立教大-社会科学部-過去問演習

大島

2025 年 12 月 11 日

過去問演習の意味とは

受験生が受験勉強をする中で誰しも通るものが，**過去問演習** である．
ただし， その過去問演習は，**回数をこなすだけ** の勉強になってはいないだろうか．そこで， 私のおすすめの過去問への取り組み方を少し述べようと思う．

過去問演習とは， 次の目的を達成するために用いるべし．

1. 受験校の難易度・傾向を掴む．
2. 受験校の教授は， どのような **数学的な発想・考え方をすることを要求しているのか?** を把握する．（傾向に合わせた思考をできるようになる．）
3. 時間配分を考える．
4. どの程度できれば御の字なのかを把握し， その正答率を目指して解く．
5. 自分で採点せず， 他の人に添削をお願いする．（自分では， 良いように思えても実際， ダメなことがよくある．）
6. 過去問演習は，2 週目まで．（周回して， 受かる気になっているだけ．過去問で出題された問題はほぼ出ない．）
7. 良い点が取れなくても落ち込まない．（相性がある．その結果に一喜一憂している暇はない．その時間を勉強に充てよ．）
8. 最後まで， 自分を信じて取り組むこと．（今， 合格圏内にいる者はほとんどいない．（僕も， そうだった）最後まで， 諦めない!!）

上にあ挙げたようなことを意識して過去問題演習に取り組むのが良いだろう．
最終局面が迫っています．頑張りましょう．
大島　遙斗

目次

1　傾向と対策

出題傾向

	Ⅱ	Ⅲ
2023.2/6	$\boxed{\text{B}}$ 複利計算	$\boxed{\text{II}}$ 微積
2023.2/9	$\boxed{\text{A}}$ 確率	$\boxed{\text{I}}\boxed{\text{II}}$ 絶対値のついた二次関数，微積
2024.2/6	$\boxed{\text{II}}$ 微積	$\boxed{\text{C}}$ ベクトル
2024.2/9	$\boxed{\text{B}}$ 漸化式	$\boxed{\text{I}}\boxed{\text{II}}$ 二次関数と微積
2025.2/6	$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}$ 確率漸化式	$\boxed{\text{II}}$ 微積
2025.2/9	$\boxed{\text{II}}$ 三角関数と図形の融合問題	$\boxed{\text{II}}$ 微積

〔〔入試の要〕〕

・立教大学の文系数学の問題は難易度は，一貫して **入試基礎〜入試標準** で推移している．難問は滅多に出題されず入試標準レベルの数学をどれだけ習得できているかが合否を分けていると考えられる．
なので，日頃の演習は典型問題を手際よく解けるようになるのはもちろんのこと，標準レベルの問題を解くのにも慣れておく必要がある．

・上の表から分かるように，**微積** は必ず出題される．微積の攻略は必須である．また，微積分野の問題は難易度はさほど高くないので確実に得点したい．

・一方，小問集合で稀に解きにく問題が混ざっていることがある．なので，大問全体を見渡してから解答方針を決定するのが良いだろう．

・これらの理由から，選抜は **高得点勝負** になると推測される．英語は独自の試験がにないため，皆安定しているだろう．そう考えると，**社会科** と **数学** でどれだけミスを抑えることができるかが勝敗の分かれ目となるだろう．

2　2023 年度 (2 月 6 日実施)

2023 年度

A 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）

3. この問題用紙は **10 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ．下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

（ｉ） 関数 $y = 4\cos^2\theta - 4\sin\theta - 5$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（ii） 2つの実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき，$z = 2x + y$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ である．

（iii） 三角形 ABC において AB ＝ AC ＝ 4, BC ＝ 6 とする.AB 上の点 P が CP ＝ 5 を満たすとき, AP ＝ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（iv） 大小2個のさいころを同時に投げる．大きいさいころの出た目を a, 小さいサイコロの出た目を b とするとき，$\dfrac{a}{b}$ が整数になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（ｖ） t を実数とする．座標空間において，3 点 O$(0, 0, 0)$，A$(1, 0, 2)$，B$(2, -1, 0)$の定める平面 OAB 上に点 C$(1+t, t, 1-t)$があるとき，$t =$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

（vi） 2次式 $f(x)$ が $f(f(x)) = f(x)^2 + 1$ を満たすとき，$f(x) =$ $\boxed{\text{カ}}$ である．

（vii） 座標平面の3つの部分空間

$$A = \{(x,\ -2x+2) | x \text{ は実数},\ x < 0\}$$
$$B = \{(x,\ 2x+2) | x \text{ は実数},\ x \geqq 0\}$$
$$C = \{(x,\ -x+3) | x \text{ は実数}\}$$

に対し，$(A \cup B) \cap C$ に属する点の座標をすべて求めると $\boxed{\text{キ}}$ である．

計算用紙

Ⅱ.　1 年目の初めに新規に 100 万円を預金し, 2 年目以降の毎年初めに 12 万円を追加で預金する. ただし, 毎年の終わりに, その時点での預金額の 8 %が利子として預金に加算される. 自然数 n に対して, n 年目の終わりに利子が加算された後の預金額を S_n 万円とする. このとき, 次の問 (ⅰ)～(ⅴ) に答えよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする. 解答欄には, (ⅰ), (ⅱ) については答えのみを, (ⅲ)～(ⅴ) については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ⅰ)　S_1, S_2をそれぞれ求めよ.

(ⅱ)　S_{n+1}を S_nを用いて表せ.

(ⅲ)　S_nを n を用いて表せ.

(ⅳ)　$\log_{10} 10.8$ を求めよ.

(ⅴ)　$S_n > 513$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

計算用紙

Ⅲ． p を正の実数とする.O を原点とする座標平面上の放物線 $C: y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right)$ における接線を l, P を通り x 軸に垂直な直線を m とする. また, m 上の点 $\mathrm{Q}(p,\ -1)$ を通り, l に垂直な直線を n とし, l と n の交点を R とする. さらに, l に関して Q と対称な点を S とする. このとき, 次の問（ i ）〜（ v ）に答えよ. 解答欄には,（ i ）については答えのみを,（ ii ）〜（ v ）については答えだけでなく途中経過も書くこと.

（ i ）　l の方程式を p を用いて表せ.

