼点、独創的な点
② 国内外の関連する研究の中での当該研究の位置づけ、意義
③ 本研究が完成したとき予想されるインパクト及び将来の見通し

（研究の特色、着眼点、独創的な点）

環の表現論では申請者以前、加群圏の部分圏についての研究は、**関手的有限ねじれ類と広大部分圏に関するものしかほぼ存在せず**、しかも**分類問題のみに主眼が置かれ、各部分圏自体の構造は調べられていなかった**。また [AIR] の台 τ 傾加群を用いたねじれ類の分類には射影対象を用いており、代数幾何や無限次元代数の表現論などから自然に現れる**射影的に豊富でないアーベル圏には適応できない**。

これと比較して、申請者の研究には次のような特色がある。

(i) **関手的有限と限らないねじれ類や、ICE 閉など新たな部分圏**に着目し分類を試みる点。

これまで、関手的有限でないねじれ類についての効果的な記述や分類は一切知られていなかった。しかし申請者は単純対象を用いることで**定理 4** を示し、初めてその手がかりを得、一般のねじれ類についての研究が可能となった。

また右 Schur 部分圏や ICE 閉部分圏という新たな部分圏のクラスを導入し、ねじれ類と広大部分圏との関係が明瞭になったことに加えて、それ自身興味深い新たな研究対象を提唱した。実際**定理 5** での A 型 ICE 閉部分圏の Schröder 数による数え上げは、**A 型道多元環という最も基礎的な多元環に対する新たな現象**の発見であり、同様の豊かな組合せ論的構造が他の多元環でも明らかになると期待される。

(ii) **長さ有限なアーベル圏という一般性**での研究を試みている点。

単煉瓦など単純対象を用いることで申請者は長さ有限アーベル圏レベルで部分圏の基礎理論を創設しようとしている。これにより、Lie 代数や無限次元代数の有限次元表現の圏、非特異射影曲線上の半安定層のなす圏など**他分野で自然に現れる多くのアーベル圏を解析する手段を与える**ことを意味する。

申請者登録名　榎本 悠久

ＰＤ

（研究の特色・独創的な点の続き）

(iii) **具体的な各部分圏について、その完全圏としての不変量の計算**を試みる点。

これまで手つかずの加群圏の各部分圏自体の完全圏としての構造を、申請者は先駆けて主体的に研究した結果、**研究成果 3,4** など Lie 理論や組合せ論との新たな繋がりが明らかになった。よって本研究が目指す道多元環や前射影的多元環の加群圏の部分圏に対する不変量計算は、これら**非常に基本的かつ重要な多元環についての新たな興味深い研究課題**である。このような本研究の部分圏の不変量や性質を調べるという問題意識は多元環の表現論の新たな流れを形成する可能性を秘めている。

（研究の位置づけ、意義）

本研究は、**加群圏の部分圏の研究という環の表現論における一つ大きな流れに、完全圏という視点から新たなアプローチをもたらし、新たなクラスの部分圏の研究を先陣を切って行うもの**である。本研究は、ICE 閉部分圏など新たなクラスの部分圏に研究について基礎理論を提供し、かつ具体的な不変量計算により他の研究の雛形を与える。

（研究が完成したとき予想されるインパクト及び将来の見通し）

本研究によって、**新たなクラスの部分圏を研究する手法が確立**され、本研究のもたらす基礎理論・計算手法は環の表現論に新たな流れを形成すると予想される。特に**道多元環と前射影的多元環という重要かつ基本的な環の表現論の新たな構造**が明らかになり、これらの代数と密接に関連する団代数や Kac-Moody 群、また Lusztig による量子群の結晶基底の理論へも応用が期待される。また (ii) で述べたように本研究が適応可能なアーベル圏は多元環の加群圏に限らないので、本研究は**代数幾何や数理物理など他分野で自然に現れるアーベル圏を解析する新たな手法を提供する**。

(4) 研究計画

申請時点から採用までの準備状況を踏まえ、研究計画について記載してください。

(1 年目)

● 課題 A について、まずはアーベル圏の ICE 閉部分圏を、「ねじれ類の中である条件を満たす部分圏」として特徴づける。具体的には、「任意の右 Schur 部分圏は、あるねじれ類のなかで特定の組成因子を持つものの集まり」だということに注目する。これはねじれ類がアーベル圏全体の場合、**Serre 部分圏**を考えることと同等であることを踏まえれば、**ねじれ類自体の Serre 部分圏が ICE 閉と対応する**と予想される。その証明を試み、ねじれ類や準アーベル圏における Serre 部分圏を、煉瓦側に位相などの付加構造を導入することで分類を試みる。

