

早稲田大学一社会科学部一過去問演習と良問演習

haruto

2026 年 1 月 31 日

はじめに

長い長い受験勉強もとうとう終わりが見えてきました。今これを書いているのは12月の14日の深夜です。今から、2ヶ月後はもう大学入試を終えています。さて、どんな景色が見えているのでしょうか。

今から志望校の合格にできることは、たくさん問題をといてパターンをたくさん身につけるのではなく、

出会った問題から何を学ぶか？

です。

本書の使い方

まず、このテキストは **早稲田の三年分の過去問と僕が選んだ良問** の二部から構成されています。

それぞれ1週間のうちに解いてきてください。

・過去問について

言わずもがなよく復習してください。何がダメで次はどうすれば解けるようになるのか、どのような発想があったら解くことができていたのか、を考えながら復習しましょう。

・良問について

|標準|～**|難|**の問題を集めます。また、以下の記号を用います。

A→ 基本的な問題。教科書レベル。

B→ 標準的な問題。ぜひ解き切って欲しい問題。

C→ 難問。この問題が解けなくても、周りの受験生とはあまり差がつかない。

例えば、次のように問題の横に書いたら次のように捉えてください。

[B15]= 標準的な問題で目標解答時間は、15分

また、本題の他に **▶ 類題演習 ◀** というものを掲載します。必ずしも解いてくる必要はありません。自分の実力向上に役立ててください。

目次

1	早稲田大学過去問題編	5
1.1	2023 年実施	5
1.2	2024 年度実施	12
1.3	2025 年度実施	19
2	良問集問題編	26
2.1	第 1 回	26
2.2	第 2 回	28
2.3	第 3 回	30
2.4	総合演習	32
3	早稲田大学過去問解答編	36
3.1	2023 年度実施	36
3.2	2024 年度実施	44
3.3	2025 年度実施	50
4	良問集解答編	56
4.1	第 1 回	56
4.2	第 2 回	62
4.3	第 3 回	72
4.4	第 4 回	77
4.5	総合演習：解答編	82
5	おわりに	97
6	法政大学解答編	98
6.1	2023 年度実施	98
6.2	2024 年度実施	104
6.3	2025 年度実施	110
7	条件付き確率解答	115

1 早稲田大学過去問題編

1.1 2023 年実施

2023 年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は **10～11 ページ** に記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること。
3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
 - (1) 試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること。
 - (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること。
 - (5) 計算の途中過程を記述すること。記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある。
 - (6) 定規，コンパスを使用してもよい。
5. あとは
6. なんだかんだ
7. 色々と
8. 注意事項が
9. 書いてあります。

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

曲線 $y = ax^2 + b$ 上に x 座標が p である点 P をとり、点 P における接線を ℓ とする.

ただし、定数 a, b は $a > 0, b > 0$ を満たすとする. 次の問に答えよ.

(1) 接線 ℓ の方程式を a, b, p を用いて表せ.

(2) 接線 ℓ と $y = ax^2$ で囲まれた部分の面積 S を a, b を用いて表せ.

(3) 接線 ℓ と曲線 $y = ax^2 + \frac{b}{2}$ で囲まれた図形の面積を S' としたとき, S' を S を用いて表せ.

(4) 接線 ℓ と曲線 $y = ax^2 + c$ で囲まれた部分の面積 S'' とする. $S'' = \frac{S}{2}$ のとき, c を a, b を用いて表せ. ただし, $b > c$ とする.

2.

定数 m に対して x, y, z の方程式

$$xyz + x + y + z = xy + yz + zx + m \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える. 次の問に答えよ.

(1) $m = 1$ のとき ① 式をみたす実数 x, y, z の組をすべて求めよ.

(2) $m = 5$ のとき ① 式を満たす実数 x, y, z の組をすべて求めよ. ただし, $x \leq y \leq z$ とする.

(3) $xyz = x + y + z$ を満たす整数 x, y, z の組をすべて求めよ. ただし, $0 < x \leq y \leq z$ とする.

3.

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) a^3 を a の 1 次式で表せ.
- (2) a は整数であることを示せ.
- (3) $b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするとき, b を超えない最大の整数を求めよ.

〔以 下 余 白〕

1.2 2024 年度実施

2024 年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は **17～18 ページ** に記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること。
3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること。
4. 記述解答用紙記入上の注意
 - (1) 試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること。
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある。
 - (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること。
 - (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること。
 - (5) 計算の途中過程を記述すること。記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある。
 - (6) 定規，コンパスを使用してもよい。
5. あとは
6. なんだかんだ
7. 色々と
8. 注意事項が
9. 書いてあります。

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

連立不等式

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 4, \quad y \geq x - 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の表す領域を D とする. 点 (x, y) が D を動くとき, 次の問に答えよ.

- (1) 領域 D を座標平面上に図示せよ.
- (2) $-2x + y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ.
- (3) $2x + y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ.
- (4) a がすべての実数を動くとき, $ax + y$ の最大値を a で分類せよ.

2.

$OA = 6, OB = 5, AB = 7$ である $\triangle OAB$ について, $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ とおく. 次の問に答えよ.

- (1) $\triangle OAB$ の内心を I , 辺 AB と直線 OI の交点を C とする. \vec{OC} を \vec{a}, \vec{b} で表せ.
- (2) \vec{OI} を \vec{a}, \vec{b} で表せ.
- (3) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ.
- (4) $\triangle OAB$ の垂心を $H, \vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とするとき, \vec{AH}, \vec{BH} を \vec{a}, \vec{b}, s, t で表せ.
- (5) s, t の値を求めよ.

3.

n を $n \geq 3$ である自然数とする. 相異なる n 個の正の数を小さい順に並べた集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を考える. $a_1 = k$ とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) $a_i - a_1 (i = 2, 3, \dots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_2 を求めよ.
- (2) (1) のとき, a_n を n で表せ.
- (3) $\frac{a_i}{a_1} (i = 2, 3, \dots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_n を n の式で表せ.

〔以 下 余 白〕

1.3 2025 年度実施

2025 年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと．
2. 問題は **24～25 ページ** に記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること．
3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること．
4. 記述解答用紙記入上の注意
 - (1) 試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること．
 - (2) 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある．
 - (3) 受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること．
 - (4) 受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること．
 - (5) 計算の途中過程を記述すること．記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある．
 - (6) 定規，コンパスを使用してもよい．
5. あとは
6. なんだかんだ
7. 色々と
8. 注意事項が
9. 書いてあります．

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

自然数 n, p に対して, n^p の 1 の位の数 を $f_p(n)$ で表す. 次の問に答えよ.

- (1) $f_2(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.
- (2) $f_5(n) - f_1(n)$ の値をすべて求めよ.
- (3) $f_{100}(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.

2.

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$, すなわち,

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする. 次の問に答えよ.

- (1) $a_n = -\frac{1}{n}$ のとき, b_n を n の式で表せ.
- (2) $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$ のとき, a_n を n の式で表せ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ が以下を満たすとき a_n を n の式で表せ. ただし, $a_1 = 1$ とする.

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = n(n+1) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

3.

θ の関数

$$f(\theta) = \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 4 \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \right) + 2\sqrt{3}$$

を考える. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) $k = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ とおくとき, $f(\theta)$ を k の関数で表せ.
- (2) $f(\theta)$ の最大値, 最小値をも求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.
- (3) (1) の k に対して, θ の方程式 $f(\theta) = ak$ の解の個数を求めよ. ただし, 定数 a は $0 < a \leq 3$ とする.

〔以 下 余 白〕

2 良問集問題編

2.1 第1回

まずは、単純な計算問題で肩慣らしといきましょう. おっとその前に公式の確認です.

公式

$$1^\circ \quad |X| = k \iff X = \pm k \text{ かつ } k \geq 0$$

$$2^\circ \quad |X| < k \iff -k < X < k$$

$$3^\circ \quad |X| > k \iff X > k \text{ または } X < -k$$

1.0.[絶対値と不等式(A10)]

以下の不等式をそれぞれ解け.

$$(1) \quad |x+3| \geq |x-2| \quad (25 \text{ 宮崎大・教, 農})$$

$$(2) \quad |4x-1| < |x+3| \quad (25 \text{ 福島大})$$

▶ 類題演習 1.1 ◀

$$(1) \quad \text{不等式 } |2x-3| \leq 2 \text{ の解を求めよ. さらに, 不等式 } |2x-3| \leq 2 \leq \frac{1-3a}{3}x-1 \text{ の解が } 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \text{ となるような定数 } a \text{ の値を求めよ.} \quad (25 \text{ 同志社女子大})$$

$$(2) \quad |x| + |x-3| < 4 \text{ を解け.} \quad (25 \text{ 大東文化大})$$

続いて、座標平面と幾何の絡んだ問題です。立教の過去問演習を見ている感じ、苦手そうだったので特集します。

1.2.0〔座標平面と幾何 1〕(B20)

座標平面上の点 $Q(3, 5)$ と放物線 $C: y = x^2$ 上を動く点 $P(t, t^2)$ について、以下の間に答えよ。

- (1) 点 Q から放物線 C へ引いた 2 本の接線の方程式とそれぞれの接点の座標を求めよ。
- (2) 点 P が点 $(2, 4)$ から点 $(-3, 9)$ まで動くとき、線分 PQ が通過する領域の面積を求めよ。

(25 福岡大・理)

1.2.1〔座標平面と幾何 2〕(B15)

座標平面上に $A(25, 0)$, $B(0, 20)$, $C(10, 0)$ がある。点 P が点 C を中心とする半径 6 の円周上を動くとき、 $\triangle ABP$ の面積の最小値を求めなさい。

(25 福島大)

▶ 類題演習 1.2.2 ◀

座標平面において、原点を中心とする半径 3 の円 O_1 に点 $A(3, 0)$ において内接する半径 2 の円を O_2 とする。 O_2 上の点 $B(2, \sqrt{3})$ において O_2 に外接し、 O_1 と内接する円 O_3 の中心を P とするとき、

- (1) O_2 の中心を C とする $\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CB}$ とするとき、 P の座標を t で表せ。
- (2) P の座標と O_3 の半径 r を求めよ。

(愛知医大・医学部)

2.2 第2回

先週解説することが叶わなかった、第2回目の良問演習です。こちらは、解答をつけておきます。

2.1.0〔軌跡と領域の雑台〕(B30)

- (1) m が $m > 0$ の範囲を動くとき、直線 $y = mx - m^2$ が通りうる範囲を求め、図示せよ。
- (2) 点 $P(x, y)$ が原点を中心とする半径 1 の内部を動くとき、点 $Q(x + y, xy)$ の動く範囲を図示せよ。
- (3) m が $m > 0$ の範囲を動くとき、2 直線 $(m-1)x - y + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$, $mx + (m-2)y + 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$ の交点の軌跡を求め、図示せよ。
- (4) t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、 $x = 2t - 1 \cdots \textcircled{1}$, $y = t^2 + t \cdots \textcircled{2}$ を座標とする点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。

2.1.1〔軌跡と領域の図示〕(B25)

xy 平面において、実数 t に対し、2 点 $P(-4, 2t^2 - 4t - 1)$, $Q(4, 2t^2 + 4t - 1)$ をとる。

- (1) 2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過する部分を D とする。ただし、その境界（境界線）も含むとする。
 - (i) 2 点 $A(0, -2)$, $B(1, 3)$ はそれぞれ D に含まれないことを示せ。
 - (ii) D を図示し、その面積を求めよ。

(お茶の水女子・理)

▶ 類題演習 2.1.2 ◀

不等式 $2x^2 + xy - y^2 - 4x + 5y - 6 > 0$ の表す領域を D とおき、不等式 $x^2 + y^2 - 2kx - y + k^2 < 0$ の表す領域を E とおく。ただし、 k は実数の定数とする。

- (1) $2x^2 + xy - y^2 - 4x + 5y - 6$ を因数分解せよ。
- (2) 領域 D を図示せよ。
- (3) 領域 D と領域 E の共通部分が空集合となるような k の値の範囲を求めよ。

(法政大)

次の話題は方程式です．もう結構お腹いっぱいかもしれませんがデザートにどうぞ．

2.2.0〔不等式の色々〕(B40)

- (1) $A = \alpha + \beta$, $B = 2\sqrt{\alpha + \beta}$, $C = \sqrt{2\alpha} + \sqrt{2\beta}$ の大小関係を不等号を用いて表せ．
- (2) $x > 0$, $y > 0$, $x + 7y = 1$ のとき, $\frac{1}{7x} + \frac{1}{y}$ の最小値を求めよ．
- (3) $x > 0$ のとき, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x + 1}$ の最小値を求めよ．
- (4) x, y, z を正の実数とする． $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z)$ の取りうる値の最小値を求めよ．また最小値をとるときの x, y, z の条件を求めよ．

(上智大・茨城大・横浜市立大・鹿児島大)

▶ 類題演習 2.2.1 ◀

- (1) $x > 0$, $y > 0$ のとき, $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ．
- (2) $x > 0$ のとき, $\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値を求めよ．
- (3) すべての正の実数 x に対して, $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6 \geq y$ を満たす y の最大値を求めよ．

(同志社女子大学・岩手県立大・中京大)

2.3 第3回

なにをしようかなあと思いましたが、やはり解析分野(関数)と幾何学分野(図形)あたりを演習することにした。

3.1.0〔座標平面と幾何3〕(B15)

r, a, b を実数とし, $r > 0, a \neq 0$ とする. 座標平面上において, 中心が点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ で半径が r の円を K , 放物線 $y = ax^2 + b$ を C とする. 円 K と放物線 C はともに点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ で同じ直線 ℓ に接しているとする. このとき次に問に答えよ.

- (1) r, a, b の値を求めよ.
- (2) 直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (3) $\int_{-2}^{\sqrt{3}} (ax^2 + b)dx$ の値を求めよ.
- (4) 連立不等式

$$\begin{cases} x \leq \sqrt{3}, & y \leq 0, & y \geq ax^2 + b \\ \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 \geq r^2 \end{cases}$$

の表す領域の面積 S を求めよ.

(関西学院大学・文系)

3.1.1〔軌跡は簡単〕(B10)

a を実数とし, 2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 2ax - a$ が異なる2点 A, B で交わっているとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 実数 a の取りうる値の範囲を求めよ.
- (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 線分 AB の中点の軌跡を求め, 図示せよ.

(小樽商科大)

▶ 類題演習 3.1.2 ◀

m がすべての実数の値を取りながら変わるとき, 2つの直線 $mx - y = 1$ と $x + my = m + 2$ の交点の軌跡を求めよ.

(東京女子大)

次は早稲田大学(社会学部)で頻出の整数問題の演習です. かなり難しいですが頑張ってみましょう. それでは参ります.

4.1.0[多項式と整数](B25)

多項式

$$P(x) = (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)x^3(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

を考える. 次の問に答えよ.

- (1) 多項式 $P(x)$ が 2 次式 $x^2 - 1$ で割り切れることを示せ.
- (2) 6480 を素因数分解せよ.
- (3) n が 2 以上の整数のとき $P(n)$ は 6480 の倍数であることを示せ.

(富山大・理, 医, 薬)

4.1.1[漸化式と整数](C30)

数列 $\{a_n\}$ を次で定める.

$$a_1 = 8, a_{n+1} = 2a_n^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに, a_n を 5 で割った商を b_n , 余りを r_n とする.

自然数 n に対して, 以下の問に答えよ.

- (1) r_n を求めよ.
- (2) b_n を 5 で割った余りを求めよ.
- (3) a_n を 50 で割った余りを求めよ.

(中央大・理工)

▶ 類題演習 ◀

n を自然数とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n!},$$
$$b_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$$

とおく. a_n の値が整数となる n の値の最大値は ア, b_n の値が最大となる n の値は イ である.

(同志社大・文, 経)

2.4 総合演習

図形を鋭く光らせる!!

▶ 今年の入試問題の図形を中心とする問題から標準以上の問題を扱います. 焦らずどっしりと構えて参りましょう!◀

5.1.0〔まずは, お絵描きから〕(B20)

3 辺の長さが 4, 5, 6 である三角形の内部または周上の点 P から 3 辺へ引いた垂線の長さをそれぞれ x, y, z とするとき,

$$x + y + z$$

の最大, 最小を与える P の位置を求めよ.

5.1.1〔どの断面図を描くか〕(B20)

底面の半径 a , 高さ h の直円錐を頂点を通る平面で切る.

その切断面である三角形の面積の最大値を求めよ.

上の 2 題は, 初等幾何学を中心とする問題です. あまり解析的な手段に頼ることなく解答できます.

続いて, 幾何学と関数が奏でる美しいハーモニーです. 特に **ベクトル** を積極的に利用できるようなことが幾何学と関数の融合問題に強くなるコツです!(次のページから始まります)

5.1.2[ベクトルを使おう1](B30)

a, b, t は実数であり, $t > 1$ とする. xy 平面上の 2 つの曲線

$$C_1: y = x^2, C_2: y = a(x-1)^2 + b(x-1) + 2$$

を考える. 点 $P(t, t^2)$ は C_1 と C_2 の共有点であり, 点 P において C_1 の接線の傾きと C_2 の接線の傾きが等しいとする.

- (1) a と b を t の式でそれぞれ表せ.
- (2) $a > 1$ であることを示せ.
- (3) 放物線 C_2 の頂点の x 座標を t の式で表せ.
- (4) (3) で求めた式を $f(t)$ とする. $t > 1$ の範囲で $\frac{1}{f(t)}$ を最大にするような t の値を求めよ.
- (5) t の値は (4) で求めた通りとする. C_2 と直線 $y = 2$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.

(25 大阪公立大・文系)

5.1.3[誘導の意味を考える](B20)

曲線 $C: y = x^3 - 3x$ 上に点 $A(2, 2)$ をとる. 点 P は曲線 C 上の点で, 原点 O と点 A の間にある. 点 P の x 座標を t とするとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) 曲線 C と線分 OA で囲まれた図形の面積を求めよ.
- (2) 曲線 C の点 P における接線が線分 OA と平行であるとき, t の値を求めよ.
- (3) 曲線 C と線分 OP で囲まれた部分の面積を S_1 , 曲線 C と線分 PA で囲まれた部分の面積を S_2 とし, $S = S_1 + S_2$ とする. このとき, S の最小値とそのときの t の値を求めよ.

(25 中央大・経)

まだまだ続きます!

5.1.4[見た目ほどじゃない](B25) —

O を原点とする座標平面上に、半円 $C: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ がある.

