τ傾理論と
ねじれ類入門

―分裂射影対象と広大区間の立場から―

榎本 悠久 (大阪公立大)

予定 (キーワード)

1日目

Part I
- 分裂射影対象・被覆, 関手的有限性

Part II
- (関手的有限) ねじれ類と (τ) 傾加群

2日目

Part III
- ねじれ類の広大区間, brick ラベル.
- 分裂射影対象と Hasse 矢の対応

Part IV
- 変異の性質

Part 0. これは何か?

- 私が3年前くらいに, ねじれ類について勉強しながら身内で発表したセミナー「τ-tilting for me」のまとめ
(名大の酒井氏・斉藤氏・東大の竹田氏に感謝)
(いくつかは [E-酒井, ICE-closed …] の共同研究にもとづく)

- 内容: ねじれ類・τ傾理論周辺の重要な論文たちの結果を、「自分が分かりやすいように」解釈(なおし(多くを))別証明を与えたもの

Tool
1. 分裂射影対象 [Auslander-Smalø, 1980]
2. (広大)区間 [浅井-Pfeifer, 2022] [Demonet-伊山-Reading-Reiten-Thomas 2023] [E-酒井, 2021]

- [足立-伊山-Reiten], [Jasso]
- [Demonet-伊山-Jasso], [Smalø]
- [Marks-Stovicek], [浅井], …

ねらい

1. 多くの結果が、Tool を使った分かりやすい解釈・証明があるが、あまり知られていなさそうなので布教したい

2. 加群圏の部分圏を調べる理論の入門.

注意

(知ってる人向け)

・「加群圏の部分圏」という立場に特化した見方・手法なので、三角圏、とくに (2-)silting や SMC やらの言葉は使わない.

。多元環の表現論のキソは仮定
(AR theory、AR quiver)

(傾加群 tilting, ねじれ類 torsion class は仮定しないが、[ASS] でみたことあるとより良い)

・時間の関係で扱わないトピック多数。
・簡単な証明は HW として省略

コピペここまで.
以下板書.

設定・記法

- k：体，A：f.d. k-alg

- $\mathrm{mod}\,A$：f.g. 右 A 加群の圏

  $\supset$ $\mathrm{proj}\,A$：———— proj mod ——

  $\mathrm{inj}\,A$：———— inj ————.

  $$D : \mathrm{mod}\,A \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{mod}\,A^{op}$$

  $$\begin{array}{l} \rotatebox{90}{=} \\ \mathrm{Hom}_k(-,k). \end{array}$$

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$ とかいったら

  $\mathcal{C}$：full subcat で，

  closed under isom & direct summands

- $M \in \mathrm{mod}\,A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{add}\,M := \{ N \in \mathrm{mod}\,A \mid N \oplus M^{\exists n} \}$.

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{ind}\,\mathcal{C} := \{ X \in \mathcal{C} \mid X : 直既約 \}/\cong$.

- $|\mathcal{C}| = |\mathrm{ind}\,\mathcal{C}|$ ← コスウ

  $|M| = |\mathrm{add}\,M| = |\{M の indec smd\}/\cong|$.

Part I

I.1 (分裂)射影対象

Recall mod A の中で, proj A は次をみたす P

(1) $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathrm{mod}A) = 0$ proj obj

(2) $\forall M \twoheadrightarrow P$: surj は split (retraction) split proj

さらに progen A は

(3) $\mathrm{mod}A \subseteq \mathrm{Fac}A$ みたし, かつ
cover
$$\mathrm{Fac}A = \{M \mid \exists A^n \twoheadrightarrow M\}$$

minimal cover. $P \oplus A$ で $\mathrm{mod}A \subseteq \mathrm{Fac}P$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{add}P = \mathrm{add}A$.

これを subcat で考える

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$:

(1) $P \in \mathcal{C}$: (Ext-) proj obj in $\mathcal{C}$

if $\mathrm{Ext}^1(P, \mathcal{C}) = 0$

(2) $P \in \mathcal{C}$: split proj obj in $\mathcal{C}$

分裂射影, sp-proj

if $\forall\, C \twoheadrightarrow P$: surj, $C \in \mathcal{C}$ は split.

(3) $P(\mathcal{C}) := \{$ proj obj in $\mathcal{C} \}$

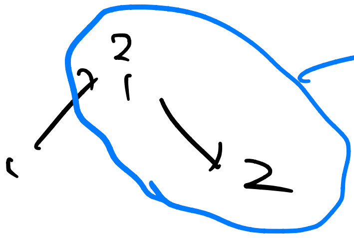
HW $\cup$

$P_0(\mathcal{C}) := \{$ sp-proj obj in $\mathcal{C} \}$ ⌟

Ex $P(\mathrm{mod} A) = P_0(\mathrm{mod} A) = \mathrm{proj}\, A$.

Ex $A = k(1 \leftarrow 2)$

mod A :



$\mathcal{C}$

注 projとちがい、sp-projはうめこみいらん

exact cat の仮定でやりたい、

$P(\mathcal{C}) = \substack{2\\1},\ 2$

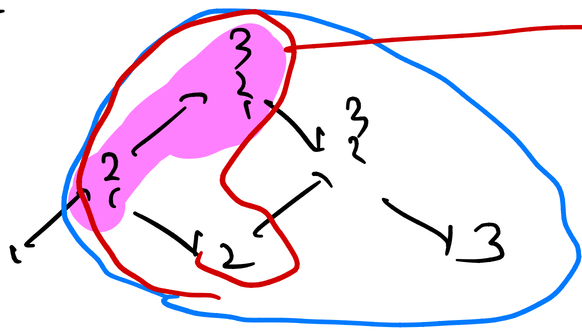
$\cup\!\!\!\!/$

$P_0(\mathcal{C}) = \substack{2\\1}$.

$\mathcal{C}$

(2 : not sp-proj by surj $\substack{2\\1} \twoheadrightarrow 2$)

Ex $A = k(1 \leftarrow 2 \leftarrow 3)$



$P(\mathcal{C})$

$\mathcal{C}$

: $P_0(\mathcal{C})$

Def $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: E-closed. $:\Longleftrightarrow$ ext-closed

$\left(\forall\, 0 \to L \to M \to N \to 0,\ L, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C} \right)$

(1) $\mathcal{C}$ has enough proj $:\Longleftrightarrow$

$\forall C \in \mathcal{C}$, $\exists$ s.e.s

$$0 \to C' \to P \to C \to 0 \quad \text{with}$$

$$C' \in \mathcal{C}, \quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) \ (\subseteq \mathcal{C})$$

(2) $P \in \mathcal{C}$: progenerator

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: enough proj,

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \operatorname{add} P.$$

Ex [E] $|\mathcal{C}| < \infty \Rightarrow \mathcal{C}$: progen をもつ

(progen : $\bigoplus \operatorname{ind} \mathcal{P}(\mathcal{C})$) $\square$

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) \overset{?}{=} \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$$

Prop 1 $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} \Lambda$ が KE-closed

(i.e., K-closed & E-closed
K ← kernelで閉じる
($\forall\, C_1 \xrightarrow{f} C_0$, $C_0, C_1 \in \mathcal{C} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \in \mathcal{C}$))

とすると、 $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

∵ ($\supset$) OK

($\subset$) $\forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, $C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$: surj,

$\mathrm{Ker}\,\pi \in \mathcal{C}$ より

$0 \to \mathrm{Ker}\,\pi \to C \xrightarrow{\pi} P \to 0$: ex in $\mathcal{C}$

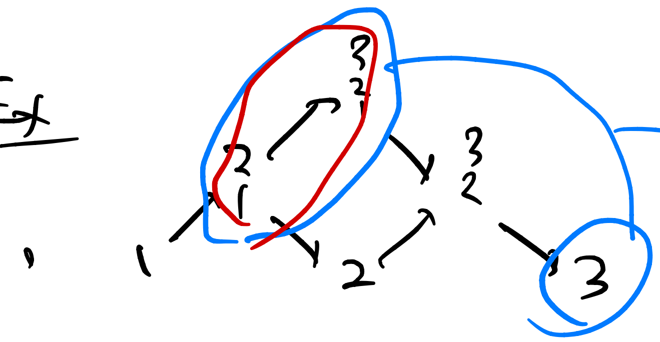
$\rightsquigarrow$ ${}^{1}(P, \mathrm{Ker}\,\pi) = 0$ より split. □

(
Fun Fact (HW)

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,\Lambda$: E-closed, enough proj とする,

$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}$: epi-ker でとじる.
)

Ex



$\mathcal{C}$: KE-closed

○ : $\mathcal{P}(\mathcal{C})$

・(後で) torf, wide : KE-closed

より $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$.

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$

(1) $M \in \mathcal{C}$: cover of $\mathcal{C}$ (ヒフク)

$:\iff \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\,M$

$\iff \forall\, C \in \mathcal{C},\ \exists\, M^n \twoheadrightarrow C$: surj.

(2) $M \in \mathcal{C}$: minimal cover of $\mathcal{C}$

$:\iff$ (i) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\,M$

(ii) $N \oplus M$, $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\,N$

$\Longrightarrow \operatorname{add} N = \operatorname{add} M$

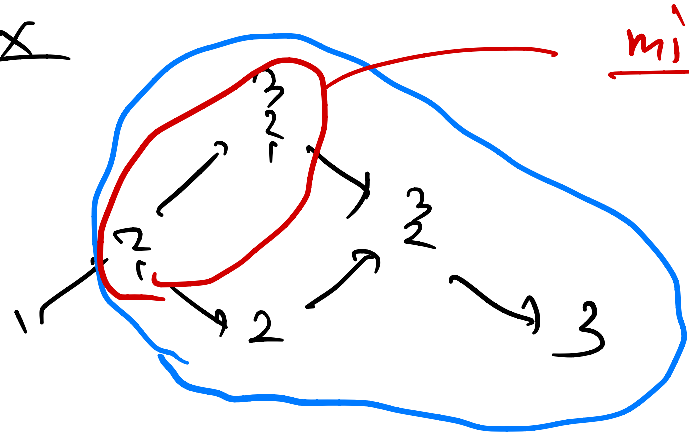
(つまり M から indec を1つでもなくすと cover でなくなる)

<u>Ex</u> (1) A covers $\operatorname{mod} A$

(2) $P \in \operatorname{mod} A$: cover of $\operatorname{mod} A$

$\Longleftrightarrow P$: progen.

<u>Ex</u>



min. cover

(これって sp-proj でもあった)

<u>Obs</u> $\mathcal{C}$ が cover もつ $\Longrightarrow$ min cover もつ

(ind M から1つずつとりのぞく)

しかし unique 性?

Thm 2 [Auslander-Smalø]

$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$ が cover M をもつなら、

$M \in \mathcal{C}$: min. cover

$\Longleftrightarrow \operatorname{add} M = P_0(\mathcal{C})$

(つまり sp-proj あつめたのがちょうど min cover)

$\longrightarrow$ min cover は unique.

(!) <u>Obs</u> M covers $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $P_0(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{add} M$

$\left(\begin{array}{l} (!)\ \forall P : \text{sp-proj},\quad P \in \mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} X \\ \rightsquigarrow \quad \underset{\mathcal{C}}{\overset{\cap}{X^n}} \twoheadrightarrow P \quad \text{splits} \\ \rightsquigarrow \quad P \mathrel{\triangleleft\!\oplus} X^n \qquad \square \end{array} \right)$

$(\Leftarrow)$ Obsより, OK

$(\Rightarrow)$ Obsより $\operatorname{add} M \supseteq P_0(\mathcal{C})$

等しくないとする。$\exists X \in \operatorname{ind} M$

s.t. X: not sp-proj in $\mathcal{C}$.