（ ii ）　n の方程式および R の座標をそれぞれ p を用いて表せ.

（ iii ）　S の座標を求めよ.

（ iv ）　l を対称軸として, l に関して m と対称な直線 m' の方程式を p を用いて表せ. また, m' と C の交点のうち P と異なる点を T とするとき, T の x 座標を p を用いて表せ.

（ v ）　（ iv ）の T に対して, 線分 ST, OS および C で囲まれた部分の面積を p を用いて表せ.

計算用紙

色々メモするスペース

3　2023 年度 (2 月 9 日実施)

2023 年度

C 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）

3. この問題用紙は **18 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ. 下記の空欄ア～クにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

（ i ） 円に内接する $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=6$, $\mathrm{CD}=5$, $\mathrm{DA}=2$ である四角形 ABCD において, $\cos A=$ $\boxed{\text{ア}}$ である.

（ii） 整式 $(x+1)^{2023}$ を x^2 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ である.

（iii） $\log_6 2=a$ に対して, $3^{\frac{1}{1-a}}$ は整数であり, その値は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

（iv） 座標平面上の 3 点 O(0, 0), A(4, 2), B(−6, 6) を頂点とする三角形 OAB の外心の座標は $\boxed{\text{エ}}$ である.

（ v ） $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ に対して, $z^6=a+bi$ とする. このとき, $a=$ $\boxed{\text{オ}}$, $b=$ $\boxed{\text{カ}}$ である. ただし, i は虚数単位とし, a, b は実数とする.

（vi） $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{17}$ を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である.

（vii） 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=0,\ a_{n+1}=-a_n+3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする.自然数 n を 2 で割った商を m としたとき, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を m を用いて表すと $\boxed{\text{ク}}$ である.

計算用紙

Ⅱ．　A，B，C，D の 4 人でじゃんけんをするゲームを行う.1 回のじゃんけんで 1 人でも勝者が出た場合は, ゲームを終了する. だれも勝たずあいこになる場合は, 4 人でもう一度じゃんけんをし, 勝者げでるまでじゃんけんを繰り返す. 次の問（ⅰ）～（ⅴ）に答えよ. 解答欄には,（ⅰ）については答えのみを,（ⅱ）～（ⅴ）については答えだけでなく途中経過も書くこと.

（ⅰ）　1 回目のじゃんけんで, A だけが勝つ確率を求めよ.

（ⅱ）　1 回目のじゃんけんで，A を含む 2 人だけが勝つ確率を求めよ.

（ⅲ）　1 回目のじゃんけんで, A が勝者に含まれる確率を求めよ.

（ⅳ）　1 回目のじゃんけんで, だれも勝たずあいこになる確率を求めよ.

（ⅴ）　2 回目のじゃんけんで, ゲームが終了する確率を求めよ.

計算用紙

Ⅲ． $0 < t < 2$ とし, 座標平面上の曲線 $C : y = |x^2 + 2x|$ 上の点 $\mathrm{A}(-2, 0)$ を通る傾き t の直線を l とする.C と l の, A 以外の異なる 2 つの共有点を P, Q とする. ただし, P の x 座標は, Q の x 座標より小さいとする. このとき, 次の問(ｉ)〜(ｖ)に答えよ. 解答欄には,(ｉ)については答えのみを,(ii)〜(ｖ)については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ｉ) P, Q の x 座標をそれぞれ t を用いて表せ.

(ii) 線分 AP と C で囲まれた部分の面積 $S_1(t)$ を t を用いて表せ.

(iii) 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ を t を用いて表せ.

(iv) 線分 AQ と C で囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(t)$ を t を用いて表せ. また, $S(t)$ の導関数 $S'(t)$ を求めよ.

(ｖ) t が $0 < t < 2$ を動くとき,(iv)の $S(t)$ を最小にするような t の値を求めよ.

計算用紙

色々メモするスペース

4　2024 年度 (2 月 6 日実施)

2024 年度

$\boldsymbol{A}$ 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)

3. この問題用紙は **26 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

制限時間:60 分　解答用紙：A3 一枚

Ⅰ．　下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

（ｉ）　$1 \leqq x \leqq 8$ の範囲において，関数 $y = (\log_2 x)^2 - 8\log_2 x - 20$ は $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる．

（ii）　等式

$$\frac{3x^2 - x + 4}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1}$$

が x についての恒等式となるような定数 a, b, c は，$a =$ $\boxed{\text{ウ}}$，$b =$ $\boxed{\text{エ}}$，$c =$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

（iii）　さいころを 3 回投げて出る目をすべてかけた数が 4 の倍数となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

（iv）　$\theta = \dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\dfrac{1}{\tan\theta} - \tan\theta$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

（ｖ）　初項と第 2 項がそれぞれ $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ である数列 $\{a_n\}$ は，$n \geqq 2$ のとき等式

$$a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

をみたす．$n \geqq 3$ のとき，a_n を n を用いて表すと $a_n =$ $\boxed{\text{ク}}$ である．

（vi）　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において $f(x) \geqq 0$ である 2 次関数 $f(x) = ax^2 + b$ は，等式

$$f(x)\left(\int_0^1 f(t)dt\right) = x^2 + 5$$

を満たす．このとき，定数 a, b は，$a =$ $\boxed{\text{ケ}}$，$b =$ $\boxed{\text{コ}}$ である．

計算用紙

Ⅱ. p, q を正の実数とする. 座標平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある. C 上の点 $\mathrm{P}(p, -p^2)$ における C の接線を l, 点 $\mathrm{Q}(-q, -q^2)$ における C の接線を m とする. また, l と m の交点を R とする. このとき, 次の問（ i ）〜（vi）に答えよ. 解答欄には,（ i),（ ii),（ v ）については答えのみを,（iii),（iv),（vi）については答えだけでなく途中経過も書くこと.

（ i ） l, m の方程式を求めよ.

（ ii ） R の座標を p, q を用いて表せ.

（iii） Q と l の距離 d を p, q を用いて表せ.

（iv） 三角形 PQR の面積 S を p, q を用いて表せ.

（ v ） l と m が直交するとき, q を p を用いて表せ.

（vi） l と m が直交するとき,（iv）の面積 S の最小値を求めよ. また, そのときの p の値を求めよ.

