

1. [θ の範囲に注意せよ](青山学院大)

t を $0 \leq t \leq \pi$ を満たす実数とし, xy 平面上の放物線

$$C: y = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$$

の頂点を P とおくと, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P の座標を t を用いて表せ.
- (2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求めよ.
- (3) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき, 点 P の y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの t の値を求めよ.

考え方

よくある典型的な解の配置問題です.(3) で少々方針を決めかねるかも知れませんが, 合成で普通に解きましょう.

解

- (1) $f(x) = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$ とおくと,

$f'(x) = 2x - 2(2\sin t)$ なので, 点 P の座標は, $(2\sin t, -4\sin^2 t + \sin t \cos t) \cdots \cdots$ (答え)

- (2) 「C が x 軸の正の部分で異なる 2 点と交わる.」 $\iff \begin{cases} \text{点 P の } x, y \text{ 座標が共に正} \\ F(0) > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \sin t > 0 \\ -4\sin^2 t + \sin t \cos t > 0 \\ \sin t \cos t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t > 0 \\ \cos t > 0 \\ \sin t(4\sin t - \cos t) < 0 \end{cases}$$

$$\iff 0 < t < \frac{\pi}{2} \cdots \cdots \text{(答え)}$$

- (3) $g(t) = -4\sin^2 t + \sin t \cos t$ とおくと, 半角の公式より, $g(t) = -4 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + \sin t \cos t$ と書ける.

これを整理すると, $g(t) = \frac{1}{2}(\sin 2t + 4\cos 2t) - 2$ と書くことができるので, これを更に合成することにより,

$$g(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{17} \sin(2t + \phi)) - 2 \cdots \cdots \text{①} \quad \left(\text{ただし, } \phi \text{ は } \begin{cases} \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin \phi = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \text{ を満たす角である.} \right)$$

ここで, $2t + \phi$ の取りうる値の範囲は, ϕ が第一象限の角であることから, $\frac{\pi}{2} < 2t + \phi < 2\pi + \frac{\pi}{2}$ なので,

$$\begin{cases} \max g(t) = \frac{\sqrt{17}}{2} - 2 \\ \min g(t) = -\frac{\sqrt{17}}{2} - 2 \end{cases} \cdots \cdots \text{(答え) である.}$$

2. [見た目に惑わされてはいけない] (中央大)

数列 $\{a_n\}$ を, 条件 $a_1 = 1$ と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + (n-1)! \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. ただし, $0! = 1$ である. また, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) b_1, b_2, b_3 を求めよ. 答えのみ記せば良い.

(2) $\{b_n\}$ の満たすべき漸化式を求めよ. また, $\{b_n\}$ の一般項を求め $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) n を自然数とする. 次の等式を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k = 2^n n! - 1$$

考え方

誘導に乗ることができればどの小問も優しいです. 教科書レベルの問題になります. ただ, (2) に関しては, $b_n = \frac{a_n}{n!}$ を b_n の式だけで表したいので a_{n+1} の漸化式を両辺 $(n+1)!$ で割り算すれば b_n の階差数列になります.

解

$$(1) \quad b_1 = \frac{a_1}{1!} = 1$$

$$b_2 = \frac{a_2}{2!} = \frac{2 \cdot a_1 + 0!}{2 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$b_3 = \frac{a_3}{3!} = \frac{3 \cdot a_2 + 1!}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{3} \dots \dots (\text{答え})$$

(2) $a_{n+1} = (n+1)a_n + (n-1)!$ の両辺を $(n+1)!$ で割ることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1) \dots \dots (\text{答え})$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \left[\frac{1}{k} \right]_1^n \\ &= 1 - \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

これは, $n=1$ のときも成立する.

$$\therefore a_n = \left(2 - \frac{1}{n} \right) n! \quad (n \geq 1) \dots \dots (\text{答え})$$

(3) (2) より, (3) における示すべき等式は次のように書ける.

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) k! = 2^n n! - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このことより,

$$2^{k-1} \left(2 - \frac{1}{k}\right) k! = 2^{k-1} \{2k! - (k-1)!\}$$

$$= 2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)! \quad \text{⚡差分型! (階差型!)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \{2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!\} = \left[2^{k-1} \cdot (k-1)! \right]_1^{n+1}$$

$$= 2^n \cdot n! - (1 \cdot 0!) = 2^n n! - 1 \quad \text{(証明終わり)}$$

3. [人は見かけによらない] (津田塾大-文系)

次の問いに答えよ.

(1) 袋の中に赤玉 5 個, 白玉 3 個の合計 8 個の玉が入っている. この中から一度に 3 個の玉を取り出したとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個取り出される確率を求めよ.

(2) 袋の中に赤玉 n 個, 白玉 9 個の合計 $n+9$ 個の玉が入っている. この中から一度に 3 個の玉を取り出したとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個取り出される確率 P_n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(3) (2) の P_n について, $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ を満たす n を全て求めよ.

(4) (2) の P_n について, P_n を最大にする n を求めよ.

考え方

愚直に確率を計算するだけです. 計算ミスに気をつけましょう.

解

$$(1) \quad \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{{}_8C_3} = \frac{15}{56} \dots\dots (\text{答え})$$

$$(2) \quad P_n = \frac{{}_nC_1 \times {}_9C_2}{{}_{n+9}C_3} = \frac{216n}{(n+9)(n+8)(n+7)} \dots\dots (\text{答え})$$

$$(3) \quad P_{n+1} = \frac{216(n+1)}{(n+10)(n+9)(n+8)} \text{ より,}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{216(n+1)/(n+10)(n+9)(n+8)}{216n/(n+9)(n+8)(n+7)} = \frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)}$$

なので,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \iff \frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)} > 1$$

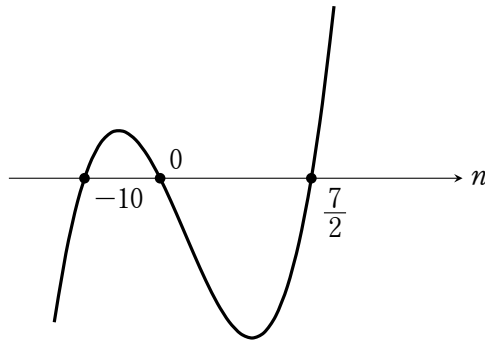
$$\iff \frac{(n+1)(n+7) - n(n+10)}{n(n+10)} > 0$$

$$\iff -\frac{2n-7}{n(n+10)} > 0$$

$$\iff \frac{2n-7}{n+10} < 0$$

$$\iff (2n-7)n(n+10) < 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

① が満たす領域を図示すると次図の斜線部である.



上図の斜線部が①が満たす領域である. n が自然数であることから, $0 < n < \frac{7}{2}$ を満たす自然数 n を求めればよいので, 求める n は $\boldsymbol{n = 1, 2, 3 \cdots \cdots}$ (答え)

(4) ①より,

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 \cdots$$

なので, P_n を最大にするような n は, $\boldsymbol{n = 4 \cdots \cdots}$ (答え) $\left(\because \begin{cases} \frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Rightarrow n < 4 \\ \frac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \Rightarrow n > 4 \end{cases} \right)$