M を basic として $M = X \oplus Y$ とおく。

∘ X : not sp-proj より $\exists$

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[r, two heads] & X \\
M^n \cong X^n \oplus Y^n \arrow[ur, two heads] \arrow[urr, two heads, bend right, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

$C \twoheadrightarrow X$: surj not retr.

M covers $\mathcal{C}$

φ : surj not retr

$\varphi = [f_1, \cdots, f_n, g]$

X : indec より, φ : radical

$\therefore\ f_i : X \to X \in \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(X)$

一方 X を 左 $\operatorname{End}_A(X)$ 加群とみて.

φ : surj より

$$X = (\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(X))\cdot X + \sum\{\mathrm{Im}\,h \mid h: Y \to X\}$$

∴ 中山 より

$$X = \sum\{\mathrm{Im}\,h \mid h: Y \to X\}$$

$\rightsquigarrow \exists\ Y^m \twoheadrightarrow X$: surj

よって、 $X \in \mathrm{Fac}\,Y$

$$\therefore\ \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}(X \oplus Y) \subseteq \mathrm{Fac}\,Y$$

これは $X \oplus Y$: min cover に矛盾. □

> sp-proj 求めるには
> cover 探して、へらして min cover にする!

I. 2 関手的有限性

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A \ni X$

(1) $X \xrightarrow{f} C^X$: left $\mathcal{C}$-approximation 左 $\mathcal{C}$ 近似 of X

$:\Longleftrightarrow$ ∘ $C^X \in \mathcal{C}$

∘
$$\begin{tikzcd} & C^X \arrow[d, dashed, "\exists"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\forall"'] & C \in \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

(2) $X \xrightarrow{f} C^X$: left minimal $\mathcal{C}$-approx

:$\Longleftrightarrow$ f : $\mathcal{C}$-approx &

f : left minimal

(:$\Longleftrightarrow$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & C^X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "@"] \\ & C^X \end{tikzcd} \rightsquigarrow \varphi : \text{isom}$$
)

(3) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: covariantly finite

(cov. fin
共変有限)

:$\Longleftrightarrow$ $\forall X \in \operatorname{mod} A$ が

左 $\mathcal{C}$-approx $X \to C^X$ をもつ.」

Dually for right $\mathcal{C}$-appr $C_X \to X$,

反変有限 (contravariantly finite
contr. fin.)

(4) $\mathcal{C}$: functorially finite (fun. fin)
関手的 有限

:$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: contr. fin & cov. fin.」

Subcat の「良い有限性」:

Fact (1) (HW) $|\mathcal{C}| < \infty$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$: fun. fin.

(e.g. $\mathcal{C} = \operatorname{add} M$)

(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: fun. fin

$\Rightarrow$ 、$\mathcal{C}$ は AR 列 をもつ

。$\mathcal{C}$ は enough proj & inj. ⌋

(3) $\exists\, X \to C^X$: left $\mathcal{C}$-approx

$\Rightarrow$ X は <u>min</u> left $\mathcal{C}$-approx をもつ

<u>Ex</u> $\mathrm{inj}\,A \subseteq \mathrm{mod}\,A$: fun. fin. $\left(\begin{array}{c}\mathrm{inj}\,A = \\ \mathrm{add}\,DA\end{array}\right)$

$$\begin{array}{c} X \longrightarrow I^X : \text{min left approx} \\ \quad\quad\quad\ \ \| \\ \quad\quad\ \text{inj hull of } X. \end{array}$$

Thm 3 [AS]

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$, TFAE

(1) A_A has left $\mathcal{C}$-approx

(2) $\mathcal{C}$ has a cover.

さらに、$A \to C^A$: min left $\mathcal{C}$-approx

とると、C^A が $\mathcal{C}$ の min. cover

$(\therefore\ \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) = \mathrm{add}\, C^A)$ ⌋
by Thm 2.

(2) (1) ⇒ (2)

$A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx とると

C^A は $\mathcal{C}$ の cover

$$\left(\because\ \forall C \in \mathcal{C},\ \exists\ \begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \\ (C^A)^n \arrow[ur, "\exists", "\text{surj}"'] & \end{tikzcd} \right)$$

(2) ⇒ (1)

M : $\mathcal{C}$ の cover とする。

$A \to M^A$: left M-approx　(add M)-approx

をとると、これは $\mathcal{C}$-approx である

$$\left(\because\ \forall\ \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \in \mathcal{C} \\ M^A \arrow[r, "M\text{-approx}"'] & M^n \arrow[u, "M \text{ covers } \mathcal{C}"'] \end{tikzcd} \quad \text{proj} \right)$$

(さらに以降)

M : $\mathcal{C}$ の min cover をとる。

$A \xrightarrow{f} M^A$: left min M-approx

⇒ (2) ⇒ (1) より f : —— $\mathcal{C}$-approx.

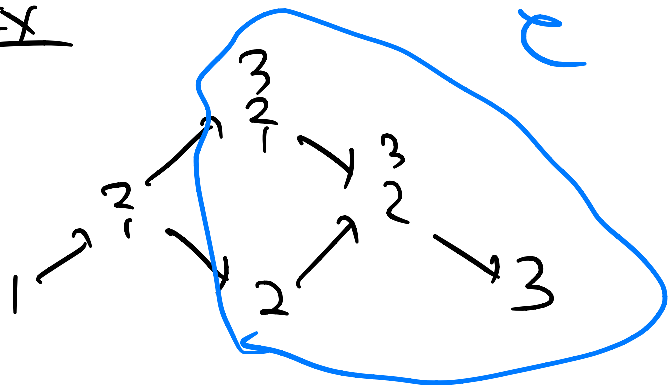
一方、(1) ⇒ (2') より M^A は $\mathcal{C}$ の cover

$M^A \in \operatorname{add} M$, M^A covers $\mathcal{C}$ より.

M : min cover なことから

$$\operatorname{add} M^A = \operatorname{add} M. \qquad \square$$

Ex



$P(1)$: $1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$

$P(2)$: $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2$

$\oplus$ $P(3)$ $\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$

$A \longrightarrow C^A$: left min $\mathcal{C}$-appr.

$\therefore$ $P_0(\mathcal{C}) = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

「sp-proj = min cover は
A の min left approx で
計算できる」

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: I-closed, (image-closed)

$:\Longleftrightarrow \forall f : c_1 \to c_2$, $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$,

$\mathrm{Im}\, f \in \mathcal{C}$ ┘

(Ex tors, torf, wide, …)

Thm 4 [AS]

$\mathcal{C}$: I-closed のとき, TFAE

(1) $\mathcal{C}$: cov. fin.

(2) $\mathcal{C}$ が cover もつ. ┘

∵ (1) ⇒ (2)

$\mathcal{C}$: cov. fin なら $\exists\, A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx. ∴ Thm 3 より $\mathcal{C}$ は cover もつ

(2) ⇒ (1) むズイ!

$\forall X \in \mathrm{mod}\,A$ をとる

$\rightsquigarrow \exists\ A^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X$: surj

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\exists f"] & X \\ C^{A^n} \arrow[r, dashed] & ? \end{tikzcd}$$

∃ left $\mathcal{C}$-app by Thm 3.

・ $C \in \mathcal{C}$ と $X \xrightarrow{\varphi} C$ を動かして

大きい直積 $X \xrightarrow{\prod \varphi_i} \prod_{i \in I} C_i$ をとる.

各 $i \in I$ で

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\
C^{A^n} \arrow[r, dashed, "\exists \psi_i"] & C_i
\end{tikzcd}$$

by f : $\mathcal{C}$-appr.

$\rightsquigarrow \prod$

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[dd, bend left, "\prod \varphi_i"] \\
C^{A^n} \arrow[r] \arrow[drr, "\prod \psi_i"'] & \square \arrow[dr] & \\
& & \prod C_i
\end{tikzcd}$$

C^{A^n}, C_i は f.d. なことから.

$$\square = C^{A^n} \Big/ \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} \psi_i$$ 有限でとれる

$$= C^{A^n} / \operatorname{Ker} \psi_{i_1} \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \psi_{i_r}$$

$$= \operatorname{Im} (\underbrace{\psi_{i_1} \prod \cdots \prod \psi_{i_r}}_{C \to C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_r}}) \in \mathcal{C}$$

$\therefore$ $\mathcal{C}$: I-closed より $\square \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ $X \xrightarrow{g} \square$ is left $\mathcal{C}$-approx

$$\left(\because \quad \forall \begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & & C \\ \square \arrow[r, hook] & \prod C_i \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}\right)$$

$\square$

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

(1) $\mathcal{C}$: I / C / K / E - closed

$:\Longleftrightarrow$ I : image-closed

C : Coker-closed

K : Ker ——

E : Ext ——

(2) $\mathcal{C}$: wide (fu太)

$:\Longleftrightarrow$ CKE-closed

($\rightsquigarrow$ abelian subcat, I-closed でもある.)

Cor 5. $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: IKE-closed.

TFAE (1) $\mathcal{C}$: cov. fin. [e.g. wide)

(2) $\mathcal{C}$: cover もつ

(3) $\mathcal{E}$: progen をつ

このとき $\mathcal{E}$ の min cover

$=$ $\mathcal{E}$ の progen.

(証) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) : Thm 4.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Clear

(progen は $\mathcal{E}$ を cover)

(2) $\Rightarrow$ (3) P : $\mathcal{E}$ の min cover とる

$\rightsquigarrow$ Thm 2 より P : (sp-)proj in $\mathcal{E}$

$\forall X \in \mathcal{E}$, $\exists$ $\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{add}P}}{P_X} \underset{\mathcal{E}}{\twoheadrightarrow} X$: surj

これと $\mathcal{E}$: ker-closed より

$\exists$ $0 \to \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{E}}}{X'} \to \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{add}P}}{P_X} \to X \to 0$

Key! $\therefore$ P は $\mathcal{E}$ の progen $\square$

Cor 6 $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{mod}A$: wide とする

TFAE (1) $\mathcal{W}$: cov. fin

(2) $\mathcal{W}$: cont. fin

(3) $\mathcal{W}$: fun. fin.

(4) $\exists$ f.d. alg B s.t.

$$\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B.$$ ⌋

(∵) Cor 5 より

(1) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$ has cover $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$ has progen

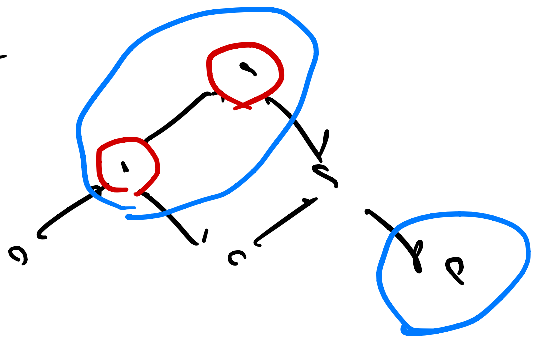
「B covers $\mathrm{mod}\, B$」を equiv で写す。 $\Uparrow$ $\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B$ $\Downarrow$ 利用 ($B := \mathrm{End}(\text{progen})$)

で (1) $\Longleftrightarrow$ (4).

