1.〔θ の範囲に注意せよ〕(青山学院大)

t を $0 \leqq t \leqq \pi$ を満たす実数とし, xy 平面上の放物線

$$C : y = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$$

の頂点を P とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ.

(2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求めよ.

(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき, 点 P の y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの t の値を求めよ.

2.〔見た目に惑わされてはいけない〕(中央大)

数列 $\{a_n\}$ を, 条件 $a_1=1$ と漸化式

$a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!\,(n=1, 2, 3, \cdots)$

によって定める. ただし, $0!=1$ である. また, 数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_n}{n!}$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) b_1, b_2, b_3を求めよ. 答えのみ記せば良い.

(2) $\{b_n\}$の満たすべき漸化式を求めよ. また, $\{b_n\}$の一般項を求め$\{a_n\}$の一般項を求めよ.

(3) n を自然数とする. 次の等式を証明せよ.

$\sum_{K=1}^{n} 2^{k-1}a_k=2^n n!-1$

考え方

誘導に乗ることができればどの小問も優しいです. 教科書レベルの問題になります. ただ, (2)に関しては, $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ を b_nの式だけで表したいので a_{n+1}の漸化式を両辺 $(n+1)!$で割り算すれば $\boldsymbol{b_n}$ の階差数列になります.

解

(1) $b_1=\dfrac{a_1}{1!}=\mathbf{1}$

$b_2=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{2\cdot a_1+0!}{2\cdot 1}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$b_3=\dfrac{a_3}{3!}=\dfrac{3\cdot a_2+1!}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$……(**答え**)

(2) $a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!$の両辺を $(n+1)!$で割ることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)}\text{……(答え)}$$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\left[\frac{1}{k}\right]_1^n$$
$$=1-\left(\frac{1}{n}-1\right)=2-\frac{1}{n}(n\geqq 1)$$

これは、$n=1$ のときも成立する.

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\left(2-\frac{1}{n}\right)n!\,(n\geqq 1)}\text{……(答え)}$$

（３）（２）より,（３）における示すべき等式は次のように書ける.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot \left(2-\frac{1}{k}\right)k! = 2^n n! - 1 \cdots\cdots ①$$

このことより,

$$2^{k-1}\left(2-\frac{1}{k}\right)k! = 2^{k-1}\{2k! - (k-1)!\}$$

$$= 2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!$$ ☜**差分型！（階差型！）**

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\{2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!\} = \Big[\, 2^{k-1} \cdot (k-1)! \,\Big]_1^{n+1}$$

$$= 2^n \cdot n! - (1 \cdot 0!) = 2^n n! - 1$$ **（証明終わり）**