C 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta) (0 < \theta < \pi)$ における接線を ℓ , 点 $A(-1, 0)$ を通り ℓ と直行する直線を m とし, ℓ と m の交点を Q とする.

- (1) 2 直線 ℓ, m の方程式を求めなさい.
- (2) 2 つの線分 AQ, PQ の長さを求めなさい.
- (3) 台形 $OPQA$ の 4 辺の長さの和を L とする. L の最大値とそのときの $\cos \theta$ の値を求めなさい.
- (4) 台形 $OPQA$ の面積を S とする. S^2 が最大となるときの θ の値は $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であることを証明しなさい.

(25 高知工科大)

5.1.5[絵が描けないときは...](B20) —

$t > 2$ とする. 原点を O とし, 放物線 $C: y = x^2$ 上に点 $A(t, t^2)$ をとる.

- (1) 線分 OA を直径とする円は, O, A 以外の異なる 2 点で C と交わることを示せ.
- (2) (1) の交点を P, Q とし, 直線 PQ を L とする. また線分 PQ の垂直二等分線を N とする. L, N の方程式をそれぞれ求めよ.

(25 学習院大・文 改)

5.1.6[落ち着いて計算](B30) —

関数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$ に対して, 曲線 $C: y = f(x)$ 上に点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) をとる. 次の問に答えよ.

- (1) 曲線 C 上の点 P における接線を ℓ_1 , 点 P を通り ℓ_1 に垂直な直線を ℓ_2 とする. ただし, ℓ_1 は x 軸に平行でないとする. 原点と ℓ_1, ℓ_2 との距離をそれぞれ d_1, d_2 とおく. このとき, d_1 および d_2 を t を用いて表せ.
- (2) (1) で求めた d_1, d_2 に対して, $d_1 = d_2$ となる t の値を全て求めよ.
- (3) (2) で求めた t の値に対して, C, ℓ_2 , および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(25 名古屋市立大・経, 医 (リハ))

5. 1. 7〔軌跡の問題かと思いきや...〕(B25)

実数 a, b は $|a| < 1, |b| < 1$ を満たすとし,

$$f(x) = x^2 - 2ax + 1, g(x) = x^2 - 2bx + 1$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) a, b が次の条件(*)を満たすとき, 点 (a, b) の全体の集合を ab 平面上に図示せよ.

(*) $f(x) = 0$ の解 α と $g(x) = 0$ の解 β で積 $\alpha\beta$ の実部が 0 となるものがある.

(2) 2つの放物線 $y = f(x), y = g(x)$ の頂点をそれぞれ P, Q とする. a, b が(1)の条件(*)を満たすとき, 点 P と Q の距離 PQ の最大値を求めよ.

(25 奈良女子大(後)・理, 工)

3 早稲田大学過去問解答編

3.1 2023 年度実施

1.

考え方

標準的な微積分の問題です。

二次関数と ℓ の共有点の x 座標が厄介な形になるので、文字で置き換えてから積分するのが計算ミスを減らすコツです。

また積分で面積を求めるときに、項別に積分すると代入計算が大変面倒くさいです。共有点を求める過程で、因数分解ができるので $\frac{1}{6}$ 公式を使いましょう。そうすると大変キレイに面積を求めることができます。

解

(1) s 接線 ℓ の方程式は、 $y' = 2ax$ より、

$$\ell: y = 2ap(x - p) + ap^2 + b$$

$$\therefore y = 2apx - ap^2 + b \dots\dots (\text{答え})$$

(2) $y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax^2 = 2apx - ap^2 + b &\iff x^2 = 2px - p^2 + \frac{b}{a} \\ &\iff x^2 - 2px + p^2 - \frac{b}{a} = 0 \\ &\iff x = p \pm \sqrt{p^2 - p^2 + \frac{b}{a}} = p \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

ここで、 $y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標の小さい方から、 $x = \alpha$, $x = \beta$ とおくと、

$\alpha = p - \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\beta = p + \sqrt{\frac{b}{a}}$ であり、直線 ℓ は $y = ax^2$ よりも常に上側なので求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{\frac{b}{a}})^3 \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(3) ℓ と $y = ax^2 + \frac{b}{2}$ の共有点の x 座標を小さい方から, α', β' とおくと,

$$\begin{aligned} 2apx - ap^2 + b &= ax^2 + \frac{b}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 - \frac{b}{2a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= p \pm \sqrt{\frac{b}{2a}} \end{aligned}$$

$\therefore \alpha' = p - \sqrt{\frac{b}{2a}}, \beta' = p + \sqrt{\frac{b}{2a}}$ 従って, 求める面積 S' は,

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\alpha'}^{\beta'} -(x - \alpha')(x - \beta') dx \\ &= \frac{1}{6} (\beta' - \alpha')^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2 \cdot \sqrt{\frac{b}{2a}} \right)^3 \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \therefore S' &= \frac{1}{2\sqrt{2}} S \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(4) ℓ と $y = ax^2 + c$ の共有点の x 座標を小さい方から γ, δ とおくと,

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 2apx - ap^2 + b \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + \frac{c-b}{a} = 0 \\ \Leftrightarrow x &= p \pm \sqrt{\frac{b-c}{a}} \end{aligned}$$

$\therefore \gamma = p - \sqrt{\frac{b-c}{a}}, \delta = p + \sqrt{\frac{b-c}{a}}$ とおけるので, 求める面積 S'' は,

$$\begin{aligned} S'' &= \int_{\gamma}^{\delta} -(x - \gamma)(x - \delta) dx \\ &= \frac{1}{6} (\delta - \gamma)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2 \cdot \sqrt{\frac{b-c}{a}} \right)^3 \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{b-c}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって, $S'' = \frac{S}{2}$ なので,

$$\begin{aligned} S'' = \frac{S}{2} &\iff \frac{4}{3} \left(\frac{b-c}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{b-c}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\iff 2 \left(\frac{b-c}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\iff 2^{\frac{2}{3}} \left(\frac{b-c}{a} \right) = \frac{b}{a} \quad (\text{両辺} \frac{2}{3} \text{乗した.}) \\ &\iff b-c = 2^{-\frac{2}{3}} \cdot b \\ &\iff c = b(1 - 2^{-\frac{2}{3}}) = b \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} = b \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore c = b \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) \dots\dots (\text{答え})$$

2.

考え方

整数問題です. 整数問題でまずやることは, **実験** ですが, 本問はそれ以前にすることがあります.

①が x, y, z の交代式なので, 因数分解ができます. なので, 因数分解することが先です. そこから, 因数分解された式を満たす x, y, z の組を求めましょう.

$$xyz + x + y + z = xy + yz + zx + m \quad \dots \textcircled{1}$$

解

(1)

$m = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 1 \\ &\iff x(yz + 1 - y - z) + y + z - yz - 1 = 0 \\ &\iff x\{y(z-1) - (z-1)\} + (z-1) - y(z-1) = 0 \\ &\iff x(z-1)(y-1) + (z-1)(1-y) = 0 \\ &\iff (x-1)(y-1)(z-1) = 0 \end{aligned}$$

\therefore これを満たす x, y, z は, $x = 1$ または $y = 1$ または $z = 1$ ……(答え)

(2)

$m = 5$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 5 \\ &\iff xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 1 + 4 \\ &\iff (x-1)(y-1)(z-1) = 4 \dots\dots\dots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

①'を $x \leq y \leq z$ なので, $x-1 \leq y-1 \leq z-1$ であるから, ①'を満たす $(x-1, y-1, z-1)$ の組は,

$$(x-1, y-1, z-1) = (1, 1, 4), (1, 2, 2), (-4, -1, 1), (-2, -2, 1), (-2, -1, 2), (-1, -1, 4)$$

従って, 求める (x, y, z) の組は

$$(x, y, z) = (2, 2, 5), (2, 3, 3), (-3, 0, 2), (-1, -1, 2), (-1, 0, 1), (0, 0, 5) \dots\dots\dots \text{(答え)}$$

(3)

$$xyz = x + y + z \cdots \cdots (*)$$

考え方

今までの誘導を踏襲すると、 $(\quad)(\quad) = (\text{具体的な数})$ にすることが目標です。慣れていないと厳しいと思います。解けなくても良い問題でしょう。

本問では、 $x = k$ とおく。ことから始めます。

解

$x = k$ ($x \in \mathbb{N}$) とおくと、

$$\begin{aligned} kyz = k + y + z &\iff k^2yz = ky + kz \\ &\iff k^2yz - ky - kz = k^2 \\ &\iff (ky - 1)(kz - 1) = k^2 + 1 \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

ここで、 $x \leq y$ において、両辺 k 倍して 1 を引くと、

$$\begin{aligned} kx - 1 \leq ky - 1 &\iff ky - 1 \geq kx - 1 \\ &\iff ky - 1 \geq k^2 - 1 \cdots \cdots ③ \end{aligned}$$

同様に、 $y \leq z$ なので、 $z \geq y$ より、

$$kz - 1 \geq k^2 - 1 \cdots \cdots ④$$

③, ④ より、② について、

$$\begin{aligned} (ky - 1)(kz - 1) &\geq (k^2 - 1)(k^2 - 1) \leq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 2k^2 + 1 \leq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 3k^2 \leq 0 \\ &\iff k^2 - 3 \leq 0 \\ &\iff -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって、この不等式を満たす自然数は、 $k = 1$ のみなので、 $x = 1$ である。

・ $x = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} yz = y + z + 1 &\iff y(z - 1) - z + 1 - 1 = 1 \\ &\iff (z - 1)(y - 1) = 2(y \leq z) \end{aligned}$$

これを満たす y, z の組は, $(y-1, z-1) = (1, 2)$ すなわち $(y, z) = (2, 3)$ のみ.

\therefore $(*)$ を満たす (x, y, z) の組は, $(\boldsymbol{x, y, z}) = (\boldsymbol{1, 2, 3}) \cdots \cdots (\text{答え})$

3.

$$a = (5\sqrt{2} + 7)^{\frac{1}{3}} - (5\sqrt{2} - 7)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (*)$$

考え方

3乗根の中身が複雑なので文字で置き換えて計算を簡単にしましょう.

解

(1) $\alpha = 5\sqrt{2} + 7, \beta = 5\sqrt{2} - 7$ とおくと,

$$\begin{aligned} (*) \iff a &= \left(\alpha^{\frac{1}{3}} - \beta^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\ &= \alpha - \beta - 3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} + 3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} \\ &= \alpha - \beta - 3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} \left(\alpha^{\frac{1}{3}} - \beta^{\frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 14 \\ \alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} = 50 - 49 = 1 \end{cases}$$

より, $a^3 = 14 - 3a \dots\dots\dots$ (答え)

(2)

$$\begin{aligned} a^3 = 14 - 3a &\iff a^3 + 2a - 14 = 0 \\ &\iff (a - 2)(a^2 + 2a + 7) = 0 \\ &\iff a = 2 \text{ または } a^2 + 2a + 7 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a^2 + 2a + 7 = 0$ の解は複素数なので, $a = 2$ である.

$\therefore a \in \mathbb{Z}$ である. (証明終わり)

(3) $b = \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}$ の整数部分を求める.

(1) と同様にして, b^3 を計算する.

$$\begin{aligned} b^3 &= \alpha + \beta + 3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} + 3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} \\ &= \alpha + \beta + 2\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= 10\sqrt{2} + 3b \\ \iff b^3 &= 3b + 10\sqrt{2} \\ \iff b^3 - 3b - 10\sqrt{2} &= 0 \\ \iff (b - 2\sqrt{2})(b^2 + 2\sqrt{2}b + 5) &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore b^2 + 2\sqrt{2}b + 5 = 0$ の解は複素数なので, $b = 2\sqrt{2}$.

$\therefore 2\sqrt{2}$ の整数部分は, 2 なので求める整数は, **2**……(答え)

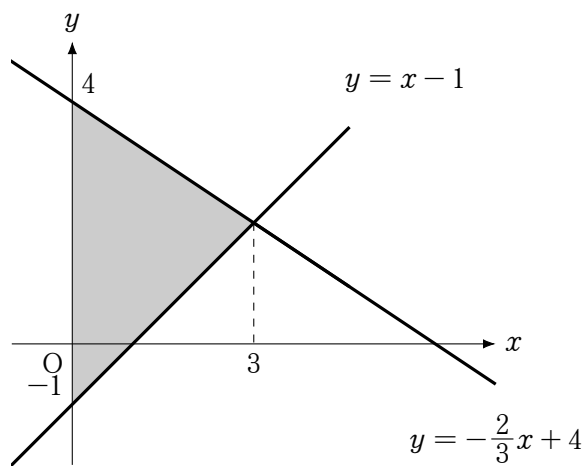
3.2 2024 年度実施

1.

線形計画法の典型的な問題です. 完答以外はありません.

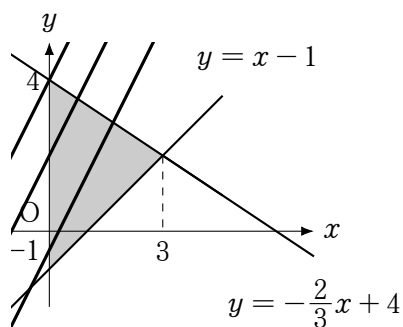
解

$$(1) \quad D: \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3}x + 4 \\ y \geq x - 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{を図示すると, 下図のようになる.}$$



上図の網目部が D で境界をすべて含む.

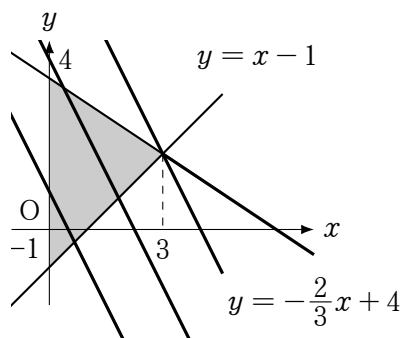
(2) $-2x + y = k$ において, 下図に図示すると, 下図太実線部が $y = 2x + k$ である.



\therefore 上図より, $(x, y) = (0, 4)$ を通るとき最大より,

求める最大値は, $(x, y) = (0, 4)$ のとき, $\max k = 4 \cdots \cdots$ (答え)

(3) $2x + y = \ell$ において、下図に図示すると、下図太実線部が $y = -2x + \ell$ である。



\therefore 上図より、 $(x, y) = (3, 2)$ を通るとき最大より、

求める最大値は、 $(x, y) = (3, 2)$ のとき、 $\max \ell = 8$ ……(答え)

(4) $ax + y = m$ において、 $a = 0$, $a > \frac{2}{3}$, $a < \frac{2}{3}$ の三つの場合で分けて考える。

(i) $a = 0$ のとき、

$y = m$ なので、 $(x, y) = (0, 4)$ のとき、 $\max m = 4$ である。

(ii) $a > \frac{2}{3}$ のとき、

このとき、 $y = -ax + m$ は、傾き負の 1 次関数で、 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ の傾きよりも大きくなるので $(x, y) = (0, 4)$ で $\max m = 4$ である。


(iii) $a < \frac{2}{3}$ のとき、

このとき、 $y = -ax + m$ は、傾き負の 1 次関数で、 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ の傾きよりも小さくなるので $(x, y) = (3, 2)$ で $\max m = 2 - 3a$ である。

\therefore 以上より、求める最大値は、

$$\max m = \begin{cases} 4 & (a = 0, a > \frac{2}{3}) \\ 2 - 3a & (a < \frac{2}{3}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答え})$$

2.

《注》幾何学図形（座標平面に書かないやつ.）を書くには，僕の技量不足で書けないので，あとで別紙（手書き）を渡します. 

考え方

ベクトルの典型的な問題です.(5)の係数比較の計算が厄介ですがこれも完答をして欲しいところです.

解

(1) 角の二等分線の性質より, $AC : AB = 6 : 5$ なので,

$$\vec{OC} = \frac{5}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b} \dots (\text{答え})$$

(2) 添付図のように点 D, E をおく. このとき, $p, q \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{cases} EI : IB = p : 1 - p \\ DI : IA = q : 1 - q \end{cases}$$

とおくと,

$$\begin{cases} \vec{OI} = p\vec{b} + \frac{5}{12}(1 - p)\vec{a} \dots \dots \dots ① \\ \vec{OI} = q\vec{a} + \frac{6}{13}(1 - q)\vec{b} \dots \dots \dots ② \end{cases}$$

①, ② をそれぞれ係数比較して,

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = \frac{6}{13}(1 - q) \\ \frac{5}{12}(1 - p) = q \end{cases} &\iff \begin{cases} 13p = 6\left(1 - \frac{5}{12} + \frac{5}{12}p\right) \\ q = \frac{5}{12}(1 - p) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p = \frac{1}{3} \\ q = \frac{5}{18} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OI} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \dots (\text{答え})$$

(3) 余弦定理より,

$$\cos \angle BOA = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

なので,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \dots (\text{答え})$$

(4) 添付の図より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \vec{a} \\ &= (s-1)\vec{a} + t\vec{b} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{OH} - \vec{b} \\ &= s\vec{a} + (t-1)\vec{b} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

(5) 重心の性質より,

$$\begin{aligned}\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{b} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0 \\ s|\vec{a}|^2 + (t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6s + 25t = 6 \\ 6s + t = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = \frac{5}{24} \\ 6s = \frac{9}{24} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = \frac{9}{144} \\ t = \frac{5}{24} \end{cases} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

3.

考え方 数列は集合論で定義されている問題です. 抽象的な数学 (大学数学とか) に慣れていないと解答できる問題は, 1 つもないのではないのでしょうか. これは全滅でも仕方ありません.

解

$$n \in \mathbb{N} \geq 3. S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. a_1 = k$$

(1), (2) $a_i - a_1 (i \geq 2) \in S$ のとき, a_2 を求める.

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - k \\ a_3 - k \\ a_4 - k \\ \vdots \\ a_n - k \end{array}$$

はすべて S の元になるので, $a_n - k < a_n$ より, $S = \{a_2 - k, a_3 - k, \dots, a_n - k\}$ について, これは等差数列になる.

