早稲田大学ー社会科学部ー過去問演習と良問演習

大島　遙斗

2025年12月20日

はじめに

長い長い受験勉強もとうとう終わりが見えてきました．今これを書いているのは 12 月の 14 日の深夜です．今から，2 ヶ月後の理瀬さんはもう大学入試を終えています．さて， どんな景色が見えているのでしょうか．

今から志望校の合格にできることは， たくさん問題をといてパターンをたくさん身につけるのではなく，

出会った問題から何を学ぶか?

です．
1 日 1 日を大切に頑張っていきましょう．

また， 勉強の相談やメンタル的にしんどいなどあれば気軽に電話なり， 直接僕に話しかけたりして教えてください！いつでも相談にのります!最終局面に向けて一緒に頑張りましょう．

大島　遙斗

本書の使い方

まず， このテキストは **早稲田の三年分の過去問と僕が選んだ良問** の二部から構成されています．

それぞれ 1 週間のうちに解いてきてください．

・過去問について

言わずもがなよく復習してください．何がダメで次はどうすれば解けるようになるのか， どのような発想があったら解くことができていたのか， を考えながら復習しましょう．

・良問について

立教が一応のところの第一志望だと思うので掲載する問題は，**|標準|〜|やや難|** の問題を集めます．また， 以下の記号を用います．

A→ 基本的な問題．教科書レベル．

B → 標準的な問題．ぜひ解き切って欲しい問題．

C → 難問．この問題が解けなくても， 周りの受験生とはあまり差がつかない．

例えば， 次のように問題の横に書いたら次のように捉えてください．

〔B15〕= 標準的な問題で目標解答時間は，15 分

また， 本題の他に ▶ 類題演習 ◀ というものを掲載します．必ずしも解いてくる必要はありません．自分の実力向上に役立ててください．

目次

1　早稲田大学過去問題編

1.1　2023 年実施

2023 年度：数学

注意事項

1.　試験開始の合図があるまで， 問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと．

2.　問題は **10〜11 ページ** に記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明， ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は， 手を挙げて試験員に知らせること．

3.　解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること．

4.　記述解答用紙記入上の注意

（1）試験開始後， 記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に， 氏名及び受験番号を正確に記入すること．

（2）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある．

（3）受験番号の記入にあたっては， 次の数字見本にしたがい， 読みやすいように， 正確に記入すること．

（4）受験番号は右詰めで記入し， 余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること．

（5）計算の途中過程を記述すること．記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある．

（6）　定規， コンパスを使用してもよい．

5.　あとは

6.　なんだかんだ

7.　色々と

8.　注意事項が

9.　書いてあります．

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

曲線 $y = ax^2 + b$ 上に x 座標が p である点 P をとり, 点 P における接線を ℓとする.
ただし, 定数 a, b は $a > 0, b > 0$ を満たすとする. 次の問に答えよ.

(1) 接線 ℓの方程式を a, b, p を用いて表せ.

(2) 接線 ℓと $y = ax^2$で囲まれた部分の面積 S を a, b を用いて表せ.

(3) 接線 ℓと曲線 $y = ax^2 + \dfrac{b}{2}$で囲まれた図形の面積を S'としたとき, S'を S を用いて表せ.

(4) 接線 ℓと曲線 $y = ax^2 + c$ で囲まれた部分の面積 S''とする.$S'' = \dfrac{S}{2}$のとき, c を a, b を用いて表せ. ただし, $b > c$ とする.

2.

定数 m に対して x, y, z の方程式

$$xyz + x + y + z = xy + yz + zx + m \qquad \cdots ①$$

を考える. 次の問に答えよ.

(1) $m = 1$ のとき ① 式をみたす実数 x, y, z の組をすべて求めよ.

(2) $m = 5$ のとき ① 式を満たす実数 x, y, z の組をすべて求めよ. ただし, $x \leqq y \leqq z$ とする.

(3) $xyz = x + y + z$ を満たす整数 x, y, z の組をすべて求めよ. ただし, $0 < x \leqq y \leqq z$ とする.

3.

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする. 次の問に答えよ.

（１）　a^3を a の 1 次式で表せ.