● 課題 B での道多元環・前射影的多元環における分類・計算では、具体的なルート系や煉瓦についての計算実験を行うことが非常に有用だと考えられる。実際**定理 5** は、A 型の場合に部分圏を書き出すプログラムによる数値実験から着想を得たものである。このため、**非 Dynkin 型の場合も含め、ねじれ類の煉瓦や次元ベクトルを扱うアルゴリズム的手法を開発し、プログラムとして実装**する。受け入れ研究者の水野先生は、非 Dynkin 型も含めた前射影的多元環上のねじれ類の組合せ論的記述に長けており、先生と議論を行いながら実装方法を検討する。

(2 年目)

● 課題 A について、ねじれ類の変異を単煉瓦側で記述することを試みる。具体的には、研究内容で述べたように「ねじれ類の（極小）包含 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$」を単煉瓦のみの情報で特徴づけることがねらいである。つまり以下を考える。

⋆ （極小）包含 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ があったとき、$\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ の単純対象はどう変化するか

⋆ 逆に $\mathcal{T}_1$ の単純対象が与えられたとき、$\mathcal{T}_1$ を含む（極小）包含 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ をどう作るか

このためそれぞれのねじれ類の単純対象（単煉瓦）の間の射に注目し、何らかの全射的条件を加えれば可能なのではと予想している。実際これまでの計算で、極小包含 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ があると「$\mathcal{T}_1$ の単純対象の煉瓦のうちいくつかが $\mathcal{T}_2$ では単純対象でなくなり、その際別の煉瓦への全射を持つ」ことが観察されている。

申請者登録名　榎本 悠久

（研究計画の続き）

● 課題Bについて、1年目で構築したプログラムによる計算実験を行いつつ、研究の完成を試みる。具体的には、以下の通りである。

⋆ Dynkin 型道多元環のねじれ類 $\mathcal{T}$ について、Grothendieck モノイド $\mathsf{M}(\mathcal{T})$ の消去的商の純ルート系的記述をまず行う。次に消去的モノイドの一般論や、**Auslander-Reiten 列**という特別な短完全列に注目することで $\mathsf{M}(\mathcal{T})$ が消去的なことの証明を試みる。

⋆ 非 Dynkin 型の道多元環について、有限ねじれ類の単純対象の分類を（無限）ルート系の Bruhat 転倒で記述する。その際、道多元環よりも前射影的多元環のほうが対称性が高く見通しがよくなる可能性があるので、前射影的多元環での考察も同時に行う。

(3 年目)

● 課題Aでの単煉瓦の変異理論が確立された際には、**関手的有限とは限らないねじれ類に対する変異**が可能となるので、これについて台 τ 傾加群の変異との関係や一般化を調べる。またこれにより課題Bのねじれ類の計算がより容易になることも予測され、それを活用しつつ課題Bの完成を目指す。

● 本研究を、アーベル圏以外の圏の観点から考える。とくに、ねじれ類が持つ性質である準アーベル圏や、三角圏における類似を考察する。また台 τ 傾加群や関手的有限ねじれ類は、導来圏における**傾複体**や t **構造**という概念と対応することが知られている。**定理 5** で ICE 閉部分圏が rigid 加群というホモロジカルな性質と対応していたことを踏まえると、ICE 閉部分圏に対しても導来圏の視点からの解釈可能だと期待され、これを試みる。

● 前射影的多元環や道多元環は Kac-Moody 群や量子群と密接に関わることが知られている。よって課題Bが完成した際は、これが及ぼす他分野、とくに Lie 理論近辺の代数幾何と量子群への応用についても考察する。

(5) 受入研究室の選定理由

採用後の受入研究室を選定した理由について、次の項目を含めて記載してください。
① 受入研究室を知ることとなったきっかけ、及び、採用後の研究実施についての打合せ状況
② 申請の研究課題を遂行するうえで、当該受入研究室で研究することのメリット、新たな発展・展開
※ 個人的に行う研究で、指導的研究者を中心とするグループが想定されない分野では、「研究室」を「研究者」と読み替えて記載してください。

① 受け入れ研究者の水野先生は、**Dynkin 箙の前射影的多元環上のねじれ類の分類を Weyl 群を用いて完成させた人物**であり、**研究成果 3** の出発点である。先生とはセミナーや研究集会で頻繁にお会いしており、また個人的な議論も何度か行ってきた。とくに申請者はA型前射影的多元環の煉瓦の組合せ論的表示手法を先生に教えていただき、[**論文 6**] を完成させる際の大きな助けとなった。採用後の研究内容、とくに申請者の問題意識についてはすでに個人的な打ち合わせで伝えている。

