τ傾理論とねじれ類入門

ー分裂射影対象と広大区間の立場からー

榎本 悠久 (大阪公立大)

予定(キーワード)

1日目

Part I ・分裂射影対象・被覆、関手的有限性

Part II ・(関手的有限)ねじれ類と(τ)傾加群

2日目

Part III ・ねじれ類の(広大)区間, brick ラベル

・分裂射影対象とHasse矢の対応

Part IV ・変異の性質

Part 0. これは何か？

- 私が3年前くらいに、ねじれ類について勉強しながら身内で発表したセミナー「τ-tilting for me」のまとめ
（名大の酒井氏・斉藤氏・東大の行田氏に感謝）
（いくつかは [E-酒井, ICE-closed …] の共同研究にもとづく）

- 内容：ねじれ類・τ傾理論周辺の
$\boxed{\text{重要な論文たちの結果}}$ を、
「自分が分かりやすいように」
解釈（なおし（多くを）別証明を与えたもの。

Tool
1. 分裂射影対象 [Auslander-Smalø, 1980]
2. (広大)区間 [浅井-Pfeifer, 2022]
[Demonet-伊山-Reading-Reiten-Thomas 2023] [E-酒井, 2021]

- [足立-伊山-Reiten], [Jasso]
- [Demonet-伊山-Jasso], [Smalø]
- [Marks-Šťovíček], [浅井], …

ねらい

1. 多くの結果が、Tool を使った分かりやすい解釈・証明があるが、あまり知られていなさそうなので布教したい
2. 加群圏の部分圏を調べる理論の入門。

注意

(知ってる人向け)

- 「加群圏の部分圏」という立場に特化した見方・手法なので、三角圏、とくに (2-)silting の言語は使わない。
- 多元環の表現論のキソは仮定 (AR theory、AR quiver)
  (傾加群 tilting、ねじれ類 torsion class は仮定しないが、[ASS] でみたことあるとより良い)
- 時間の関係で扱わないトピック多数。
- 簡単な証明は HW として省略

コピペここまで。
以下板書。

設定・記法

- k: field, A: f.d. k-alg.
- $\mathrm{mod}\,A$: f.g. 右 moduleの cat.

  $\cup$

  $\mathrm{proj}\,A :=$ ―― proj ――

  $\mathrm{inj}\,A :=$ ―― inj ――.

  $D := \mathrm{Hom}_k(-, k)$

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$ というと

  $\mathcal{C}$: full subcat で, isom & summand で閉じる. 直和とる

- $M \in \mathrm{mod}\,A$

  $\rightsquigarrow \mathrm{add}\,M := \{ N \in \mathrm{mod}\,A \mid N \oplus M^n \}$

- $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$ 直既約

  $\longrightarrow \mathrm{ind}\,\mathcal{C} := \{ X \in \mathcal{C} \mid X : \text{indecomposable} \}/\cong$

- $|\mathcal{C}| := |\mathrm{ind}\,\mathcal{C}|$ ← コスウ

  $|M| := |\mathrm{add}\,M|$

  $= |\{ M\text{の indec summand} \}/\cong|$.

Part I

I.1. (相対) 射影対象

Recall $\mathrm{mod}\,A \ni P$: proj は次と同値

(1) $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathrm{mod}\,A) = 0$.

proj obj

(2) $\forall M \twoheadrightarrow P$: surj が split する

split proj

(retraction)

さらに、A_A : progen は

(3) $\mathrm{mod}\,A \subseteq \mathrm{Fac}\,A_A$ $(=)$

cover

$\left(\mathrm{Fac}\,X := \{ M \in \mathrm{mod}\,A \mid \exists X^{\oplus n} \twoheadrightarrow M \} \right)$

（つまり $\forall M \ \exists A^n \twoheadrightarrow M$）.

minimal cover

さらに、$P \oplus A$ について、$\mathrm{mod}\,A \subseteq \mathrm{Fac}\,P$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{add}\,P = \mathrm{add}\,A$.

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$. (射影対象)

(1) $P \in \mathcal{C}$: (Ext-) proj obj

$:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^1_A(P, \mathcal{C}) = 0$

(2) $P \in \mathcal{C}$: ~~split proj obj~~ (分裂射影対象) sp-proj

$:\Longleftrightarrow$ $\forall\ M \twoheadrightarrow P$: surj
$M \in \mathcal{C}$ が split.

(3) $P(\mathcal{C}) := \{\text{proj obj in } \mathcal{C}\}$
$\cup|$
$P_0(\mathcal{C}) := \{\text{sp-proj obj in } \mathcal{C}\}$

if $\mathcal{C}$: extension-closed.
($:\Longleftrightarrow$ $\forall\ 0 \to L \to M \to N \to 0$: ex,
$L, N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$) HW

<u>Rem</u>
($\mathcal{C}$ のみからは決まらない!)

<u>Ex</u> $P(\mathrm{mod} A) = P_0(\mathrm{mod} A) = \mathrm{proj}\, A$

<u>Ex</u> $A = k(1 \leftarrow 2)$

mod A :

$$\begin{tikzcd} & {\substack{2\\1}} \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll, dotted] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$

$P(\mathcal{C}) = {\substack{2\\1}}, 2.$
$\cup \neq$
$P_0(\mathcal{C}) = {\substack{2\\1}}.$

(${\substack{2\\1}} \twoheadrightarrow 2$: surj より,
2 : sp-proj でない)

Def $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{mod} A$, ext-closed とする.

(1) $\mathcal{E}$ has enough proj

$:\Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{E}, \exists$ s.e.s.

$$0 \to \underset{\mathcal{E}}{\underset{\cap}{C'}} \to \underset{\mathcal{P}(\mathcal{E})}{\underset{\cap}{P_0}} \to C \to 0 \quad : \text{ex.}$$

(2) $P \in \mathcal{E}$: progenerator

$:\Longleftrightarrow \mathcal{E}$: enough proj かつ

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \operatorname{add} P.$$

Ex [E]

$|\mathcal{E}| < \infty \Rightarrow \mathcal{E}$: enough proj

(progen もつ)

Prop $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{mod} A$ が kernel ext-closed

(i.e., $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{E}$ $\forall C_1 \xrightarrow{f} C_2$,

$\operatorname{Ker} f \in \mathcal{E}$)

とすると. $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{E})$

(:) $(\supseteq)$ OK

$(\subseteq)$ $\forall P \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$. $C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$: surj.