計算用紙

Ⅲ. 三角形 OAB において, OA $= 5$, OB $= 7$, AB $= 8$ とする. また, O を中心とする半径 r の円 C が直線 AB 上の点 D で接している. さらに, A から C へ引いた接線と C との交点を E とする. ただし, E は D と異なる点とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき, 次の問 (ｉ)〜(ｖ) に答えよ. 解答欄には, (ｉ) については答えのみを, (ii)〜(ｖ) については, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ｉ) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき, 定数 t の値を求めよ.

(iii) r の値を求めよ.

(iv) D から直線 OA へ下ろした垂線を DH とする. $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ.

(ｖ) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = p\vec{a} + q\vec{b}$ と表すとき, 定数 p, q の値をそれぞれ求めよ.

計算用紙

色々メモするスペース

5　2024 年度 (2 月 9 日実施)

2024 年度

C 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）

3. この問題用紙は **34 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア〜クにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 2進数 a を $a_{(2)}$ と表す.$1011_{(2)} \times 11_{(2)} + 1111_{(2)}$ を計算した結果を10進数で表すと $\boxed{\text{ア}}$ である.

(ii) 袋の中に赤玉と白玉があわせて20個入っている. この袋の中から同時に2つの玉を取り出すとき, 取り出した玉が2個とも赤である確率は $\dfrac{21}{38}$ である. このとき, はじめに袋に入っていた赤玉は $\boxed{\text{イ}}$ 個である.

(iii) 三角形ABCにおいて, $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{BC} = 4$, $\mathrm{CA} = 2$ とする. 線分BCの中点Mとするとき, 線分AMの長さは $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(iv) $x + \dfrac{1}{x} = -3$ であるとき, $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(v) $-3 \leqq x \leqq 3$ において, 関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(vi) 座標空間において, 点 $\mathrm{A}(-10, -3, 8)$ を通り, ベクトル $\vec{a} = (1, 2, -2)$ に平行な直線と, xy 平面との交点の座標は ($\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$) である.

計算用紙

Ⅱ. 次のように定められる正の数からなる数列 $\{a_n\}$があある.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \sqrt{\frac{a_{n+1}^3}{2a_n}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき, 次の問(ⅰ)~(ⅴ)に答えよ. 解答欄には,(ⅰ),(ⅱ)については答えのみを,(ⅲ)~(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ⅰ) $a_3 = 2^x,\ a_4 = 2^y,\ a_5 = 2^z$と表すとき, $x,\ y,\ z$ の値をそれぞれ求めよ.

(ⅱ) $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とくとき, b_{n+1}を b_nを用いて表せ.

(ⅲ) (ⅱ)で定めた数列$\{b_n\}$に対して, $c_n = \log_2 b_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ.

(ⅳ) (ⅲ)で定めた数列$\{c_n\}$に対して, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$を n を用いて表せ.

(ⅴ) 数列$\{a_n\}$の一般項を $a_n = 2^{d_n}$と表す. (ⅳ)の結果を用いて, d_nを n を用いて表せ.

計算用紙

Ⅲ.　p, q を実数とする. 座標平面上に放物線 $C : y = x^2 + 2px + q$ と, 2 つの直線 $\ell : y = -x + \dfrac{3}{4}$, $m : y = 2x$ がある. このとき, 以下の問 (ⅰ)〜(ⅴ) に答えよ. 解答欄には, (ⅱ) については答えのみを, (ⅰ) と (ⅲ)〜(ⅴ) については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ⅰ)　C が ℓ に接するとき, q を p を用いて表せ.

(ⅱ)　C が ℓ に接するとき, C の頂点の座標を p を用いて表せ.

(ⅲ)　C が ℓ と x 軸の両方に接するとき, C の方程式を求めよ. また, そのときの C と ℓ の頂点の x 座標を求めよ.

(ⅳ)　C が ℓ と m の両方に接するとき, C の方程式を求めよ. また, そのときの C と ℓ の接点の x 座標を求めよ.

(ⅴ)　(ⅲ) で求めた C を C_1, (ⅳ) で求めた C を C_2 とする. このとき, C_1, C_2, ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

計算用紙

色々メモするスペース

6　2025 年度 (2 月 6 日実施)

2025 年度

A 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）

3. この問題用紙は **42 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I． 下記の空欄ア～クにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) $x+y=\sqrt{5}$, $xy=1$ のとき, $x^4+y^4=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(ii) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき, $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos x$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(iii) 等式 $\log_2 x = 2\log_x 4$ を満たす実数 x を全て求めると $x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(iv) 三角形 ABC において, $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}$ とする．辺 AB を $1:3$ に内分する点を D とし, 辺 AC を $p:1-p$ に内分する点を E とする．ただし, 実数 p は $0<p<1$ を満たすとする．直線 BE と CD が直交するとき, $p=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(v) 実数 a は定数とし, $f(x)=x^2-4x+9$, $g(x)=ax$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(vi) 実数 a, b は定数とする.3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ が $x=-1$ と $x=\dfrac{1}{3}$ のそれぞれで極値をとるとき, $a=$ $\boxed{\text{カ}}$, $b=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．このとき, $f(x)$ の極大値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

計算用紙

Ⅱ. n を 1 以上の整数とする. 箱の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた 7 枚のカードがある. ただし, 異なるカードには異なる数字が書かれたいるとする.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$

「この箱から 1 枚のカードを無作為に取り出し, そのカードに書かれた数字を記録してからカードを箱の中に戻す」という操作を n 回繰り返す. 記録された n 個の数字の和が偶数となる確率を p_n とする. このとき, 次の問 (i)〜(v) に答えよ. 解答欄には, (i) については答えのみを, (ii)〜(v) については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) p_1, p_2 を求めよ.

(ii) p_3 を求めよ.

(iii) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.

(iv) p_n を n を用いて表せ.

(v) $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ を n を用いて表せ.

計算用紙

Ⅲ. 　実数 a, b は定数とする.2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して, 座標平面上の放物線 C を $C : y = f(x)$ とする.C 上の点 P を $\mathrm{P}\left(2\sqrt{2},\ f(2\sqrt{2})\right)$とし, また, C と y 軸の交点を Q とする. さらに, 円 $D : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$における D の接線を ℓとする. このとき, 次の問(ｉ)〜(ｖ)に答えよ. 解答欄には,(ｉ),(ii)については答えのみを,(iii)〜(ｖ)については答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ｉ)　ℓの方程式を求めよ.