すなわち,

$$\begin{array}{l} a_2 - k = a_2 - a_1 = k \Rightarrow a_2 = 2k \\ a_3 - k = a_3 - a_1 = (a_2 + k) - k \Rightarrow a_3 = 3k \\ \vdots \\ a_n = nk \end{array}$$

$$\therefore a_2 = 2k \dots \dots (\text{答え}) \quad (1)$$

$$\therefore a_n = nk \dots \dots (\text{答え}) \quad (2)$$

(3) $\frac{a_i}{a_1} (i \geq 2)$ がすべて S の元のとき, $\left\{ \frac{a_i}{k} \right\}$ は

$$\frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}, \dots, \frac{a_n}{k} \dots \dots (*)$$

なので, k が次の 3 つの場合のときを考える.

$$\begin{cases} k = 1 \\ 0 < k < 1 \\ k > 1 \end{cases}$$

(i) $k = 1$ のとき

このとき $(*)$ は,

$$\{a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

となるので, a_n は n で表すことができない.

(ii) $0 < k < 1$ のとき

このとき, すべての i に対して, $\frac{a_i}{k} > a_n$ になるので, 下限から上限までのすべての元が S の元にならない.

よって, a_n は存在しない.

(iii) $k > 1$ のとき

このとき, すべての i に対して, $\frac{a_i}{k} < a_n$ になるので, 確かに S の元になる.

従って,

$$\frac{a_2}{k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 \cdot k}{a_1} = k \Rightarrow a_2 = k^2$$

$$\frac{a_3}{k} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2 \cdot k}{a_1} = k^2 \Rightarrow a_3 = k^3$$

\vdots

$$\frac{a_n}{k} = k^{n-1} \Rightarrow a_n = k^n$$

$$\therefore a_n = k^n.$$

\therefore 以上より, a_n は

$$a_n = \begin{cases} \text{表せない.} (k > 1) \\ \text{存在しない.} (0 < k < 1) & \dots\dots (\text{答え}) \\ k^n (k > 1) \end{cases}$$

3.3 2025 年度実施

1.

考え方

剰余に関する問題です. n 桁の数の1の位の数調べたかったら、**mod 10で考える.**というのが鉄則です.

解

(1) $f_2(n) \iff n^2$ の1の位.

以下, mod 10で考える.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$n^2 \pmod{10}$	1	4	9	6	5	6	9	4	1

上表より, $f_2(n)$ は, 0, 1, 4, 5, 6, 9を周期的に繰り返す, その周期は6である.

\therefore **0, 1, 4, 5, 6, 9……(答え)**

(2) $f_5(n) - f_1(n) \iff n^5 - n$ の1の位

$n^2 \pmod{10}$	0	1	4	5	6	9
$n^5 \pmod{10}$	0	1	4	5	6	9
$n^5 - n \pmod{10}$	0	0	0	0	0	0

\therefore 上表より, $f_5(n) - f_1(n)$ **0……(答え)**

(3) (2)より, $n^5 \equiv n \pmod{10}$ なので,

$$n^{100} = (n^5)^{20} \equiv n^{20} = (n^5)^4 \equiv n^4 \pmod{10}$$

これより, $n^{100} \equiv n^4 \pmod{10}$ なので,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^4 \pmod{10}$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

これよ, 0, 1, 5, 6を周期的に繰り返すので, **0, 1, 5, 6……(答え)**

2.

考え方

階差数列に関する問題です。これは完答しましょう。

解

$$(1) \quad b_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \cdots \cdots (\text{答え})$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\} \\ &= a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right\} \\ &= 1 - \left[\frac{1}{n} \right]_1^n \\ &= 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

また、これは $n = 1$ のときも成立している。

$$\therefore a_n = 2 - \frac{1}{n} \cdots \cdots (\text{答え})$$

(3) $\Delta a_n = n(n+1)$ なので、和差分の関係より、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k \\ &= \left[\frac{1}{3} n(n-1)(n+1) \right]_1^n \\ &= \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

3.

考え方

三角関数と解の個数の問題です. この種の問題で一番難しいと思いました. 特に, (3)では, 対応する k の個数と θ の個数に注意しないといけません.

解

(1)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\cos^2\theta - 1 - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2 \cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 4\sqrt{3}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3} \\ &= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 4\sqrt{3} \cdot \frac{1+\cos\theta}{2} + 2\sqrt{3} \\ &= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} - 1 \\ &= (2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1) - 2 + 2(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta) \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また, $k^2 = 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$ なので, ①について,

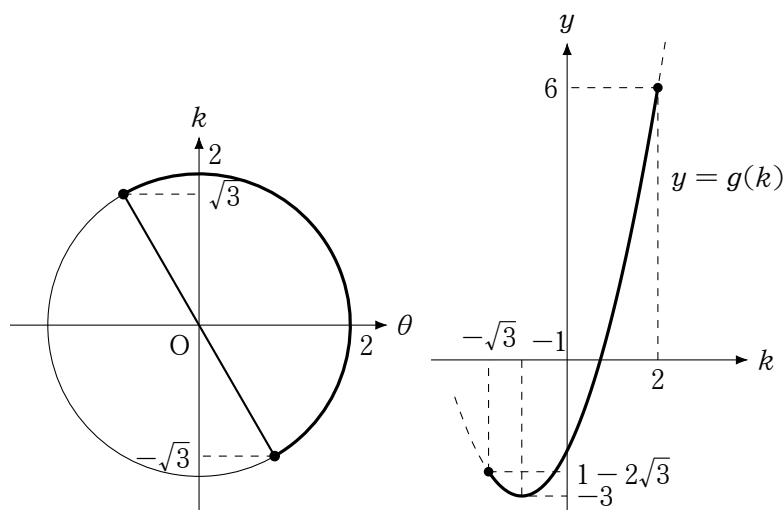
$$f(\theta) = k^2 + 2k - 2 \cdots \cdots (\text{答え})$$

(2) ここで, $g(k) = k^2 + 2k - 2$ とおく.

$k = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ なので, k の取りうる値の範囲は, $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} \cdots \cdots (*)$ である.

このことより,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \iff -\sqrt{3} \leq k \leq 2$$



上図より、 $y = g(k)$ は $k = -1$ を対称軸とする下に凸の放物線なので、求める最大値及び最小値は、

$$k = -1 \iff \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, 最大値を取る.}$$

$$k = 2 \iff \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ のとき, 最小値を取る.}$$

\therefore 求める最大値及び最小値は、

$$\begin{cases} \max g(k) = 6 & \left(\theta = \frac{5\pi}{6} \right) \\ \min g(k) = -3 & \left(\theta = \frac{\pi}{6} \right) \end{cases} \dots\dots(\text{答え})$$

(3)

(1) の k に対して、 $f(\theta) = ak$ の解の個数を求める。

$\iff f(\theta) = ak$ の共有点の個数は、 ky 平面における (k, y) の個数に対応する。(全射であって、単射ではない。)

また、その (k, y) に対して、 θk 平面の共有点 (θ, k) に変換したものが求める解の個数。(これも全射)

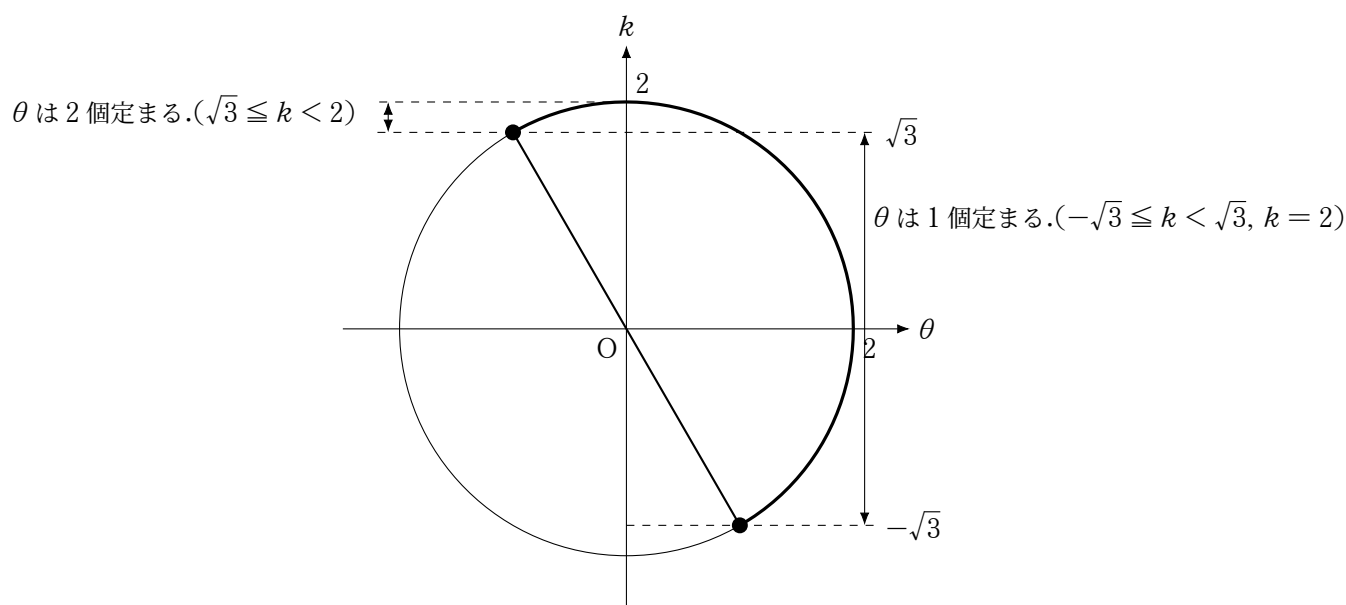
以下、《注》

上で言っていることはすなわち、

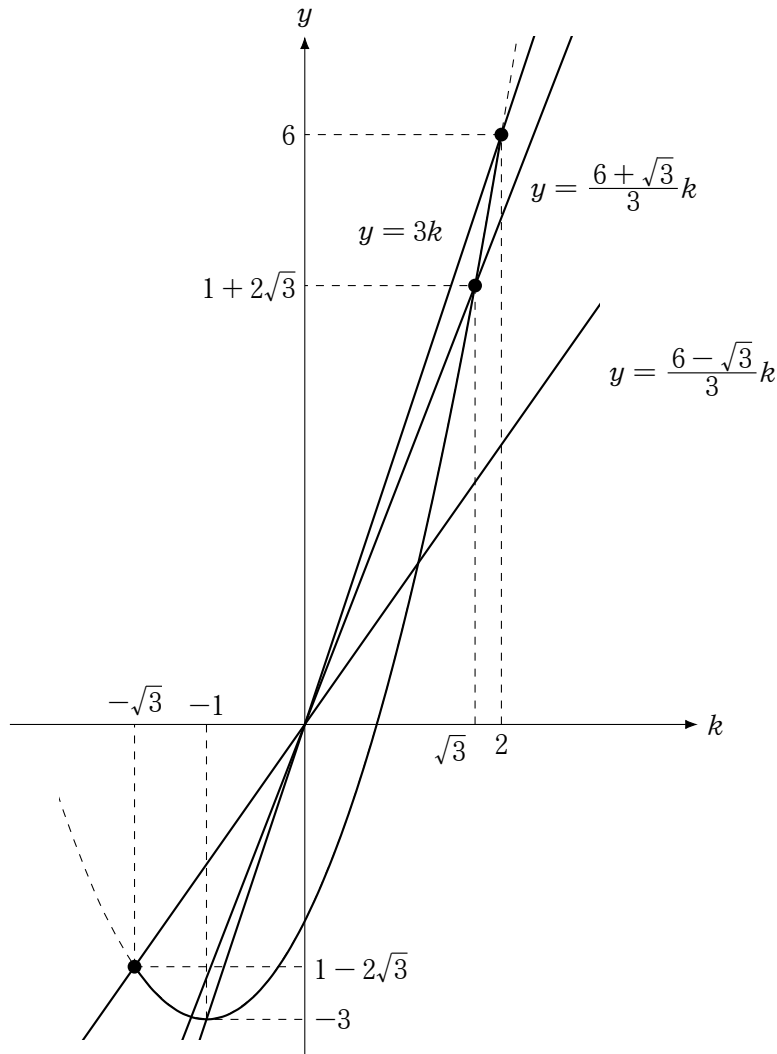
$y = g(k)$ と $y = ak$ の共有点の個数は本来求める解の個数ではない。

$y = f(\theta)$ と $y = ak$ の共有点の個数が本来求めるもの。ということ。イメージは下みたいな感じ。

「 $y = g(k)$ と $y = ak$ の共有点の個数 ((2) の放物線の座標平面で考える)」
 $\xrightarrow{\text{変換}}$ 「 $y = f(\theta)$ と $y = ak$ の共有点の個数 ((2) の円の座標平面で考える)」《注》終わり



P.50 の図より, $-\sqrt{3} \leq k < \sqrt{3}$, $k = 2$ のとき θ は 1 つ決まり, $\sqrt{3} \leq k < 2$ のとき θ は 2 つ決まる.
 このことから, $k = -\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 2$ 上の放物線の座標を通る直線を描くと下図を得る.



上図より,

- $0 < a < \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ のとき, k は 1 つで, 対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 1 つ.
- $\frac{6-\sqrt{3}}{3} \leq a < \frac{6+\sqrt{3}}{3}$ のとき, k は 2 つで, $-\sqrt{3} \leq k < \sqrt{3}$ より対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 1 つ, $k < 0$ 側に 1 つで合計 2 つ.
- $\frac{6+\sqrt{3}}{3} \leq a < 3$ のとき, k は 2 つで, $\sqrt{3} \leq k < 2$ より対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 2 つ, $k < 0$ 側に 1 つで合計 3 つ.
- $a = 3$ のとき, k は 2 つで, $k = 2$ より対応する θ は 2 つ. まとめると次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a < \frac{6-\sqrt{3}}{3} \text{ のとき, 対応する } \theta \text{ は } 1 \text{ つ.} \\ \frac{6-\sqrt{3}}{3} \leq a < \frac{6+\sqrt{3}}{3}, a = 3 \text{ のとき, 対応する } \theta \text{ は } 2 \text{ つ.} \quad \cdots \cdots (\text{答え}) \\ \frac{6+\sqrt{3}}{3} \leq a < 3 \text{ のとき, 対応する } \theta \text{ は } 3 \text{ つ.} \end{array} \right.$$

4 良問集解答編

4.1 第1回

1.0

●解

(1) 両辺が0以上であるから、両辺2乗しても同値性は崩れないので、両辺を2乗することにより、

$$\begin{aligned}(x+3)^2 \geq (x-2)^2 &\iff x^2 + 6x + 9 \geq x^2 - 4x + 4 \\ &\iff x \geq -\frac{1}{2} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

(2) 両辺が0以上であるから、両辺2乗しても同値性は崩れないので、両辺を2乗することにより、

$$\begin{aligned}(4x-1)^2 < (x+3)^2 &\iff (4x-1)^2 - (x+3)^2 < 0 \\ &\iff \{(4x-1) + (x+3)\} \{(4x-1) - (x+3)\} < 0 \\ &\iff (5x+2)(3x-4) < 0 \\ &\iff -\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

▶ 類題演習 1.1 ◀

●解

(1)

$$\begin{aligned}|2x-3| \leq 2 &\iff -2 \leq 2x-3 \leq 2 \\ &\iff \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

また、 $|2x-3| \leq 2 \leq \frac{1-3a}{3}x-1$ は、 $-\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3}$ かつ $\frac{1-3a}{3}x \geq 3 \cdots \cdots ①$ となり ① が $x \geq 1$ のとき、 $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ を得る。

従って、 $1-3a > 1$ のとき、 $x \geq \frac{9}{1-3a}$. この式の右边が $\frac{9}{1-3a} = 1$ となるのは、 $a = -\frac{8}{3} \cdots \cdots (\text{答え})$ である。

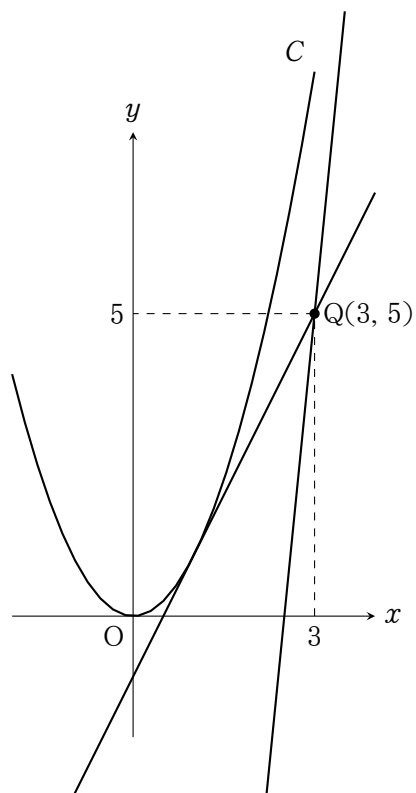
(2)

$$\begin{aligned} |x| + |x-3| < 4 &\iff |x| < 4 - |x-3| \\ &\iff |x-3| - 4 < x < 4 - |x-3| \\ &\iff \begin{cases} |x-3| < x+4 \\ |x-3| < 4-x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -(x+4) < x-3 < x+4 \\ x-4 < x-3 < -x+4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \\ &\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

1.2.0

解

与えられた状況を図示すると下図のようになる。



$$y = 2s(x - s) + s^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$
$$\begin{aligned} 5 &= 2s(3-s) + s^2 \iff -s^2 + 6s = 5 \\ &\iff (s-1)(s-5) = 0 \end{aligned}$$

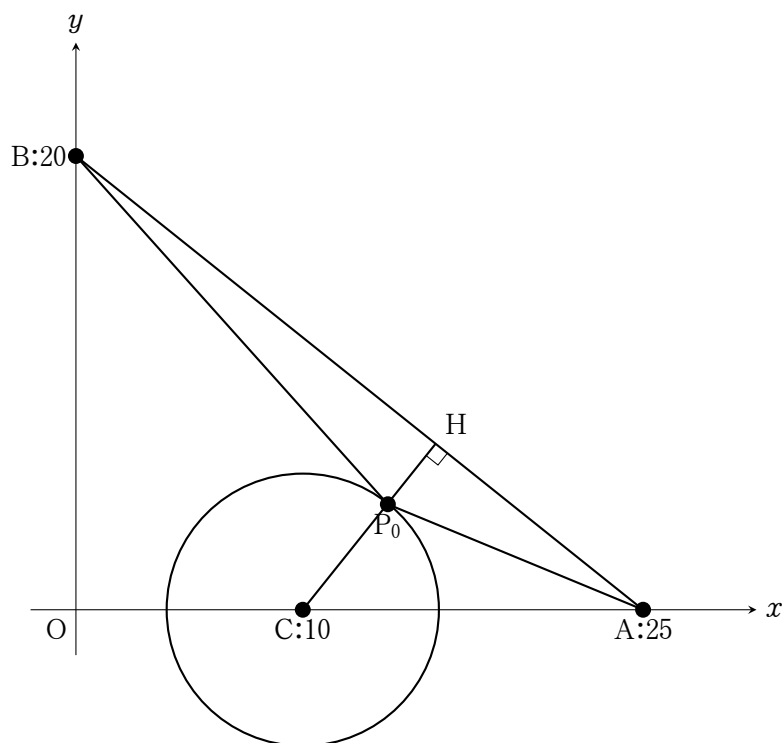
$\therefore s=1$ のとき, ①: $y=2(x-1)+1 \quad \therefore y=2x-1$, 接点 $(1, 1)$ ……(答え)
 $s=5$ のとき, ①: $y=10(x-5)+25 \quad \therefore y=10x-25$, 接点 $(5, 25)$ ……(答え)

$$\begin{aligned} S &= (\text{台形 ABCQ}) - \left(\int_{-3}^1 x^2 dx + \text{台形 (DEQB)} \right) \\ &= \frac{1}{2}(9+5) \cdot 6 - \left(\frac{1}{3} \left[x^3 \right]_{-3}^1 - \frac{1}{2}(1+5) \cdot 2 \right) \\ &= 36 - \frac{28}{3} \\ &= \frac{80}{3} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