また (4) は左右対称より, dual 考えて

全て同値. □

Ex



○ : wide

○ : min cover

||

progen

$$\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, k(1 \leftarrow 2)$$

Part II. ねじれ類と τ 傾斜群

II.1. Tilting vs tors

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} A$

$$\mathcal{C} * \mathcal{D} := \left\{ X \in \operatorname{mod} A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, 0 \to C \to X \to D \to 0 \\ \text{ex},\ C \in \mathcal{C}, \\ D \in \mathcal{D} \end{array} \right\}$$

Def $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: $\operatorname{mod} A$ の subcats のペアが

ねじれ対 (torsion pair)

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ \operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0 \\ (2)\ \operatorname{mod} A = \mathcal{T} * \mathcal{F}. \end{cases}$$

tors

このとき $\mathcal{T}$: ねじれ類 (torsion class)

$\mathcal{F}$: ねじれ自由類 (torsion-free class)

torf

$\operatorname{mod} A$ の「直交分解」

$\rightsquigarrow \forall X \in \operatorname{mod} A$

$$\exists!\ 0 \to \underbrace{tX}_{\in \mathcal{T}} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} \underbrace{fX}_{\in \mathcal{F}} \to 0.$$

HW このとき i: min. right $\mathcal{T}$-appr.

p: min left $\mathcal{F}$: approx.

よって，$\mathcal{T}$: cont. fin.

$\mathcal{F}$: cov. fin.

Prop (HW)

$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}A$: tors

$\iff \mathcal{T}$: ext-closed, Fac-closed

$\left(\forall \, \underset{\mathcal{T}}{\overset{T}{\rotatebox{90}{$\in$}}} \twoheadrightarrow M, \ M \in \mathcal{T} \right)$

このとき

$\mathcal{T}^{\perp} := \{ X \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{T}, X) = 0 \}$ であること

$(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\perp})$: torsion pair.

Def

$\mathrm{tors}A := \{$ torses in $\mathrm{mod}A \}$

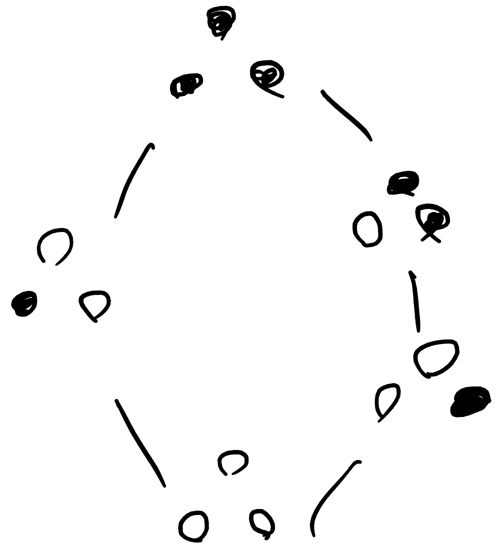
$\mathrm{torf}A := \{$ torfs ―― $\}$

⤳ 上より $\mathrm{tors}A \underset{{}^{\perp}(-)}{\overset{(-)^{\perp}}{\rightleftarrows}} \mathrm{torf}A$

: poset anti-isom

(自明で)

Ex $1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2$

$\rightsquigarrow$ tors A :  5コ.

Part I の系 :

Thm 17. $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$ について次が成立

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin ($\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$: cov. fin)

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{T} \quad \mathcal{T} = \operatorname{Fac} M$

(2) $\mathcal{T}$ is enough inj

$\underset{\{\text{inj objs}\}}{I(\mathcal{T})} = \operatorname{add} t(DA)$

(証) (1) $\mathcal{T}$: tors は I-closed

$\therefore$ $\mathcal{T}$: cov. fin $\overset{\text{Thm 4}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{T}$ が cover $^{\exists}M$ をもつ

$\Downarrow \; \exists$

$\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Fac} M$

(さらに $\mathcal{T}$: Fac-closed より), $\Downarrow \; \exists$

$\mathcal{T} = \operatorname{Fac} M$.

(2) $\mathcal{T}$ は conf. fin だったので、

$\mathcal{T}$: ICE-closed より

Cor 5 の dual より、

$\mathcal{T}$ は enough inj で

inj cogen : DA の min right $\mathcal{T}$-approx

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\; t(DA)$ $\square$

Rem $\mathcal{T}$: enough proj とは限らない!

$P(\mathcal{T}) = \{0\}$ もありうる。

いつ enough proj? ← fun. fin で十!

tors の proj を決定する:

Thm 8 $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$, fun. fin とする

$A \xrightarrow{f} T_0^A$: left min $\mathcal{T}$-app. をとり、

$A \xrightarrow{f} T_0^A \xrightarrow{g} T_1^A \to 0$: ex とおくと、

(1) $\operatorname{add} T_0^A = P_0(\mathcal{T})$, $T_1^A \in P(\mathcal{T})$

(2) $\operatorname{ind} T_0^A \cap \operatorname{ind} T_1^A = \phi$

(3) $P(\mathcal{T}) = \operatorname{add}(T_0^A \oplus T_1^A)$ で

$\mathcal{T}$ は progen $T_0^A \oplus T_1^A$ をもつ (enough proj!) ⌋

② (1) Thm 3 より $\mathrm{add}\, T_0^A = \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$.

$$0 \to \mathrm{Im} f \xrightarrow{\cancel{f}} T_0^A \xrightarrow{g} T_1^A \to 0$$

ここで left $\mathcal{T}$-approx

に $(-, \mathcal{T})$ すれば、すぐ $T_1^A \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ である

($(T_0^A, \mathcal{T}) \twoheadrightarrow (\mathrm{Im} f, \mathcal{T}) \to {}^{1}(T_1^A, \mathcal{T}) \to {}^{1}(T_0^A, \mathcal{T})$)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0}$

(2) NEW $\exists M \in \mathrm{ind}\, T_0^A \cap \mathrm{ind}\, T_1^A$ とする.

⇝ M : sp-proj in $\mathcal{T}$ より

$$\underset{\mathcal{T}}{\overset{\cap}{T_0^A}} \xrightarrow[g]{} \!\!\!\!\to T_1^A \underset{\text{projection}}{\xrightarrow{\cancel{\theta}}}\!\!\!\!\to M \quad \text{は split}$$

よって 合成が rad で 矛盾

しかし 次の Lem より $g \in \mathrm{rad}$ で 矛盾.

(Lem HW
$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$: ex
f : left min $\Longleftrightarrow$ g : radical)

(3) NEW 直接 $T_0^A \oplus T_1^A$ が $\mathcal{T}$ の progen をみる. proj はOK.

$\forall X \in \mathcal{T} = \operatorname{Fac} T_0^A$ (cover より) より.

$$\exists\quad \begin{tikzcd}
 & A^m \arrow[r] \arrow[d] & (T_0^A)^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(\ast)"] & (T_1^A)^m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & (T_0^A)^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで、 $\Rightarrow$ surj から $(\ast)$: pushout (HW)

$\rightsquigarrow$ つなげば、

$$\begin{tikzcd}
(T_0^A)^m \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & (T_1^A)^m \oplus (T_0^A)^n \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \quad : \text{ex} \\
 & X' \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

$X' \in \mathcal{T}$ by $\mathcal{T}$: Fac-closed.

$\therefore$ $T_0^A \oplus T_1^A$ は $\mathcal{T}$ の progen. $\square$

<u>Cor</u> $\mathcal{T}$: fun. fin. tors

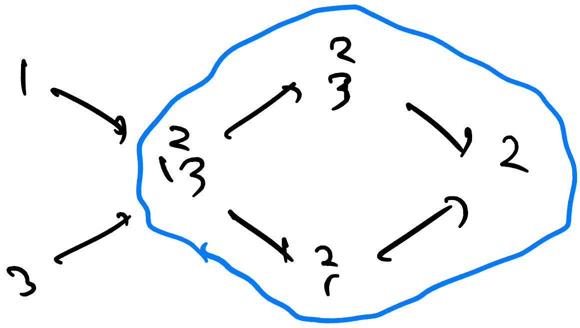
$\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ は progen をもつ. A の min left $\mathcal{T}$-app から

$$A \xrightarrow[f]{} T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$ つくると

$$P(\mathcal{T}) = \underset{\text{sp-proj}}{T_0^A} \;\underset{\text{disj}}{\sqcup}\; \underset{\text{non-sp proj}}{T_1^A}$$

とキレイに分かれる!

Ex $\quad k[1 \leftarrow 2 \rightarrow 3]$



$$
\begin{array}{lcccccc}
 & P(1) & \longrightarrow & \begin{smallmatrix}2\\1\,3\end{smallmatrix} & \longrightarrow & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} & \longrightarrow & 0 \\
 & P(2) & = & \begin{smallmatrix}2\\1\,3\end{smallmatrix} & & & & \\
\oplus & P(3) & \longrightarrow & \begin{smallmatrix}2\\1\,3\end{smallmatrix} & \longrightarrow & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} & \longrightarrow & 0 \\
\hline
 & A & \longrightarrow & \left(\begin{smallmatrix}2\\1\,3\end{smallmatrix}\right)^{\oplus 3} & \longrightarrow & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\ P(T) : \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\1\,3\end{smallmatrix}}_{\text{sp-proj}} \oplus \underbrace{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}_{\text{nsp-proj}} .$$

Def $\quad T \in \operatorname{mod} A$

(1) T : partial tilting

$:\Longleftrightarrow \quad \circ\ \operatorname{pd} T \leq 1$

$\qquad\qquad \circ\ \operatorname{Ext}_A^1(T, T) = 0$

(2) T : tilting (傾斜加群)

$:\Longleftrightarrow \quad T$: partial tilt かつ

$$\exists\ 0 \to A \to \underbrace{T_0 \to T_1}_{\operatorname{add} T} \to 0 \ : \text{ex}$$

Prop 9.

T: tilting とすると.

(1) $\mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} := \{X \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Ext}^1_A(T, X) = 0\}$

(2) $\mathrm{Fac}\,T$: tors.

(3) $\mathrm{Fac}\,T$ は progen T をもつ.

∵ NEW

(1) $\exists\, 0 \to A \xrightarrow{f} T_0 \to T_1 \to 0$ だが,

f は left $T^{\perp_1}$-approx がすぐ分かる

∴ $T^{\perp_1}$ は cover T_0 を持つ

一方 $T^{\perp_1}$ は tors (HW)

∴ $T^{\perp_1} = \mathrm{Fac}\,T_0 = \mathrm{Fac}\,T$

(2) (HW) (1) つかってもOK

(3) $T \in \mathrm{Fac}\,T$: progen みる

$\overset{\shortparallel}{T^{\perp_1}}$

ここから $T \in P(T^{\perp_1})$ は明らか,

$\forall X \in \mathrm{Fac}\,T$,

$\exists\, 0 \to X' \to T_X \xrightarrow{\text{right } T\text{-approx}} X \to 0$

surj は $\exists\, T' \twoheadrightarrow X$, $T' \to T_X$

で、$(T,-)$ すると、

$$(T,Tx) \twoheadrightarrow (T,x) \to {}^1(T,x') \to {}^1(T,Tx)$$
$$\hspace{8cm} \overset{\shortparallel}{0}$$

$\therefore\ x' \in T^{\perp 1} = \mathrm{Fac}\, T$ $\square$

Def $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$: faithful

$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{ann}\,\mathcal{T} = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\{a \in A \mid {}^\forall T \in \mathcal{T},\ Ta = 0\}}$$

$\Leftrightarrow$ $DA \in \mathcal{T}$ HW

HW $\ {}^\exists A \hookrightarrow T$, $\ T \in \mathcal{T}$

Thm 10 $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$ について TFAE

(1) $\exists\ T$: tilt s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T$

(2) $\mathcal{T}$: fun. fin & faithful

NEW?