（２）　a は整数であることを示せ.

（３）　$b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするとき, b を超えない最大の整数を求めよ.

〔以　下　余　白〕

1.2　2024 年度実施

2024 年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと．

2. 問題は **17〜18 ページ** に記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること．

3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること．

4. 記述解答用紙記入上の注意

　（1）試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること．

　（2）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある．

　（3）受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること．

　（4）受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること．

　（5）計算の途中過程を記述すること．記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある．

　（6）　定規，コンパスを使用してもよい．

5. あとは

6. なんだかんだ

7. 色々と

8. 注意事項が

9. 書いてあります．

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

連立不等式

$$y \leqq -\frac{2}{3}x+4, \qquad y \geqq x-1, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0$$

の表す領域を D とする．点 $(x,\, y)$ が D を動くとき，次の問に答えよ．

（1） 領域 D を座標平面上に図示せよ．

（2） $-2x+y$ の最大値と，そのときの $x,\, y$ の値を求めよ．

（3） $2x+y$ の最大値と，そのときの $x,\, y$ の値を求めよ．

（4） a がすべての実数を動くとき，$ax+y$ の最大値を a で分類せよ．

2.

OA $=6$, OB $=5$, AB $=7$ である △OAB について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく．次の問に答えよ．

（1） △OAB の内心を I, 辺 AB と直線 OI の交点を C とする.$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ．

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ．

（3） 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ．

（4） △OAB の垂心を H, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, s, t で表せ．

（5） s, t の値を求めよ．

3.

n を $n \geqq 3$ である自然数とする. 相異なる n 個の正の数を小さい順に並べた集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を考える.$a_1=k$ とするとき, 次の問に答えよ.

（1） $a_i-a_1(i=2, 3, \cdots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_2 を求めよ.

（2） （1） のとき, a_n を n で表せ.

（3） $\dfrac{a_i}{a_1}(i=2, 3, \cdots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_n を n の式で表せ.

〔以　下　余　白〕

1.3　2025 年度実施

2025 年度：数学

注意事項

1.　試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと．

2.　問題は **24〜25 ページ** に記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること．

3.　解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること．

4.　記述解答用紙記入上の注意

（１）試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること．

（２）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある．

（３）受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること．

（４）受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること．

（５）計算の途中過程を記述すること．記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある．

（６）　定規，コンパスを使用してもよい．

5.　あとは

6.　なんだかんだ

7.　色々と

8.　注意事項が

9.　書いてあります．

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

自然数 n, p に対して, n^p の 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す. 次の問に答えよ.

（１）　$f_2(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.

（２）　$f_5(n) - f_1(n)$ の値をすべて求めよ.

（３）　$f_{100}(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.

2.

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{B_n\}$, すなわち,

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする. 次の問に答えよ.

（１）　$a_n = -\dfrac{1}{n}$ のとき, b_m を n の式で表せ.

（２）　$b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ のとき, a_n を n の式で表せ.

（３）　数列 $\{b_n\}$ が以下を満たすとき a_n を n の式で表せ. ただし, $a_1 = 1$ とする.

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = n(n+1) \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

3.

θ の関数

$$f(\theta) = \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

を考える．ただし，$0 \leqq \theta\pi$ とする．次の問に答えよ．

（１）　$k = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を k の関数で表せ．

（２）　$f(\theta)$ の最大値，最小値をも求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

（３）　（１）の k に対して，θ の方程式 $f(\theta) = ak$ の解の個数を求めよ．ただし，定数 a は $0 < a \leqq 3$ とする．

〔以　下　余　白〕

2　良問集問題編

2.1　第 1 回

まずは，単純な計算問題で肩慣らしといきましょう．おっとその前に公式の確認です．

公 式

1°　$|X| = k \iff X = \pm k$ かつ $k \geqq 0$

2°　$|X| < k \iff -k < X < k$

3°　$|X| > k \iff X > k$ または $X < -k$

1.0.〔絶対値と不等式（A10)〕

以下の不等式をそれぞれ解け．

（1）　$|x+3| \geqq |x-2|$　　（25　宮崎大・教，農）

（2）　$|4x-1| < |x+3|$　　（25　福島大）

▶ 類題演習 1.1◀

（1）　不等式 $|2x-3| \leqq 2$ の解を求めよ．さらに，不等式 $|2x-3| \leqq 2 \leqq \dfrac{1-3a}{3}x-1$ の解が $1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ となるような定数 a の値を求めよ．　　（25　同志社女子大）