1.2.1

解

まずは，図示すると下図のような状況．



ここで，線分 AB に C から引いた垂線の足を H ， H から C に向かって引いた直線と円との交点を P_0 とすると，円上を動く P が P_0 にきた時に $\triangle ABP$ は最小になるので，

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (AH - 6) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と書ける．

ここで， $AB^2 = 25^2 + 20^2$ であり， AB を通る直線の方程式は， $4x + 5y = 100$ なので，点と直線の距離公式より， $CH = \frac{|4 \cdot 10 - 100|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{60}{\sqrt{4^2 + 5^2}}$ ．

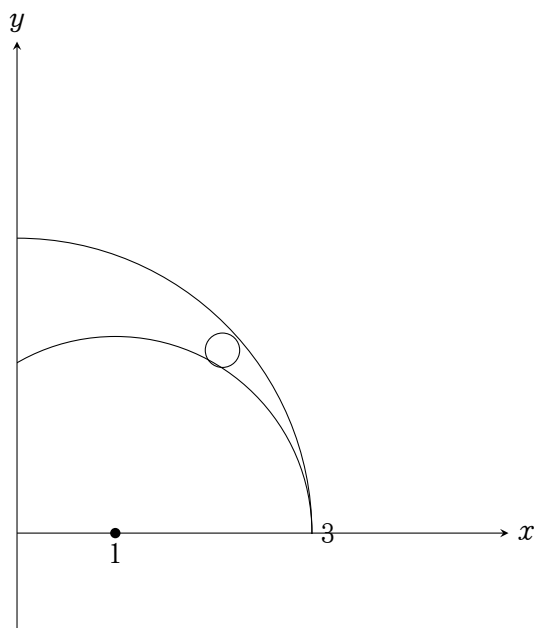
$$\therefore \triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5^2 + 4^2} \left(\frac{10}{\sqrt{5^2 + 4^2}} - 1 \right) 6 = 15(10 - \sqrt{41}) \cdots \cdots (\text{答え})$$

▶ 類題演習 1.2.2 ◀

解

(1) O_2 の中心が C , 半径が 2 であることより, C の座標は $(1, 0)$ であるとすぐにわかる.

従って 3 つの円をすべて図示すると下図のようになる.



よって, $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ なので,

$$\vec{CP} = t\vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OC} + t\vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} t+1 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

$\therefore P(t+1, \sqrt{3}t) \cdots \cdots$ (答え)

(2) O_3 の半径 r とすると, $\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CB}$ より,

$$CB : CP = 1 : t$$

これより, $BP = t - 1$ より, $r = (t - 1) |\overrightarrow{CB}| = 2(t - 1)$.

従って, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} t+1 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$ を r を用いて表すと,

$$|\overrightarrow{OP}| = (3 - r) = \{3 - 2(t - 1)\}$$

このことより,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= (5 - 2t)^2 \iff (t + 1)^2 + 3t^2 = 25 - 20t + 4t^2 \\ &\iff 22t = 24 \\ &\iff t = \frac{12}{11} \end{aligned}$$

\therefore P の座標は, $P\left(\frac{23}{11}, \frac{12\sqrt{3}}{11}\right)$(答え)

半径 r は, $r = 2 \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$(答え)

4.2 第2回

考え方

領域・軌跡の総合的な演習です。領域・軌跡の典型的な解答は、自然流（順像法）か逆手流（逆像法）の2つです。

軽くまとめておきましょう。

〔軌跡・領域の城跡〕

$y = f(t)$ の t が全ての実数を動くとき、その軌跡（領域） W を求めたい。

1° 順像法： t をすべての実数で動かして、それらをすべて集める。

2° 逆像法： $(x, y) \in W \iff y = f(t)$ を満たす t が少なくとも一つ存在する。 $\iff \dots$

⇒ 注 逆像法を選択するか順像法を選択するかは、問題によって違う。例えば、ベクトルの和の形で表すことができるなら、それは順像法のほうが楽な場合が多いです。

2.1.0

解

以下、(1), (2), (3), (4) の通過領域を $W_i (i = 1, 2, 3, 4)$ とおく。

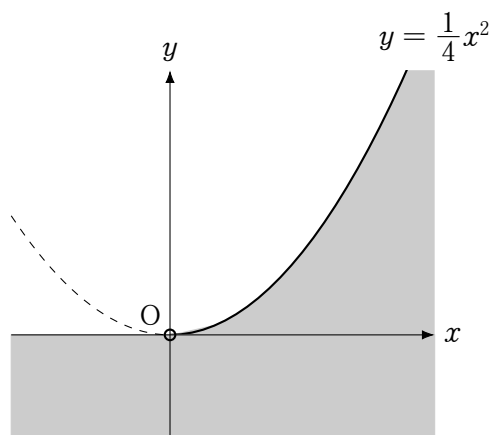
(1)

$$(x, y) \in W_1 \iff \exists m > 0, m^2 - mx + y = 0 \dots \dots \dots ①$$

ここで、 $f(m) = m^2 - mx + y$ とおくと、

$$\begin{aligned} ① &\iff \begin{cases} x^2 - 4y \geq 0 \\ f(0) > 0 \text{ かつ } x > 0 \\ f(0) < 0 \text{ かつ } (x < 0 \text{ または } x > 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y \leq \frac{x^2}{4} \\ y > 0 \text{ かつ } x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これを図示すると、次図を得る。

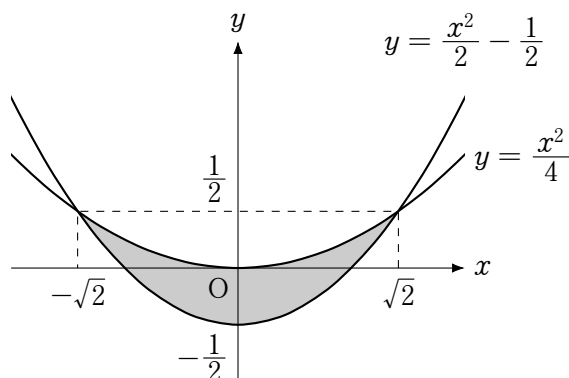


求める領域は左図の網目部で原点を除き, $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の境界以外すべて除く.

(2) $P(x, y)$ は方程式 $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす. またこのとき, $\begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \end{cases}$ とおくと,

$$\begin{aligned} (X, Y) \in W_2 &\iff \exists(x, y), \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} &\iff \exists(x, y), \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \\ (x + y)^2 - 2xy \leq 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X^2 - 2Y \geq 1 \\ \exists t, t^2 - Xt + Y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} Y \geq \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} \\ X^2 - 4Y \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y \geq \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} \\ Y \leq \frac{X^2}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

これらを図示すると, 下図の網目部が W_2 である. また, 境界はすべて含む.



(3)

$$(x, y) \in W_3 \iff \exists m, \begin{cases} (m-1)x - y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ mx + (m-2)y + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ m > 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

ここで①より,

$$mx - x - y + 1 = 0 \iff m = \frac{x+y-1}{x} \quad (x \neq 0)$$

なので,

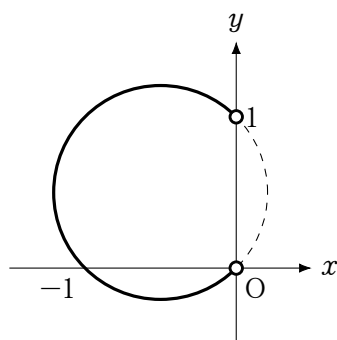
$$\exists m, \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{cases} \iff \exists m, \begin{cases} m = \frac{x+y-1}{x} \quad (x \neq 0) \\ m(x+y) - 2y - 2 = 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x+y-1}{x}(x+y) - 2y - 2 = 0 \\ \frac{x+y-1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x} = 0 \\ x(x+y-1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ x(x+y-1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

これを図示すると, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 中心の円において, $x \neq 0$ より, y 軸上の点を全て含まないことに注意して, 次図を得る.



W_3 は、左下図の太実線部で、原点、 $(1, 0)$ を除き、それ以外の境界すべて含む。

(4)

$$(x, y) \in W_4 \iff -1 \leq \exists t \leq 1, \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + t \end{cases}$$

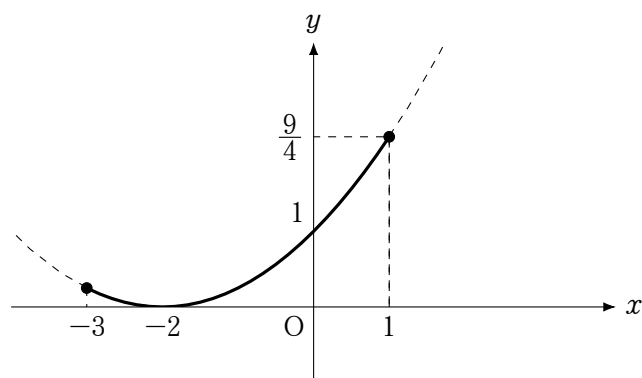
$$\iff -1 \leq \exists t \leq 1, \begin{cases} t = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\iff -1 \leq \exists y \leq 1 \begin{cases} t = \frac{1}{2}(x+1) \\ y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2 \leq x+1 \leq 2 \\ y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \end{cases}$$

よって、下図を得る。



W_4 は、上図の太実線部で、境界すべて含み、黒丸もすべて含む。

2.1.1

解

(1) 2点 P, Q を通る直線は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{8t}{8}(x-4) + 2t^2 + 4t - 1 \\ &= t(x-4) + 2t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

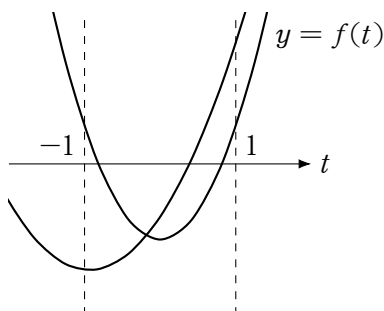
$$\therefore y = tx + 3t^2 - 1 \cdots \cdots (\text{答え})$$

(2) 領域 D を先に図示してから, 2点 A, B が D に含まれないことを言う.

D の表す式は,

$$\begin{aligned} \exists(x, y) \in D &\iff -1 \leq \exists t \leq 1, y = tx + 2t^2 - 1 \\ &\iff -1 \leq \exists t \leq 1, 2t^2 + xt - y - 1 = 0 \\ &\iff \text{二次関数 } f(t) = 2t^2 + xt - y - 1 \text{ が } -1 \leq t \leq 1 \text{ の範囲に少なくとも一つ実数解をもつ.} \end{aligned}$$

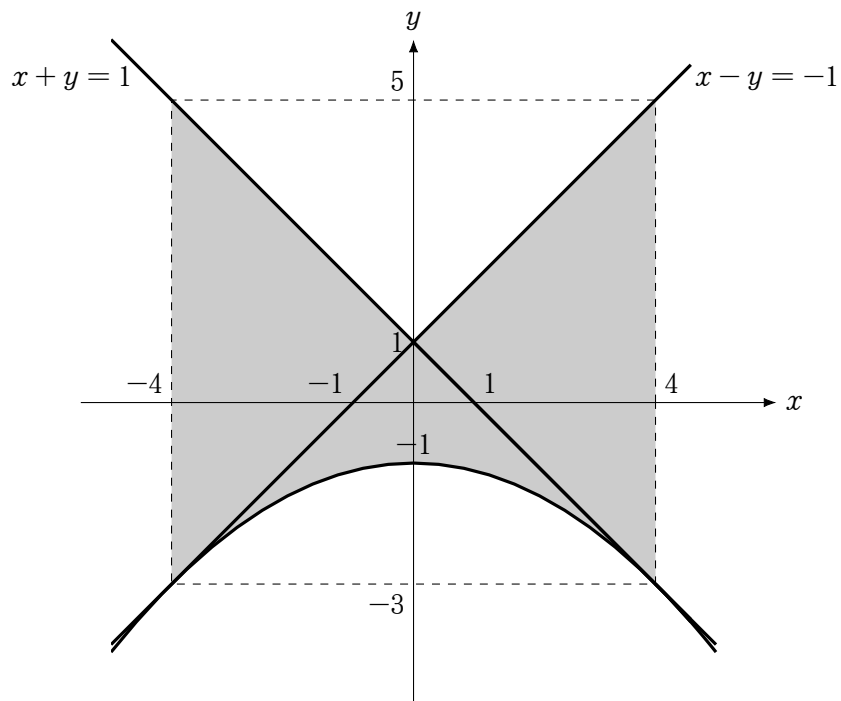
$y = f(t)$ が, $-1 \leq t \leq 1$ に少なくとも一つ実数解を持つ条件をもつための条件は, 下図を参照することにより,



$$f(-1)f(1) \leq 0 (\text{端点の積が異符号}) \text{ または } \begin{cases} (f(t) = 0 \text{ の判別式}) x^2 + 8(y+1) \geq 0 \\ -1 < \frac{x}{4} < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

$$\iff (-x-y+1)(x-y+1) \leq 0 \text{ または } \begin{cases} y < -x+1 \\ y < x+1 \\ -4 < x < 4 \\ y \geq -\frac{1}{8}x^2 - 1 \end{cases}$$

ところで, $y' = -\frac{1}{2}x$ より, $y = -\frac{1}{8}x^2 - 1$ は, $x = \pm 4$ で $y' = \mp 1$ (復号同順) なので, $x + y = 1$ と $x - y = -1$ とそれぞれ $x = \pm 4$ で接する. これに注意して図示すると, 次図が D である.



上図の網目部が D で, A, B は含まれない. (証明終わり)(i)

D は y 軸に関して対称なので, 求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= -\int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 - 1 \right) dx + (1+5) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{24} \left[x^3 \right]_0^4 + 4 + 12 \\ &= \frac{8}{3} + 16 \\ &= \frac{56}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{112}{3} \dots\dots(\text{答え})$$

▶ 類題演習 2.1.2 ◀

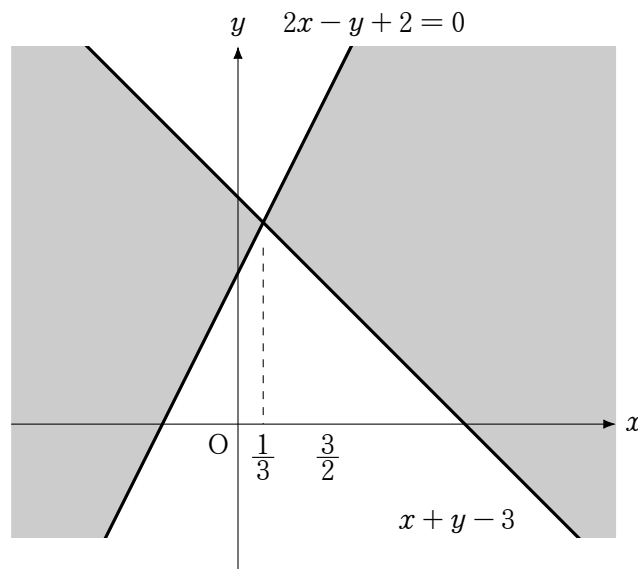
解

(1)

$$\begin{aligned}
 2x^2 + xy - y^2 - 4x + 5y - 6 &= 2x^2 + x(y-4) - y^2 + 5y - 6 \\
 &= 2x^2 + x(y-4) - (y-2)(y-3) \\
 &= \{x + (y-3)\} \{2x - (y-2)\} \\
 &= (x + y - 3)(2x - y + 2) \cdots \cdots (\text{答え})
 \end{aligned}$$

(2) $D: (2x + y - 3)(x - y + 2) > 0$ を描く.

$(x, y) = (0, 0) \notin D$ なので, D の表す領域は下図の網目部となり, 境界はすべて除く.



(4)

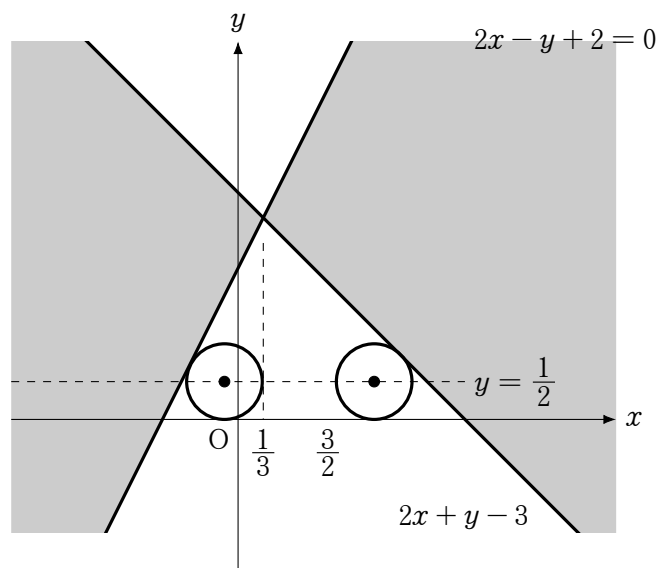
$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 2kx - y + k^2 < 0 &\iff (x - k)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \\
 &\iff \text{中心}\left(k, \frac{1}{2}\right), \text{半径}\frac{1}{2}\text{の円の内部.}
 \end{aligned}$$

これより, $D \cap E = \emptyset$ となる k の下限値と上限値はそれぞれ,

$$x - y = -2 \text{ と } E \text{ が接するとき. (下限値)}$$

$$2x + y = 3 \text{ と } E \text{ が接するとき. (上限値)}$$

である. これより, E と (1) を同一平面内で図示して, 下限値と上限値の状態を描くと, 図は次のような図になる.