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Thm 7 より $\mathcal{T}$: fun. fin.

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T \underset{\text{Prop 9}}{=} T^{\perp 1} \ni DA$ より faithful.

$\underline{(2) \Rightarrow (1)}$ Thm 8 使う.

$\mathcal{T}$: faithful より $\exists A \hookrightarrow T$, $T \in \mathcal{T}$

∴ left min $\mathcal{T}$-app $A \to T_0^A$ は単射

$\rightsquigarrow 0 \to A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$ —— (※)

ができ, $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, T_0^A = \mathrm{Fac}(T_0^A \oplus T_1^A)$

$T := T_0^A \oplus T_1^A$ として, T: tilt を示す.

$T \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ より

$$\mathrm{Ext}_A^1(T, T) = 0$$

また (※) もある.

∴ $\mathrm{pd}\, T \leq 1$ のみみるが,

$\mathcal{T}$: faithful より $DA \in \mathcal{T}$ に注意して.

$\forall X \in \mathrm{mod}\, A$,

$$\mathrm{Ext}^2(T, X) = \mathrm{Ext}^1(T, \Sigma X)$$

$$\Big(0 \to X \to \underset{\underset{\mathrm{inj}\,A\, \subseteq\, \mathcal{T}}{\cap}}{I} \to \Sigma X \to 0 \Big)$$

で $\Sigma X \in \mathcal{T}$ より, $(= 0)$

∴ $\mathrm{pd}\, T \leq 1$ $\square$

II.2. τ傾加群

Prop 11 [Auslander-Smalø]

$X, Y \in \operatorname{mod} A$. TFAE.

(1) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau Y) = 0$

(2) $\operatorname{Ext}^1_A(Y, \operatorname{Fac} X) = 0$ ┘

(:) Recall AR formula

$$\operatorname{Ext}^1_A(Y, X) \cong D\overline{\operatorname{Hom}}(X, \tau Y)$$

(1)⇒(2) $X' \in \operatorname{Fac} X$ とすると.

$$X^n \twoheadrightarrow X'$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to (X', \tau Y) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{(X^n, \tau Y)}$$

$\therefore$ $\operatorname{Hom}(X', \tau Y) = 0$ より

$\operatorname{Ext}^1_A(Y, X') = 0$

(2)⇒(1) $f : X \to \tau Y$ とると,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, twoheadrightarrow] \arrow[rr, "f"] & & \tau Y \\ & \operatorname{Im} f \arrow[ur, hookrightarrow] & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} f \in \operatorname{Fac} X$

$\operatorname{Ext}^1(Y, \operatorname{Im} f) = 0 \Longrightarrow \overline{\operatorname{Hom}}(\operatorname{Im} f, \tau Y) = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Inf} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d] & I \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ \tau Y & \end{tikzcd} \quad \because \text{ inj hull}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & I \arrow[d, dashed] \\ \mathrm{Inf} \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right] & \tau Y \arrow[d, dashed, "\exists"] \\ & I \end{tikzcd} \quad \text{inj}$$

$\because$ L : left minimal

$\tau Y \twoheadrightarrow I$: retr

より τY : inj summand of L

$\therefore \quad I = 0 \quad \therefore \quad \mathrm{Inf} = 0$

<u>Def</u> M : τ-rigid

$:\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$

$(\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, \mathrm{Fac}\, M) = 0)$

"<u>Def</u>" $M \in \mathrm{mod}\, A$: 台τ傾加群

(support τ-tilting, sτ-tilt)

$:\Longleftrightarrow$ (1) M : τ-rigid

(2) $M \in \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$ として tilting.

$s\tau\text{-tilt}\, A := \{\text{supp } \tau\text{-tilt}\} / (M \sim N \Leftrightarrow \mathrm{add}\, M = \mathrm{add}\, N)$

<u>Prop (rW)</u>

M : τ-rigid ⇝ $\mathrm{Fac}\,M$: tors

(ext-closed をチェック) ┘

Thm 12 次の bij がある：

$$
\begin{array}{ccccc}
s\tau\text{-tilt}\,A & \rightleftarrows & \text{f-tors}\,A & \subset & \text{tors}\,A \\
 & & \| & & \\
 & & \{\text{fun. fin. tors}\} & & \\
M & \longmapsto & \mathrm{Fac}\,M & & \\
\mathcal{T} \text{ の progen.} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathcal{T} & &
\end{array}
$$
┘

(::) <u>Well-defined?</u>

- M : τ-rigid ⇝ $\mathrm{Fac}\,M$: tors で cover をつくるら fun. fin.
- $\mathcal{T} \in$ f-tors A ⇝ $\mathcal{T}$ は progen M をもつ (Thm 8)

⇝ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$ で、 ${}^1(M, \mathrm{Fac}\,M) = 0$ より

M : τ-rigid.

- $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M \subseteq \mathrm{mod}\,A/\mathrm{ann}\,M$ とみれる.

(しかも $\mathrm{ann}\,M = \mathrm{ann}\,\mathcal{T}$!)

$\therefore$ $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$: faithful tors

$\therefore$ この progen M は、Thm 10 より tilting 」

互いに逆 は OK $\square$ 」

II.3 Counting argument

<u>Fact</u> $T \in \mathrm{mod}\, A$: partial tilting とする

$\rightsquigarrow$ T : tilting $\Leftrightarrow$ $|T| = |A|$

((∵) $(\Rightarrow)$ $D^b(A) \simeq D^b(\mathrm{End}\, T_A)$ $\}K_0$

$\mathbb{Z}^{|A|} \cong \mathbb{Z}^{|T|}$

$(\Leftarrow)$ Bongartz compl.)

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

$\mathrm{supp}\, \mathcal{C} := \{ S : \text{simple } A\text{-mod} \mid \exists\, C \in \mathcal{C}.\ S \text{ は } C \text{ の組成因子} \} / \cong$

($\mathrm{supp}\, M$ も同じく)

Prop 13 HW $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$ について.

$$|A/\mathrm{ann}\, \mathcal{C}| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{C}|$$

特に $\exists\ A \xrightarrow[f]{} C^A$: left approx $\Rightarrow$ $A/\mathrm{ann}\, \mathcal{C} = \mathrm{Im}\, f$

Thm 14 TFAE for $M \in \mathrm{mod}\,A$.

(1) M: sτ-tilt

(2) (i) M: τ-rigid　　　$|M|$ が 意外に多い!

(ii) $|M| = |\mathrm{supp}\,M|$

(suppの数だけ smd ある!)

☹ M: τ-rigid について

M: sτ-tilt $\Longleftrightarrow$ M: tilt $A/\mathrm{ann}\,M$-mod　(*)

一方 $\mathrm{Fac}\,M \subseteq \mathrm{mod}\,A/\mathrm{ann}\,M$: faithful なら

前回の議論で M: partial tilt over $A/\mathrm{ann}\,M$.

$\therefore$ (*) $\Longleftrightarrow$ $|M| = |A/\mathrm{ann}\,M| = |\mathrm{supp}\,M|$ $\square$

II.4. Smalø's symmetry

Thm 14 (Sm ———)

$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: tors pair in $\mathrm{mod}\,A$ とき

$\mathcal{T}$: fun. fin $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$: fun. fin.

これを proj, inj の 数えあげで示す.

Lem $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\, A$

(1) $|I(\mathcal{T})| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{T}|$

(2) $|P(\mathcal{T})| \leq |I(\mathcal{T})|$ で，

等号 $\iff$ $\mathcal{T}$: fun. fin. ⌟

(:) (1) Thm 7 より

$|I(\mathcal{T})| = |t(DA)|$

($t(DA) \hookrightarrow DA$: min. right $\mathcal{T}$-approx)

$\overset{\text{Prop 13 の dual}}{\rightsquigarrow}$ $|t(DA)| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{T}|$

(2) $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, \mathcal{T}$: faithful tors で，

$\therefore |P(\mathcal{T})| \leq |A/\mathrm{ann}\, \mathcal{T}| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{T}|$

$\uparrow$ part. tilt

等号 $\iff$ $M := \bigoplus_i P(\mathcal{T})$: sτ-tilt

$\overset{(*)}{\iff}$ $\mathcal{T}$: fun. fin.

($\Leftarrow$) OK

($\Rightarrow$) $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$ を示せば良い。 $X \in \mathcal{T}$ とる

$$X \in \mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$\mathrm{Fac}\, M = (M^{\perp_1}) \text{ in } \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$$

M: tilt in $A/\mathrm{ann}\,\mathcal{T}$

より $X \in \mathrm{Fac}\, M$ $\square$

Lem (HW) $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: tors. pair

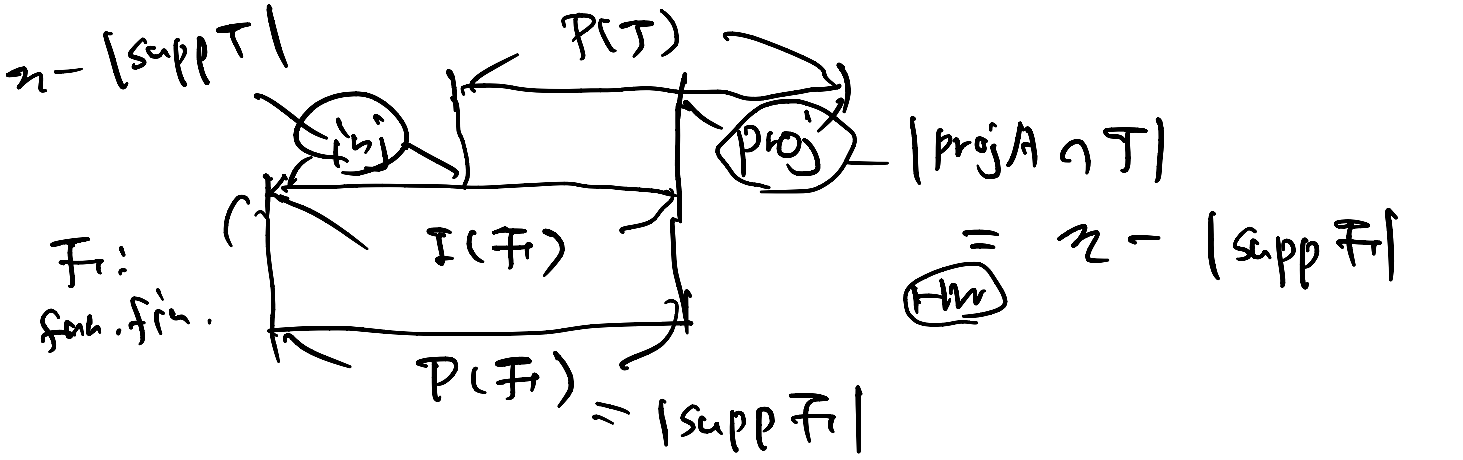
$\exists$ bij

$$\mathrm{ind}\, P(\mathcal{T}) \setminus \mathrm{proj}\, A \underset{\tau^-}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \mathrm{ind}\, I(\mathcal{F}) \setminus \mathrm{inj}\, A \ \lrcorner$$

$$\because \left(\begin{aligned} M \in P(\mathcal{T}) &\Leftrightarrow {}^{1}(M, \mathcal{T}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{T}, \tau M) = 0 \Leftrightarrow \tau M \in \mathcal{F} \\ N \in I(\mathcal{F}) &\underset{\text{dual}}{\Leftrightarrow} \tau^- N \in \mathcal{T}. \end{aligned} \right)$$

Proof of Smalø's sym. $|A| = n$

$\mathcal{F}$: fun. fin とする. $|P(\mathcal{T})| = |I(\mathcal{T})|$?



$$|P(\mathcal{T})| = |\mathrm{supp}\,\mathcal{F}| - (n - |\mathrm{supp}\,\mathcal{T}|)$$

$$+ (n - |\mathrm{supp}\,\mathcal{F}|)$$

$$= |\mathrm{supp}\,\mathcal{T}| = |I(\mathcal{T})| \qquad \square$$

まとめ $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$ について TFAE

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin

(2) $\exists M \quad \mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$

(3) $\mathcal{T}$: progen もつ

(4) $\mathcal{T}$: enough proj

(5) $|P(\mathcal{T})| = |I(\mathcal{T})|$.