（2）　$|x| + |x-3| < 4$ を解け．　　（25　大東文化大）

続いて，座標平面と幾何の絡んだ問題です．立教の過去問演習を見ている感じ，苦手そうだったので特集します．

1.2.0.〔座標平面と幾何 1〕(B20)

座標平面上の点 Q(3, 5) と放物線 C: $y=x^2$ 上を動く点 P$(t,\ t^2)$ について，以下の問に答えよ．

（1） 点 Q から放物線 C へ引いた 2 本の接線の方程式とそれぞれの接点の座標を求めよ．

（2） 点 P が点 (2, 4) から点 $(-3,\ 9)$ まで動くとき，線分 PQ が通過する領域の面積を求めよ．

（25　福岡大・理）

1.2.1〔座標平面と幾何 2〕(B15)

座標平面上に A(25, 0), B(0, 20), C(10, 0) がある．点 P が点 C を中心とする半径 6 の円周上を動くとき，△ABP の面積の最小値を求めなさい．

（25　福島大）

▶ 類題演習 1.2.2◀

座標平面において，原点を中心とする半径 3 の円 O_1 に点 A(3, 0) において内接する半径 2 の円を O_2 とする．O_2 上の点 B$(2,\ \sqrt{3})$ において O_2 に外接し，O_1 と内接する円 O_3 の中心を P とするとき，

（1） O_2 の中心を C とする．$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とするとき，P の座標を t で表せ．

（2） P の座標と O_3 の半径 r を求めよ．

（愛知医大・医学部）

2.2　第 2 回

先週解説することが叶わなかった，第 2 回目の良問演習です. こちらは，解答をつけておきます.

2.1.0〔 軌跡と領域の雑台 〕(B30)

（1）　m が $m>0$ の範囲を動くとき, 直線 $y=mx-m^2$　が通りうる範囲を求め, 図示せよ.

（2）　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の内部を動くとき, 点 $\mathrm{Q}(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ.

（3）　m が $m>0$ の範囲を動くとき, 2 直線 $(m-1)x-y+1=0\cdots$①, $mx+(m-2)y+2=0\cdots$② の交点の軌跡を求め, 図示せよ.

（4）　t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき, $x=2t-1\cdots$①, $y=t^2+t\cdots$② を座標とする点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め, 図示せよ.

2.1.1〔 軌跡と領域の図示 〕(B25)

xy 平面において, 実数 t に対し, 2 点 $\mathrm{P}(-4,\ 2t^2-4t-1)$, $\mathrm{Q}(4,\ 2t^2+4t-1)$ をとる.

（1）　2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

（2）　t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき, 線分 PQ が通過する部分を D とする. ただし, その境界 (境界線) も含むとする.

　（ i ）　2 点 $\mathrm{A}(0,\ -2)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$ はそれぞれ D に含まれないことを示せ.

　（ ii ）　D を図示し, その面積を求めよ.

（お茶の水女子・理）

▶ 類題演習 2.1.2◀

不等式 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6>0$ の表す領域を D とおき, 不等式 $x^2+y^2-2kx-y+k^2<0$ の表す領域を E とおく. ただし, k は実数の定数とする.（1）　$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$ を因数分解せよ.

（2）　領域 D を図示せよ.

（3）　領域 D と領域 E の共通部分が空集合となるような k の値の範囲を求めよ.