(ii)　ℓが C と接するとき, b を a を用いて表せ.

(iii)　ℓが P において C と接するとき, a, b の値をそれぞれ求めよ.

(iv)　a, b を(iii)で求めた値とする. また, ℓと y 軸の交点を S とする. このとき,

線分 SP,　　C の $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ の部分,　　線分QS

で囲まれる図形の面積 X を求めよ.

(ｖ)　a, b を(iii)で求めた値とする. また, D 上の点 T を T(0, 1) とする. このとき,

線分 PR,　　C の $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ の部分,　　線分 QT,　　D の弧 TR

で囲まれる図形の面積 Y を求めよ. ただし, 弧 TR は $x \geqq 0$ にあるとする.

計算用紙

色々メモするスペース

7　2025 年度 (2 月 9 日実施)

2025 年度

C 数　学　問　題

注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。

2. 解答用紙はすべて **黒鉛筆または黒のシャープペンシル** で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）

3. この問題用紙は **50 ページ** までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号は Ⅰ～Ⅲ となっています。

4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席表の氏名欄に **氏名** のみを記入してください。なお，出席表は切り離さないでください。

5. 解答は，解答用紙の指定された場所に記入して，その他の部分には何も書いてはいけません。

6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。

7. 計算には，この問題の余白部分を使ってください。

8. この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

（ i ） $2^{1-3x} \geqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ を満たす実数 x の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である.

（ii） 赤玉 3 個と白玉 4 個を無作為に 1 列に並べるとき, 白玉が両端にある確率は $\boxed{\text{イ}}$ である.

（iii） x, y, z は実数であり, $x < y$ を満たすとする.3 つの数 3, x, y がこの順に等差数列となり, さらに, 4 つの数 4, x, y, z がこの順に等差数列となるとき, $x = \boxed{\text{ウ}}$, $y = \boxed{\text{エ}}$, $z = \boxed{\text{オ}}$ である.

（iv） 実数 z は定数とする. 座標平面上の 2 つの直線 $(a+1)x + ay = 1$, $ax + (a+2)y = 2$ がただ 1 つの交点をもつための a 条件は $\boxed{\text{カ}}$ である.

（ v ） 定積分 $\int_0^2 (x+1)|x-1|dx$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である.

（vi） 空間ベクトル $\overrightarrow{p} = (x, y, z)$ は $\overrightarrow{a} = (1, 0, -2)$ と $\overrightarrow{b} = (0, 3, 2)$ の両方に垂直であり, $\left|\overrightarrow{p}\right|$ かつ $z >$ 0 を満たしている. このとき, $\overrightarrow{p} = (\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ である.

計算用紙

Ⅱ． p, q を正の実数とする．原点を O とする座標平面上に点 A(1, 0)，点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{2}{q}\right)$がある．$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおき，P, Q は $\alpha<\beta$ を満たしながら動くものとする．三角形 OPQ の面積を S とし，また，$T=\tan(\beta-\alpha)$とおく．以下の問（ｉ）〜（ｖ）に答えよ．解答欄には，（ｉ），（ii）については答えのみを，（iii）〜（ｖ）については答えだけでなく途中経過も書くこと．

（ｉ） $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ をそれぞれ p を用いて表せ．また，$\cos\alpha$, $\sin\beta$ をそれぞれ q を用いて表せ．

（ii） T を p, q を用いて表せ．

（iii） S を p, q を用いて表せ．

（iv） $t=pq$ とおく．$\dfrac{S}{T}$ を用いて表せ．

（ｖ） $\dfrac{S}{T}$ の最小値を求めよ．

計算用紙

Ⅲ.　k を実数とする.3 次関数 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ に対して, 座標平面上の曲線 C を $C : y = f(x)$ とする. また, C 上の点 $\mathrm{P}(1, 1)$ を通り, 傾きが k である直線を ℓとする. このとき, 次の問（ⅰ)〜(ⅵ）に答えよ. 解答欄には,（ⅰ)〜(ⅲ）については答えのみを,（ⅳ)〜(ⅵ）については答えだけでなく途中経過も書くこと.

（ⅰ）　ℓの方程式を k を用いて表せ.

（ⅱ）　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

（ⅲ）　$f(x)$ の極値を求めよ.

（ⅳ）　ℓと C がちょうど 2 個の共有点をもつような k の値を求めよ.

（ⅴ）　ℓと C が異なる 3 個の共有点をもつような k の値の範囲を求めよ.

（ⅵ）　（ⅴ）のとき, 異なる 3 個の共有点の y 座標を小さい方から順に y_1, y_2, y_3とする. このとき, 比の等式$(y_2 - y_1):(y_3 - y_2) = 1 : 2$ を満たすような k の値の範囲を求めよ.

計算用紙

8　解答

8.1　2023 年度 2 月 6 日実施

Ⅰ.

解

（ i ）　$y=4\cos^2\theta-4\sin\theta-5=-4\sin^2\theta-4\sin\theta-1$　より, $t=\sin\theta$ とおくと, $-1\leqq t\leqq 1$ に注意して, $y=-4t^2-4t-1$ と表せる.

従って, $y'=-8t-4$ なので, $t=1$ のとき, 最小値 $\min y=-9$ を取る.

　$\therefore$　求める最小値は, $\mathbf{-9}$……(**答え**)

（ ii ）

$$\exists(x,\, y)\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2x+y\end{cases}\iff \exists x,\ x^2+(z-2x)^2=1$$

$\iff \exists x,\ 5x^2-4zx+z^1-1=0$…① $\iff$「二次方程式 ① が少なくとも一つ実数解をもつ.」

$\iff$（① の判別式）$4z^2-5z^2+5\geqq 0\iff z^2\leqq 5$

$\iff \boldsymbol{-\sqrt{5}\leqq z\leqq\sqrt{5}}$……(**答え**)

（iv）　余弦定理より, △ABC において, $\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{4^2+4^2-6^2}{2\cdot4\cdot4}=-\dfrac{1}{8}$ であり,

△APC に余弦定理を用いると, $25=\mathrm{AP}^2+16-2\mathrm{AP}\cdot4\cos A$

　$\therefore$　$\mathrm{AP}=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}}$……(**答え**)

Ⅴ　$\dfrac{a}{b}$ が整数になるような整数 $(a,\,b)$ の組みは以下の組み合わせである.