点と直線の距離公式より、E とそれぞれの直線が接するなら、中心からの距離と半径が一致するので、まず下限値は、

$$\frac{\left|2k - \frac{1}{2} + 2\right|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|2k + \frac{3}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4} \dots\dots\dots ①$$

である。また上限値は、

$$\frac{\left|k + \frac{1}{2} + 3\right|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|k - \frac{5}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots ②$$

①, ② より、 $D \cap E = \emptyset$ になるためには下限値が、 $k > -1$, 上限値が、 $k < \frac{3}{2}$ をそれぞれ満たす必要があるので、求める k の値の範囲は、

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{5 - \sqrt{2}}{2} \dots\dots(\text{答え})$$

2.2.0

考え方

- (1) は情報不足により、解答することができなくなっています。
- (2) 内積の不等式を使えそうな形ですが、大きさの計算の部分で $x + 7y = 1$ を出すことができません。視点を变えて、1 に注目してみると $\frac{1}{7x} + \frac{1}{y}$ に $x + 7y$ を掛け算しても良いことになります。
- (3) 分子の次数は分母の次数より大きいので、字数下げをしないと始まりません。
- (4) 全力展開!!

解

- (1) 解答不能.

- (2) $\frac{1}{7x} + \frac{1}{y}$ に $x + 7y$ をかけると、

$$\begin{aligned}(x + 7y)\left(\frac{1}{7x} + \frac{1}{y}\right) &= \frac{1}{7} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 7 \\ &\geq 7 + \frac{1}{7} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} \\ &= 9 + \frac{1}{7} = \frac{64}{7}\end{aligned}$$

等号は、 $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \iff x = y = \frac{1}{8} (\because x + 7y = 1 \iff 8y = 8x = 1)$ のとき成立する。

\therefore 求める最小値は、 $\frac{64}{7}$ ……(答え)

- (3) ♠ 分子の次数が分母の次数より大きいので、次数下げをしましょう。そこから、項が三つの AM - GM の関係を使います. ♠

$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x + 1}$ とおくと、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x+1)^3 + 4}{(x+1)^2} \\ &= x + 1 + \frac{4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} + \frac{4}{(x+1)^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{2} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{4}{(x+1)^2}} = 3 \quad (\because \text{AM} - \text{GM})\end{aligned}$$

また等号は、

$$\frac{x+1}{2} = \frac{4}{x+1} \iff x+1 = 2 \text{ のとき成立.}$$

$\therefore \min f(x) = 3$ ……(答え)

(4)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) &= 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \\ &\geq 3 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 9 \quad (\because \text{AM-GM})\end{aligned}$$

また等号は,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \text{ かつ } \frac{x}{z} = \frac{z}{x} \text{ かつ } \frac{y}{z} = \frac{z}{y} \iff x = y = z \text{ のとき成立する.}$$

\therefore 最小値は, **9**……(答え)

▶ 類題演習 2.2.1 ◀

解

$$(1) \quad \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) = xy + \frac{4}{xy} + 5 \geq 4 + 5 \quad (\because \text{AM-GM})$$

等号は, $xy = \frac{4}{xy} \iff xy = 2$ のとき成立する.

\therefore 最小値は, **9**……(答え)

$$(2) \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+16} \dots\dots\dots \textcircled{1} \text{ とおく. } x \neq 0 \text{ なので, } \textcircled{1} \text{ の両辺に逆数をとると,}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{x^2+2x+16}{x+2} = x + \frac{16}{x+2} \\ &= (x+2) + \frac{16}{x+2} - 2 \geq 8 - 2 = 6 \quad (\because \text{AM-GM})\end{aligned}$$

また, 等号成立は,

$$x+2 = \frac{16}{x+2} \iff x=2 \text{ のとき成立する.}$$

$\therefore \frac{1}{f(x)}$ の最小値は 6 なので, $f(x)$ の最小値は **$\frac{1}{6}$** ……(答え)

(3) AM-GM の関係より,

$$x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2} \quad (\text{等号成立は, } x = \sqrt{2})$$

これより,

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^6 \geq 512$$

なので, 常に $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6 \geq y$ が成り立つための条件は, $y \leq 512$

\therefore 最大値は, **512**……(答え)

4.3 第3回

3.1.0

考え方

(4) は積分だけで面積を求めることができないので、**大きい面積から余分な面積を引く**．ことを考えましょう!! また、面積の計算結果は汚くなることが多いです．数学 **Ⅱ** だと面積計算は出題されにくいので、一応注意しておきます．

解

(1), (2) $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ を K の式に代入すると、

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = r^2 \iff r = 1 \cdots \cdots (\text{答え})$$

また、 A での接線の方程式は、

$$y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \iff y = \sqrt{3}x - \frac{7}{2} \cdots \cdots (\text{答え})$$

ところで、 C について $y' = 2ax$ より、 A での接線の傾きは一致するので

$$2\sqrt{3}a = \sqrt{3} \iff a = \frac{1}{2} \cdots \cdots (\text{答え})$$

このとき、

$$-\frac{1}{2} = 3a + b \iff b = -2 \cdots \cdots (\text{答え})$$

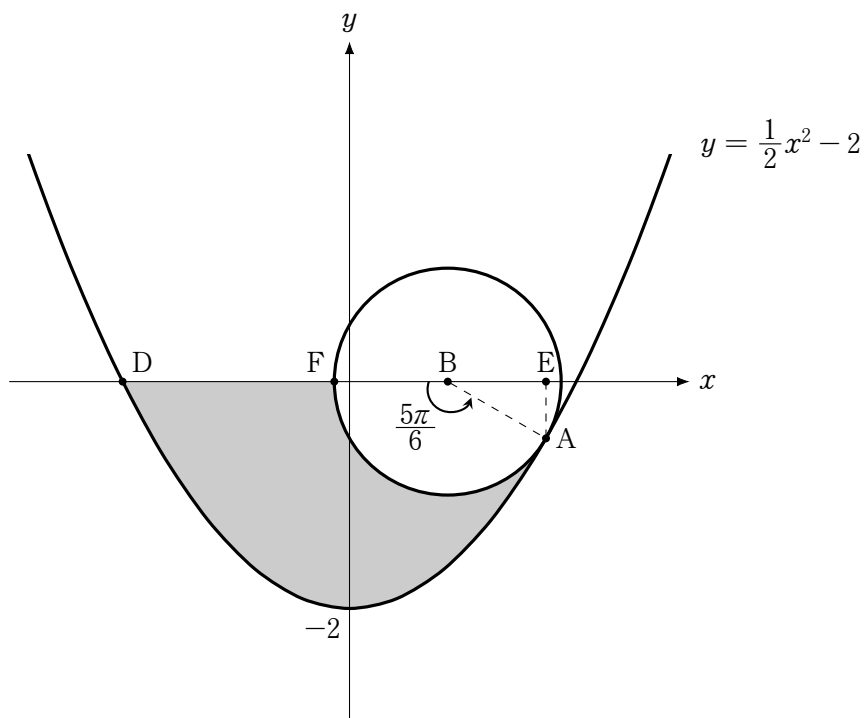
(3)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\sqrt{3}} (ax^2 + b) dx &= \left[\frac{a}{3} x^3 + bx \right]_{-2}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{a}{3} (3\sqrt{3} + 8) + b(\sqrt{3} + 2) \\ &= \frac{1}{6} (3\sqrt{3} + 8) - 2\sqrt{\sqrt{3} + 2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(4) 表す領域を D とする．すなわち、

$$D: \begin{cases} x \leq \sqrt{3}, y \leq 0, y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2 \\ \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

これを図示すると次図のようになる．



上図のように点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $D(-2, 0)$, $E(\sqrt{3}, 0)$, $F: C$ と x 軸の交点 とおく.

また $\triangle ABE$ は $AE:EB = \frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2} = 1:\sqrt{3}$ の直角三角形なので, $\angle DBA = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ である.

よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{\sqrt{3}} \{-(ax^2 + b)\} dx - \text{扇形 FBA} - \triangle ABE \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3} - 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3} - \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\
 &= \frac{11\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{3} - \frac{5\pi}{12} \dots\dots(\text{答え})
 \end{aligned}$$

3.1.1

考え方

(2) はもともと a の存在条件を同値変形する問題ですが, AB の中点が a で表せないので, 適当な文字で A, B の座標を置くことから始めます.

解

$$\begin{cases} y = x^2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = -x^2 + 2ax - a \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) 2 曲線の交点異なる二つの共有点の持つための条件は, $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ より, $2x^2 - 2ax + a = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ の判別式が正であることなので

$$(\textcircled{3} \text{ の判別式}) a^2 - 2a > 0 \iff a < 0, a > 2 \cdots \cdots (\text{答え})$$

(2) A, B の中点の x 座標をそれぞれ, X_1, X_2 とおくと, AB の中点の座標 M は $M\left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{(X_1 + X_2)^2}{2}\right)$ とおける.

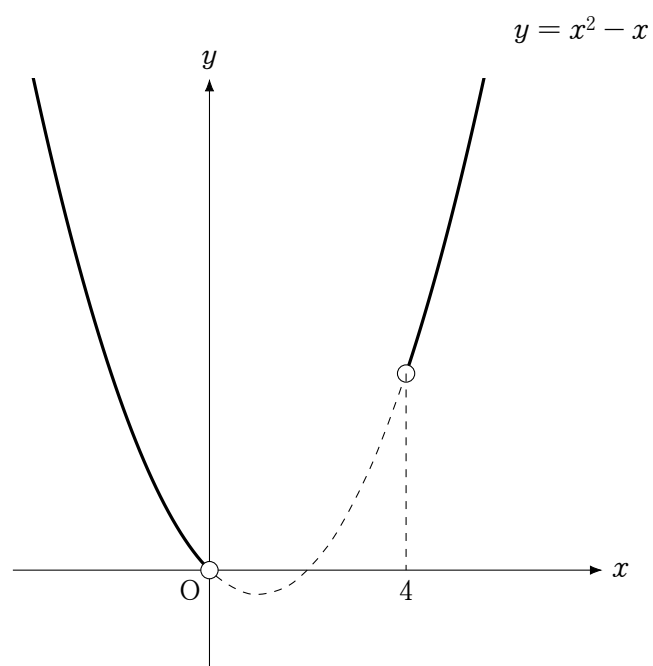
ここで, X_1, X_2 は $\textcircled{1}$ の異なる 2 つの実数解なので, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_1 X_2 = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$M\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2 - a}{2}\right)$ であり, 更に $X = \frac{a}{2}, Y = \frac{a^2 - a}{2}$ とし, M の軌跡を W とすると,

$$\begin{aligned} (X, Y) \in W &\iff \exists a, \begin{cases} X = \frac{a}{2} \\ Y = \frac{a^2 - a}{2} \\ a < 0, a > 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y = X^2 - X \\ X < 0, X > 4 \end{cases} \\ &\iff W \text{ は } y = x^2 - x \text{ の } x < 0, x > 4 \text{ の部分.} \end{aligned}$$

これを図示すると下図の太実線部が W で, 白丸を除く.



類題演習 3.1.2

考え方

頻出の交点の軌跡の問題です. 軌跡なので, 普通に存在条件に帰着させれば良いですが, 場合分けを忘れないようにしましょう.

解

$$\begin{cases} mx - y = 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + my = m + 2 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② の交点を (X, Y) とし, 交点の軌跡 W とする.

$$(X, Y) \in W \iff \exists m, \begin{cases} mX - Y = 1 \\ X + mY = m + 2 \end{cases} \cdots \cdots (*)$$

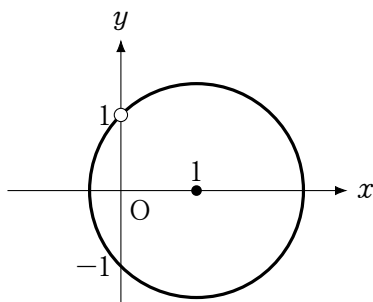
(i) $X = 0$ のとき

$$(*) \iff \exists m, \begin{cases} -Y = 1 \\ mY = m + 2 \end{cases} \iff m = -1$$

(ii) $X \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} (*) &\iff \exists m, \begin{cases} m = \frac{y+1}{x} \\ \textcircled{2} \end{cases} \iff \frac{x^2 + y^2 - 2x - 1}{x} = 0 \\ &\iff x\{(x-1)^2 + y^2 - 2\} = 0 \end{aligned}$$

よって, W は下図の太実線部で, 白丸を除く.



4.4 第4回

4.1.0

考え方

(1) では、割り算の性質 $P(x) \equiv 0 \pmod{x^2-1} \iff P(x) \equiv 0 \pmod{x-1}$ かつ $P(x) \equiv 0 \pmod{x+1}$ を用います.

(3) 素因数分解をさせた意味を考えましょう.

解

(1) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ なので,

$$\begin{cases} P(x) \equiv 0 \pmod{x-1} \\ P(x) \equiv 0 \pmod{x+1} \end{cases} \text{を示す.}$$

いま, $x^2 \equiv x^5 \equiv x^4 \equiv x^3 \equiv \dots \equiv 1 \pmod{x-1}$ なので,

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv (1-3+3-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &\equiv 0 \pmod{x-1} \end{aligned}$$

同様に, $x^6 \equiv -x^5 \equiv x^4 \equiv -x^3 \equiv \dots \equiv 1 \pmod{x+1}$ より, $P(x) \equiv 0 \pmod{x+1}$

$$\therefore \begin{cases} P(x) \equiv 0 \pmod{x-1} \\ P(x) \equiv 0 \pmod{x+1} \end{cases} \iff P(x) \equiv 0 \pmod{x^2-1} \quad (\text{証明終わり})$$

(2)

$$\begin{aligned} 6480 &= 10 \times 648 = 10 \times 4 \times 162 = 10 \times 4 \times 2 \times 81 \\ &= 2^4 \times 5 \times 9^2 \\ &= 2^4 \times 3^4 \times 5 \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(3) $P(n) = (n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1)n^3(n^2 + 1)(n^2 + 2)(n^2 + 3)$ と因数分解できるので,

$$\begin{cases} P(n) \equiv 0 \pmod{2^4} \cdots \cdots \text{①} \\ P(n) \equiv 0 \pmod{3^4} \cdots \cdots \text{②} \\ P(n) \equiv 0 \pmod{5} \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

であることをそれぞれ言えばよい.

まず, ① を示す. 合同式の対称性に注目して下表を得る.

$n \pmod{16}$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7
$n^2 \pmod{16}$	0	1	4	9	0	9	4	1
$n^4 \pmod{16}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$n^6 \pmod{16}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$P(n) \pmod{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0

上表より, ① が示された.

② を示す.

$n \geq 2$ なので, $P(n)$ の最小値は

$$\begin{aligned} P(2) &= (64 - 48 + 12 - 1) \times 2^3 \times 5 \times 6 \times 7 = 27 \times 3 \times 2^4 \times 5 \times 7 \\ &= 81 \times 2^4 \times 5 \times 7 > 81 \end{aligned}$$

なので, $P(n) \equiv 0 \pmod{9}$ を言えば十分である. これより, 下表を得る.

$n \pmod{9}$	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$n^2 \pmod{9}$	0	1	4	0	7
$n^4 \pmod{9}$	0	1	7	0	$49 \equiv 4$
$n^6 \pmod{9}$	0	1	$28 \equiv 1$	0	$28 \equiv 1$
$P(n) \pmod{9}$	0	0	0	0	0

上表より, ② が示された.

最後に ③ を示す.

$n \pmod{5}$	0	± 1	± 2
$n^2 \pmod{5}$	0	1	1
$n^4 \pmod{5}$	0	1	$16 \equiv 1$
$n^6 \pmod{5}$	0	1	4
$P(n) \pmod{5}$	0	0	$n^2 + 1 \equiv 0$

上表より, ③ が示された.

\therefore 以上 ①~③ より $P(n) \equiv 0 \pmod{6480}$ である.(証明終わり)

4. 1. 1

考え方

かなりの難問です.(1)では (mod 5) で考えて周期性を見つけて終わりです.(2)は b_n を 5 で割った余りは問題で与えられている文字だけでは表せないなので, 新たに b_n を 5 で割った商と余りを文字で設定します.(3)は(2)ができればいけます.

解

(1)以下, 合同式の法を 5 で考える.

$$a_1 = 8 = 5 \cdot 1 + 3 \equiv 3$$

$$a_2 = 2a_1^2 + 1 \equiv 2 \cdot 16 + 1 \equiv 4$$

$$a_3 = 2a_2^2 + 1 \equiv 2 \cdot 16 + 1 \equiv 3$$

$$a_4 = 2a_3^2 + 1 \equiv 2 \cdot 9 + 1 \equiv 4$$

⋮
⋮
⋮

よって, r_n は mod 5 で 3 と 4 を周期的に繰り返し, $r_n = \begin{cases} 3 & (n: \text{奇数}) \\ 4 & (n: \text{偶数}) \end{cases} \dots\dots(\text{答え})$

(2) $a_n = 5b_n + r_n$ を $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(5b_n + r_n)^2 + 1 = 2(25b_n^2 + 10b_nr_n + r_n^2) + 1 \\ &= 5(10b_n^2 + 4b_nr_n) + 2r_n^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで, b_n を 5 で割った商を c_n , 余りを s_n とおくと, $b_n = 5c_n + s_n$ と表せる. このことと, (1) の結果より,

(i) n が奇数 $\iff r_n = 3$ のとき

② より, $a_{n+1} = 5(10b_n^2 + 12b_n) + 19 \dots\dots\dots \textcircled{3}$ なので,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 10b_n^2 + 12b_n + 3 = 10b_n^2 + 12(5c_n + s_n) + 3 \\ &\equiv 2s_n + 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

よって, s_{n+1} は $2s_n + 3$ を 5 で割った余りに等しい.

(ii) n が偶数 $\iff r_n = 4$ のとき

② より, $a_{n+1} = 5(10b_n^2 + 16b_n) + 33 \dots\dots\dots \textcircled{4}$ なので,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 10b_n^2 + 16b_n + 6 \\ &= 10b_n^2 + 16(5c_n + s_n) + 6 \\ &\equiv s_n + 1 \pmod{5} \quad (\text{続きは次ページ}) \end{aligned}$$

よって、 s_{n+1} は $s_n + 1$ を5で割った余りに等しい.