（法政大）

次の話題は方程式です．もう結構お腹いっぱいかもしれませんがデザートにどうぞ．

2.2.0〔 不等式の色々 〕(B40)

（1） $A=\alpha+\beta,\ B=2\sqrt{\alpha+\beta},\ C=\sqrt{2\alpha}+\sqrt{2\beta}$ の大小関係を不等号を用いて表せ．

（2） $x>0,\ y>0,\ x+7y=1$ のとき，$\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ の最小値を求めよ．

（3） $x>0$ のとき，$\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{x^2+2x+1}$ の最小値を求めよ．

（4） $x,\ y,\ z$ を正の実数とする．$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(x+y+z)$ の取りうる値の最小値を求めよ．また最小値をとるときの $x,\ y,\ z$ の条件を求めよ．

（上智大・茨城大・横浜市立大・鹿児島大）

▶ 類題演習 2.2.1◀

（1） $x>0,\ y>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

（2） $x>0$ のとき，$\dfrac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値を求めよ．

（3） すべての正の実数 x に対して，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6 \geqq y$ を満たす y の最大値を求めよ．

（同志社女子大学・岩手県立大・中京大）

3　早稲田大学過去問解答編

3.1　2023 年度実施

1.

考え方

標準的な微積分の問題です．

二次関数と ℓ の共有点の x 座標が厄介な形になるので，文字で置き換えてから積分するのが計算ミスを減らすコツです．

また積分で面積を求めるときに，項別に積分すると代入計算が大変面倒くさいです．共有点を求める過程で，因数分解ができるので $\frac{1}{6}$ 公式を使いましょう．そうすると大変キレイに面積を求めることができます．

解

（**1**）　s 接線 ℓ の方程式は，$y' = 2ax$　より，

$$\ell\colon y = 2ap(x-p) + ap^2 + b$$

$\therefore$　$\boldsymbol{y = 2apx - ap^2 + b}$……（答え）

（**2**）　$y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標は，

$$\begin{aligned} ax^2 = 2apx - ap^2 + b &\iff x^2 = 2px - p^2 + \frac{b}{a} \\ &\iff x^2 - 2px + p^2 - \frac{b}{a} = 0 \\ &\iff x = p \pm \sqrt{p^2 - p^2 + \frac{b}{a}} = p \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

ここで，$y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標の小さい方から，$x = \alpha$, $x = \beta$ とおくと，

$\alpha = p - \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\beta = p + \sqrt{\frac{b}{a}}$ であり，直線 ℓ は $y = ax^2$ よりも常に上側なので求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{\frac{b}{a}})^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{……（答え）} \end{aligned}$$

（**3**） ℓと $y=ax^2+\dfrac{b}{2}$の共有点の x 座標を小さい方から，α', β'とおくと，

$$2apx-ap^2+b=ax^2+\frac{b}{2}$$
$$\iff x^2-2px+p^2-\frac{b}{2a}=0$$
$$\iff x=p\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$$

$\therefore\quad \alpha'=p-\sqrt{\dfrac{b}{2a}},\ \beta'=p+\sqrt{\dfrac{b}{2a}}$ 従って，求める面積 S'は，

$$\begin{aligned}S'&=\int_{\alpha'}^{\beta'}-(x-\alpha')(x-\beta')dx\\&=\frac{1}{6}(\beta'-\alpha')^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\cdot\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{S'=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}S}$**……（答え）**

（**4**） ℓと $y=ax^2+c$ の共有点の x 座標を小さい方から γ, δ とおくと，

$$ax^2+c=2apx-ap^2+b\iff x^2-2px+p^2+\frac{c-b}{a}=0$$
$$\iff x=p\pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$$

$\therefore\quad \gamma=p-\sqrt{\dfrac{b-c}{a}},\ \delta=p+\sqrt{\dfrac{b-c}{a}}$ 　とおけるので，求める面積 S''は，

$$\begin{aligned}S''&=\int_{\gamma}^{\delta}-(x-\gamma)(x-\delta)dx\\&=\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\cdot\sqrt{\frac{b-c}{a}}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

よって，$S'' = \dfrac{S}{2}$なので，

$$\begin{aligned} S'' = \frac{S}{2} &\iff \frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\iff 2\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\iff 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{b-c}{a}\right) = \frac{b}{a} \quad \text{（両辺}\frac{2}{3}\text{乗した.）} \\ &\iff b-c = 2^{-\frac{2}{3}}\cdot b \\ &\iff c = b(1-2^{-\frac{2}{3}}) = b\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = b\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \end{aligned}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{c = b\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}$……**（答え）**

2.