(6) $\mathcal{T}^{\perp}$: fun. fin.

Rem Symm ならネーターかんたんとだめ

($\mathrm{fl}\,R$, $\mathrm{proj}\,R$)

not cov. fin. DVR fun. fin

Ques $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: ext-closed , fun. fin.

$\Rightarrow |P(\mathcal{E})| = |I(\mathcal{E})|$?

($\rightsquigarrow$ Auslander - Reiten Conj, ... etc)

Part III Wide interval

III.1. Heart

Def $\vec{H}(\mathrm{tors}A)$: quiver

点 : $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$

矢 : $\mathcal{T} \to \mathcal{U}$:$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \circ\ \mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U}, \\ \circ\ \nexists\, \mathcal{C} \in \mathrm{tors}A,\ \mathcal{T} \supsetneq \mathcal{C} \supsetneq \mathcal{U}. \end{cases}$$

Ex

Aim

$\vec{H}(\mathrm{tors}A)$ の矢 を brick, sp-split を使って めつく!

Tool. Heart of interval

Def $\mathcal{U}, \mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ とする.

(1) $[\mathcal{U}, \mathcal{T}] := \{ \mathcal{C} \in \mathrm{tors}A \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \}$

(2) $\mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}] \subseteq \mathrm{mod}\,A$

$$\begin{array}{c} \| \\ \mathcal{T} \cap \underbrace{\mathcal{U}^{\perp}}_{\text{torf}} \quad (= \text{"}\mathcal{T}-\mathcal{U}\text{"}) \end{array}$$

Ex

$$\begin{cases} \mathcal{H}[0,\mathcal{T}] = \mathcal{T} \\ \mathcal{H}[\mathcal{T},\mathrm{mod}\,A] = \mathcal{T}^{\perp} \end{cases}$$

$\mathrm{mod}\,A$
$\left.\right]\mathcal{T}^{\perp}$
$\mathcal{T}$
$\left.\right]\mathcal{T}$
0

Def $[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: $\underset{\text{interval}}{\text{itv}}$ in $\mathrm{tors}\,A$

これが wide itv

:$\Longleftrightarrow$ heart $\mathcal{T}\cap\mathcal{U}^{\perp}$ が wide subcat,

($\Longleftrightarrow$ CKE-closed)

$\rightsquigarrow$ abelian.

Rem

$\forall\, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: wide (ICE, IKE-closed)

$\rightsquigarrow \exists\, [\mathcal{U},\mathcal{T}]\quad \mathcal{C} = \mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}]$

Prop (HW)

$[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: itv with heart $\mathcal{H}$

(1) $\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{H} \quad (= \text{"}\mathcal{U}+\mathcal{H}\text{"})$

(2) $\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap {}^{\perp}\mathcal{H}$ = ($\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap \mathcal{H}$)

((3) $\mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \mathcal{U}^{\perp}$)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[d, dash, "\mathcal{H}"] \\ \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

Prop 15 上の状況で、

$\mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{H}$ のうち 2つが fun.fin

⇒ 残りもそう 」

(2-out-of-3)

(i) ($\mathcal{U}, \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$)

$\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{H}$

Fact より OK.

Fact $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: fun.fin

⇒ $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ も 」

($\mathcal{T}, \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{U}$)

Serre's symmetry 使って

上の場合から従う

$\underbrace{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}}_{\mathcal{H}} \quad \overset{(-)^{\perp}}{\rightsquigarrow} \quad \underbrace{\mathcal{U}^{\perp} \supseteq \mathcal{T}^{\perp}}_{\mathcal{H}}$ in torf

$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{H} * \mathcal{T}^{\perp}$: fun.fin.

$\rightsquigarrow \mathcal{U}$ も.

$(\mathcal{T}, \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{H})$

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \underset{\substack{\parallel \\ \mathcal{G}}}{\underbrace{\mathcal{U}^{\perp}}}$$

$\mathcal{G}$: fun.fin. (Small)

$\forall X \in \mathrm{mod}A$

$$\begin{tikzcd}
 & G_X \arrow[r, "\mathcal{G}\text{-approx}"] & X \\
\mathcal{H} \ni t(G_X) \arrow[ur, hook] \arrow[urr, bend right, "\mathcal{T}\text{-approx}", "\mathcal{H}\text{-approx}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Lem</u> 上の条件で、

$\mathcal{T}$ が progen M を持つとすると、

$\mathcal{H}$ も progen. gM もつ

$$(0 \to uM \to M \to gM \to 0)$$

$$uM \in \mathcal{U}, \quad gM \in \mathcal{G} := \mathcal{U}^{\perp}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{T}, \mathcal{F}) \\ (\mathcal{U}, \mathcal{G}) \end{cases}$$

$\because$ がんばる!

<u>Cor</u> $[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: wide itv, とき

$\mathcal{T}$: fun.fin $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$: fun.fin. で、

このとき $\mathcal{H}$ も fun.fin. 」

∵ ($\Leftarrow$) $\mathcal{T}$: fun fin

$\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ is projec fin

$\underset{\text{Lem.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{H}$ is projec fin

$\underset{\text{Cor 6.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{H}$ is fun. fin.

$\underset{2-3}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{U}$ is fun. fin. $\square$

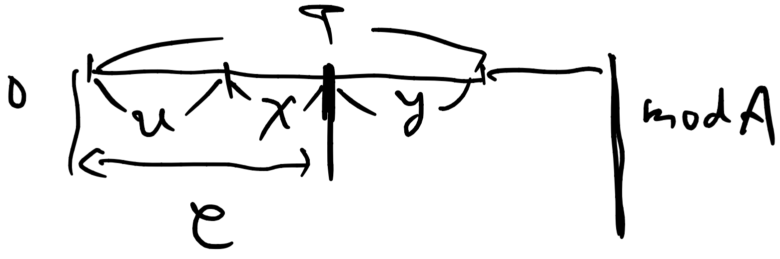
<u>Thm</u> [Asai-Pfeifer, Jasso]

$[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: wide itv Heart $\mathcal{W}$:=

$$[\mathcal{U},\mathcal{T}] \xleftrightarrow{1-1} \operatorname{tors} \mathcal{W}$$

$$\mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C} \cap \mathcal{U}^{\perp}$$

$$\mathcal{U} * \mathcal{X} \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{X}$$



∵ <u>well-def</u> . $(\mathcal{C} \cap \mathcal{U}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp} \cap \mathcal{T})$: tors pair in $\mathcal{W}$!

- $(\mathcal{U} * \mathcal{X}, \mathcal{Y} * \mathcal{T}^{\perp})$: tors pair in mod A.

互いに逆：ハーラムーン

Rem 上は ∀ exact cat で，成立 (ET)

(wide itv はダメ) [近藤-五-榎本]

II.2. Brick label

Def $B \in \mathrm{mod}A$: brick

$:\Longleftrightarrow \mathrm{End}_A(B)$: division ring

($\forall$ non-zero が isom)

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$

・ $\mathrm{Filt}\,\mathcal{C} := \bigcup_{n\geq 0} \overbrace{\mathcal{C} * \cdots * \mathcal{C}}^{n}$,

・ $\mathrm{brick}\,\mathcal{C} := \{ B \in \mathcal{C} \mid B : \mathrm{brick} \} / \cong$

Lem $\forall\, 0 \neq X \in \mathrm{mod}A$ $\exists\, f : X \to X$ s.t.

$\mathrm{Im} f$: brick.

☺ $l(X)$ について induction.

$l(X)=1 \Rightarrow X$: simple (brick)

$\Rightarrow$ id_X で OK

$l(X)>1$ とき

- X: brick: id_X
- X: not brick とき $\exists\, f: X \to X$ ($\neq 0$) : not isom

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & X \\ & \mathrm{Inf} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

ここに induction

$\exists\, \mathrm{Inf} \twoheadrightarrow B \hookrightarrow \mathrm{Inf}$
B: brick

$\rightsquigarrow$ $X \twoheadrightarrow \mathrm{Inf} \twoheadrightarrow B \hookrightarrow \mathrm{Inf} \hookrightarrow X$
が求まるの。 □

<u>Prop</u> $[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: itv, heart $\mathcal{H}$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H} = \mathrm{Filt}(\mathrm{brick}\,\mathcal{H})$ 」

☺ $\forall X \in \mathcal{H}$, $l(X)$ の induction で

$X \in \mathrm{Filt}(\mathrm{brick}\,\mathcal{H})$ みる

$l(X)=0 \Rightarrow$ OK

$\ell(X) > 0$ のとき、さっきより

$\exists\ X \twoheadrightarrow B \hookrightarrow X$, この $B \in \mathcal{H}$ がすぐ、

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\mathcal{T} \ni & tK \arrow[r, equal] \arrow[d] & tK \in \mathcal{H} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & fK \arrow[r] \arrow[d] & \square \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$B \in \mathcal{H}$, $fK \in \mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp}$, $\square \in \mathcal{H}$ がある。

ここは $\mathcal{H}$ の s.e.s.

・$tK \neq 0$ のとき

$\square \neq 0$ なら induction おわる

$\square = 0 \Rightarrow K \in \mathcal{T} \rightsquigarrow K \in \mathcal{H}$

$\rightsquigarrow\ 0 \to K \to X \to B \to 0$ で

K の induction で OK

・$tK = 0$ のとき　$K \in \mathcal{F}$

$0 \to K \to X \to B \to 0$

に $(B, -)$ して、

$$
0 = (B,K) \to (B,X) \to (B,B) \to {}^{1}(B,K)
$$

$\exists\ B \hookrightarrow X$ — $(B,X) \neq 0$

(B,B): 1-dim as End B-mod

$\therefore$ $(B, X) \cong (B, B)$ より

$\Downarrow$

1_B

$X \longrightarrow B$: retraction

$\rightsquigarrow$ $K <\oplus X$ より $K = 0$ のはず

$K \subset T$, $X \subset T$ $\rightsquigarrow$ $X = B$ $\square$

<u>Lem</u> B: brick

$\Rightarrow$ $\mathrm{Filt}\,B$: wide subcat with unique simple obj B ⌋

ker-closed の方が楽?