$\rightsquigarrow \operatorname{Ker} \pi \in \mathcal{E}$

$\rightsquigarrow \quad 0 \to \ker\pi \to C \xrightarrow[\pi]{} P \to 0$: ex

$\ker\pi \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Ext}^1_A(P, \ker\pi) = 0$ より split

$\therefore$ π is retraction. $\square$.

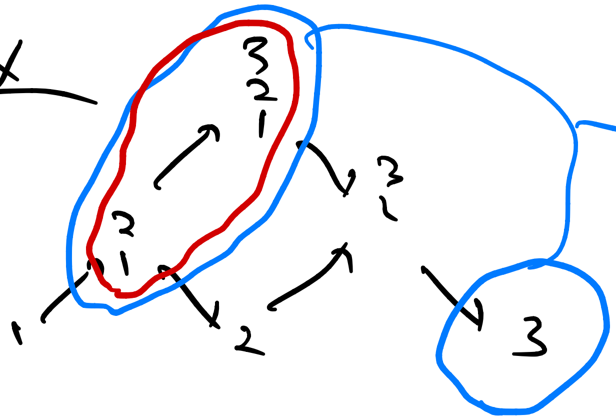
(Ex torf, wide について kernel, ext-closed)

Fun Fact (HW)

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$, ext-closed, enough proj とする.

$\mathcal{P}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}$: epi-ker で閉じる

Ex



$\mathcal{C}$: kernel, ext-closed. (wide)

$\bigcirc = \mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

$(1 \leftarrow 2 \leftarrow 3)$

Cover

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$ (とする)

(1) $M \in \mathcal{C}$: cover of $\mathcal{C}$

$:\iff \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Fac}\, M$

$\iff \forall C \in \mathcal{C},\ \exists M^n \twoheadrightarrow C$

(2) $M \in \mathcal{C}$: <u>minimal cover</u>

:$\iff$ (i) $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} M$

(ii) $N \oplus M$, $\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Fac} N$

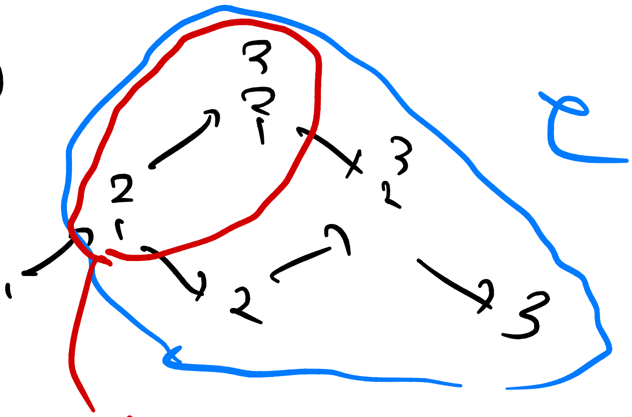
$\implies \operatorname{add} N = \operatorname{add} M$.

[つまり M から indec を1つでも へらすと cover でない！]

Ex

(1) A_A は $\operatorname{mod} A$ の minimal cover.

(2)



min. cover $= P_0(\mathcal{C})$

Rem M : $\mathcal{C}$ の cover

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$ は min. cover をもつ。

しかし unique か？？

Thm [Auslander-Smalø]

$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{mod} A$: cover M をもつとき，

$M \in \mathcal{C}$: min cover

$\Longleftrightarrow \operatorname{add} M = \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

[つまり sp-proj をあつめたの
$=$ min cover]

☹ <u>Obs</u> $M \in \mathcal{C}$: cover

$\Rightarrow \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{add} M$

(☺ $\forall P$: sp-proj. $\exists\ M^{\oplus} \twoheadrightarrow P$
$\because$ $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ $\quad M^{\oplus} \in \mathcal{C}$ $\quad P \in \mathcal{C}$)

$\rightsquigarrow$ split.

($\Leftarrow$) Obs より OK.

($\Rightarrow$) Obs より $\operatorname{add} M \supseteq \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$

等しくないとして ハイリ法 <u>basic</u>

$\therefore\ M = X \oplus Y \quad X$: indec.

$X \notin \mathcal{P}_0(\mathcal{C})$, $\quad X \in \mathcal{C}$.

• X : not sp-proj. $\therefore \exists\ C \twoheadrightarrow X$: non retr
cover

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[r, two heads] & X \\ M^n = X^n \oplus Y^n \arrow[ur, "\not\exists"] \arrow[urr, "\not\exists"'] & & \end{tikzcd}$$

φ : surj

<u>not retr</u>

$$\varphi : \begin{array}{c} X^n \xrightarrow{[f_1, \cdots, f_n]} X \\ \oplus \\ Y^n \xrightarrow{\quad g \quad} \end{array}$$

: surj, non-retr

∴ index non-retr

⟹ φ : radical.

$f_i : X \to X$: rad $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(X)$.

⇝ X を 左 $\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(X)$-mod とみると,

$$X = (\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_{\mathcal{E}}(X)) \cdot X + \sum \{ \mathrm{Im}\, h \mid Y \to X \}$$

⇝ 中山 より $X = \sum \{ \text{——} \}$,

⇝ $\exists\ \underline{Y^m \to X}$: surj.

⇝ Y が $\mathcal{C}$ を cover する

$$\mathcal{C} \ni \quad \mathcal{C} \rightsquigarrow M \text{ の minimal 性に反する.}$$

$$(Y^m)^n \oplus Y^n \to \underset{\sim}{X^n} \oplus Y^n \to \mathcal{C}$$

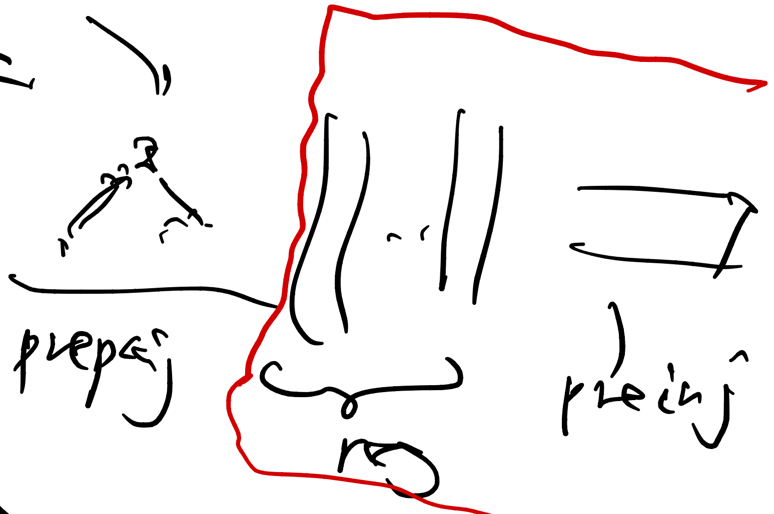
□

Rem cover をもたないことはある!