$\boxed{\text{考え方}}$

整数問題です. 整数問題でまずやることは, **実験** ですが, 本問はそれ以前にすることがあります.

① が ***x*, *y*, *z* の交代式** なので, 因数分解ができます. なので, 因数分解することが先です. そこから, 因数分解された式を満たす x, y, z の組を求めましょう.

$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+m \qquad \cdots①$$

解

（**1**）

$m=1$ のとき,

$$\begin{aligned}
① &\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1\\
&\iff x(yz+1-y-z)+y+z-yz-1=0\\
&\iff x\{y(z-1)-(z-1)\}+(z-1)-y(z-1)=0\\
&\iff x(z-1)(y-1)+(z-1)(1-y)=0\\
&\iff (x-1)(y-1)(z-1)=0
\end{aligned}$$

∴ これを満たす x, y, z は, $\boldsymbol{x=1}$ **または** $\boldsymbol{y=1}$ **または** $\boldsymbol{z=1}$……(**答え**)

（**2**）

$m=5$ のとき

$$\begin{aligned}
① &\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5\\
&\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1+4\\
&\iff (x-1)(y-1)(z-1)=4\cdots\cdots\cdots①'
\end{aligned}$$

①′を $x\leqq y\leqq z$ なので, $x-1\leqq y-1\leqq z-1$ であるから, ①′を満たす $(x-1,\ y-1,\ z-1)$ の組は,

$$(x-1,\ y-1,\ z-1)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2),\ (-4,\ -1,\ 1),\ (-2,\ -2,\ 1),\ (-2,\ -1,\ 2),\ (-1,\ -1,\ 4)$$

従って, 求める $(x,\ y,\ z)$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 3),\ (-3,\ 0,\ 2),\ (-1,\ -1,\ 2),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 5)}\text{……(答え)}$$

（**3**）

$$xyz = x + y + z \cdots\cdots\cdots (\ast)$$

$\boxed{\text{考え方}}$

今までの誘導を踏襲すると，**(　)(　) = (具体的な数)** にすることが目標です. 慣れていないと厳しいと思います. 解けなくても良い問題でしょう.

本問では, **$x = k$ とおく.** ことから始めます.

解

$x = k \quad (x \in \mathbb{N})$ とおくと,

$$\begin{aligned} kyz = k + y + z &\iff k^2yz = ky + kz \\ &\iff k^2yz - ky - kz = k^2 \\ &\iff (ky-1)(kz-1) = k^2 + 1 \cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

ここで，$x \leqq y$ において, 両辺 k 倍して 1 を引くと,

$$\begin{aligned} kx - 1 \leqq ky - 1 &\iff ky - 1 \geqq kx - 1 \\ &\iff ky - 1 \geqq k^2 - 1 \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

同様に，$y \leqq z$ なので, $z \geqq z$ より,

$$kz - 1 \geqq k^2 - 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

③, ④ より, ② について,

$$\begin{aligned} (ky-1)(kz-1) \geqq (k^2-1)(k^2-1) \leqq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 2k^2 + 1 \leqq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 3k^2 \leqq 0 \\ &\iff k^2 - 3 \leqq 0 \\ &\iff -\sqrt{3} \leqq k\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって，この不等式を満たす自然数は，$k = 1$ のみなので, $x = 1$ である.

・<u>$x = 1$ のとき，</u>

$$\begin{aligned} yz = y + z + 1 &\iff y(z-1) - z + 1 - 1 = 1 \\ &\iff (z-1)(y-1) = 2 (y \leqq z) \end{aligned}$$

これを満たす y, z の組は, $(y-1,\ z-1)=(1,\ 2)$ すなわち $(y,\ z)=(2,\ 3)$ のみ.

$\therefore$　（＊）を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は, $\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)}$……(**答え**)

3.

$$a=\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{1}{3}}-\left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots(\ast)$$

$\boxed{\text{考え方}}$

3 乗根の中身が複雑なので文字で置き換えて計算を簡単にしましょう.