$\{ X \mid \forall X \xrightarrow{f} B : 0$ or surj かつ $\mathrm{Ker} f \in \mathrm{Filt}\,B \}$

は ext-closed が明らか, B 入る

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Filt}\,B \subseteq \{ — \}$.

・$\forall X \xrightarrow{f} Y$, $X \in \mathrm{Filt}\,B$, $Y \in \mathrm{Filt}\,B$, $\mathrm{Ker} f \in \mathrm{Filt}\,B$ を, Y の $\mathrm{Filt}\,B$-length で induction.

0, 1 $\rightsquigarrow$ 上.

$X \downarrow f$ ⊗, 0 or not

$0 \longrightarrow \square \longrightarrow Y \longrightarrow B \longrightarrow 0$

smaller

0 移る.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[d] \\ \square \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

で. $\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Ker}\, \bar{f}$

で induction

$m=0$ なら surj その Ker $\in$ Filt $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \triangle \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{pb}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \square \arrow[r] & Y \arrow[r] & B & \end{tikzcd}$$

で. $\mathrm{Ker}\, f \cong \underline{\mathrm{Ker}\, \varphi}$: induction □

<u>Thm</u> $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ in tors A TFAE

(1) $\exists\ \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\, A)$

(2) $|\ \mathrm{brick}\ \mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}]\ | = 1$

(3) $\mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}]$: wide with one simple. ┘

(∵) <u>(1) ⇒ (2)</u>

$B_1, B_2 \in \mathcal{H} := \mathcal{H}[\mathcal{U},\mathcal{T}]$ とする.

⇝ $B_i \notin \mathcal{U}$, $B_i \in \mathcal{T}$

$\therefore\ \mathcal{U} \subsetneq \underset{\mathcal{T}}{\mathrm{T}}(\mathcal{U} \cup B_i) \subseteq \mathcal{T}$ for $i=1,2$

$(\longrightarrow)$ を含む最小の tors

$$\therefore\ \underset{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{B_2}}{T(\mathcal{U}\cup B_1)} = T$$

$$T = T(\mathcal{U}\cup B_2)$$

一方　$\mathcal{C} := \{X \mid \forall X \to B_1$ は 0 or surj$\}$

とすると、　B_1 と $\mathcal{U}$ 入る

$(B_1 \in \mathcal{U}^{\perp})$

これも tors (HW)

$$\therefore\ B_2 \in T(\mathcal{U}\cup B_1) \subseteq \mathcal{C}$$

$$\therefore\ (B_2, B_1) = 0 \ \text{or}\ \underbrace{\exists\, B_2 \twoheadrightarrow B_1}_{\text{これを示したい}}$$

$(B_2, B_1) = 0$ とすると

$$B_2 \in \underbrace{{}^{\perp}B_1}_{\text{tors}} \qquad \therefore\ T(\mathcal{U}\cup B_2) \subseteq {}^{\perp}B_1$$

$$\mathcal{U} \subseteq {}^{\perp}B_1 \qquad T(\mathcal{U}\cup B_2) = T(\mathcal{U}\cup B_1) \ni B_1$$

$\therefore\ (B_1, B_1) = 0$ でおかしい

$\therefore\ \exists\, B_2 \twoheadrightarrow B_1$、対称にして

$B_1 \twoheadrightarrow B_2$

$\therefore\ B \cong B_2$.

また $\mathcal{H} \neq 0$ より $\mathrm{brick}\,\mathcal{H} \neq 0$

($\exists$ 対応 $T = \mathcal{U} * \mathcal{H} = \mathcal{U}$) $\mathcal{H} = \mathrm{Filt}(\mathrm{brick}\,\mathcal{H})$

$\therefore\ |\mathrm{brick}\,\mathcal{H}| = 1$

(2) ⇒ (3) OK

<u>(3) ⇒ (1)</u>

$[\mathcal{U}, \mathcal{T}] \cong \mathrm{tors}\,\mathcal{H}$ unique simple

$\| \ \text{r(W)}$

$\{0 \neq \mathcal{H}\}$

$\left(\because\ 0 \neq \mathcal{X} \in \mathrm{tors}\,\mathcal{H} \right.$

$\rightsquigarrow 0 \neq {}^{\exists}x \in \mathcal{X}$

$\downarrow$

B : simple $\in \mathcal{X}$ $\quad \mathcal{X} = \mathcal{H} \left. \right)$

<u>Cor</u>

(1) $\exists\ \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\,A)$ と時

$\mathcal{T}$: fun. fin $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$: fun. fin

(2) $|\mathrm{tors}\,A| < \infty$ と時

$\forall$ tors is fun. fin $\lrcorner$

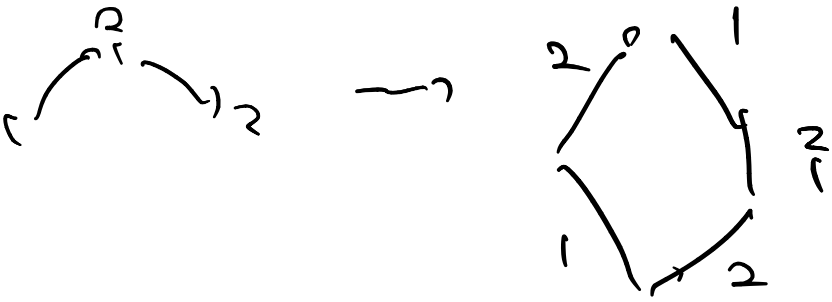
(証) (2) $\mathrm{tors}\,A$: finite poset

$\therefore\ {}^{\forall}\mathcal{T} \neq 0,\ \mathcal{T} \supsetneq 0$ より

$\exists\ T \to \cdots p \to U$: path

$\rightsquigarrow\ \Leftarrow\ \Leftarrow$ fun. fin

Ex



II.3. Hasse 図の性質. tors v.s. wide

Thm [DIJ] $T \in \operatorname{tors} A$,

$U \subsetneq T$ なる $U \in \operatorname{tors} A$ とる.

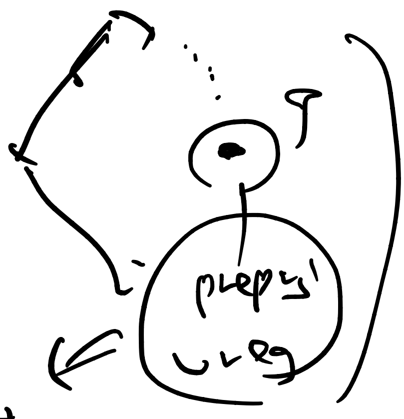
もし T : fun. fin. なら,

$\exists\ T \to T'$: in $\vec{H}(\operatorname{tors} A)$

s.t. $U \subseteq T' \leftarrow T$.

($|\operatorname{tors} A| < \infty$ なら当たり前.

一般には : $1 \Leftarrow 2$)



$\nexists\ T \to$.

(∵) これが「M: f.g. mod. $H \subsetneq M$: sub

$\rightsquigarrow \exists H \subseteq \underbrace{M' \subsetneq M}_{\text{maximal sub}}$」

と全く同じ $\rightsquigarrow$ Zorn! 使う!

$[\mathcal{U}, \mathcal{T}) := \{ \mathcal{T}' \in \operatorname{tors} A \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T} \}$

とすると $\mathcal{U}$ が入り not empty.

$\forall$ chain が上界もつか?

$\{\mathcal{T}_i\} \subset [\mathcal{U}, \mathcal{T})$: chain とる.

$\bigcup \mathcal{T}_i$ を考えると. これは tors が分かる

$\leftarrow$ ふつうの union.

(Fac-closed は OK

ext : tot. ordered より)

$\therefore \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{T}_i \boxed{\subseteq} \mathcal{T}$ は OK

$\mathcal{T} \neq \bigcup \mathcal{T}_i$ 示せば $\bigcup \mathcal{T}_i$ が上界

$\mathcal{T} = \bigcup \mathcal{T}_i$ とする.

$\mathcal{T}$: fun. fin より $\exists M$ $\mathcal{T} = \operatorname{Fac} M$

$\rightsquigarrow$ $M \in \bigcup \mathcal{T}_i$ より

$\exists i \quad M \in \mathcal{C}_i$

$\Downarrow$

$\mathcal{T} = \operatorname{Fac} M \subseteq \mathcal{C}_i \subsetneq \mathcal{T}$

でムジュン 」

$\therefore$ Zorn より $\exists\, \mathcal{T}' \in [\mathcal{U}, \mathcal{T})$: 極大元

このとき $\mathcal{T}' \leftarrow \mathcal{T}$ はすぐ $\square$

<u>Cor</u> $\mathcal{T}, \mathcal{U} \in$ f-tors$A$ について

$\mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\operatorname{tors} A)$

$\Longleftrightarrow \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\text{f-tors} A)$ 」

(∵) ($\Rightarrow$) ok

($\Leftarrow$) $\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U}$ より

$\exists \quad \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\operatorname{tors} A)$

しかし $\mathcal{T}$: fun. fin より $\mathcal{T}'$ もそう

$\therefore \quad \mathcal{T} \to \mathcal{T}' \supseteq \mathcal{U}$ in $\vec{\mathcal{H}}(\text{f-tors} A)$

$\therefore \quad \mathcal{T}' = \mathcal{U}$ $\square$

IV. Hasse arrow via sp-proj (mutation)

今まで: $T \to U$ in $\vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\,A)$ (f-)

について の 基本性質 みた

これから: 具体的に 矢をつくるには?

矢がある "$\Longleftrightarrow$" "mutation"

$\rightsquigarrow$ メイン: 「T の sp-proj $\longleftrightarrow$ T からの矢」

Wide itv の rank について.

Prop (rank lemma) $\mathcal{T}$: tors with progen T.

$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{U}$

$(\mathcal{U}, \mathcal{F})$: tors. pair

$\rightsquigarrow$ gT : $\mathcal{H}_{[\mathcal{U},\mathcal{T}]} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ の progen

について

$$|gT| = |\,\mathrm{ind}\,T \setminus \mathcal{U}\,|$$

$$= \{X \in \mathrm{ind}\,T \mid X \notin \mathcal{U}\}$$ 」

g は functor

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mod}A \arrow[r, "g"] & \mathcal{G} \\ \cup & \cup \\ \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{H} = \mathcal{T} \cap \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}$ …torf をつくるが

に restrict する

$(\forall X \in \mathcal{T},\ 0 \to uX \to X \to gX \to 0)$

$gX \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}$.

<u>Claim</u> これは equiv

$$\frac{\mathrm{add}\, T}{[U]} \simeq \mathrm{add}\,(gT)$$

U を通る射 $\to [U]$

を induce する

$gU = 0$ より induce される.

Obj dense は OK

$$\therefore \frac{\mathrm{End}_A(T)}{[U](T,T)} \cong \mathrm{End}\,(gT) \text{ みる.}$$

・surj?