($|\mathcal{C}| < \infty \Rightarrow \mathcal{C}$: cover もつ

$|\mathcal{C}| = \infty$ とき、——

I.2. 関手的有限性



$\mathcal{C}$
cover をもたない
$\mathcal{T}_0(\mathcal{C}) = D$

Def

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A \ni X$

(1) $X \xrightarrow{f} C^X$: left $\mathcal{C}$-approximation
左近似

:$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \circ\ C^X \in \mathcal{C} \\ \circ\ {}^\forall X \longrightarrow C \in \mathcal{C} \\ \quad f \downarrow \quad \circlearrowleft \ \nearrow \exists \\ \quad C^X \end{cases}$

(2) $f : X \to C^X$: left $\underline{\text{minimal}}$ $\mathcal{C}$-approx

:$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$-approx かつ

left min ($\Longleftrightarrow$ $\begin{array}{c} X \xrightarrow{f} C^X \\ \searrow_f \circlearrowleft \downarrow \varphi \\ C^X \end{array}$ $\Rightarrow \varphi$: isom)

(3) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: 共変有限

(covariantly finite)

cov. fin.

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall X \in \mathrm{mod}\,A$ が左 $\mathcal{C}$ approx もつ.

Dually for 有 $\mathcal{C}$-approx $C_X \to X$
min.

反変有限
(contravariantly finite)
cont. fin.

(4) $\mathcal{C}$: functorially finite
(fun. fin)

:$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: cov. fin & cont. fin

$\exists\, C_X \to {}^{\forall}X \to {}^{\exists}C^X$.

Fact

(1) HW $|\mathcal{C}| < \infty$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$: fun. fin.

(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$: fun. fin (ext-closed)

$\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ は AR 列 をもつ.} \\ \mathcal{C} \text{ is enough proj \& inj} \end{array}\right)$

(3) $\exists\, X \to C^X$: $\mathcal{C}$-approx
HW
$\Longrightarrow \exists\, X \to (C^X)'$: min. $\mathcal{C}$-approx.

Ex

$\mathrm{inj}\,A \subseteq \mathrm{mod}\,A$: fun. fin. で.

$X \to I^X$: left min $\mathrm{inj}\,A$ - approx

//

X の inj hull.

Thm [AS] $\mathcal{C}$: fin. 固ぢている.

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: TFAE

(1) $\mathcal{C}$ が cover もつ

(2) A_A が 左 $\mathcal{C}$ -approx もつ.

(とくに $\mathcal{C}$: cov. fin $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$: cover もつ)

さらに, $A \to C^A$: left min $\mathcal{C}$-approx

$\rightsquigarrow$ C^A が $\mathcal{C}$ の min. cover,

($\because$ $\mathrm{add}\, C^A = P_0(\mathcal{C})$) $\square$

(証) (2) $\Rightarrow$ (1)

$A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx とる.

⇝ C^A は $\mathcal{C}$ の cover.

$$\left(\forall C \in \mathcal{C}, \quad \begin{tikzcd} A^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \\ (C^A)^n \arrow[ur, dashed, "\exists \varphi"'] & \end{tikzcd} \text{approx} \right)$$

(1) ⇒ (2).

$\underline{M} \in \mathcal{C}$: cover とる.

$A \longrightarrow M^A$: left $(\mathrm{add} M)$-approx とる.

は $\mathcal{C}$-approx でもある.

$$\left(\begin{tikzcd} \forall A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "\exists : \mathrm{proj}"] & C \in \mathcal{C} \\ M^A \arrow[r, dashed] & M^n \arrow[u, "\exists\ \mathrm{cover}"'] \end{tikzcd} \right)$$

さらに以降

$M \in \mathcal{C}$: min cover とる.

$f : A \longrightarrow M^A$: left min $(\mathrm{add} M)$-approx

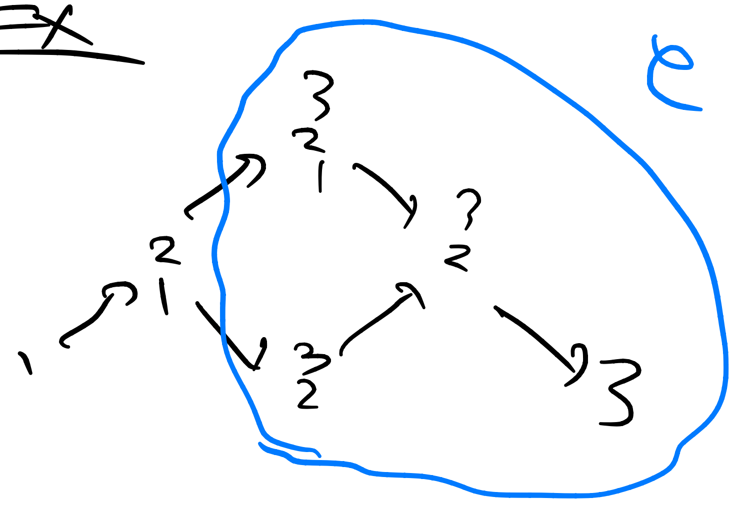
⇝ (1)⇒(2) より f : left $\underline{\underline{\min}}$ $\mathcal{C}$-approx.

一方 (2)⇒(1) より M^A は $\mathcal{C}$ の cover.

$M^A \in \mathrm{add} M$. ⇝ M a minimal 仮定より

$\operatorname{add} M = \operatorname{add} M^{A}$. $\square$

<u>Ex</u>



$\therefore$ left min $\mathcal{E}$-approx

$P(1)$: $1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$

$P(2)$: $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$

$\oplus$ $P(3)$: $\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$

$A \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)^{\oplus 3} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

$\therefore$ left min $\mathcal{E}$-approx

$\therefore \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} = P_0(\mathcal{E})$.

「sp-proj = min cover は A の left min approx である」

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: <u>image-closed</u>

$:\Longleftrightarrow \forall\, C_1 \xrightarrow[f]{} C_2$, $C_1 \in \mathcal{C}$, $C_2 \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f \in \mathcal{C}$.