解

(**1**)　$\alpha=5\sqrt{2}+7,\ \beta=5\sqrt{2}-7$ とおくと,

$$\begin{aligned}(\ast)\iff a&=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)^{3}\\&=\alpha-\beta-3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\\&=\alpha-\beta-3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{cases}\alpha-\beta=14\\ \alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}=50-49=1\end{cases}$$

より, $\boldsymbol{a^3=14-3a}$……(**答え**)

(**2**)

$$\begin{aligned}a^3=14-3a&\iff a^3+2a-14=0\\&\iff(a-2)(a^2+2a+7)=0\\&\iff a=2\text{ または }a^2+2a+7=0\end{aligned}$$

$\therefore$　$a^2+2a+7=0$ の解は複素数なので, $a=2$ である.

$\therefore$　$a\in\mathbb{Z}$ である.　**(証明終わり)**

（**3**） $b=\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$の整数部分を求める．

（**1**）と同様にして，b^3を計算する．

$$\begin{aligned}
b^3 &= \alpha+\beta+3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\\
&= \alpha+\beta+2\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}+\beta^{\frac{1}{3}}}\right)\\
&= 10\sqrt{2}+3b\\
&\Longleftrightarrow b^3=3b+10\sqrt{2}\\
&\Longleftrightarrow b^3-3b-10\sqrt{2}=0\\
&\Longleftrightarrow (b-2\sqrt{2})(b^2+2\sqrt{2}b+5)=0
\end{aligned}$$

$\therefore$ $b^2+2\sqrt{2}b+5=0$ の解は複素数なので, $b=2\sqrt{2}$.

$\therefore$ $2\sqrt{2}$ の整数部分は, 2 なので求める整数は, **2**……(**答え**)

4　良問集解答編

4.1　第 1 回

1.

解

（**1**） 両辺が 0 以上であるから， 両辺 2 乗しても同値性は崩れないので， 両辺を 2 乗することにより,

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2 \geqq (x-2)^2 &\iff x^2+6x+9 \geqq x^2-4x+4 \\
&\iff \boldsymbol{x \geqq -\frac{1}{2}} \cdots\cdots \text{(答え)}
\end{aligned}
$$

（**2**） 両辺が 0 以上であるから， 両辺 2 乗しても同値性は崩れないので， 両辺を 2 乗することにより,

$$
\begin{aligned}
(4x-1)^2 < (x+3)^2 &\iff (4x-1)^2-(x+3)^2 < 0 \\
&\iff \{(4x-1)+(x+3)\}\{(4x-1)-(x+3)\} < 0 \\
&\iff (5x+2)(3x-4) < 0 \\
&\iff \boldsymbol{-\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3}} \cdots\cdots \text{(答え)}
\end{aligned}
$$

▶ 類題演習 1.1◀

解

（**1**）

$$
\begin{aligned}
|2x-3| \leqq 2 &\iff -2 \leqq 2x-3 \leqq 2 \\
&\iff \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}} \cdots\cdots \text{(答え)}
\end{aligned}
$$

また，$|2x-3| \leqq 2 \leqq \dfrac{1-3a}{3}x-1$ は, $-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{4}{3}$ かつ $\dfrac{1-3a}{3}x \geqq 3$……① となり ① が $x \geqq 1$ のとき, $1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ を得る.

従って, $1-3a > 1$ のとき, $x \geqq \dfrac{9}{1-3a}$. この式の右辺が $\dfrac{9}{1-3a} = 1$ となるのは, $\boldsymbol{a = -\dfrac{8}{3}}$……(**答え**) である.