$(a,\,b)=(1,\,1),\,(2,\,2),\,(3,\,3),\,(4,\,4),\,(5,\,5),\,(6,\,6),\,(2,\,1),\,(3,\,1),\,(4,\,1),\,(5,\,1),\,(6,\,1),\,(4,\,2),\,(6,\,2),\,(6,\,3)$

　$\therefore$　求める確率は, $\boldsymbol{\dfrac{7}{18}}$……(**答え**)

（ v ）平面 ABC に垂直なベクトルとして, $\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ がとれるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{n}=0\iff\begin{pmatrix}1+t\\t\\1-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}=0$$

$\iff 7t=-1$

$\iff \boldsymbol{t=-\dfrac{1}{7}}$……(**答え**)

(vi)　$f(f(x)) = f(x)^2 + 1$ において, $t = f(x)$ とおくと, $f(t) = t^2 + 1$

$\therefore$　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$……(**答え**)

(vii)　XY 平面で考える.

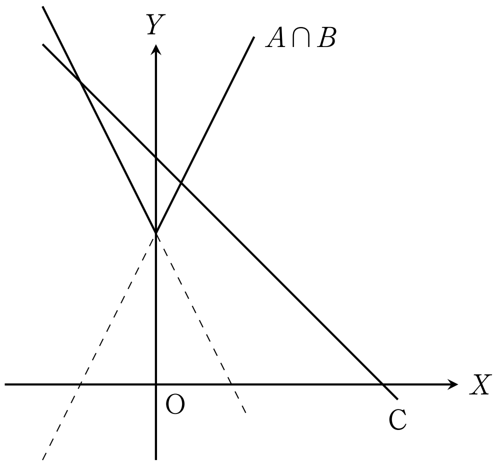
・$\underline{x < 0}$のとき,

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -2x + 2 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = x \\ Y = -2X + 2 \\ X < 0 \end{cases}$$

・$\underline{x \geqq 0\text{ のとき,}}$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 2x + 2 \\ x \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = x \\ Y = 2X + 2 \\ X \geqq 0 \end{cases}$$

これらを図示すると, 以下の図を得る.



上図の C と $A \cap B$ との交点の座標を求めて,

$$\begin{cases} Y = -X + 3 \\ Y = -2X + 2 \end{cases} \iff (X, Y) = (-1, 4)$$

$$\begin{cases} Y = -X + 3 \\ Y = 2X + 2 \end{cases} \iff (X, Y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$\therefore$　求める交点の座標は, $\boldsymbol{(x, y) = (-1, 4), \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)}$……(**答え**)

Ⅱ.

解

まず，状況を整理するとこんな感じ．

n	1 年目（100 万）	2 年目（12 万追加）	3 年目
S_n	100×1.08	$(108+12) \times 1.08$	

（ i ）　$\boldsymbol{S_1 = 108}$ **万円**……（答え），$\boldsymbol{S_2 = 129.6}$ **万**……（答え）

（ii）　$\boldsymbol{S_{n+1} = (S_n + 12) \times 1.08 \quad (n \geqq 1)}$……（答え）…（＊）

（iii）　特性方程式を解くことにより，（＊）は次のように変形することができる．

$$(*) \Longleftrightarrow S_n + 162 = 270 \times (1.08)^{n-1}$$
$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{S_n = 270 \times (1.08)^{n-1} - 162 \quad (n \geqq 1)}\text{……（答え）}$$

（iv）

$$\log 10.8 = \log \frac{108}{10} = \log \frac{2^2 \times 3^3}{10}$$
$$= 2\log 2 + 3\log 3 - 1 = \boldsymbol{1.0333}\text{……（答え）}$$

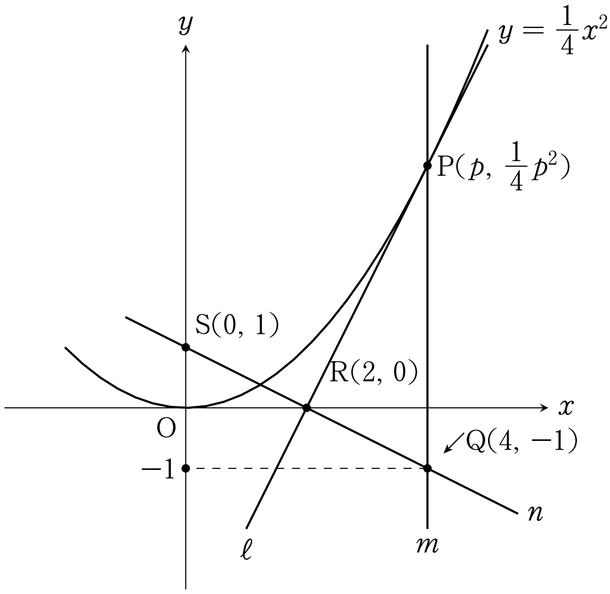
（ v ）

$$S_n > 513 \Longleftrightarrow 270 \times (1.08)^{n-1} > 512 + 513 = 675$$
$$\Longleftrightarrow 1.08^{n-1} > \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$
$$\Longleftrightarrow (n-1)\log 1.08 > \log \frac{10}{4} = 1 - 2\log 2 = 0.398$$
$$\Longleftrightarrow 0.0333(n-1) > 0.398$$
$$\Longleftrightarrow n - 1 > \frac{0.398}{0.0333} = 11.9519\cdots \fallingdotseq 11.95$$
$$\Longleftrightarrow n > 12.95$$

∴　求める最小の自然数 n は，**13**……（答え）

Ⅲ.