∴ 以上をまとめると,

$$r_n = 3(\iff n \text{ が奇数}) \implies b_{n+1} \equiv 2s_n + 3 \pmod{5}$$

$$r_n = 4(\iff n \text{ が偶数}) \implies b_{n+1} \equiv s_n + 1 \pmod{5}$$

また、 $b_1 = 1$ より、 $s_1 = 1$ なので、

$$(s_n, r_n) = (1, 3) \text{ のとき, } (s_{n+1}, r_{n+1}) = (0, 4)$$

$$(s_n, r_n) = (0, 4) \text{ のとき, } (s_{n+1}, r_{n+1}) = (1, 3)$$

となって、 (s_n, r_n) は $(0, 4), (1, 3)$ を周期的に繰り返す.

$$\therefore s_n = \begin{cases} 0 & (n : \text{偶数}) \\ 1 & (n : \text{奇数}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答え})(3) \quad \text{まず, ③より } n \text{ が奇数なので,}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 50b_n^2 + 60b_n + 19 \\ &= 50b_n^2 + 60(5c_n + 1) + 19 \\ &\equiv 10 + 19 \pmod{50} \\ &= 29 \end{aligned}$$

次に④より、 n が偶数なので、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 50b_n^2 + 60b_n + 33 \\ &= 50b_n^2 + 60 \cdot 5c_n + 33 \\ &\equiv 33 \pmod{50} \end{aligned}$$

$$\text{また, } a_1 = 8 \text{ に注意して, } a_n \text{ を } 50 \text{ で割った余りは, } \begin{cases} 8 & (n = 1) \\ 29 & (n : \text{偶数}) \\ 33 & (n : 3 \text{ 以上の奇数}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答え})$$

▶ 類題演習 4.1.2 ◀

考え方

ア：整数や数列の問題で、よく分からない問題はとりあえず実験しましょう。

イ：この問題は「穴埋め」問題なので、しっかりとした記述は必要ありませんが、記述できるようにしておきましょう。(1)での実験から $n = 5$ までの積が最大になることがわかります。ですが根拠がありません。すなわち、 $n \geq 6$ で a_n が 1 より小さい単調減少な数列である。ことを言う必要があります。

解

ア：

$$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 30$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 20$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = \frac{35}{4}$$

$$a_5 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = \frac{14}{5}$$

$$a_6 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = \frac{7}{10} < 1$$

⋮

これより、 a_n が整数になるような n の最大値は、 $n = 3 \cdots \cdots$ (答え)

イ：上の実験より、 $n = 1$ から $n = 5$ までの積の値が最大になることが分かる。従って、 a_n が単調減少数列であることを示す。


$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+4)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{4}{(n+1)^2} < 1 \end{aligned}$$

∴ $a_{n+1} < a_n$ なので、数列 $\{a_n\}$ は単調減少数列である。

∴ b_n の値が最大になるような n の値は、 $n = 5 \cdots \cdots$ (答え)

4.5 総合演習：解答編

では、フィナーレに参りましょう！しっかり復習して、図形と解析分野を是非、得意にしてください！

⇒注**5.1.0**と**5.1.1**は手書きによる回答になります．スイマセン 

5.1.2

考え方

図形と関数の分野でベクトルを使うタイミングは、次の二つです。

1°：面積を求めたいとき。

2°：接線と法線が絡むとき

誘導に乗れば、イージーですが、計算が重たいので、落ち着いて計算しましょう。また僕には、(3), (4) の誘導の意味がわかりません。

解

(1)

C_1 の P での接線の方程式は、 $y = 2tx - t^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ であり、

C_1 の P での接線の傾きは、 $y' = 2a(t-1) + b \cdots \cdots \textcircled{2}$ である。

① と ② の傾きは一致するので、 $2t = 2a(t-1) + b \cdots \cdots \textcircled{3}$

また、P での y 座標は等しいので、 $t^2 = a(t-1)^2 + b(t-1) + 2 \cdots \cdots \textcircled{4}$ よって、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ t^2 = at^2 - 2at + bt + a - b + 2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} : b = 2t - 2a(t-1) \\ t^2 = at^2 - 2at + 2t^2 - 2at(t-1) + a - 2t * 2a(t-1) + 2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} b = 2t - 2a(t-1) \\ at^2 + t^2 - 2at - 2at^2 + 2at + a - 2t + 2at - 2a + 2 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ t^2 - at^2 + 2at - 2t - a + 2 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ a(-t^2 + 2t - 1) = -t^2 + 2t - 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{3} \\ a = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2 - 2t + 1} = \frac{t^2 - 2t + 1}{(t-1)^2} \dots\dots\dots \textcircled{5} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \left\{ t - \frac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2} \times (t-1) \right\} = 2 \cdot \frac{t-2}{t-1} \\ \textcircled{5} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2} \\ b = 2 \cdot \frac{t-2}{t-1} \end{cases} \dots\dots(\text{答え})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
a > 1 &\Leftrightarrow a - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 2 - (t^2 - 2t + 1)}{(t-1)^2} = \frac{1}{(t-1)^2} > 0 \quad (\text{証明終わり})
\end{aligned}$$

(3) C_2 を x で微分すると,

$$y' = 2a(x-1) + b$$

なので, $y' = 0$ とすると

$$y' = 0 \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{b}{2a} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

⑥にそれぞれ, a と b を代入することにより,

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2(t-2)/t-1}{t^2 - 2t + 2/(t-1)^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2(t-2) \times \frac{t-1}{t^2 - 2t + 2} \\
&= 1 - \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 2} = \frac{t}{t^2 - 2t + 2} \dots\dots(\text{答え})
\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{1}{f(t)} = t + \frac{2}{t} - 1 \geq 2\sqrt{2} - 1 \quad (\because \text{AM-GM})$$

等号は, $t = \frac{2}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ のとき成立するので, $t = \sqrt{2}$ のとき, $\min \frac{1}{f(t)} = 2\sqrt{2} - 1 \dots\dots(\text{答え})$

(5) $t = \sqrt{2}$ のとき, a, b それぞれの値は,

$$\begin{cases} a = \frac{2 - 2\sqrt{2} + 2}{3 - 2\sqrt{2}} = 2(2 + \sqrt{2}) \\ b = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

これより, C_2 の方程式は,

$$C_2 : y = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(x - 1)^2 - 2\sqrt{2}(x - 1) + 2$$

である. よって, $y = 2$ と C_2 との共有点の座標は,

$$\begin{aligned} 2 = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(x - 1)^2 - 2\sqrt{2}(x - 1) + 2 &\iff 0 = \sqrt{2}(x - 1)\{(1 + \sqrt{2})(x - 1) - 1\} \\ &\iff x = 1 \quad \text{または} \quad x - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ &\iff x = 1, \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_1^{\sqrt{2}} [2 - \{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(x - 1)^2 - 2\sqrt{2}(x - 1) + 2\}] dx \right| \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(x - 1)^2 - 2\sqrt{2}(x - 1)\} dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3} \left[(x - 1)^3 \right]_1^{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \left[(x - 1)^2 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3} [(\sqrt{2} - 1)^3] - \frac{2\sqrt{2}}{2} [(\sqrt{2} - 1)^2] \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^2 \left\{ -\frac{2}{3} \cdot (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^2 \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} (\sqrt{2} - 1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} (3 - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

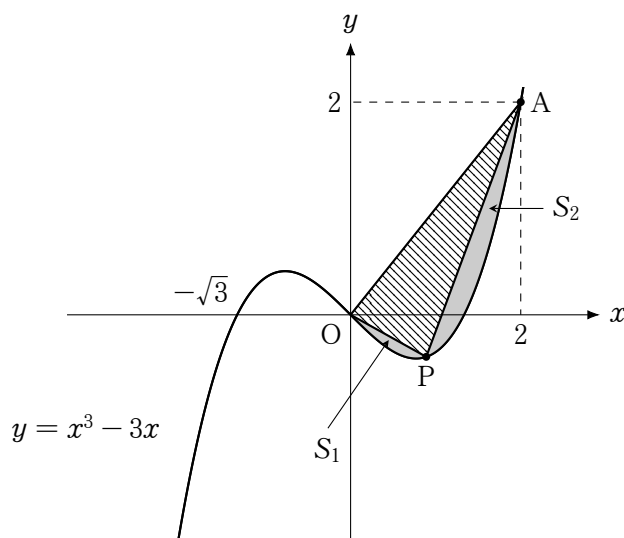
$$\therefore S = \frac{\sqrt{2}}{6} (3 - 2\sqrt{2}) \cdots \cdots (\text{答え})$$

5.1.3

考え方

(1) で面積を計算させるのは珍しいですね. でものちに (4) を楽にするためのステップだったのだと判明します.

解



(1) 直線 OA の式が, $y = x$ なので, 求める面積 T とすると, T は上図の斜線部と網目部を合わせた部分であるから,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^2 \{x - (x^3 - 3x)\} dx = \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= -\frac{1}{4} \left[x^4 \right]_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_0^2 \\ &= 4 \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) 直線 OA の方向ベクトル \vec{d} として, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

また, $y' = 3x^2 - 3$ より, P における接線の方程式は,

$$y = 3(t^2 - 1)(x - t) + t^3 - 3t = 3(t^2 - 1)x - 2t^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $\textcircled{1} \iff \begin{pmatrix} 3(t^2 - 1) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2t^3 \cdots \cdots \textcircled{2}$ より, $\textcircled{2}$ の方向ベクトルとして $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3(t^2 - 1) \end{pmatrix}$ がとれる.

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \textcircled{1} // \textcircled{2} &\iff \vec{d} // \vec{v} \\
&\iff \det \left\{ \vec{d}, \vec{v} \right\} = 0 \\
&\iff \det \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3(t^2 - 1) \end{pmatrix} \right\} = 0 \\
&\iff 3t^2 - 3 - 1 = 0 \\
&\iff t^2 = \frac{4}{3} \\
&\iff t = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\because t > 0)
\end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{2}{\sqrt{3}} \dots \dots (\text{答え})$$

(3) (3)より P の座標は、 $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{10}{3\sqrt{3}}\right)$ であるから、直線 OP の方程式は、 $y = -\frac{5}{3}x \dots \dots \textcircled{3}$ である。

ここで、 $\vec{OP} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$, $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので、 $\triangle OPA$ の面積は、

$$\begin{aligned}
\triangle OPA &= \frac{1}{2} \left| \det \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right| \\
&= \frac{1}{2} |2t - 2t^3 + 6t| \\
&= \frac{1}{2} |2t^3 - 8t| = |t^3 - 4t|
\end{aligned}$$

$\therefore S$ は、 T から $\triangle OPA$ (斜線部分)を引けばよいので、 $S(t) = 4 - |t^3 - 4t| = 4 - |t(t+2)(t-2)|$ と表すことができ、 $t < 2$ であることから、 $S(t) = t(t+2)(t-2) + 4$ となる。

また、展開することにより、 $S(t) = t^3 - 4t + 4$ を得て、微分することにより次の増減表を得る。

$$y' = 3t^2 - 4 = (\sqrt{3}t - 2)(\sqrt{3}t + 2)$$

t	0	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$...	2
$S'(t)$	\times	$-$	0	$+$	\times
$S(t)$	4	\searrow		\nearrow	4

上表より、 $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき、 $\min S(t) = S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 - 16\sqrt{3}}{9} \dots \dots (\text{答え})$

5.1.4

考え方

(2)座標において, $\sin^2 x$ や $\cos^2 x$ という **2乗の形** は厄介です. なので, 半角公式を用いて次数を下げましょう. 一応, 導出方法を含めて確認しましょう.

公式 < 半角公式の導出 >

\cos の 2 倍角の公式より,

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

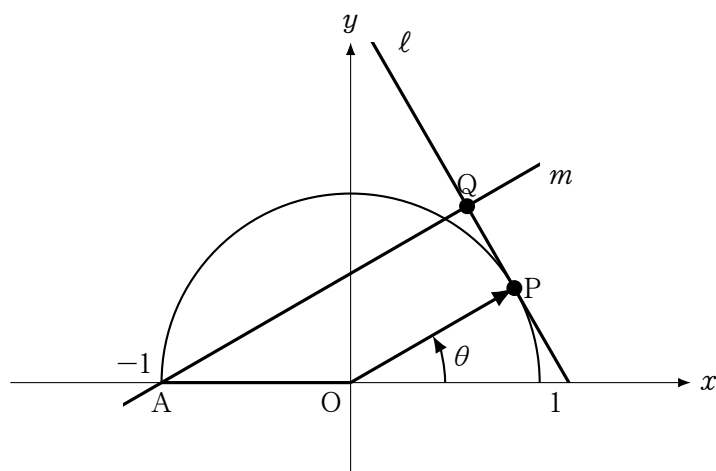
$$\textcircled{2} \text{ より, } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (\text{証明終わり})$$

(1) 円の接線の公式より, ℓ の方程式は, $\ell: x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \cdots \cdots (\text{答え})$

ℓ の方向ベクトルとして, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ が取れるので, 直線 m 上の点 (x, y) とすると, m の方程式は,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff m: (x+1) \sin \theta - y \cos \theta = 0 \cdots \cdots (\text{答え})\end{aligned}$$

(2) まず, 与えられた状況を図示すると下図を得る.



図より、AQ は点 $(-1, 0)$ と ℓ の距離なので、

$$AQ = \frac{|-\cos\theta - 1|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \cos\theta + 1 \cdots \cdots (\text{答え})$$

PQ は、O と直線 m の距離に等しいので、

$$PQ = \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta + (-\cos\theta)^2}} = \sin\theta \cdots \cdots (\text{答え})$$

(3)

$$\begin{aligned} L &= OP + PQ + AQ + OA \\ &= 1 + \cos\theta + 1 + 1 + \sin\theta \\ &= \sin\theta + \cos\theta + 3 \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, 最大値 } 3 + \sqrt{2} \cdots \cdots (\text{答え})$$

$$\text{また, このとき, } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \cdots (\text{答え})$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= (AQ + OP) \times PQ \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin\theta (1 + \cos\theta + 1) \\ &= \frac{1}{2} \sin\theta (\cos\theta + 2) \end{aligned}$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{4} \sin^2\theta (\cos\theta + 2)^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos^2\theta) (\cos\theta + 2)^2$$

$$\iff 4S^2 = (1 - \cos^2\theta) (\cos\theta + 2)^2$$

$$\cos\theta = t \text{ とおくと, } -1 < t < 1 \cdots \cdots (*) \text{ であり, } 4S^2 = (1 - t^2)(t + 2)^2 := f(t)$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(2+t)(1-t^2) + (2+t)^2(-2t) \\ &= -2(2+t)(2t^2 + 2t - 1) \end{aligned}$$

これより、次の増減表を得る。

t	...	-2	...	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$...	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$...	1
$f'(t)$	+	0	-	0	+	0	-	
$f(t)$	\nearrow		\searrow		\nearrow		\searrow	

下の増減表より, $t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のときに $f(t)$ は最大になり, このとき S^2 も最大になる. このときの θ を α とおくと, $0 < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2} \iff \cos \frac{\pi}{2} < \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ が成立する. (証明終わり)

5.1.5

考え方

タイトルにも書きましたが、絵が上手く書けません。そのときは、頭の中の絵と式で頑張って処理するしかないです。(1)OA を直径とする円なので、中心の座標は $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ で表せます。そこからは、判別式とかもろもろと.....

解

(1) 線分 OA を直径とする円の方程式は、

$$\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^4 + t^2}{4} \dots\dots\dots ①$$

と表せる。

よって、

「C と ① が O, A 以外の異なる 2 つの共有点をもつ。」

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ ① \end{cases} \text{ なる } (x, y) \text{ が O, A 以外に存在する.}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{t^2}{2}\right)^2 = \frac{t^4 + t^2}{4} \dots\dots\dots ②$$

$$\Leftrightarrow x^4 - t^2x^2 + x^2 - tx + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{4} = \frac{t^4 + t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - t^2x + x - t) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - t)(x^2 + tx + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, t, x^2 + tx + 1 = 0$$

$\therefore x^2 + tx + 1 = 0 \dots\dots\dots ③$ が異なる 2 つの実数解を持つことを言えばよい。

$$\therefore (\text{③ の判別式}) t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2) > 0 \quad (\because t > 2)$$

\therefore C と ① は O, A 以外の異なる二つの共有点を持つ。 (証明終わり)

(2) ③ を解くと、③ $\Leftrightarrow x = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$ である。

これを、 $\alpha = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}$, $\beta = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$ とおくと、点 P と点 Q の座標は、

$P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ と書ける。

これより、直線 PQ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^2 \iff y = (\beta + \alpha)x - \alpha\beta \\ &\iff y = -tx + \frac{1}{4} \cdot (-4) \\ &\iff y = -tx - 1 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\therefore L: y = -tx - 1 \cdots \cdots (\text{答え})$$

また、

$$\textcircled{4} \iff \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1$$

より、 L の方向ベクトル \vec{d} として、 $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ を反時計回りに 90° 回転させたベクトル $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ が取れる。

ところで、線分 PQ の中点を M とすると、M の座標は、

$$M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2}\right) \text{ であり、} x = \alpha, \beta \text{ は } \textcircled{3} \text{ の異なる 2 つの解なので、解と係数の関係より、}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -t \\ \alpha\beta = 1 \end{cases} \text{ なので、M の座標は、} M\left(-\frac{t}{2}, \frac{t^2 - 2}{2}\right) \text{ と書ける。}$$

$\therefore N$ の方程式は、 \vec{d} を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x + \frac{t}{2} \\ y - \frac{t^2 - 2}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{d} &= 0 \iff \begin{pmatrix} x + \frac{t}{2} \\ y - \frac{t^2 - 2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -x - \frac{t}{2} + ty - \frac{t^3 - 2t}{2} = 0 \\ &\iff x - ty = \frac{t - t^3}{2} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

5.1.6

⇒注 問題訂正あり. $\times f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x \rightarrow f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$

考え方

(1) ℓ_1, ℓ_2 ともに x 軸に垂直ではありませんが, 原点との距離を求めるので $ax + by + c = 0$ の形に直しておくのが良いでしょう.

