

1. [θ の範囲に注意せよ](青山学院大)

t を $0 \leq t \leq \pi$ を満たす実数とし, xy 平面上の放物線

$$C: y = x^2 - 2(2 \sin t)x + \sin t \cos t$$

の頂点を P とおくとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ.
- (2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求めよ.
- (3) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき, 点 P の y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの t の値を求めよ.

2. [見た目に惑わされてはいけない] (中央大)

数列 $\{a_n\}$ を, 条件 $a_1 = 1$ と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + (n-1)! (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. ただし, $0! = 1$ である. また, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) b_1, b_2, b_3 を求めよ. 答えのみ記せば良い.

(2) $\{b_n\}$ の満たすべき漸化式を求めよ. また, $\{b_n\}$ の一般項を求め $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) n を自然数とする. 次の等式を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k = 2^n n! - 1$$

考え方

誘導に乗ることができればどの小問も優しいです. 教科書レベルの問題になります. ただ, (2) に関しては, $b_n = \frac{a_n}{n!}$ を b_n の式だけで表したいので a_{n+1} の漸化式を両辺 $(n+1)!$ で割り算すれば b_n の階差数列になります.

解

$$(1) \quad b_1 = \frac{a_1}{1!} = 1$$

$$b_2 = \frac{a_2}{2!} = \frac{2 \cdot a_1 + 0!}{2 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$b_3 = \frac{a_3}{3!} = \frac{3 \cdot a_2 + 1!}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{3} \dots \dots (\text{答え})$$

(2) $a_{n+1} = (n+1)a_n + (n-1)!$ の両辺を $(n+1)!$ で割ることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 1) \dots \dots (\text{答え})$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \left[\frac{1}{k} \right]_1^n \\ &= 1 - \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 2 - \frac{1}{n} (n \geq 1) \end{aligned}$$

これは, $n=1$ のときも成立する.

$$\therefore a_n = \left(2 - \frac{1}{n} \right) n! (n \geq 1) \dots \dots (\text{答え})$$

(3) (2) より, (3) における示すべき等式は次のように書ける.

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) k! = 2^n n! - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このことより,

$$2^{k-1} \left(2 - \frac{1}{k}\right) k! = 2^{k-1} \{2k! - (k-1)!\}$$

$$= 2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)! \quad \text{差分型! (階差型!)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \{2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!\} = \left[2^{k-1} \cdot (k-1)! \right]_1^{n+1}$$

$$= 2^n \cdot n! - (1 \cdot 0!) = 2^n n! - 1 \quad \text{(証明終わり)}$$