まず， 与えられた状況を図示すると， 下図のようになっている．



解

S は, Q の対称点であるから, 座標は S(0, 1)とすぐに分かる．

（ i ）　$y'=\frac{1}{2}x$ より, ℓの方程式は

$$\ell : y=\frac{1}{2}(x-p)+\frac{1}{4}p^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}px-\frac{1}{4}p^2}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（ ii ）　S の座標は, S(0, 1) なので, n の方程式は,

$$n : y=\frac{-1-1}{p-0}(x-0)+1=\boldsymbol{-\frac{1}{p}x+1}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

R の座標は, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\frac{p}{2}},\ \mathbf{0})$……(**答え**)

（ iii ）　S の座標は点 Q との対称性より, **0, 1**……(**答え**)

（ iv ）　直線 m'は, 2 点 P, S を通る直線であるから,

$$m' : y=\frac{\frac{1}{4}p^2-1}{p-0}(x-0)+1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m' : y=\frac{p^2-4}{4}x+1}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

一方，TはCとm'の共有点であるから，二次方程式：$\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{p^2-4}{4p}x+1 \iff (x-p)(px+4)=0$を解くことにより，$x=p \vee x=-\dfrac{4}{p}$を得るので，Tの$x$座標は，$\boldsymbol{x=-\dfrac{4}{p}}$……(**答え**)

（ｖ） もとめる面積をLとおく．

$$
\begin{aligned}
L&=\int_{-\frac{4}{p}}^{0}\left(\frac{p^2-4}{4p}x^2+x-\frac{1}{12}x^3\right)dx\\
&=-\left\{\frac{p^2-4}{8p}\Big[\,x^2\,\Big]_{-\frac{4}{p}}^{0}+\Big[\,x\,\Big]_{-\frac{4}{p}}^{0}-\frac{1}{12}\Big[\,x^3\,\Big]_{-\frac{4}{p}}^{0}\right\}\\
&=(\text{頑張って計算}\cdots)\\
&=\boldsymbol{\frac{6p^2+8}{3p^3}}\cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

8.2　2023 年度 2 月 9 日実施

Ⅰ.

解

（ｉ）　余弦定理より, 線分 AD について次のように 2 通りで表せる.

$\mathrm{AD}^2=9+4-2\cdot3\cdot3\cdot2\cos A\cdots①$

$\mathrm{AD}^2=25+36-2\cdot5\cdot6\cos A(\pi-A)=25+36+2\cdot5\cdot6\cos A\cdots①$

$\therefore$　① と ② より, $25+36+60\cos A=9+4-12\cos A\iff72\cos A=-48$

$\therefore$　$\boldsymbol{\cos A=-\frac{2}{3}}$……(**答え**)

（ii）　$(x+1)^{2023}$について, 二項定理より,

$(x+1)^{2023}={}_{2023}\mathrm{C}_1+{}_{2023}\mathrm{C}_1x+\sum_{k=2}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_kx^k\equiv\boldsymbol{1+2023x}$……(**答え**)（mod x^2）

（iii）

$$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\log_6 2}=\frac{1}{\log_6 6-\log_6 2}$$
$$=\frac{1}{\log 63}=\frac{1}{\dfrac{\log_3 3}{\log_3 6}}=\log_3 6$$

$\therefore$　$3^{\frac{1}{1-a}}=3^{\log_3 6}=\boldsymbol{6}$……(**答え**)

（iv）　3 点 O, A, B を通る円の方程式は, $x^2+y^2+ax+by+c=0\cdots(*)$とかける.

これより,

$$\begin{cases}c=0\\-6a+6b=-72\\4a+2b=-20\end{cases}\iff\begin{cases}c=0\\a-b=12\\2a+b=-10\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}a=2/3\\b=-34-3\\c=0\end{cases}$$

$\therefore$　$x^2+y^2+\frac{2}{3}x-\frac{34}{3}y=0$

$\therefore$　$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{17}{3}\right)^2=\cdots$

$\therefore$　円の中心の座標は, $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3},\ \frac{17}{3}\right)}$……(**答え**)

（ｖ）　$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$において，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\,(r>0)$とおくと，

$z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$なので，

$z^6=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$\therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{a=-1}\\ \boldsymbol{b=0}\end{cases}$ ……**（答え）**

（vi）

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{17}\iff 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$$
$$\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=-4$$

$\therefore\quad S=\sqrt{9\cdot16-(-4)^2}=\boldsymbol{8\sqrt{2}}$……**（答え）**

（vii）　$a_1=0,\ a_2=3,\ a_3=0,\ \cdots$

と続くような漸化式なので，$n=2m$　または，　$n=2m+1$と表すことができる．

$\therefore\quad \sum_{k=1}^{2m}a_k=\overbrace{0+3+0+3+\cdots}^{2m\text{ 個}}=(3\text{ が }m\text{ 個})=3m$

一方，$\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=\overbrace{0+3+0+3+\cdots}^{2m\text{ 個}}+0=(3\text{ が }m\text{ 個}+0)=3m$

$\therefore$　いずれのときも，$\sum_{k=1}^{n}a_k=\boldsymbol{3m}$……**（答え）**

Ⅱ.

解

(ⅰ) (A, B, C, D) の手の出し方は，次の 3 通りである．

(A, B, C, D)=(グ, チ, チ, チ), (チ, パ, パ, パ), (パ, グ, グ, グ)

∴ 求める確率は, $\frac{3}{3^4}=\mathbf{\frac{1}{27}}$……**(答え)**

(ⅱ) A 以外の勝者の決め方は, ${}_3C_1=3$ 通りであり, 二人のみ勝つ場合は, 3 通りである．

∴ 求める確率は, $\frac{3\times 3}{3^4}=\mathbf{\frac{1}{9}}$……**(答え)**

(ⅲ) (ⅰ)で，A が一人で勝つ場合,(ⅱ)で A とその他一人が勝つ場合を求めているので，あとは A と他二人が勝つ場合を求めれば良い．他二人の選び方は, ${}_3C_2=3$ 通りであり, 手の出し方が 3 通りある．

∴ 求める確率は,(ⅰ)と(ⅱ)の結果を合わせて, $\frac{3+9+9}{3^4}=\mathbf{\frac{7}{27}}$……**(答え)**

(ⅳ) あいこが発生するのは，「全員が同じ手」と「4 人の内 3 人が違う手」である．

まず，前者の場合から考える．

・全員が同じ手になる確率

これは，明らかに $\frac{3}{3^4}$……① である．

・4 人の内 3 人が違う手になる確率

3 人の内，2 人の手が決まれば，残り 1 人の手の出し方は，ただ一通りなので，先にその二人を指定する．

二人の選び方 → ${}_4C_2=6$ 通り. また, 3 人の内のもう一人の手の出し方は 1 通り. 最後に, 4 人目の人の手の出し方は, 3 通り.