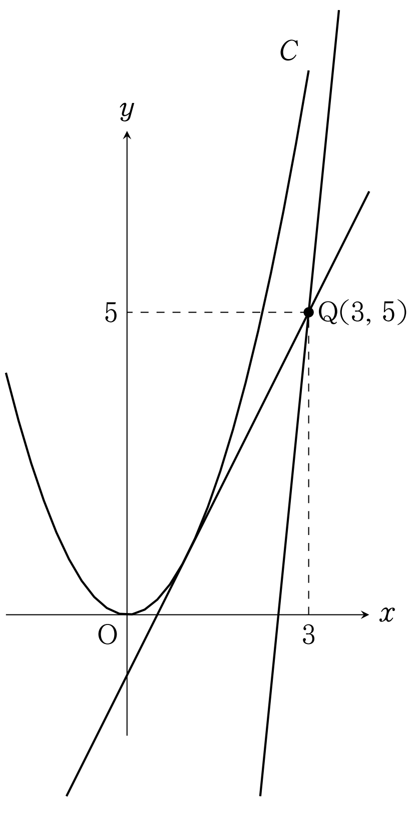
（**2**）

$$
\begin{aligned}
|x|+|x-3|<4 &\iff |x|<4-|x-3| \\
&\iff |x-3|-4<x<4-|x-3| \\
&\iff \begin{cases} |x-3|<x+4 \\ |x-3|<4-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -(x+4)<x-3<x+4 \\ x-4<x-3<-x+4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \\
&\iff \boldsymbol{-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

2.1

解

与えられた状況を図示すると下図のようになる．



(**1**)2 本の接線と $y=x^2$の接点の x 座標を $x=s$ とおくと，この点における接線の方程式は，

$$y=2s(x-s)+s^2\cdots\cdots\cdots①$$

① が点 Q(3, 5) を通るので，

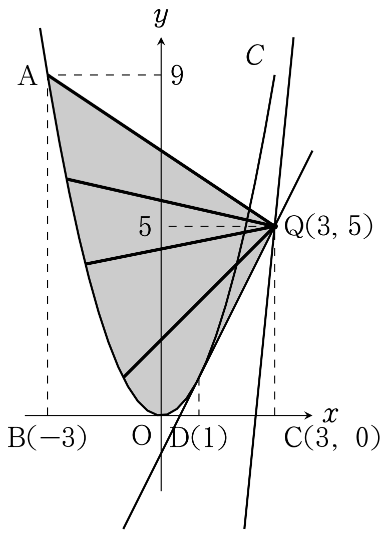
$$5=2s(3-s)+s^2 \Longleftrightarrow -s^2+6s=5$$
$$\Longleftrightarrow (s-1)(s-5)=0$$

$\therefore\quad s=1,\ 5$

$\therefore\quad s=1$ のとき，①：$y=2(x-1)+1$　　　$\therefore\quad \boldsymbol{y=2x-1}$**，接点 (1, 1)**……(**答え**)

$s=5$ のとき，①：$y=10(x-5)+25$　　$\therefore\quad \boldsymbol{y=10x-25}$**，接点 (5, 25)**……(**答え**)

(**2**)P が (2, 4) から (−3, 9) まで動くとき，線分 PQ が通過する領域は，下図の網目部である．



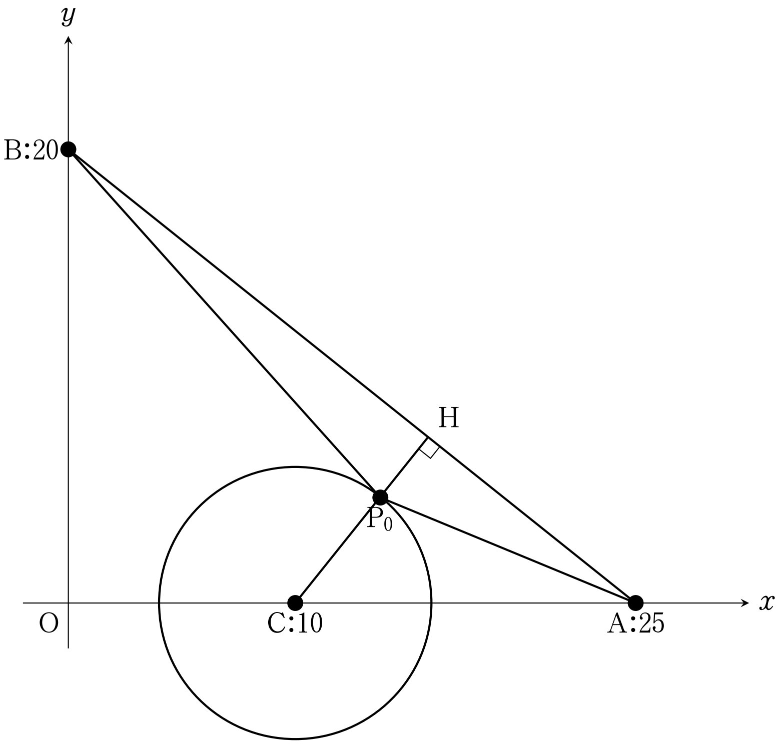
ここで，(−3, 9) を A，(−3, 0) を B，(3, 0) を C，(1, 0) を D，(1, 1) を E とすると，求める面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=(\text{台形 ABCQ})-\left(\int_{-3}^{1}x^2dx+\text{台形}(\text{DEQB})\right)\\&=\frac{1}{2}(9+5)\cdot6-\left(\frac{1}{3}\Big[\,x^3\,\Big]_{-3}^{1}-\frac{1}{2}(1+5)\cdot2\right)\\&=36-\frac{28}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{80}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