② 水野先生は**前射影的多元環についての第一人者**であり、課題Bについて、先生が熟知した前射影的多元環についての知見を共有してもらうことにより研究が大きく進展すると見込まれる。また水野先生は台 τ 傾加群や団傾加群の**変異の理論**、さらに Weyl 群など**組合せ論的な対象に精通**しており、課題Aでの変異理論の構築や、課題Bでの具体的な分類問題を行う際の助けになる。

また、先生の所属する大阪府立大学や、近隣の大阪大学、大阪市立大学には、多元環の表現論の研究者が多いことに加え、可換環の専門家である加藤希理子先生、Lie 理論や量子群の専門家である木村嘉之先生や有木進先生、非可換代数幾何の専門である神田遼先生など、隣接他分野の研究者たちが多く在籍している。またこれらの研究者たちの間で定期的なセミナーも行われていると伺っており、本研究の一つの目標である**他分野との新たな繋がりの発見**に最適だといえる。

申請者登録名　榎本 悠久

(6) 人権の保護及び法令等の遵守への対応

本欄には、研究計画を遂行するにあたって、相手方の同意・協力を必要とする研究、個人情報の取り扱いの配慮を必要とする研究、生命倫理・安全対策に対する取組を必要とする研究など法令等に基づく手続が必要な研究が含まれている場合に、どのような対策と措置を講じるのか記述してください。**例えば、個人情報を伴うアンケート調査・インタビュー調査、国内外の文化遺産の調査等、提供を受けた試料の使用、侵襲性を伴う研究、ヒト遺伝子解析研究、遺伝子組換え実験、動物実験など**、研究機関内外の情報委員会や倫理委員会等における承認手続が必要となる調査・研究・実験などが対象となりますので手続の状況も具体的に記述してください。

なお、該当しない場合には、その旨記述してください。

該当しない。

申請者登録名　榎本 悠久

ＰＤ

4. 【研究遂行能力】研究を遂行する能力について、これまでの研究活動をふまえて述べてください。これまでの研究活動については、網羅的に記載するのではなく、研究課題の実行可能性を説明する上で、その根拠となる文献等の主要なものを適宜引用して述べてください。本項目の作成に当たっては、当該文献等を同定するに十分な情報を記載してください。
具体的には、以下(1)～(6)に留意してください。

(1) 学術雑誌等（紀要・論文集等も含む）に発表した論文、著書（査読の有無を明らかにしてください。**査読のある場合、採録決定済のものに限ります。**）著者、題名、掲載誌名、発行所、巻号、pp 開始頁－最終頁、発行年を記載してください。

(2) 学術雑誌等又は商業誌における解説、総説

(3) 国際会議における発表（口頭・ポスターの別、査読の有無を明らかにしてください）
著者、題名、発表した学会名、論文等の番号、場所、月・年を記載してください。（**発表予定のものは除く。**ただし、発表申し込みが受理されたものは記載してもよい。）

(4) 国内学会・シンポジウム等における発表
(3)と同様に記載してください。

(5) 特許等（申請中、公開中、取得を明らかにしてください。ただし、申請中のもので詳細を記述できない場合は概要のみ記載してください。）
(6) その他（受賞歴等）

申請者は修士課程から研究を行い、[論文 **1**] と [論文 **2**] は修士課程在籍中の結果であり、研究科の修論優秀賞 (6) 1 を授賞した。また博士課程でも精力的に研究を続け、指導教員の伊山先生の助言も仰ぎつつ全て主体的に多くの研究を行ってきた。その結果全て単著の論文をプレプリント含め 10 本も有し、また国際会議 (3) 2 においては **plenary talk** に選出され、さらに名古屋大学の全研究科の博士課程の中から毎年 8 人前後しか受賞しない**学術奨励賞** (6) 2 を受賞した。このことは、申請者が独自の視点で研究を遂行し続け、その能力が周囲からも高く評価されていることを意味する。

(1) 学術雑誌 (紀要・論文集等も含む) に発表した論文及び著書
(査読有り)

1. H. Enomoto, "Classifying exact categories via Wakamatsu tilting," J. Algebra (Elsevier) 485, pp.1-44, 2017.
2. H. Enomoto, "Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay-finite algebras," Adv. Math. (Elsevier) 335, pp. 838-877, 2018.
3. H. Enomoto, "Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness," J. Algebra (Elsevier) 539, pp. 152-176, 2019.
4. H. Enomoto, "The Jordan-Hölder property, Grothendieck monoids and Bruhat inversions," Proceedings of the Fifth China-Japan-Korea Conference on Ring Theory (World Scientific Publishing).