ここで, 三人目の人と 4 人目の人の並び方を考えて, $2!=2$ 通りである.

∴ このときの確率は, $\frac{{}_4C_2\times 1\times 3\times 2}{3^4}=\frac{36}{3^4}$……② である.

∴ 以上より, 求める確率は, ①＋②$=\frac{39}{3^4}=\mathbf{\frac{13}{27}}$……**(答え)**

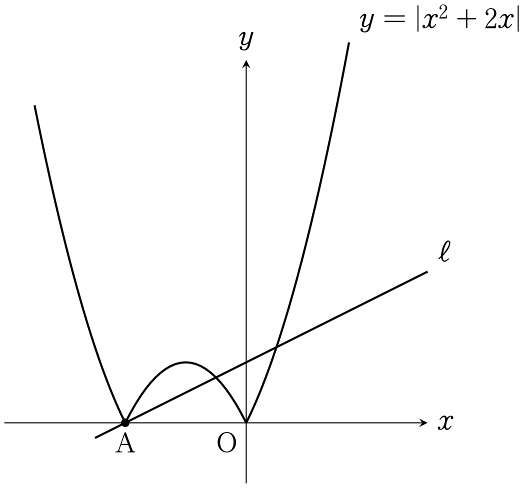
(ⅴ) 2 回目でゲームが終了するのは，**1 回目があいこで, 2 回目で少なくとも一人勝つとき** である.

従って，あいこになる確率は(ⅳ)で求めているので，4 人の内少なくとも 1 人勝つ確率を求めて，これらの積を考えれば良い.

ここで，「4 人の内少なくとも一人勝つ」$\Longleftrightarrow$「1－(あいこになる確率)」である. 即ち, あいこの余事象である.

$\therefore$　求める確率は，$\dfrac{13}{27} \times \dfrac{14}{27} = \boldsymbol{\dfrac{13 \times 14}{27^2}}$……(**答え**)

Ⅲ.



解

（ｉ） A$(-2,0)$ を通る傾き t の直線の方程式は，$\ell : y=tx+2t$……① とかける．

また，２点 P，Q の座標は，

$$
\begin{aligned}
\left|x^2+2x\right|=tx+2t &\iff x^2+2x=tx+2t \lor x^2+2x=-(tx+2t)\\
&\iff x^2+(2-t)x-2t=0 \lor x^2+(2+t)x+2t=0\\
&\iff (x-t)(x+2)=0 \lor (x+t)(x+2)=0\\
&\iff (\,x=t \lor x=-2\,) \lor (\,x=-t \lor x=0\,)
\end{aligned}
$$

∴ P の x 座標は Q の y 座標より小さいので，$\mathbf{P_x=-t}$**，**$\mathbf{Q_x=t}$……**（答え）**

（ii）

$$
\begin{aligned}
S_1(t) &= \int_{-2}^{-t}\{-(x^2+2x)-t(x+2)\}dx\\
&= -\int_{-2}^{-t}(x+2)(x+t)dx\\
&= \frac{1}{6}(-t+2)^3
\end{aligned}
$$

∴ $\boldsymbol{S_1(t)=\frac{1}{6}(2-t)^3}$……**（答え）**

（iii）

$$\begin{aligned}S_2(t) &= \int_{-t}^{0} \{t(x+2)-(-x^2-2x)\}dx + \int_{0}^{t} \{t(x+2)-(x^2-2x)\}dx \\ &= \int_{-t}^{0} \{x^2+(2+t)x+2t\}dx + \int_{0}^{t} \{-x^2+(t-2)x+2t\}dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\ x^3\ \Big]_{-t}^{0} - \frac{1}{3}\Big[\ x^3\ \Big]_{0}^{t} + \frac{2+t}{2}\Big[\ x^2\ \Big]_{-t}^{0} + \frac{t-2}{2}\Big[\ x^2\ \Big]_{t}^{0} + 2t(0+t) + 2t(t-0) \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t+2}{2}t^2 + \frac{t-2}{2}t^2 + 2t^2 + 2t^2 \\ &= \boldsymbol{2t^2}\cdots\cdots\textbf{(答え)}\end{aligned}$$

（iv）（ii）と（iii）の結果より，$\boldsymbol{S(t) = \frac{1}{6}(2-t)^3 + 2t^2}$**……②……(答え)**

ここで，② に積の微分法を用いて微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t) &= \frac{1}{2}(2-t)^2 \times (-1) + 4t \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}(2-t)^2 + 4t}\cdots\cdots\textbf{(答え)}\end{aligned}$$

（v） （iv）より，$\dfrac{d}{dt}S(t)=0$ を解くと，$0<t<2$ に注意して，$t=6-4\sqrt{2}$ を得る．これを α とおく．このとき，以下の増減表を得る．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	2
$\dfrac{dS(t)}{dt}$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	$S(\alpha)$	$\nearrow$	

$\therefore$ $S(t)$ を最小にするような t の値は，$\boldsymbol{t=6-4\sqrt{2}}$……**(答え)**

8.3　2024 年度 2 月 6 日実施

Ⅰ.

解

（ i ）　$t=\log_2 x$ とおくと, $y=t^2-8t-20$……①　なので, $y'=2t-8$ より,

① は $t=4 \Longleftrightarrow x=16$ のとき, 最小値をとるので, $1 \leqq x \leqq 8$ より, $\boldsymbol{x=8}$……(**答え**)(: $\boxed{\text{ア}}$) のとき

, $\min y = \boldsymbol{-35}$……(**答え**)(: $\boxed{\text{イ}}$).