2.2

解

まずは， 図示すると下図のような状況.



ここで， 線分 AB に C から引いた垂線の足を H，H から C に向かって引いた直線と円との交点を P_0とすると, 円上を動く P が P_0にきた時に $\triangle$ABP は最小になるので,

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot (\mathrm{AH} - 6) \cdots\cdots\cdots ①$$

と書ける.

ここで, $\mathrm{AB}^2 = 25^2 + 20^2$であり, AB を通る直線の方程式は, $4x + 5y = 100$ なので, 点と直線の距離公式より, $\mathrm{CH} = \dfrac{|4 \cdot 10 - 100|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \dfrac{60}{\sqrt{4^2 + 5^2}}$.

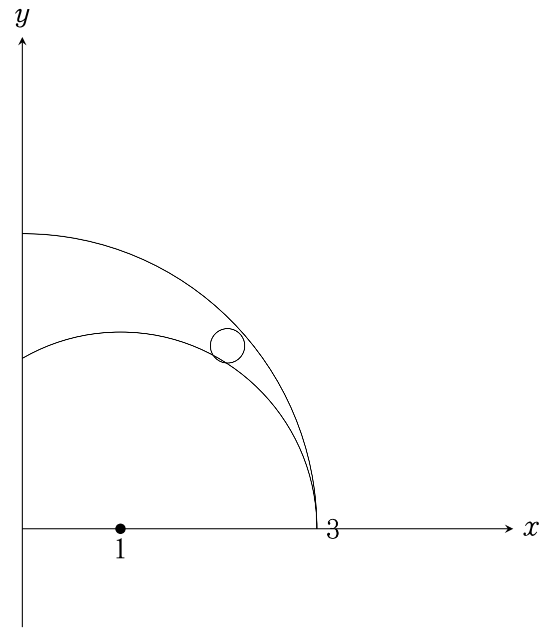
$$\therefore \quad \triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5^2 + 4^2}\left(\frac{10}{\sqrt{5^2 + 4^2}} - 1\right)6 = \mathbf{15\left(10 - \sqrt{41}\right)} \cdots\cdots(\textbf{答え})$$

▶ 類題演習 ◀

解

（**1**） O_2の中心がC, 半径が 2 であることより, C の座標は$(1,\,0)$であるとすぐにわかる.

従って 3 つの円をすべて図示すると下図のようになる.



よって, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}t+1\\\sqrt{3}t\end{pmatrix}$$

$\therefore$　$\mathbf{P}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1},\,\sqrt{\mathbf{3}})$……(**答え**)

（**2**）　O_3の半径 r とすると, $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$より,

$$\mathrm{CB} : \mathrm{CP} = 1 : t$$

これより，$\mathrm{BP} = t - 1$ より, $r = (t-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2(t-1)$.

従って, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} t+1 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$を r を用いて表すと,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = (3 - r) = \{3 - 2(t-1)\}$$

このことより,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = (5-2t)^2 &\iff (t+1)^2 + 3t^2 = 25 - 20t + 4t^2 \\ &\iff 22t = 24 \\ &\iff t = \frac{12}{11}\end{aligned}$$

$\therefore$　P の座標は, $\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{23}}{\mathbf{11}}, \dfrac{\mathbf{12\sqrt{3}}}{\mathbf{11}}\right)$……(**答え**)

半径 r は, $r = 2 \cdot \dfrac{1}{11} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}$……(**答え**)