解

(1) $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}$ であるから, ℓ_1 の方程式は,

$$y = \left(3t^2 - \frac{1}{2}\right)(x - t) + t^3 - \frac{1}{2}t \iff (6t^2 - 1)x - 2y - 4t^3 = 0$$

これと, $t > 0$ より, 原点 O と ℓ_1 の距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|-4t^3|}{\sqrt{(6t^2 - 1)^2 + 2^2}} = \frac{4t^3}{\sqrt{36t^4 - 12t^2 + 5}} \dots\dots(\text{答え})$$

また, ℓ_2 は P を通り ℓ_1 に垂直な直線であるから, ℓ_1 の方向ベクトルとして, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(6t^2 - 1) \end{pmatrix}$ がとれるの

で, これと内積することにより,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x - t \\ y - (t^3 - \frac{1}{2}t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -(6t^2 - 1) \end{pmatrix} &= 0 \iff 2(x - t) + (6t^2 - 1)\left(y - t^3 + \frac{1}{2}t\right) = 0 \\ \iff 2x + (6t^2 - 1)y - 6t^5 + 4t^3 - \frac{5}{2}t &= 0 \end{aligned}$$

よって, d_2 は,

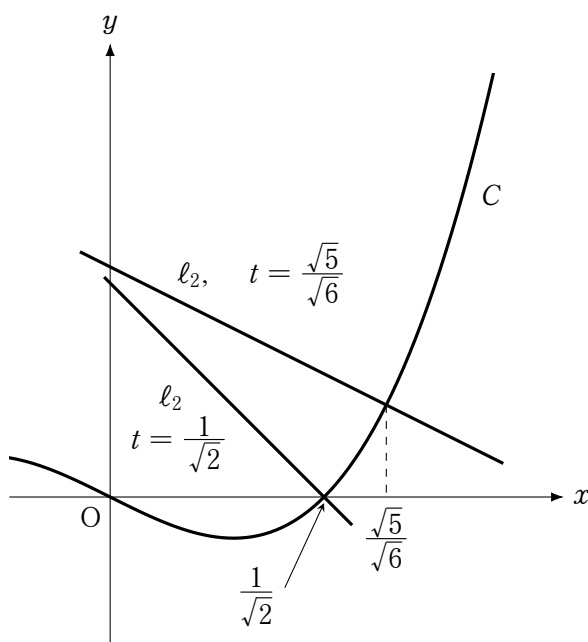
$$d_2 = \frac{|12t^5 - 8t^3 + 5t|}{2\sqrt{36t^4 - 12t^2 + 5}} = \frac{12t^5 - 8t^3 + 5t}{2\sqrt{36t^4 - 12t^2 + 5}} \quad (\because (\text{分子}) > 0) \dots\dots(\text{答え})$$

(2) $d_1 = d_2$ のとき,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4t^3 &= 12t^5 - 8t^3 + 5t \iff t(12t^4 - 16t^2 + 5) = 0 \\ &\iff t(2t^2 - 1)(6t^2 - 5) = 0 \\ &\iff t(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)(\sqrt{6}t - \sqrt{5})(\sqrt{6}t + \sqrt{5}) = 0 \\ &\iff t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{6} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{30}}{6} \dots\dots(\text{答え})$$

(3)



- $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき,

ℓ_2 の方程式は,

$$2x + 2y - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{6}{4} - \frac{4}{2} + \frac{5}{2} \right) = 0 \iff y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので, P の座標は, $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ となることより, 求める面積は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(x^3 - \frac{1}{2}x \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1 - 2 + 8}{16} = \frac{5}{16} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

- $t = \frac{\sqrt{30}}{6}$ のとき,

ℓ_2 の方程式は,

$$2x + 4y - \frac{\sqrt{5}}{6} \left(6 \cdot \frac{25}{36} - 4 \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{2} \right) = 0 \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}$$

なので、 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときと同様に、上図を参考にして、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} \right) - \left(x^3 - \frac{1}{2}x \right) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \right)^4 + \frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{36} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

5.1.7

考え方

(1) $f(x) = 0$ も $g(x) = 0$ も解が 2 つずつあるので、積は 4 通りできますが、実部は 2 通りしかできません。
 . いずれかが 0 となる条件を一気に扱うには....

(2) (1) の条件を活かすために a, b をパラメータで表しましょう。

解

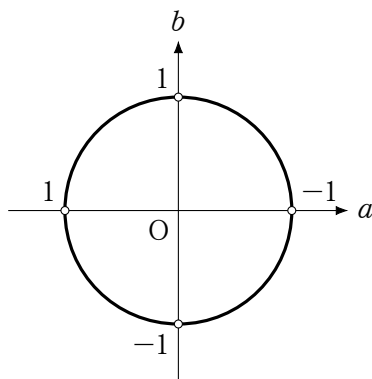
(1) $f(x) = (x-a)^2 + 1 - a^2$, $g(x) = (x-b)^2 + 1 - b^2$ である。 $|a| < 1$, $|b| < 1$ も合わせると、それぞれの解について、

$$\alpha = a \pm \sqrt{1-a^2}i, \beta = b \pm \sqrt{1-b^2}i$$

となる。よって、 $\operatorname{Re}(\alpha\beta) = ab \pm \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ であり、このいずれかが 0 になるような条件は、

$$\begin{aligned} (ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}) = 0 &\iff (ab)^2 - (\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})^2 = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 = 1 \end{aligned}$$

である。 $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ が除かれることに注意すると、これを満たすような (a, b) の集合は、下図の太実線部で、白丸を除く。



(2) $P(1, 1-a^2)$, $Q(b, 1-b^2)$ である。(1) の結果より、 $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$ ($-\pi < \theta < \pi$, $\theta \neq 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) とおくことができ、このとき、 PQ^2 は、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\sin \theta - \cos \theta)^2 + (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 \\ &= 1 - \sin 2\theta + \cos^2 2\theta \\ &= 1 - \sin 2\theta + (1 - \sin^2 2\theta) \\ &= -\left(\sin 2\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となるから、 $\sin 2\theta = -\frac{1}{2}$ のときに、 PQ の最大値は、 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ (答え)

5 おわりに

6 法政大学解答編

6.1 2023 年度実施

I

解

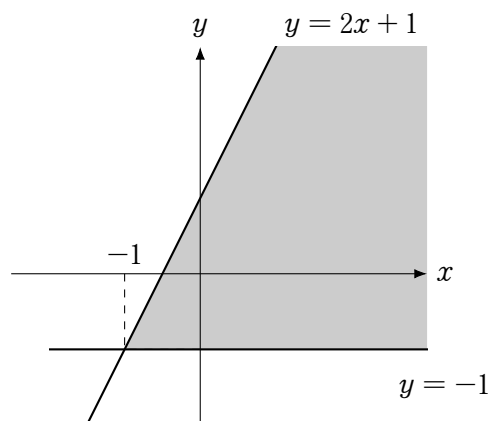
(1), (2)

$$D: |x - y| \leq x + 1$$

$$\begin{aligned} |x - y| \leq x + 1 &\iff -x - 1 \leq x - y \leq x + 1 \\ &\iff -2x - 1 \leq -y \leq 1 \\ &\iff -1 \leq y \leq 2x + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①に $x = 2$ を代入して, $-1 \leq y \leq 5$ (1) (答え)

さらに D を図示すると (2) の解答を得る.

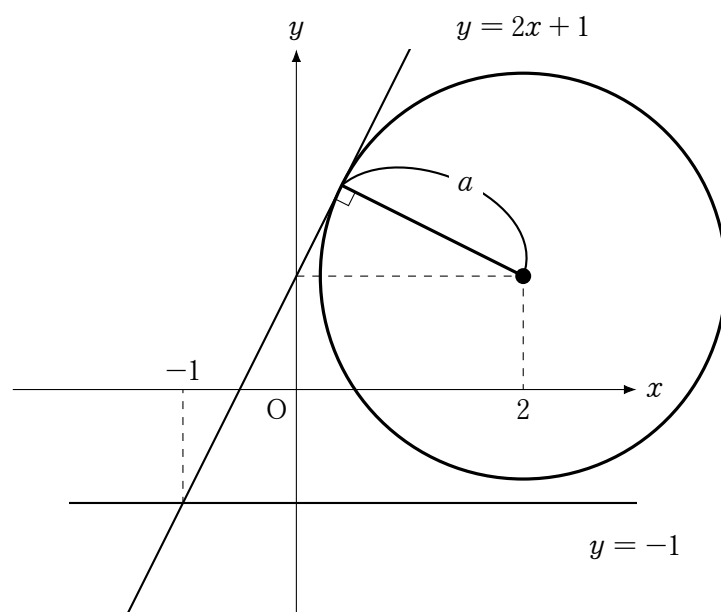


∴ W は上図の網目部で境界をすべて含む.

(3) $C: x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 - a^2 \leq 0$ とする. C が D の部分数集合となるような a の最大値を求める.

$$C: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq a^2 \iff \text{中心 } (2, 1) \text{ 半径 } a \text{ の円}$$

このことより, 次図のとき a は最大値を取る.



∴ 点と直線の距離公式より,

$$a = \frac{|4 - 1 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \dots\dots (\text{答え})$$

II

考え方

非常に厄介な確率の問題です. **場合分けが桁違いに多い.** です. (1), (2) を完答できていれば御の字です.

(3) では, 3 回目の B が引くカードがいずれにしても奇数であるということに気づく必要があります. そこから B の 3 回目のカードの値で場合分けします.

解

まず, A, B の n 回目 ($1 \leq n \leq 3$) のときのカードをそれぞれ a_n, b_n と表すことにする.

(1) 全事象は, $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 通りである.

ここで, $a = b$ が成立するのは,

$$a_1 + a_2 = b_1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成立するときである.

(i) $b_1 = 1, 2$ のとき

① を満たすような (a_1, a_2) は存在しない.

(ii) $b_1 = 3$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 2), (2, 1)$ の 2 通り.

(iii) $b_1 = 4$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 3), (3, 1)$ の 2 通り.

(iv) $b_1 = 5$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$ の 4 通り.

(v) $b_1 = 6$ のとき $(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (5, 1), (4, 2)$ の 4 通り.

\therefore 以上より, 求める確率は, $\frac{12}{120} = \frac{1}{10} \cdots \cdots$ (答え)

(2) 4 枚の札を引くときの全事象は, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ 通りである.

このとき,

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 (= k \text{ とおく.}) \cdots \cdots \textcircled{2} \iff k \text{ を 2 通りで表すことができる.}$$

これより,

(i) $k \leq 4$ or $k \geq 10$ のとき

② を満たすような (a_1, a_2, b_1, b_2) は存在しない.

(ii) $k = 5$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 4, 2, 3), (2, 3, 1, 4)$ の $(2! \times 2!) \times 2 = 8$ 通り.

(iii) $k = 6$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2) = (2, 4, 1, 5), (1, 5, 2, 4)$ の $(2! \times 2!) \times 2 = 8$ 通り.

(iv) $k = 7$ のとき

$3 + 4$ or $1 + 6$ or $2 + 5$ なので, ②を満たすような (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は,

$${}_3C_2 \times 2 \times 2 \times 2 = \{(a_1, a_2) \text{ か } (b_1, b_2) \text{ の選び方}\} \times (3 + 4, 1 + 6, 2 + 5 \text{ の並び替え}) \\ = 24 \text{ 通り}$$

(v) $k = 8$ のとき $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (2, 6, 3, 5), (3, 5, 2, 6)$ の $(2! \times 2!) \times 2 = 8$ 通り.

(vi) $k = 9$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2) = (3, 6, 4, 5), (4, 5, 3, 6)$ の $(2! \times 2!) \times 2 = 8$ 通り.

$$\therefore \text{求める確率は, } \frac{56}{360} = \frac{7}{45} \cdots \cdots (\text{答え})$$

(3) 余事象「6 回中少なくとも一回 $a = b$ 」が成立する確率を計算することにより, (3) の確率を求める.

$a = b$ が実現するのは, 3 回目以降であり, 3 回目のと 4 回目で $a = b$ が成立する確率は (1) 及び (2) で求めているので, 5 回目すなわち $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 (= \ell \text{ とおく.})$ が成立する確率のみ調べれば良い.

今, 全事象は, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ 通りである.

ここで, $a_1 + a_2 + a_3 = (\text{偶数})$ のとき, $a_n, b_n (1 \leq n \leq 3)$ の組み合わせは下表の通り.

	a_1	a_2	a_3	b_4	b_5	b_6
case1	き	き	き	ぐ	ぐ	ぐ
case2	き	き	ぐ	ぐ	ぐ	き
case3	ぐ	ぐ	ぐ	き	き	き

case1 のとき, 3 つの異なる奇数の和が 3 つの異なる偶数の和で表すことはできないので, case1 は成立しない.

次に, $a_1 + a_2 + a_3 = (\text{奇数})$ のときも同様に考える.

	a_1	a_2	a_3	b_4	b_5	b_6
case4	き	き	き	ぐ	ぐ	ぐ
case5	き	ぐ	ぐ	き	ぐ	き

このとき, case4 も同様の理由により不適である. また, いずれの case にしても b_3 は奇数である.

このことより, $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 21$ であり, b_3 は奇数であるから,

$$a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 = 2m \cdots \cdots \textcircled{3} (m \in \mathbb{N}) \text{ と表せる.}$$

このことより、 $b_3 = 1, 3, 5$ の場合で場合分けする.

(i) $b_3 = 1$ のとき $\ell = 10$ なので、これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 5) \\ (b_1, b_2) = (4, 6) \end{cases}$$

なので、 $3! \times 2! = 12$ 通りが満たす.

(ii) $b_3 = 3$ のとき $\ell = 9$ なので、これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 6) \\ (b_1, b_2) = (4, 5) \end{cases}$$

なので、12 通りがこれを満たす.

(iii) $b_3 = 5$ のとき

$\ell = 8$ なので、これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 4) \\ (b_1, b_2) = (2, 6) \end{cases}$$

なので、12 通りがこれを満たす.

\therefore 以上より、求める確率は、

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{7}{45} + \frac{1}{20} \right) &= 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{18 + 28 + 9}{36} \right) \\ &= \frac{25}{36} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

III

考え方

(2)が漸化式??と思いきや簡単な絶対不等式の問題です. II に比べたら簡単です!

でも絵を描くのは無理だったので参考図(手書き)を添付します.

解

(1) 図より,

$$\begin{aligned}BE_n &= \frac{1}{2}a_n \\CE_n &= 3 - \frac{1}{2}a_n \\CF_n &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{2}a_n\right) = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2} \\AF_n &= 3 - CF_n = \frac{a_n}{4} + \frac{3}{2} \\AD_{n+1} &= \frac{1}{2}AF_n = \frac{a_n}{8} + \frac{3}{4} \\BD_{n+1} &= 3 - AD_{n+1} = -\frac{a_n}{8} + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって, $BD_{n+1} = a_{n+1}$ なので,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{4} \iff a_n = 2 - \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad (\text{漸化式は暗算でいいよね??})$$

$$\therefore a_2 = \frac{17}{8}, a_3 = \frac{127}{64} \dots\dots (\text{答え})$$

(2)

$$\begin{aligned}|a_n - 2| < 10^{-9} &\iff \frac{1}{8^{n-1}} < 10^{-9} \\&\iff 2^{-3(n-1)} < 10^{-9} \\&\iff (n-1)\log_{10} 2 > 3 \\&\iff n > \frac{3}{\log_{10} 2} = 10.9\dots \div 10.9\end{aligned}$$

$$\therefore n = 11 \dots\dots (\text{答え})$$

6.2 2024 年度実施

I

考え方

(2) の連立方程式の計算が煩雑です. 同値性を崩さずに正しく場合分けできたでしょうか. 確認してください.

解

(1) $a = 1$ かつ $b = 16$ のとき

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 &= \log_2 4x = 2 + \log_2 x \\ \iff (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 1) &= 0 \\ \iff \log_2 x &= -2, 1 \\ \iff x &= \frac{1}{4}, 2, \dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) $x = 2\sqrt{2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} (\log_2 2\sqrt{2})^2 &= \log_2 (\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{2}^a) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 b + a \log_2 2^{\frac{3}{2}} \\ \therefore (\log_2 2^{\frac{3}{2}})^2 &= \frac{1}{2} \log_2 b + a \log_2 2^{\frac{3}{2}} \iff \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \log_2 b + \frac{3}{2} a \\ &\iff \frac{9}{2} = \log_2 b + 3a \dots \dots \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで, $x = \frac{b}{4}$ を元の式に代入すると,

$$\left(\log_2 \frac{b}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \log_2 b + a \log_2 \frac{b}{4} \iff (\log_2 b - 2)^2 = \frac{1}{2} \log_2 b + a(\log_2 b - 2) \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

さらに ② に ① を代入すると,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \textcircled{1} \\ \left(\frac{9}{2} - 3a - 2\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 3a\right) + a \left(\frac{9}{2} - 3a - 2\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{1} \\ \left(\frac{5}{2} - 3a\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 3a\right) + a \left(\frac{5}{2} - 3a\right) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \textcircled{1} \\ 25 - 60a + 36a^2 = 9 - 6a + 10a = 12a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{1} \\ 3a^2 - 4a + 1 = 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \textcircled{1} \\ a = \frac{1}{3}, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(i) $a = \frac{1}{3}$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より, } \frac{7}{2} = \log_2 b$$

$\therefore b = 2^{\frac{7}{2}} = 8\sqrt{2}$ これより, 与式は $2\sqrt{2}$ を重解にもつことになり, (2) の前提に反する.

よって, $a \neq \frac{1}{3}$ である.

(ii) $a = 1$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より, } \frac{9}{2} = \log_2 b + 3 \iff b = 2^{\frac{3}{2}}$$

このとき,

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 2^{\frac{3}{4}} \cdot x = \frac{3}{4} + \log_2 x$$

$$\iff 4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3 = 0$$

$$\iff (2\log_2 x - 3)(2\log_2 x + 1) = 0$$

$$\iff x = 2^{\frac{3}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\iff x = 2\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより, $a = 1$ のとき確かに $2\sqrt{2}$ と $\frac{b}{4}$ を解に持つ.

$\therefore \mathbf{a = 1, b = 2^{\frac{3}{2}} \cdots \cdots}$ (答え)

II

考え方

難易度は高くありませんが計算が煩雑です. 落ち着いて計算しましょう.