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] \arrow[d, "i"] & T \arrow[r] \arrow[d] & gT \arrow[r] \arrow[d, "\forall"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] & gT \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$T \in P(\mathcal{T})$ より

・<u>inj ?</u>

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, bend right] & gT \arrow[r] \arrow[d, "\wr\,\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & uT \arrow[r] & T \arrow[r] & gT \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

□

$\therefore\ |gT| = |\operatorname{add} gT|$

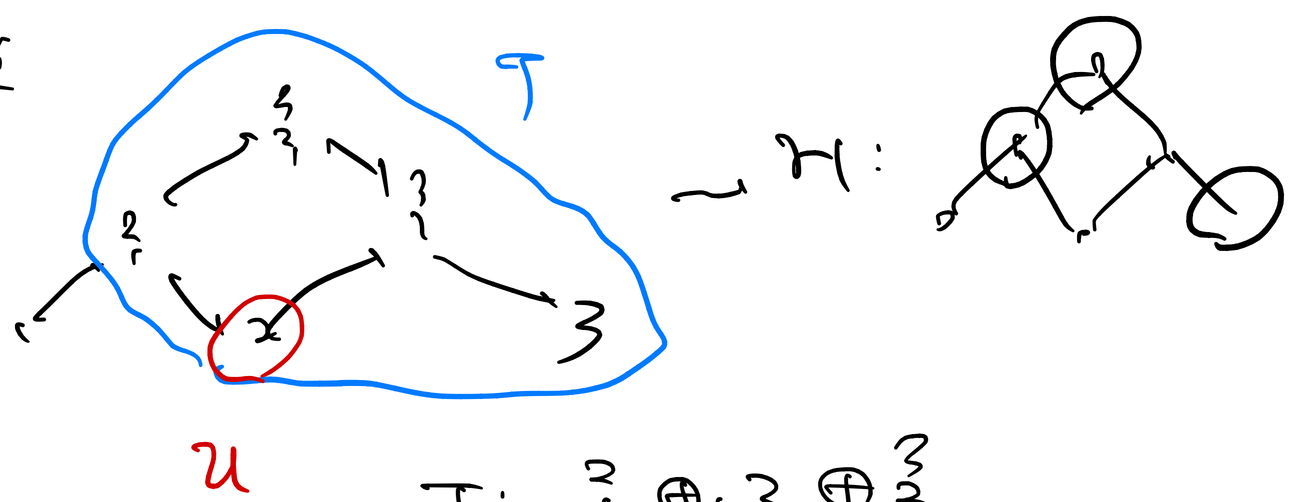
$$= \left| \frac{\operatorname{add} T}{[U]} \right| \overset{HW}{=} |\operatorname{ind} T \setminus U|$$

(一般に $U \subseteq T$ より　　well-known.

$$\operatorname{ind} \frac{T}{[U]} \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{ind} T \setminus U$$
)

← これを ind T に restrict したもの

Ex



$T:\ {}^{2}_{1} \oplus \underbrace{2}_{U} \oplus {}^{3}_{\substack{2\\1}}$

⇝ H の proj : 2 つ.

<u>Key Prop</u> $\mathcal{T} \in$ f-tors$A$ T : $\mathcal{T}$ の progen

T : basic, $T = X \oplus U$ で

$X \in \mathcal{P}_0(\mathcal{T})$ とする (i.e., X : sp-proj)

⇝ $[\mathrm{Fac}\, U, \mathcal{T}]$ は wide 区間で,

その heart は rank $|X|$ (の f.d. alg の module cat と equiv.)

スローガン

「tors の sp-proj をおとすと,

おとした rank の wide 区間ができる」

(・・) $\mathcal{H} := \mathcal{T} \cap \mathrm{Fac}\, U^{\perp} = \mathcal{T} \cap U^{\perp}$ とする

<u>・$\mathcal{H}$: wide</u>

・$\mathcal{H}$: IE-closed はすぐ分かる

NTS $\forall\, 0 \to L \to M \to N \to 0$: ex,

(i) $L, M \in \mathcal{H} \Rightarrow N \in \mathcal{H}$

(ii) $M, N \in \mathcal{H} \Rightarrow L \in \mathcal{H}$ 」

(i) $M \in T$ より $N \in T$.

$N \in U^{\perp}$?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (U,M) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & (U,N) \arrow[r] & {}^{1}(U,L) \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
M \in U^{\perp} & 0 & & 0 & L \in T,\ U \in P(T)
\end{tikzcd}$$

(ii) $M \in U^{\perp}$ より $L \in U^{\perp}$.

$L \in T$ なし?

<u>Claim</u> $\exists\ 0 \to N' \to X_0 \to N \to 0$, $N' \in T$, $X_0 \in \mathrm{add}\,X$

(∵ T は $U \oplus X$ が progen.

∴ $\exists$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & U^{\oplus} \arrow[dr, "\cancel{\alpha}"] & & \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[ur] \arrow[dr] & \oplus & N \arrow[r] & 0 \\
 & & X^{\oplus} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$N'' \in T$

しかし, $(U,N)=0$ より $\cancel{\alpha}=0$

∴ これは

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & U^{\oplus} \arrow[r, equal] & U^{\oplus} & & \\
 & \oplus & \oplus & & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & X^{\oplus} \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

と isom.)

$$
T \ni \quad
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & N' \arrow[r, equal] \arrow[d] & N' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & \square \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$\square \in T$ より $\square \twoheadrightarrow X_0$: split

($\because$ $X \in P_0(T)$)

$\therefore$ $L \oplus \square$ より $L \in T$.

<u>rank</u>

H の rank $= |H$ の progen$|$

$= |\operatorname{ind}(U \oplus X) \setminus \operatorname{Fac} U|$

rank-gen

$= |X|$

($\because$ もちろん $\operatorname{ind} U$ の元は $\operatorname{Fac} U$ に入る.

もし $X' \in \operatorname{ind} X$ が $\operatorname{Fac} U$ に入れば

$U^{\oplus} \twoheadrightarrow X'$ より X' : <u>sp-proj</u> なので

$X' \oplus U$ とすると おかしい)

Cor $\mathcal{T} \in$ f-tors$A$. T: $\mathcal{T}$ の basic progen.

(1) $X \in \mathrm{ind}\,\mathcal{P}_0(\mathcal{T})$: indec sp-proj とると
$(X \triangleleft_{\oplus} T)$

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Fac}\, T/X \quad \text{in } \vec{\mathcal{H}}(\mathrm{tors}\, A)$$

(2) 逆に、 $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$ を任意にとると

$\exists!\, X \in \mathrm{ind}\,\mathcal{P}_0(\mathcal{T})$ s.t.

$$\mathcal{U} = \mathrm{Fac}(T/X)$$

⌟

☺ (1) $T = X \oplus U$ とかけば

さっきより $[\mathrm{Fac}\, U, \mathcal{T}]$: wide で、

rank は 1

∴ heart は simple が1つの Pなので(!)

∴ $\mathcal{T} \to \mathrm{Fac}\, U$.

(2) $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$ とする、 $\mathcal{T}$: fun. fin. より $\mathcal{U}$ もそう

一方 $[\mathcal{U}, \mathcal{T}]$: wide itv で

heart の rank は 1

∴ $|\mathrm{ind}\, \mathcal{T} \setminus \mathcal{U}| = 1$.

これを X とする. $T = X \oplus U$ とおく.
$\hookrightarrow U \in \mathcal{U}$

Claim X : sp-proj in $\mathcal{T}$.

(∵ ちがうなら, T の cover T から X とれる

$\therefore X \in \mathrm{Fac}\, U \subseteq \mathcal{U}$

$\therefore \mathrm{Fac}\, T = \mathrm{Fac}(X \oplus U) \subseteq \mathcal{U}$ でおかしい)

$$\rightsquigarrow \text{(1) から } \mathcal{T} \xrightarrow{\exists} \mathrm{Fac}\, U$$

$$\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{U} \supseteq \mathrm{Fac}\, U$$

$\therefore \mathcal{U} = \mathrm{Fac}\, U$.

Cor $\mathcal{T} \in$ f-tors A とき

$\{\mathcal{T} \to ?\} \xleftrightarrow{1-1}$ ind $P_0(\mathcal{T})$ ┘

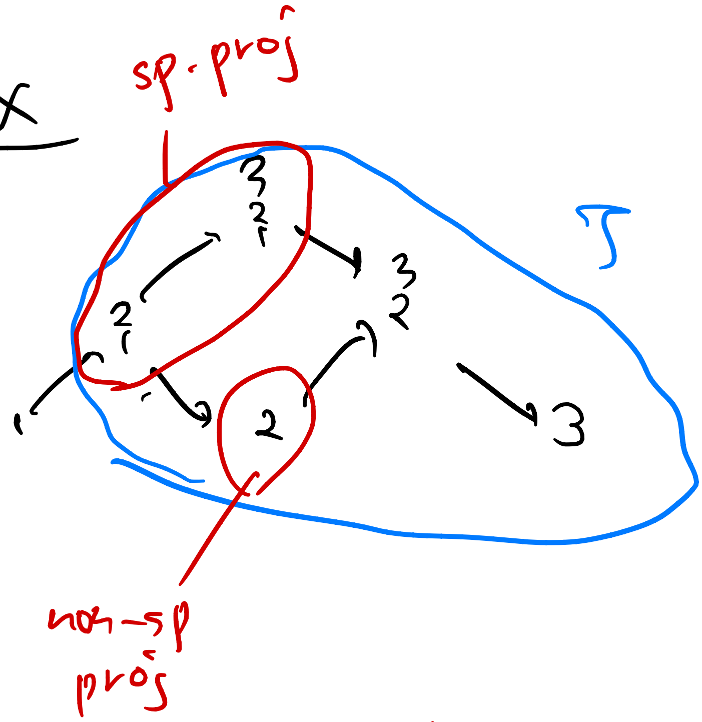
まとめ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, T$ から 1つ 下へ行くには,

T のうち indec sp-proj

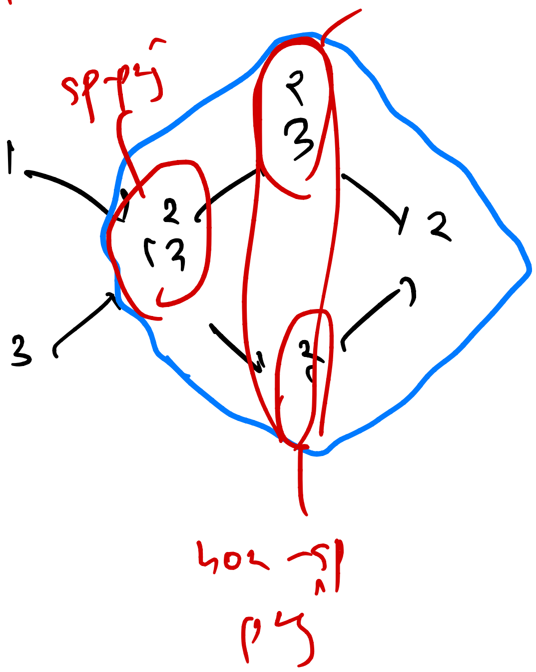
(= 他の Fac でかけない indec)

をはずして Fac とればいい!