(<u>Ex</u> tors, torf, wide)

Thm [AS]

$\mathcal{C}$: image-closed とき, TFAE

(1) $\mathcal{C}$: cov. fin.

(2) $\mathcal{C}$: cover もつ

☺ <u>(1) $\Rightarrow$ (2)</u>

$\mathcal{C}$: cov. fin なら

$\exists\, A \to C^A$: left $\mathcal{C}$-approx

cover なのをいきなった

<u>(2) $\Rightarrow$ (1)</u> むズイ!!

$\forall\, X \in \mathrm{mod}\,A$.

$\leadsto \exists\ A^n \twoheadrightarrow X$: surj

∃ left $\mathcal{C}$-approx by さっき、

\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, dashed] \\ C^{A^n} \arrow[r, dashed] & ? \end{tikzcd}

p.o.! $\mathcal{C}$-approx ?

・ $C \in \mathcal{C}$ と $\varphi : X \to C$ を

全て動かして

$X \xrightarrow{\prod \varphi_i} \prod_{i\in I} C_i$ をつくる。

$\notin \mathrm{mod}\, A$.

各 $i \in I$ で、

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\varphi_i"] \\ C^{A^n} \arrow[r, dashed, "\exists \psi_i"] & C_i \end{tikzcd}$$

($\because f$: $\mathcal{C}$-approx)

$\underset{\prod}{\leadsto}$

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[dd, "\prod \varphi_i"] \\ C^{A^n} \arrow[r, two heads] \arrow[rrd, "\prod \psi_i"'] & \square \arrow[rd, hook] & \\ & & \prod C_i \end{tikzcd}$$

$\square := \mathrm{Im}\left(\prod \psi_i\right) \in \mathcal{C}$ を示す.

C^{A^n}, C_i は f.d. より

$$\square = C^{A^n} \Big/ \bigcap \ker \psi_i$$

有限に取り直す.

$$= C^{A^n} \Big/ \ker \psi_1 \cap \cdots \ker \psi_n$$

$$= \mathrm{Im}\Big(C^{A^n} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_n}}_{\in \mathcal{C}} \Big)$$

$\in \mathcal{C}$ by

$\mathcal{C}$: im-closed.

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, two heads, "\mathrm{surj}"] \arrow[d] & X \arrow[dl, dashed, "g\ \exists"'] \arrow[d, "\prod \psi_i"] \\
C^{A^n} \arrow[r, two heads] & \square \arrow[r, hook] & \prod C_i
\end{tikzcd}$$

$\square \in \mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ $g: X_a$ left $\mathcal{C}$-approx.

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & C \\ \square \arrow[r] & \prod C_i \arrow[u, "\exists"'] \end{tikzcd} \right)$$

$\mathcal{C} \ni \square$

∎

<u>Def</u> $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\,A$,

$\mathcal{C}$: wide subcat
(広大)

$:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$: ker, coker, ext で"
とじる.

($\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$: abelian
(image-closed))

IKE-closed

<u>Cor</u> $\mathcal{C}$: image, kernel, ext-closed とする.
(e.g. wide, torf)

TFAE (1) $\mathcal{C}$: cov. fin

(2) $\mathcal{C}$: cover をつ

(3) $\mathcal{C}$: progen をもつ

このとき、 $\mathcal{C}$ の min cover

$= \mathcal{C}$ の progen.

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) OK

(3) $\Longrightarrow$ (2) 明らか。

(P : proj $\Longrightarrow$ $\forall X$ $P^n \xrightarrow{\theta} X \to 0$)

$0 \to \square \to$

$\rightsquigarrow$ P is cover.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\mathcal{C}$ の min cover P をとる

$\rightsquigarrow$ $P \in \mathcal{P}_0(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C})$ $\boxed{=}$

$\rightsquigarrow$ $\forall X \in \mathcal{C}$. $\exists$

$$0 \to X' \to P^n \xrightarrow{\theta} X \to 0$$

θ cover.

$X' \in \mathcal{C}$ — $\mathcal{C}$: kerr-closed

$\therefore$ P は $\mathcal{C}$ の progen. $\square$

Key Cor $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{mod}\, A$: wide subcat.

TFAE
(1) $\mathcal{W}$: cov. fin
(2) $\mathcal{W}$: cont. fin
(3) $\mathcal{W}$: fun. fin.
(4) $\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B$ $\ {}^{\exists} B$: f.d. alg.

(証) さっきより

(1) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$: cover もつ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{W}$: progen P もつ

$\Uparrow$ 　　　　　　　　　$\Swarrow$ 実際 ($B := \mathrm{End}(P)$)

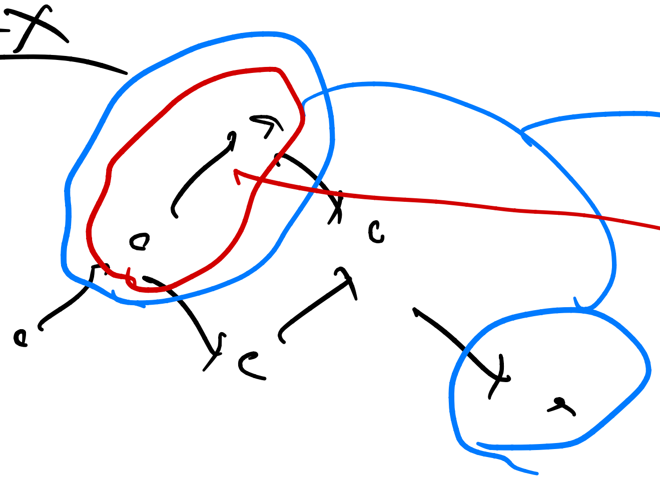
B は mod B の cover

$\Downarrow$ 　　　　　　$\mathcal{W} \simeq \mathrm{mod}\, B$

□ : $\mathcal{W}$ の cover 　　　$\Downarrow$ 　　$\Downarrow$
　　　　　　　　　　　　□ $\longleftarrow\!\shortmid$ B

