線形代数２ (2009) レポート問題 (10/22 に出題) の解答

問１

$f : U \to W$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間の線形写像とする．このとき, $\mathrm{Ker}(f)$ が U の部分ベクトル空間であること, $\mathrm{Im}(f)$ が W の部分ベクトル空間であることを (部分ベクトル空間の定義と線形写像の定義に対して忠実かつ丁寧に) 示せ. [1]

$\mathrm{Ker}(f)$ が U の部分ベクトル空間であることの証明
(i) 勝手な $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と勝手な $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ が成り立つ.
(ii) 勝手な $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}(f)$ が成り立つ.
を確かめればよい.
勝手な $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と勝手な $\alpha \in \mathbb{R}$ をとるとき, f が線形写像であることより $f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u})$ であるが, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ より $\alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha\mathbf{0}_w = \mathbf{0}_W$ である．よって (i) が示された.
勝手な $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}(f)$ をとるとき, f が線形写像であることより $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}')$ であるが, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}(f)$ より $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$ である．よって (ii) が示された.

$\mathrm{Im}(f)$ が U の部分ベクトル空間であることの証明
(i) 勝手な $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(f)$ と勝手な $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(f)$ が成り立つ.
(ii) 勝手な $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathrm{Im}(f)$ に対して $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in \mathrm{Im}(f)$ が成り立つ.
を確かめればよい.
勝手な $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(f)$ をとる．$\mathrm{Im}(f)$ の定義より, ある $\boldsymbol{u} \in U$ が存在して $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{u})$ と書けている．勝手な $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, f が線形写像であることより $\alpha\boldsymbol{w} = \alpha f(\boldsymbol{u}) = f(\alpha\boldsymbol{u})$ が成り立つ．よって, $\alpha\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(f)$ より (i) が成り立つ.
勝手な $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in \mathrm{Im}(f)$ をとる． $\mathrm{Im}(f)$ の定義より, ある $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}' \in U$ が存在して $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{w}' = f(\boldsymbol{u}')$ と書けている．f が線形写像であることより $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}') = f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}')$ が成り立つ．よって, $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in \mathrm{Im}(f)$ より (ii) が成り立つ.

[1] Ker(f), Im(f) は教科書 p35 の記号の通りとする．(直接この問題には役に立たないですが) 余裕があれば教科書のそのあたりも眺めて下さい.

問 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 5 & 18 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する線形写像 (=1 次写像)$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を考える.

(1) $\mathrm{Ker}(f_A)$ と $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元を求めよ. (ヒント: $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元は A のランクである. $\mathrm{Ker}(f_A)$ の次元は教科書の定理 1.6.2 を使ってもよい)

(2) $\mathrm{Ker}(f_A)$ と $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底を与えよ. (ヒント: $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底は A に列の基本変形をほどこすことで自然に得られる. $\mathrm{Ker}(f_A)$ の基底は先学期に訓練した連立次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くことに他ならない)

解答

(1)

A の行による基本変形を行ってみる.

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 5 & 18 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 5 & 18 & 2 \\ 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'
\end{aligned}
$$

行列 A のランクは 2 であるから $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元は 2 である. 次元公式より $\dim\ \mathrm{Ker}(f_A) + \dim \mathrm{Im}(f_A) = 3$ であるから

答え $\mathrm{Ker}(f_A)$ の次元は 1, $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元は 2

(2)

A' を (1) で求めた A の行の基本変形の最終形とするとき,

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f_A) \Longleftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

であるから, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ であるための必要十分条件は連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{16}{11}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{11}x_3 = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである. よって $x_3 = t$ とすると, $x_2 = \frac{1}{11}t$, $x_1 = -\frac{8}{11}t$ となる.
よって, $\mathrm{Ker}(f_A)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$ である.
A の列に関する基本変形を行ってみる.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 1 \\ 5 & 18 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 18 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{11}{2} & 0 \\ 5 & \frac{11}{2} & 0 \\ 4 & -11 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A''$$

よって, $\mathrm{Im}(f_A)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ である.

問 3

$f : U \to W$ を n 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 U から m 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間 W への線形写像とする. U

の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$ をひとつ選ぶ.

$$f(\boldsymbol{u}_1) = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(\boldsymbol{u}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(\boldsymbol{u}_n) = a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m$$

$m \times n$ 行列 $A_f = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ を f **の表現行列** (あるいは f **に対応する行列**) とよぶ（これらについては教科書 p27-p29 を参照のこと）

このことを踏まえて次の問いに答えよ.

(1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + d = 0 \right\}$ は $\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ を基底とするベクトル空間であることを示せ.

(2) $X \in U$ に対して $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ もまた U に入る行列であること及び $f : U \to U$ を $X \in U$ に対して $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と定めたとき f は線形写像であることを (p19-p20 の線形写像の定義に即して) 示せ.

(3) $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$ を計算して f の表現行列 A_f を記せ.

解答

(1)

基底の定義にしたがって

(i) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が一次独立であること

(ii) 勝手なベクトルが $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ の線形結合で書けること

を言えばよい. 線形結合 $\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3$ が $\boldsymbol{0}$ と等しかったとする. このとき, $\begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ を得る. よって (i) が示された.

一方で, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ とすると, $a + d = 0$ より $\boldsymbol{u} = b\boldsymbol{u}_1 + c\boldsymbol{u}_2 + a\boldsymbol{u}_3$ と書ける. よって (ii) が示された.

(2)

まず, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ もまた U に入る行列であることを示す. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は常に U に属することがわかる.

次に f が線形写像であることを確かめる.

(i) 勝手な $X \in U$ と勝手な $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f(\alpha X) = \alpha f(X)$ が成り立つ.

(ii) 勝手な $X, X' \in U$ に対して $f(X + X') = f(X) + f(X')$ が成り立つ.

を確かめればよい. まず,

$$f(\alpha X) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha X - \alpha X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \alpha f(X)$$

より (i) が示される.

また,

$$\begin{aligned} f(X + X') &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (X + X') - (X + X') \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X' - X' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = f(X) + f(X') \end{aligned}$$

である. (ここで行列のかけ算の分配法則を使ったことに注意!) よって (ii) も示された.

(3)

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_U$$

$$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_3$$

$$f(\boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{u}_1$$

よって表現行列 A_f は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

配点

問１は４点 (Ker(f) と Im(f) で２点ずつ). 問２は (1) が２点 (両方できたときのみ), (2) が４点 (Ker(f) と Im(f) で２点ずつ).. 問３は (1) が２点, (2) が４点 (像がに入ることで２点, 線形写像であることを確かめて２点), (3) が４点.

計２０点満点

コメント

必要のない余計なことを確かめている答案も多数見られた. 何が示されるべき本質かということからずれているということで, これらのものはできていないのと同等である. 証明がしっかりできなかった人は何回かノートに写して必ず理解すること!!