Ex



$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2\right) & & \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2\right) \end{tikzcd}$$



$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} T \arrow[d] \\ \mathrm{Fac}\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right) \end{tikzcd}$$

「全ての sp-proj を足す」

tors vs wide

$T \in$ f-tors A $\quad$ T: T の basic progen

$\rightsquigarrow$ $T = \underset{\text{sp-proj}}{T_{sp}} \oplus \underbrace{T_{nsp}}_{\text{それ以外全部}}$ とする。

Thm [Marks - Stovicek]

(1) $[\mathrm{Fac}\, T_{\mathrm{nsp}}, \mathrm{Fac}\, T]$: wide itv で、

$\alpha T :=$ その heart とする

(2)
$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "B_1"'] \arrow[dr, "B_r"] & \\ T_1 & \cdots & T_r \end{tikzcd}$$
: T からの全ての矢

$\rightsquigarrow$ $r = |T_{sp}|$ で、

$\alpha T = \mathrm{filt}(B_1, \cdots, B_r)$,

∵ $B_1 \sim B_r$ を simple にもつ

(3) $T = T(\alpha T)$ $\qquad$ $T(\bigcirc)$ smallest wide

$= T(B_1, \cdots, B_r)$

(∵) (1) や、また

(2) $[\mathrm{Fac}\, T_{sp}, \mathrm{Fac}\, T] \simeq \mathrm{tors}\, \alpha T$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Fac}\, T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T_1 & \cdots & T_r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \alpha T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \circ & \cdots & \end{tikzcd}$$

← 全体

($T_{sp} \in T_i$ より) $\qquad$ 0

?

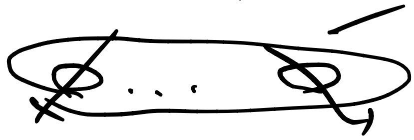
$$T_i = \mathrm{Fac}(\underbrace{T \text{ の } s_i \text{ に sp-proj を足す}}_{\oplus\ T_{nsp}})$$

しかも

$^{\perp}T \simeq \mathrm{mod}\, B$ （B : rank r f.d. alg）で.

一般に $\mathrm{tors}\, B$:

mod B



ここに simple 全て がある

HW

（ dual を考え

F H S_1 $\cdots$ F H S_2

$\to 0 \leftarrow$

を考えると良い...）

∴ $B_1, \cdots, B_r$: $^{\perp}T$ の simple 全て

(3) $B_1, \cdots, B_r \subseteq T$ は OK

T' : tors が B_i 全て含むとする.

$T \cap T' \subsetneq T$. 等しくないと仮定

→ mutation property より

$$\exists\ T \cap T' \subseteq T_i \leftarrow T$$

$B_i \in T \cap T'$, $T_i = T \cap {}^{\perp}B_i$

$\therefore$ $B_1' \in {}^{\perp}B_1$ で矛盾.

$\therefore$ $T \cap T' = J$

$\therefore$ $J \subseteq J'$

$\therefore$ $J = T(B_1, \cdots, B_r)$ $\square$

$\left(= T(\alpha J) \right)$

Cor

$$\text{f-tors}A \underset{T(-)}{\overset{\alpha(-)}{\rightleftarrows}} \text{wide}A$$ は逆

$\circlearrowleft$: id.

Fact

$$\text{tors}A \underset{T(-)}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \text{wide}A$$

で、$\circlearrowleft$: id.

$\left(\because \text{tors}A = \text{f-tors}A \text{ より} \right.$

$\left. \text{tors}A \xleftarrow[\text{bij}]{} \text{wide}A \right)$

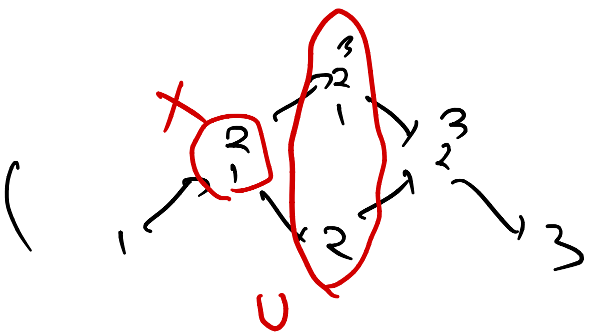
IV. Mutation Sequence

$$T = X \oplus U$$

$\uparrow$ index sp. pj

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Fac}\, T \longrightarrow \mathrm{Fac}\, U$$

しかし $\mathcal{P}(\mathrm{Fac}\, U)$ は U 以外に増える!



$$\rightsquigarrow \mathcal{P}(\mathrm{Fac}\, U) = \overbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2}^{U} \oplus \overset{???}{\boxed{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}}$$

X と U のみから残りを計算したい!

$\|$

mutation.

Prop (Important Seq)

$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{U}$: f-tors

progen T, U とする.

$$T \xrightarrow{f} U_0^T \longrightarrow U_1^T \longrightarrow 0 \quad \text{s.t.}$$

f: left min'l $\mathcal{U}$-approx であると.

次が成立

(1) $U_0^T, U_1^T \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

(2) $\mathrm{ind}\, U_0^T \cap \mathrm{ind}\, U_1^T = \emptyset$

(3) $\underset{\mathrm{add}\, U}{\overset{\|}{\mathcal{P}(\mathcal{U})}} = \mathrm{add}(U_0^T \oplus U_1^T)$

∵ $\mathcal{T} = A$, $\mathcal{U} = \mathcal{T}$の場合

すでにやった！

全く同じ証明で行く！

Claim "U_0^T : split-proj of $\mathcal{U}$ in $\mathcal{T}$", i.e.,

$$\forall\ 0 \to \underset{\mathcal{T}}{\overset{\cap}{L}} \to \underset{\mathcal{U}}{\overset{\cap}{M}} \to U_0^T \to 0 \implies \text{split}$$

$$\begin{tikzcd} & U_0^T \arrow[dr] & & T \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & U_0^T \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{P} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & T & \mathcal{U} & & \end{tikzcd}$$

retr

(1) よって $U_0^T \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$$0 \to \mathrm{Im} f \to U_0^T \to U_1^T \to 0$$

に $(-,\mathcal{U})$ して、$^1(U_1^T,\mathcal{U})=0$

もOK

(2) また $\exists\, U' \in \mathrm{ind}\, U_0^T \twoheadrightarrow \mathrm{ind}\, U_1^T$ なら

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\ni$}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Im} f \arrow[r] \arrow[d, equal] & \triangle \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{p.b}"] & \square \in \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Im} f \arrow[r] & U_0^T \arrow[r] \arrow[d] & U_1^T \arrow[r] & 0 \\ & & U' \arrow[d] & U' \arrow[l] \arrow[u, "\mathrm{proj}"'] \arrow[d] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

ここみて、Claimより

$U_0^T \twoheadrightarrow U_1^T \twoheadrightarrow U'$ がretr

$\rightsquigarrow$ しかし $U_0^T \to U_1^T$: rad で矛盾。

(3) U_0^T の U_1^T が $\mathcal{U}$ の progen なのが、

同じ証明 である!

$\forall M \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$.

$$\exists\ 0 \to M' \to (U_0^T)^{\oplus} \to M \to 0$$

$$\underset{\mathcal{T}}{\cap}$$

$$\because \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{T} \ni \square \arrow[d] \arrow[r] & \underset{\text{add } T}{\in} T^{\oplus} \arrow[d, "\exists"] \arrow[r] & \underset{\mathcal{U}}{\in} M \arrow[d, equal] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \triangle \arrow[r] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad T : \text{proj}$$

(上段は $0 \to \square \to T^{\oplus} \to M \to 0$)

$\triangle \oplus T^{\oplus} \in \mathcal{T}$ より

$\triangle \in \mathcal{T}$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & T^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & (U_1^T)^{\oplus} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & (U_0^T)^{\oplus} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

つぶして OK.

<u>Cor</u> T : basic st. tilt

$T = U \oplus X$ $\quad X$: indec sp-proj $(\Longleftrightarrow X \notin \operatorname{Fac} U)$

$\rightsquigarrow \exists\ X \xrightarrow{f} U_0^X \to U_1^X \to 0$

s.t. (1) f: left min $\underline{\underline{\mathcal{U}}}$-approx

(2) $\mathrm{add}(U \oplus U_1^X) = \mathcal{P}(\mathrm{Fac}\, U)$ ⌟

$\mathcal{U} := \mathrm{Fac}\, U$

(∵) f を left min $\underline{\underline{\mathcal{U}}}$-approx とすると。

$$\begin{bmatrix} X \xrightarrow{f} U_0^X \\ \oplus \qquad\quad \oplus \\ U = U \end{bmatrix} \to U_1^X \to 0 \ : \text{left min } \mathcal{U}\text{-approx}$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ T & \to & U_0^T \end{matrix}$$

∴ ①,② より $\mathcal{P}(\mathrm{Fac}\, U) = \mathrm{add}(U \oplus U_1^X)$

∴ $U_0^X \in \mathrm{add}\, U$ のみ示せばいい。

$\underset{①,②}{\mathcal{P}(\mathcal{U})} = \mathrm{add}(U \oplus U_0^X) \sqcup \mathrm{add}\, U_1^X$: $\underset{\text{ind が}}{\underline{\text{disjoint}}}$

一方 $|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = |\mathrm{supp}\, \mathcal{U}|$

$= |\mathrm{supp}\, \mathrm{Fac}\, U|$

$= |\mathrm{supp}\, U|$ で、

$$|U| \le |\underbrace{U \oplus U_0^X}_{\text{ここで indec disj}} \oplus \underbrace{U_1^X}| = |\mathcal{P}(\mathcal{U})|$$

$$|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = |\operatorname{supp} U| \le |\operatorname{supp}(U \oplus X)|$$

$$|U|+1 = |U \oplus X| = |\operatorname{supp}(U \oplus X)|$$

$\therefore \quad |\mathcal{P}(\mathcal{U})| = \underline{|U|}$ or $\underline{|U|+1}$

$\mathcal{P}(\mathcal{U}) \ni U$.

$\underline{|U| \text{ とき}}$ もう $U \in \mathcal{P}(U)$ なので

$$\mathcal{P}(U) = \operatorname{add} U$$

$$\therefore \quad U_0^X \in \operatorname{add} U$$

$\underline{|U|+1 \text{ とき}}$

つまり $|\operatorname{supp}(U \oplus X)| = |\operatorname{supp} U|$

$$\therefore \quad \operatorname{supp} X \subseteq \operatorname{supp} U$$

Claim $\underline{U_1^X \neq 0}$ を示せばよく.

$U_1^X = 0$ とする

$$0 \to K \to X \to U_0^X \to 0$$

$\to (-, U)$ して.

$(\mathcal{U}_0^X, \mathcal{U}) \twoheadrightarrow (X, \mathcal{U}) \to (K, \mathcal{U})$

$\to {}^1(\mathcal{U}_0^X, \mathcal{U})$

$\quad\quad \|$

$\quad\quad 0$

$\therefore \ (K, \mathcal{U}) = 0 \rightsquigarrow K \in {}^{\perp}\mathcal{U}$ tors

$\Rightarrow$ HW $\ (K, \operatorname{supp}\mathcal{U}) = 0$

(∵) $S \in \operatorname{supp}\mathcal{U}$ $\exists M \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ ここで $\mathcal{U}$

$$\begin{array}{l} M \\ \cup \\ M_0 \\ \cup \\ M_1 \\ \cup \\ 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} M_0 \\ M_1 \end{array}\right] S$$

$S \hookrightarrow \square \in \mathcal{U}$

$\rightsquigarrow 0 \to (K, S) \to (K, \square) = 0$

しかし $K \neq 0$ なら $\exists K \twoheadrightarrow S$ simple $\in \operatorname{supp} K \subset \operatorname{supp} X \subset \operatorname{supp}\mathcal{U}$

でおかしい。

$\therefore K = 0$

同