(4) では 左右対称 より (2), (3) も同値. □

Ex



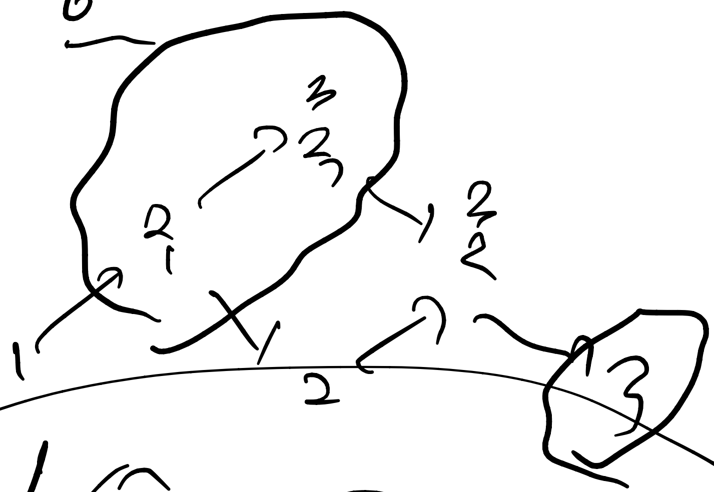
$\mathcal{W}$: wide,

progen of $\mathcal{W}$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{W} \simeq \operatorname{mod} k(1 \leftarrow 2)$

Serre $\dashv$ wide $\qquad \mathcal{W} \hookrightarrow \operatorname{mod} A$ (wide)

Sub/quot $\qquad$ Ker coker $\qquad$ exact, surj 像?



15:00 —

Part II. ねじれ類の付加群

II.1. Tilting vs tors

Def $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \operatorname{mod} A$.

$$\mathcal{C} * \mathcal{D} := \left\{ X \in \operatorname{mod} A \;\middle|\; \exists\, 0 \to \underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{C}} \to X \to \underset{\mathcal{D}}{\underset{\cap}{D}} \to 0 \right\}$$: ex.

Def $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$: mod A の subcat のペア が
ねじれ対 (torsion pair)

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & \operatorname{Hom}_A(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0 \\ (2) & \operatorname{mod} A = \mathcal{T} * \mathcal{F} \end{cases}$$

このとき $\mathcal{T}$: ねじれ類 (torsion class) $\boxed{\text{tors}}$

$\mathcal{F}$: —— 自由類 (torsion-free class) $\boxed{\text{torf}}$

と呼ぶ

「tors. pair = mod A の直交分解」

$\rightsquigarrow \forall X \in \mathrm{mod}\,A.$

$\exists$! HW

$$0 \to tX \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} fX \to 0$$

$$tX \in \mathcal{T}, \quad fX \in \mathcal{F}$$

HW i : right min $\mathcal{T}$-approx

p : left min $\mathcal{F}$-approx.

よって. $\mathcal{T}$: cont. fin.

$\mathcal{F}$: cov. fin.

$\mathcal{T}$

<u>Prop</u> HW $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\,A$: tors

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$: ext, Fac - closed.

$\left(\Longleftrightarrow \forall T \twoheadrightarrow M, \; T \in \mathcal{T} \Rightarrow M \in \mathcal{T} \right)$

このとき

$$\mathcal{T}^{\perp} := \{ X \in \mathrm{mod}\,A \mid (\mathcal{T}, X) = 0 \}$$

$\rightsquigarrow (\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\perp})$: tors. pair.

Def

$\mathrm{tors}\,A := \{\ \mathrm{mod}\,A$ の tors たち $\}$

$\mathrm{torf}\,A := \{\ $ ―― torf ―― $\ \}$

⇝ 包含により poset.

$$\mathrm{tors}\,A \underset{{}^{\perp}(-)}{\overset{(-)^{\perp}}{\rightleftarrows}} \mathrm{torf}\,A \ : \ \underline{\underline{\text{bij}}}$$

(anti-iso of posets)

Ex

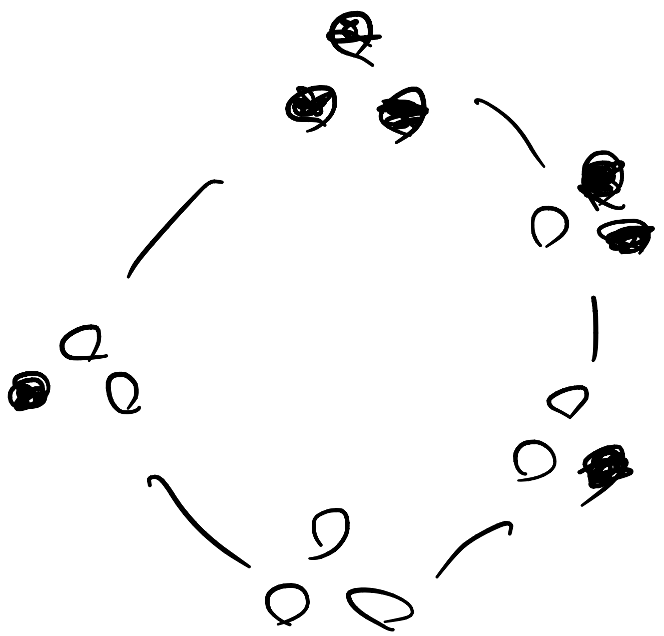
$A = k(1 \leftarrow 2)$

⇝ mod A:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & {\substack{2\\1}} \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 2 \end{tikzcd}$$

5コ

⇝ tors A:



Part II の系

Thm $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}A$ 次が成立

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin ($\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$: cov. fin)

$\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathcal{T}$ s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$.

(2) $\mathcal{T}$ は enough inj で、

$\{\text{inj obj}\} =: I(\mathcal{T}) = \mathrm{add}\ \underset{\sim}{t}(DA)$.

$\updownarrow$ dual

$P(\mathcal{T})$

$0 \to tX \hookrightarrow X \to fX \to 0$

∎

(1) $\mathcal{T}$: fun. fin $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$: cov. fin.

$\Updownarrow$ [AS]

$\mathcal{T}$ は Fac-closed より image-closed.

$\underline{\mathcal{T} \text{ が cover 持つ}}$

$\Updownarrow$

$\exists M \in \mathcal{T},\ \mathcal{T} \subseteq \mathrm{Fac}\,M$.

$\Downarrow$ $\mathcal{T}$: Fac-closed.

$\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,M$

(2) $\mathcal{T}$ は conf. fin ではあった

($tX \hookrightarrow X$)

左 の Cor の dual より

$\mathcal{T}$ は inj cogen をもつ.

$\rightsquigarrow$

$\underline{t(DA)} \hookrightarrow DA$: min right $\mathcal{T}$-approx. より

$\mathcal{T}$ は inj cogen $t(DA)$ をもつ. □

Rem $\mathcal{T}$ は enough proj と限らない.