解

(1) 参考図を適宜参照せよ.

$$\begin{cases} \theta = 30^\circ \\ \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \quad \text{のとき, } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EC} \text{ である. ここで,}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{-3}{6} \right) + \frac{1}{2} \times 4 - \frac{2}{9} \times 9 \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) P は直線 BC 上の点なので, $0 \leq t \leq 1$ をみたすある実数 t を用いて, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$ と表せる.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EP} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}t \right) + \frac{t}{2} \cdot |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{2}{9} |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= 6 \cos \theta \times \frac{1}{6} (1 - 4t) + 2t - 2 \\ &= \cos \theta - 2 + t(2 - 4 \cos \theta) \\ &= \cos \theta - 2 + 2t(1 - 2 \cos \theta) \dots\dots\dots \textcircled{1} \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

t が $0 \leq t \leq 1$ を満たす任意の値 w をとるとき, $t = 0$ でも成り立つので

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos \theta &\Longleftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \dots\dots (\text{答え}) \end{aligned}$$

このとき, $\theta = \frac{\pi}{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入して,

$$k = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \dots\dots (\text{答え})$$

(3) $EF = EP$ かつ $k = -1$ を満たすとき $BP : PC$ の値を求める.

考え方

どうしたらいいか判然としないタイプの問題は、 とりあえず **与えられた情報を同値変形** しましょう!

$$\begin{aligned}
 EF = EP &\iff |\overrightarrow{EF}|^2 = |\overrightarrow{FP}|^2 \\
 &\iff \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right|^2 = \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \right|^2 \\
 &\iff \frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 = t^2|\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{2}{3}t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 \\
 &\iff 1 - 4\cos\theta + 4 = 4t^2 + 4t\cos\theta + 1 \\
 &\iff 4t^2 + 4t\cos\theta + 4\cos\theta - 4 = 0 \\
 &\iff t^2 + \cos\theta(t+1) - 1 = 0 \dots\dots\dots ②
 \end{aligned}$$

一方, $k = -1$ より

$$\begin{aligned}
 -1 &= \cos\theta - 2 + 2t(1 - 2\cos\theta) \\
 &\iff -1 = \cos\theta - 2 + 2t - 4t\cos\theta \\
 &\iff \cos\theta(4t - 1) = -1 + 2t \\
 &\iff \cos\theta = \frac{2t-1}{4t-1} \dots\dots\dots ③
 \end{aligned}$$

よって, ②と③より, ③を②に代入すると

$$\begin{aligned}
 t^2 + (t+1) \cdot \frac{2t-1}{4t-1} - 1 &= 0 \\
 &\iff \frac{t^2(4t-1) + (t+1)(2t-1) - (4t-1)}{4t-1} = 0 \\
 &\iff \frac{4t^3 + t^2 - 3t}{4t-1} = 0 \\
 &\iff \begin{cases} t(t+1)(4t-3) = 0 \\ t \neq \frac{1}{4} \end{cases} \\
 &\iff t = 0, -1, \frac{3}{4} \\
 &\iff t = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$\therefore t = 0$ のとき, $\theta = 0$ となり不適であるので, $t = \frac{3}{4}$ である.

$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ なので, $BP : PC = 3 : 1 \dots\dots\dots$ (答え)

III

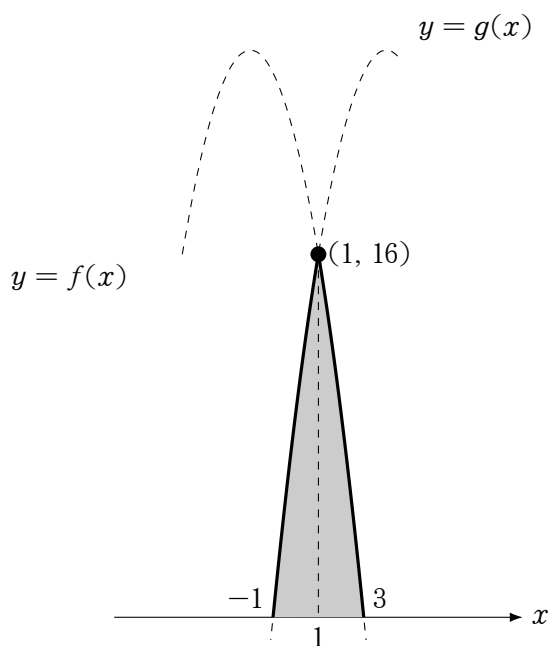
考え方

落ち着いて， グラフを描けば大丈夫です．

また関数形がややこしいので， $m(x)$ と $M(x)$ のどちらを採用するか気をつけましょう．($f(x)$ と $g(x)$ の上下関係に気を付ける)

解

(1) $a = 21$ のとき， $m(x) = \begin{cases} g(x) = -x^2 + 8x + 9 = -(x-9)(x+1) \\ f(x) = -x^2 - 4x + 21 = -(x+7)(x-3) \end{cases}$ であり更に $f(x) - g(x) = -12x + 12 = 12(1-x)$ であるから下図の網目部が求める面積である．



∴ 求める面積 S_1 とすると，上図より，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 8x + 9) dx + \int_1^3 (-x^2 - 4x + 21) dx \\ &= (\text{頑張って計算} \cdots) \\ &= \frac{104}{3} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) ℓ の傾きが2より、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の微分係数をそれぞれ計算することにより、

$$\begin{aligned} \begin{cases} g'(x) = -2x + 8 \\ f'(x) = -2x - 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2 = -2x + 8 \\ 2 = -2x - 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 & (\ell \text{と } y = g(x) \text{ の接点の } x \text{ 座標}) \\ x = -3 & (\ell \text{と } y = f(x) \text{ の接点の } x \text{ 座標}) \end{cases} \end{aligned}$$

よって、このとき ℓ の方程式は、

$$\ell: y = 2(x - 3) + 24 = 2x + 18$$

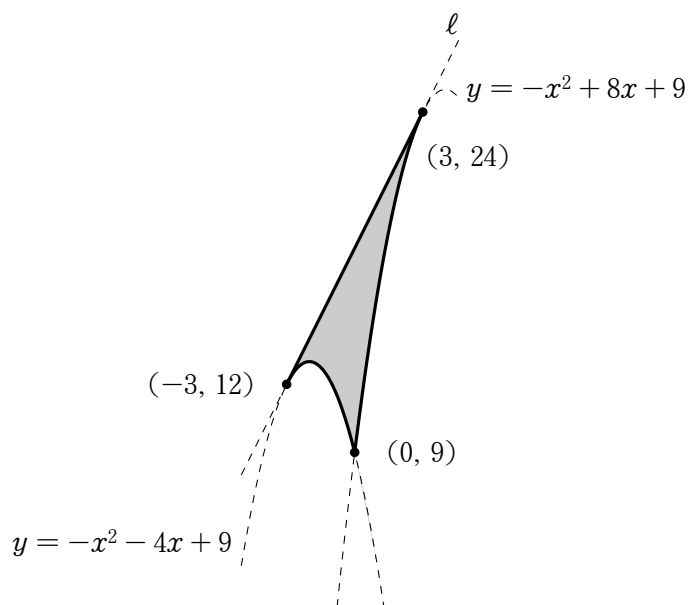
これより、 $x = -3$ のとき、 $f(-3) = 12$ を満たすので、

$$-9 + 12 + a = 12 \iff a = 9 \cdots \cdots (\text{答え})$$

$$\therefore M(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 9 & (f(x) \geq g(x)) \\ -x^2 + 8x + 9 & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標は、 $f(x) = g(x) \iff x = 0$ である。

従って、求める面積 S_2 とすると、それは次図の網目部である。



上図より、 S_2 は、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-3}^0 \{2x + 18 - (-x^2 - 4x + 9)\} dx + \int_0^3 \{2x + 18 - (-x^2 + 8x + 9)\} dx \\ &= (\text{頑張って計算}) \\ &= 18 \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

6.3 2025 年度実施

I

考え方

1 次元数直線上の解の個数の問題です.**共通部分なのか合併集合なのか**を意識して解けば間違えるところはありません.(合併集合=合わせた部分)

解

$$\begin{cases} 2x^2 - 4bx + 15b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + 8x + b + 15 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とおく.

(1) $a = 5$ のとき

$$\begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - 4bx + 15b = 0 \\ x^2 + 8x + b + 15 = 0 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} \begin{cases} D_1 = 4b^2 - 30b = 0 \\ D_2 = 16 - b - 15 \geq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b(2b - 15) = 0 \\ b \leq 1 \end{cases} \\ &\iff \mathbf{b = 0} \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) D_1, D_2 を計算すると,

$$\begin{aligned} \begin{cases} D_1 = 4b^2 - 6ab = 0 \\ D_2 = a^2 - 4a - 6 \geq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2b(2b - 3a) = 0 \\ a^2 - 4a - 6 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \quad \text{or} \quad b = \frac{3}{2}a \\ a^2 - 4a - 6 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

これより,

- $b = 0$ のとき

$$a^2 - 4a - 6 \leq 0 \iff 2 - \sqrt{10} \leq a \leq 2 + \sqrt{10} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- $b = \frac{3}{2}a$ のとき

$$\begin{aligned} a^2 - 4a - 6 + \frac{3}{2}a &\leq 0 \iff 2a^2 - 5a - 12 \leq 0 \\ &\iff (2a + 3)(a - 4) \leq 0 \\ &\iff -\frac{3}{2}a \leq a \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

また、 $a = \frac{2}{3}a$ より b の取りうる値の範囲は、 $-\frac{a}{4} \leq b \leq 6$ ……⑤

$\therefore a$ の取りうる値の範囲は、③ と ④ を合わせた範囲なので、 $-\frac{3}{2} \leq a \leq 2\sqrt{10}$ ……(答え)

$\therefore b$ の取りうる値の範囲は、⑤ と $b = 0$ を合わせた範囲なので、 $-\frac{9}{4} \leq b \leq 6$ ……(答え)

(3) $-\frac{3}{2} \leq a \leq 2\sqrt{10}$ または $-\frac{9}{4} \leq b \leq 6$ を満たす a, b の個数を数えれば良い.

まず、 $-\frac{3}{2} \leq a \leq 2\sqrt{10}$ を満たす a は、 $a = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の計 7 個.

次に、 $-\frac{9}{4} \leq b \leq 6$ を満たす b は、 $b = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の計 9 個.

\therefore 求める (a, b) の組の個数は 9 個……(答え).

II

考え方

完答意外ない.

解

(1) 玉を2回取り出してOにいる確率は、 $\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 2\right) \times 2 = \frac{1}{4} \dots\dots$ (答え)

(2) 玉を3回取り出してPが(1, 0)にいるとき,

$\rightarrow\uparrow\downarrow, \rightarrow\rightarrow\leftarrow$

の2通りなので、求める確率は、 $3! \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{9}{64} \dots\dots$ (答え)

(3) 玉を4回取り出してPが(1, 1)にいるとき,

$\nearrow\rightarrow\leftarrow, \nearrow\uparrow\downarrow$

であり、 $\nearrow\rightarrow\uparrow$ であることに注意して、求める確率は、 $\frac{4!}{2!} \times 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{32} \dots\dots$ (答え)

III

考え方

対称性： $y = f(-x) = -f(x)$ であり、 $-y = f(x)$ なので、 $y = f(x)$ のグラフは原点について対称です。
これですべての積分計算を楽に済ませることができます。

解

$f(x) = 3x^3 - (a+1)^2x = x\{\sqrt{3}x + (a+1)\}\{\sqrt{3}x - (a+1)\}$ と因数分解でき、更に $(x, y) = (-x, -y)$ とすると、 $y = f(x)$ なので、 $y = f(x)$ のグラフは原点について対称である。

また、 $\alpha = -\frac{a+1}{\sqrt{3}}, \beta = \frac{a+1}{\sqrt{3}} (\alpha < \beta)$ とおく。

(1) 対称性より、

$$\frac{27}{2} = 2 \times \int_0^\beta (-f(x)) dx \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。

ここで、

$$\begin{aligned} -\int_0^\beta f(x) dx &= \int_\beta^0 \{3x^3 - (a+1)^2x\} dx \\ &= \frac{3}{4} \left[x^4 \right]_\beta^0 - \frac{(a+1)^2}{2} \left[x^2 \right]_\beta^0 \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{(a+1)^4}{9} + \frac{(a+1)^4}{6} \\ &= (a+1)^4 \cdot \frac{1}{12} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(a+1)^4 &= \frac{27}{2} \iff (a+1)^4 = 3^4 \\ &\iff a+1 = 3 \\ &\iff a = 2 \cdots \cdots (\text{答え}) \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = 9x^2 - (a+1)^2 = 9\left(x + \frac{a+1}{3}\right)\left(x - \frac{a+1}{3}\right)$ より、次の増減表を得る。

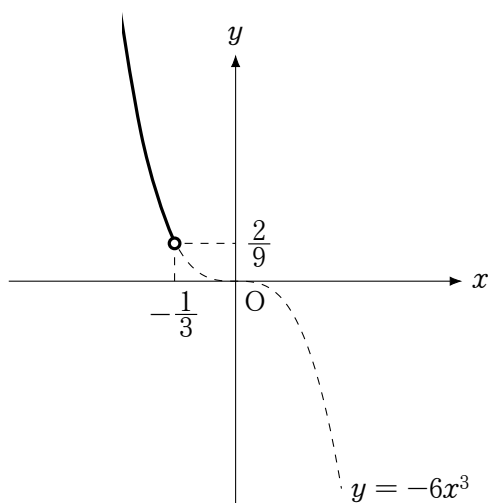
x	...	$-\frac{a+1}{3}$...	$\frac{a+1}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $p = -\frac{a+1}{3}$ なので、極大値は $f(p) = 3p^3 - (a+1)^2p$ であるから $(p, f(p))$ の軌跡を W と

すると, $X = p, Y = f(p)$ とおけて,

$$\begin{aligned}
 (X, Y) \in W &\iff \exists p, \begin{cases} p = X \\ Y = 3p^3 - (a+1)^2 p \end{cases} \\
 &\iff \exists a, \begin{cases} Y = 3X^3 - (a+1)^2 X \\ a+1 = -3X \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} Y = 3X^3 - 9X^3 = -6X^3 \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ a > 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3X - 1 > 0 \\ \textcircled{2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} X < -\frac{1}{3} \\ \textcircled{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\therefore W$ は, $\begin{cases} y = -6x^3 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ で, 次図の太実線部である. ただし, 白丸は含まない.



7 条件付き確率解答

問題

袋の中に 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードが入ってる．この袋の中からカードを 1 枚取り出し，取り出したカードに書かれている数字を記録し，袋の中に戻す操作を繰り返す．

2 回目までの操作で出た数字の和を X とし，3 回目までの操作で記録された数字の和を Y とする．

Y が 3 の倍数となるときの， X が 5 の倍数であった条件付き確率を求めよ．

考え方

mod を使うには，それぞれの試行回数の時の数を文字でおいて考える必要があります．

解

1 回目，2 回目，3 回目のそれぞれのカードの数字を a_1, a_2, a_3 とする．

このとき，

$$P_Y(X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(Y)} = \frac{n(Y \cap X)}{n(Y)}$$

を求める．また，1 回目，2 回目，3 回目それぞれのカードに書かれていた数字を a_1, a_2, a_3 とおくと

$$\begin{cases} X = a_1 + a_2 \\ Y = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases} \iff \begin{cases} X = a_1 + a_2 \\ Y = X + a_3 \end{cases}$$

である．今，1 ～ 10 を mod 3 で分類すると，次表を得る．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n \pmod{3}$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

すなわち， $\{3, 6, 9\}$ ：余り 0， $\{1, 4, 7, 10\}$ ：余り 1， $\{2, 5, 8\}$ ：余り 2 である．

まず， $n(Y \cap X)$ を求める．

$X \equiv 0 \pmod{5}$ になる X は， $X = 5, 10, 15, 20$ のときで，それぞれ $X \equiv 2, 1, 0, 2 \pmod{3}$ であり， $X \cap Y$ は次の 4 通りで場合分けできる．

(i) $X = 5$ のとき，

$(a_1, a_2) = (1, 4)(2, 3)$ の 4 通りで， a_3 が mod 3 で 1 であればよいから， $4 \times 4 = 16$ 通り．

(ii) $X = 10$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 9)(2, 8)(3, 7)(4, 6)(5, 5)$ の 9 と通りで， a_3 が mod 3 で 2 であればよいから， $9 \times 3 = 27$ 通り．

(iii) $X = 15$ のとき

$(a_1, a_2) = (10, 5)(9, 6)(8, 7)$ の 6 通りで, a_3 が $(\text{mod } 3)$ で 0 であればよいから, $6 \times 3 = 18$ 通り.

(iv) $X = 20$ のとき

$(a_1, a_2) = (10, 10)$ の 1 通りで, a_3 が $(\text{mod } 3)$ で 2 であればよいから, $1 \times 3 = 3$ 通り.

\therefore 以上 (i) から (iv) まですべて足すと, 65 通りでこれが $n(Y \cap X)$ である.

次に, $Y \equiv 0 \pmod{3}$ であるような (a_1, a_2, a_3) の総数を求める.

(I) $X \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$Y = X + a_3 \equiv 0 \pmod{3}$ なる a_3 は, 余りが 0 であれば良いので, $a_3 = 3, 6, 9$ の 3 つであり, $X \equiv 0 \pmod{3}$ なる (a_1, a_2) の組は, $(a_1, a_2) \equiv (0, 0)(1, 2)(2, 1)$ で, $3 \times 3 + 4 \times 3 + 4 \times 3 = 33$ 通りである. よって, これを満たす (a_1, a_2, a_3) の組の総数は, $3 \times 33 = 99$ 通りである.

(II) $X \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$Y = X + a_3 \equiv 0 \pmod{3}$ なる a_3 は, 余りが 2 であれば良いので, $a_3 = 2, 5, 8$ の 3 つであり, $X \equiv 1 \pmod{3}$ なる (a_1, a_2) の組は, $(a_1, a_2) \equiv (0, 1)(1, 0)(2, 2)$ で, $3 \times 4 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 33$ 通りである. よって, これを満たす (a_1, a_2, a_3) の組の総数は, $3 \times 33 = 99$ 通りである.

(III) $X \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$Y = X + a_3 \equiv 0 \pmod{3}$ なる a_3 は, 余りが 1 であれば良いので, $a_3 = 1, 4, 7, 10$ の 4 つであり, $X \equiv 2 \pmod{3}$ なる (a_1, a_2) の組は, $(a_1, a_2) \equiv (0, 2)(2, 0)(1, 1)$ で, $3 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 34$ 通りである. よって, これを満たす (a_1, a_2, a_3) の組の総数は, $4 \times 34 = 136$ 通りである.

\therefore 以上 (I) ~ (III) まですべて足すと, 334 通りでこれが $n(Y)$ である.

\therefore 以上より, 求める条件付き確率は, $\frac{65}{334} \cdots \cdots$ (答え)