(査読なし)

5. H. Enomoto, "The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories," arXiv:1908.05446, 2019.
6. H. Enomoto, "Bruhat inversions in Weyl groups and torsion-free classes over preprojective algebras," arXiv:2002.09205, 2020.
7. H. Enomoto, "Schur's lemma for exact categories implies abelian," arXiv:2002.09241, 2020.
8. H. Enomoto, "Monobrick, a uniform approach to torsion-free classes and wide subcategories," arXiv:2005.01626, 2020.
9. H. Enomoto, "Rigid modules and ICE-closed subcategories over path algebras," arXiv:2005.05536, 2020.
10. H. Enomoto, "Classifying substructures of extriangulated categories via Serre subcategories," arXiv:2005.13381.

(2) 学術雑誌等又は商業誌における解説・総説　なし

(3) 国際会議における発表（口頭発表、査読なし）

申請者登録名　榎本 悠久

1. 榎本 悠久、「Classifications of exact structures and CM-finite Iwanaga-Gorenstein algebras」、International Conference on Representations of Algebras 2018, チェコ工科大学、2018 年 8 月.
2. 榎本 悠久、「The Jordan-Hölder property, Grothendieck monoids and Bruhat inversions」、第 8 回日中韓環論国際シンポジウム、名古屋大学、2019 年 8 月.

(4) 国内学会・シンポジウムにおける発表（口頭発表、査読なし）

1. 榎本 悠久、「完全圏の表現論的実現について」、第 22 回代数学若手研究会、岡山大学、2017 年 3 月.
2. 榎本 悠久、「Classification of exact structures and CM-finite Gorenstein algebras」、環論表現論セミナー、名古屋大学、2017 年 4 月.
3. 榎本 悠久、「Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay finite algebras」、第 50 回 環論および表現論シンポジウム、山梨大学、2017 年 10 月.
4. 榎本 悠久、「Auslander-type correspondences for exact categories and cotilting modules」、南大阪代数セミナー、大阪府立大学、2017 年 12 月.
5. 榎本 悠久、「Exact categories in the representation theory of algebras」、第 1 回 数理新人セミナー、京都大学、2018 年 2 月.
6. 榎本 悠久、「Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness」、第 23 回 代数学若手会、大阪大学、2018 年 3 月.
7. 榎本 悠久、「Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness」, 第 27 回 大和郡山セミナー、奈良工業高等専門学校、2018 年 9 月.
8. 榎本 悠久、「Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness」, 第 51 回 環論および表現論シンポジウム、岡山理科大学、2018 年 9 月.
9. 榎本 悠久、「The Jordan-Hölder property, Grothendieck monoids and Bruhat inversions」, 環論表現論セミナー、名古屋大学、2019 年 7 月.
10. 榎本 悠久、「The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories」, 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会, 金沢大学、2019 年 9 月.
11. 榎本 悠久、「Bruhat inversions in the symmetric group and torsion-free classes over a type A quiver」、表現論とその組合せ論的側面, 京都大学、2019 年 10 月.
12. 榎本 悠久、「対称群の Bruhat inversion と A 型箙のねじれ自由類」、組合せ論とその周辺ワークショップ in 信州 -2019 冬-、信州大学、2019 年 12 月.
13. 榎本 悠久、「Bruhat inversions in symmetric groups and representation theory of quivers of type A」、第 3 回 数理新人セミナー、名古屋大学、2020 年 2 月.
14. 榎本 悠久、「Relative simples for preprojective algebras via root systems」、第 25 回 代数学若手会、名古屋大学、2020 年 3 月（COVID-19 により開催中止）.
15. 榎本 悠久、「Bruhat inversions in Weyl groups and torsion-free classes over preprojective algebras」、南大阪代数セミナー、オンライン講演（Zoom）、2020 年 5 月.
16. 榎本 悠久、「Simple objects in torsion-free classes over preprojective algebras of Dynkin type」、FD Seminar (Online seminar on representation theory of finite-dimensional algebras)、オンライン講演、2020 年 6 月.
17. 榎本 悠久、「Monobricks」、環論表現論セミナー、オンライン講演または名古屋大学、2020 年 7 月.

(5) 特許等　なし

(6) その他

1. 名古屋大学多元数理論文賞（修士論文賞）受賞、2018 年 3 月.
2. 名古屋大学令和二年度学術奨励賞受賞.

申請者登録名　榎本 悠久