$P(\mathcal{T}) = \{0\}$ もありえる

いつ enough proj ?. ← fun. fin のとき!

fun. fin. tors の proj を決定する!

Thm $\mathcal{T} \in \operatorname{tors} A$, fun. fin とする

$A \xrightarrow{f} T_0^A$: left min $\mathcal{T}$-approx

$\Rightarrow$ $A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$: ex とする. と.

(1) $\mathrm{add}\, T_0^A = P_0(\mathcal{T})$,

$T_1^A \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$

(2) $\mathrm{ind}\, T_0^A \cap \mathrm{ind}\, T_1^A = \emptyset$.

(3) $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \mathrm{add}(T_0^A \oplus T_1^A)$. (以下.

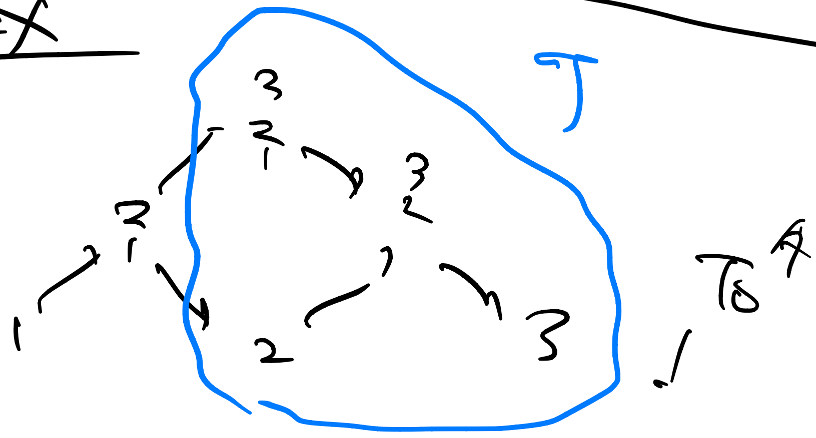
$T_0^A \oplus T_1^A$ は $\mathcal{T}$ の progen. になる 」

「 $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = T_0^A \sqcup T_1^A$

T_0^A: $\mathcal{T}$ の sp-proj

T_1^A: $\mathcal{T}$ の proj, not sp-proj

Ex



$$1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

$$\oplus \quad \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$A \to T_0^A \to T_1^A \to 0$$

$\therefore\ P(T) = \underbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix},\ 2}_{\text{sp-proj}},\ \underbrace{\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}_{\text{proj}}$, not sp-proj.

12 (1) $\operatorname{add} T_0^A = P_0(T)$ は OK.

$$0 \to \operatorname{Inf} \oplus T_0^A \to T_1^A \to 0$$

left T-app ($1+w$)

T_0^A: sp-proj

$(-, T)$ すると、

$$(T_0^A, T) \oplus (\operatorname{Inf}, T) \to (T_1^A, T) \to \operatorname{Ext}^1(T_0^A, T) = 0$$

surj

$\therefore\ T_1^A \in P(T)$

(2) $\exists\, M \in \operatorname{ind} T_0^A \cap \operatorname{ind} T_1^A$ とする.

$\rightsquigarrow$ M : sp-proj in T.

$\rightsquigarrow$ $T_0^A \twoheadrightarrow T_1^A \overset{\text{proj}}{\twoheadrightarrow} M$: split する.

T

(なし、次のLemより

$T_0^A \to T_1^A$: radical.

$\rightsquigarrow T_0^A \twoheadrightarrow T_1^A \twoheadrightarrow M$: radical

not retr.

ハジュン.

Lem (HW)

$(0 \to) L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ について

f : left min $\Leftrightarrow$ $g \in$ rad.

(3) 直接 $T_0^A \oplus T_1^A$: $\mathcal{T}$ の progen を示す、

$\forall X \in \mathcal{T}$, T_0^A : $\mathcal{T}$ の cover より

$\exists$ left $\mathcal{T}$-app.

$$A^n \to (T_0^A)^n \to (T_1^A)^n \to 0$$

(*) $\downarrow \exists$

$\exists$

$$0 \to K \to (T_0^A)^{\oplus m} \to X \to 0 \text{ : ex}$$

(*) は、ここが surj より

push out になる!

$\rightsquigarrow$ つぶして

$$(T_0^A)^n \longrightarrow (T_0^A)^m \oplus (T_1^A)^n \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad : \text{ex.}$$

$$\Downarrow$$

~~enough proj が~~

∴ $T_0^A \oplus T_1^A$: progen of $\mathcal{T}$

が作れる. $\square$

tilt. mod

Def $T \in \operatorname{mod} A$.

(1) T : partial tilting module

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \circ\ \operatorname{pd} T \leq 1 \\ \circ\ \operatorname{Ext}_A^1(T,T) = 0. \end{cases}$$

(2) T : tilting module

傾加群

$:\Longleftrightarrow$ T : part. tilt かつ

$$\exists\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow \underbrace{T_0 \longrightarrow T_1}_{\text{add } T \text{ に入る}} \longrightarrow 0 \ : \text{ex}$$

$\lrcorner$

<u>Prop</u> T: tilt. とすると、

(1) $\mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} := \left\{ X \in \mathrm{mod}A \;\middle|\; \mathrm{Ext}^1(T, X) = 0 \right\}$

(2) $\mathrm{Fac}\,T$ は tors

(3) ―――― progen T をもつ。」

(証) (1) $\exists\ 0 \to A \to T_0 \to T_1 \to 0$: ex.

left $\underline{(T^{\perp_1})}$-approx が存在する (HW)

⇝ $T^{\perp_1}$ は cover T_0 を持つ。

∴ $T^{\perp_1} \subseteq \mathrm{Fac}\,T$.

逆は $T^{\perp_1}$ は tors より $\supseteq T$ OK

(2) HW

(3) $T \in \mathrm{Fac}\,T$ が progen 示す。

$\forall X \in \mathrm{Fac}\,T$, $\underline{\text{right } (\mathrm{add}\,T)\text{-approx}} = \text{surj}$.

$$\begin{tikzcd} T_X \arrow[rr, two heads] & & X \\ & \hat{T} \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \left[0 \to K \to T_X \to X \to 0 \right]$

に $(T, -)$ すると、

$$(T, T_X) \twoheadrightarrow (T, X) \to (T, K) \to (T, T_X)$$

approx より surj ∴ $K \in T^{\perp_1} = \mathrm{Fac}\,T$.

$\left(T \in P(\mathrm{Fac}\,T) \text{ は } \mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} \text{ より 従う} \right)$

$(T, T_X) = 0$.

Def $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$: faithful

$:\Longleftrightarrow \mathrm{ann}\,\mathcal{T} = 0$

$\left(\mathrm{ann}\,\mathcal{T} = \{ a \in A \mid \forall T \in \mathcal{T} \ \ Ta = 0 \} \right)$

$\Longleftrightarrow DA \in \mathcal{T}$.

HW ┘

Thm $\mathcal{T} \in \mathrm{tors}\,A$. TFAE.

(1) $\exists T$: tilt s.t. $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\,T$.

(2) $\mathcal{T}$: fun. fin & faithful. ┘

証 $(1) \Rightarrow (2)$

$\mathrm{Fac}\,T$: cover Tもつ

$\Rightarrow$ fun. fin. tors.

$\mathrm{Fac}\,T = T^{\perp_1} \ni DA$

$\therefore$ faithful.

$(2) \Rightarrow (1)$

T : fun. fin tors

$\rightsquigarrow \exists\ A \xrightarrow{f} T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$ ~~left~~ min T-approx

$\rightsquigarrow$ T : faithful より HW f : inj

$\rightsquigarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$ s.e.s.

$\rightsquigarrow T = \mathrm{Fac}\,T_0^A = \mathrm{Fac}(T_0^A \oplus T_1^A)$

$T := T_0^A \oplus T_1^A$: tilt?

$\because$ T の progen より

${}^1(T_1, T) = 0$.

〜, pd $T \leq 1$ 示す OK.

T: faithful より $DA \in \mathcal{T}$ に
注意して.

$\forall X \in \mathrm{mod}\, A$,

$$\mathrm{Ext}^2(T, X) \cong \mathrm{Ext}^1(T, \Sigma X) = 0$$

$$\left(0 \to X \to I^X \to \Sigma X \to 0 \right)$$

inj

$\mathcal{T}$ $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}$

$\therefore$ pd $T \leq 1$ $\quad T \in \mathcal{P}(\mathcal{T})$ $\square$.

まとめ : inj

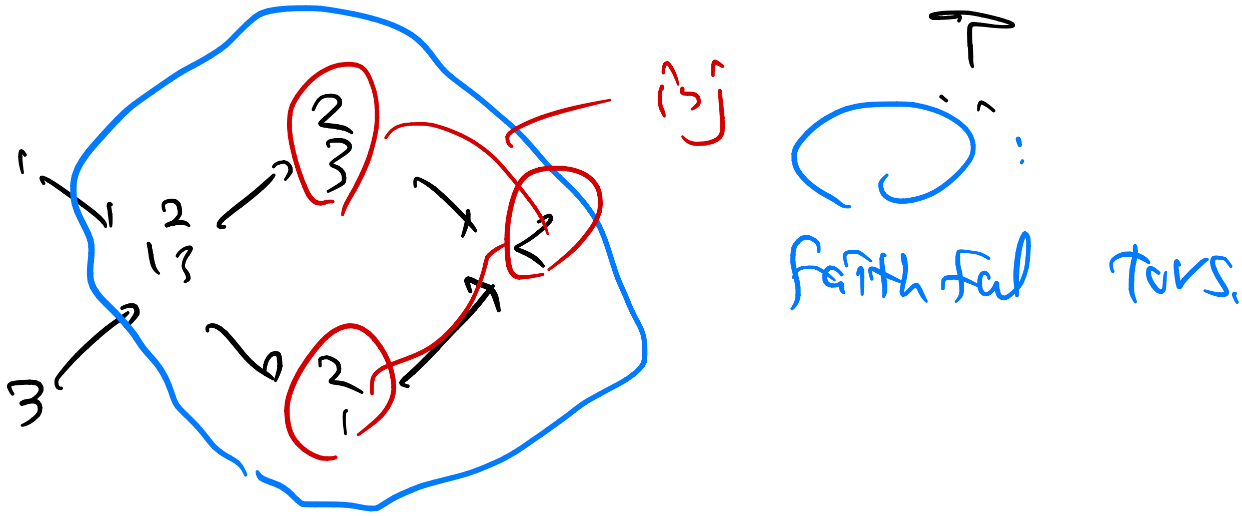
$$\{\text{tilt}\} \underset{\text{progen.}}{\overset{\mathrm{Fac}}{\rightleftarrows}} \{\text{fun. fin. faith. tors}\}$$

?. おきたい

$\cap$ $\quad\quad$ $\cap$

$$\{ ?. \} \xleftrightarrow{?} \{\text{fun. fin. tors}\}$$

Ex



$$k(1 \leftarrow 2 \rightarrow 3)$$

$$1 \longrightarrow {}^{\;2}_{1\,3} \longrightarrow {}^2_3 \longrightarrow 0$$

$${}^{\;2}_{1\,3} = {}^{\;2}_{1\,3}$$

$$\oplus \quad 3 \longrightarrow {}^{\;2}_{1\,3} \longrightarrow {}^2_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \to A \;\cancel{\to}\; T_0^A \longrightarrow T_1^A \longrightarrow 0$$

$$P(T) = \underbrace{{}^{\;2}_{1\,3}}_{\text{sp-proj}},\ \underbrace{{}^2_1,\ {}^2_3}_{\substack{\text{proj} \\ \text{not sp-proj}}} \;:\ \text{tilting}$$

II.2. τ-tilting

Prop [Auslander Smalø]

$X, Y \in \operatorname{mod} A$. TFAE.

(1) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau Y) = 0$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_A(Y, \mathrm{Fac}\,X) = 0$.

AR formula

$$\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) = D\overline{\mathrm{Hom}}(X, \tau Y)$$

(1)⇒(2)

$X' \in \mathrm{Fac}\,X$ について.

$\exists\, X^n \twoheadrightarrow X'$.

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to (X', \tau Y) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{(X^n, \tau Y)} : \text{ex}$$

∴ $\mathrm{Hom}(X', \tau Y) = 0$.

∴ ARより $\mathrm{Ext}^1(Y, X') = 0$.

(2)⇒(1) $f : X \to \tau Y$ をとる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & \tau Y \\ & \mathrm{Im} f \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

(2)より

$\mathrm{Ext}^1(Y, \mathrm{Im} f) = 0$

∴ ARより $\overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Im} f, \tau Y) = 0$.

$$\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} \mathrm{Im} f \arrow[r, hook] \arrow[d, "\oplus", "\text{inj hull.}"'] & CY \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Im} f \arrow[dl, "\oplus"'] \arrow[d, "\oplus"] \arrow[dr, hook, "\oplus"] & \\ I \arrow[r, "\exists"'] & CY \arrow[r, "\oplus", "\exists"'] & I \end{tikzcd}$$

$\exists$ ($\because$ I : inj.)

$\rightsquigarrow$ inj hull : left min より

$I \xrightarrow[\text{sec}]{\oplus} CY \xrightarrow[\text{retr.}]{\oplus} I$: isom. $\Rightarrow$ $I \oplus CY$.

$\rightsquigarrow$ しかし $\underset{\sim}{CY}$: inj summand をもたない

$\rightsquigarrow$ $I = 0$.

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im} f = 0$

$\rightsquigarrow$ $f = 0$. $\square$.

Def M : τ-rigid

$:\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}(M, \tau M) = 0$.

$\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, \mathrm{Fac} M) = 0$.

よって

"Def" $M \in \mathrm{mod} A$: 台τ傾~~加群~~

(~~support~~ τ-tilting
$s\tau$-tilt)

$:\Longleftrightarrow$ (1) M : τ-rigid

(2) $M \in \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann} M$: として

tilting module. 」,

$s\tau\text{-tilt} A := \{ s.\tau\text{-tilt. mod} \}$

~~$M \sim N$ ($:\Longleftrightarrow \mathrm{add} M = \mathrm{add} N$.)~~

Prop (HW)

M : $\underline{\tau\text{-rigid}} \Rightarrow \mathrm{Fac} M$: tors. 」

で($^1(M, \mathrm{Fac} M) = 0$ を使う.)

Thm 次の対応がある.

$$\begin{array}{ccc} s\tau\text{-tilt}\, A & \rightleftarrows & \text{f-tors}\, A \subset \text{tors}\, A \\ & & \| \\ & & \{\text{fun. fin. tors たち}\} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Fac}\, M \\ \mathcal{T} \text{ の progen.} & \longleftarrow & \mathcal{T} \end{array}$$

[Adachi-Iyama-Reiten]

Well-defined?

$\longrightarrow$ は OK.

$\longleftarrow$ は, $\mathcal{T} \in$ f-tors A

$\leadsto$ $\mathcal{T}$ は progen M をもつ.

$\leadsto$ $\mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M$,

$\mathrm{Ext}^1(M, \underset{\mathrm{Fac}\, M}{\mathcal{T}}) = 0 \Longrightarrow M : \tau\text{-rigid}.$

$\mathrm{Fac}\, M = \mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$ とみれる.

$\mathrm{ann}\, \mathcal{T} = \mathrm{ann}\, M$. $(\because \mathcal{T} = \mathrm{Fac}\, M)$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$

: faithful. tors になる

$\rightsquigarrow$ M : faithful. tors の progen
in $\mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$

$\rightsquigarrow$ M : tilting $A/\mathrm{ann}\, M$ - module.

$\therefore$ M : sτ - tilt.

互いに逆はやれば分かる。

$\square$

II.3. Counting argument

Fact. $T \in \mathrm{mod}\, A$: partial tilt

$\Rightarrow$ $|T| \leq |A|$ ← alg の rank.

(等号 $\Leftrightarrow$ T : tilt)

Def $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}\, A$

$\rightsquigarrow \mathrm{supp}\,\mathcal{C} := \left\{ S : \text{simple } A\text{-mod} \;\middle|\; \exists C \in \mathcal{C},\ S \text{ は } C \text{ の組成因子} \right\} / \cong$

(supp$M$ も同じく)

Prop (HW) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{mod}A$ について、

$$|\mathrm{supp}\,\mathcal{C}| = |A/\mathrm{ann}\,\mathcal{C}|$$

よりに。

$\exists\ A \xrightarrow{f} C^A$: left $\mathcal{C}$-approx

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Im} f \cong A/\mathrm{ann}\,\mathcal{C}.$$

Thm TFAE for $M \in \mathrm{mod}A$.

(1) M : sτ-tilting.

(2) (i) M : τ-rigid

(ii) $|M| = |\mathrm{supp}\,M|$

$|M|$ が 十分多い。

☹ M : τ-rigid について

M : sτ-tilt $\Longleftrightarrow$ $M \in \mathrm{mod}\,A/\mathrm{ann}M$: tilt.

(※)

一方、 $\mathrm{Fac}\, M \subsetneq \mathrm{mod}\, A/\mathrm{ann}\, M$

faithful tors.

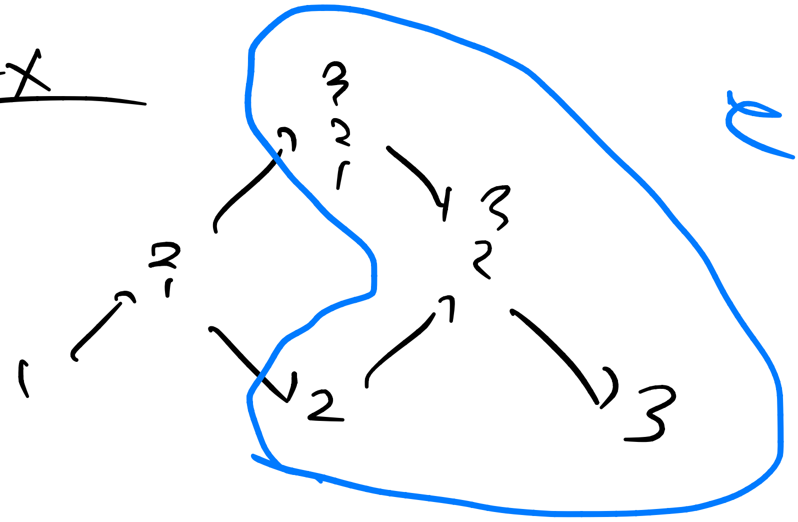
M : τ-rigid $\rightarrow$ 前のギロンより

M : partial tilt over $A/\mathrm{ann}\, M$.

$\therefore$ $(*) \overset{\text{Fact}}{\Longleftarrow}$ $|M| = |A/\mathrm{ann}\, M| = |\mathrm{supp}\, M|$

$\square$

Ex



$\mathcal{C}$: faithful tors.

$M := \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \rightsquigarrow \tau$-rigid.

$|M| = 2$, $|\mathrm{supp}\, M| = 3$.

$M \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$: supp τ-tilting.