（ii）　両辺に $(x+1)^3$をかけることにより,

$$
\begin{aligned}
3x^2-x+4 &= a+b(x+1)+c(x+1)^2 \\
&= cx^2+(b+2c)x+a+b+c \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで, ① は等式として一致するので, 両辺の係数を比較することにより,

$$
\begin{cases} c=3 \\ b+2c=-1 \\ a+b+c=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=8} \\ \boldsymbol{b=-7} \\ \boldsymbol{c=3} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答え})
$$

（iii）　「さいころを 3 回投げて, 出る目の積が 4 の倍数」$\Longleftrightarrow$ 「少なくとも 1 回 4 の倍数が出る.」

このことより, **3 回とも 1, 3, 5 のどれか.** と **4 以外の偶数の目が 1 回だけでる.** 場合の確率を求めて, 余事象を考えれば良い.

・3 回とも 1, 3, 5 のどれかがでるとき,

　この場合の確率は, $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$……①　である.

・4 以外の偶数の目が 1 回だけでるとき,

　この場合の確率は, ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{3}{6}\right)^2=\dfrac{54}{6^3}$……②　である.

　∴　①, ② より求める確率は, $1-\dfrac{81}{6^3}=1-\dfrac{3}{8}=\boldsymbol{\dfrac{5}{8}}$……(**答え**)

（iv）　ここで，一般の角 α, β について tan の加法定理を考えると，次式で表される．

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1 \pm \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}}{\dfrac{1}{\tan\alpha} \mp \tan\beta} \cdots\cdots(*)$$

これに注目すると，与えられた式は，（＊）**の分母** であるから，（＊）で $\beta = \alpha$ とおくと，

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha) &= \frac{1+1}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \tan\alpha} \\ &= \frac{2}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - \tan\alpha} \\ \iff \frac{1}{\tan\alpha} - \tan\alpha &= \left.\frac{2}{\tan 2\alpha}\right|_{\alpha = \frac{\pi}{12}} = \mathbf{2\sqrt{3}} \cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（ｖ）　少し数列の構造を調べてみよう．

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	1	1	2	4	8	$\cdots$

このことから，数列の構造は以下のようになっている．

$$1,\ 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2},\ \cdots,\ \xrightarrow{\times 2 (n-2\text{ 回目})} a_n$$

$\therefore$　一般項 a_nは，$\boldsymbol{a_n = 2^{n-2}}$……**(答え)** である.(これは，$n \geqq 3$ のとき確かに成立している.)

（vi）　$f(x)\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right) = x^2 + 5 \cdots\cdots(*)$

今，$A = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ とおくと，A は定数なので，$f(t) = \dfrac{t^2+5}{A}$ であるから，

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 \frac{1}{A}(t^2+5)dt = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{3}+5\right)(\text{積分計算は省略}) \\ &= \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{A} \\ &\iff A = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\therefore$　$A > 0$ より，$A = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5$

$\therefore$　$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{3}}{4},\ b = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}}$……**(答え)**

Ⅱ.

解

まず，与えられた状況を図示すると以下のようになる.

tikzpicture スペース

（ i ）　$y' = -2x$ より，

$\ell : y = -2p(x-p) - p^2 = \boldsymbol{-2px + p^2}$……(答え)

$m : y = 2q(x+q) - q^2 = \boldsymbol{2qx + q^2}$……(答え)

（ii）　ℓと m の交点を求めれば良いので，

$$\begin{cases} y = -2px + p^2 \\ y = 2qx + q^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{p^2 - q^2}{2(p+q)} = \dfrac{p+q}{2} \\ y = pq \end{cases}$$

$$\therefore \quad \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{p-q}{2}, pq}\right) \text{……(答え)}$$

（iii）　$\mathrm{Q}(-q, -q^2)$, $\ell : y = -2px + p^2$より、点と直線の距離公式から，

$$\begin{aligned} d &= \frac{|-2pq - q^2 - p^2|}{\sqrt{(2p)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|2pq + q^2 + p^2|}{\sqrt{4p^2+1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(p+q)^2}{\sqrt{4p^2+1}}} \text{……(答え)} \end{aligned}$$

（iv）　まず，高さに相当する PR を求める.$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(p+q) \\ p(q+p) \end{pmatrix}$より，

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| &= \sqrt{\frac{1}{4}(p+q)^2 + p^2(q+p)^2} \\ &= (p+q)\sqrt{\frac{1}{4} + p^2} \\ &= \frac{p+q}{2}\sqrt{4p^2+1} \end{aligned}$$

このことより，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| \times d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p+q}{2}\sqrt{4p^2+1} \cdot \frac{(p+q)^2}{\sqrt{4p^2+1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(p+q)^3} \text{……(答え)} \end{aligned}$$

（ｖ） 2 直線 ℓ, m が直交するので, $(-2p)(2q)=-1 \Longleftrightarrow \boldsymbol{q = \dfrac{1}{4p}}$……(**答え**)

(vi) （ｖ）を用いると, 面積 S は, $S=\dfrac{1}{4}(p+\dfrac{1}{4p})$……(＊)とかけるので,（＊)に AM − GM の関係を用いると,

$$p+\frac{1}{4p} \geqq 2\sqrt{p\cdot\frac{1}{4p}}=1$$

等号成立は, $p=\dfrac{1}{4p} \Longleftrightarrow p=\dfrac{1}{2}$のとき成立する.($\because p>0$)

∴ 求める最小値は, $\min S=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$……(**答え**), またそのときの p は $p=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$……(**答え**)である.

Ⅲ.

tikzpicture でお絵描きできなかった（技量不足）ので，板書よくみといてください！

解

（ i ） 余弦定理より, $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{25+49-64}{2\cdot 5\cdot 7} = \dfrac{1}{7}$.

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 35\cdot\dfrac{1}{7} = \mathbf{5}$……**(答え)**

（ii） 余弦定理より，$\cos\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$なので,

$\mathrm{AD} = \mathrm{OA}\cos 60^\circ = 5\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

このとき，$\mathrm{BD} = 8 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{11}{2}$なので, $\mathrm{AD} : \mathrm{BD} = 5 : 11$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{11\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5+11} = \frac{11}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{t} = \mathbf{\dfrac{5}{16}}$……**(答え)**

（iii） $\mathrm{OD} = \mathrm{OA}\cos 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 半径 $r = \mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$……**(答え)**

（iv）

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}\text{の}\vec{a}\text{向き正射影ベクトル}\right) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}$$

$$= \frac{\frac{11}{16}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{5}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}}{25}\vec{a} = \frac{\frac{11\cdot 25}{16} + \frac{25}{16}}{25}\vec{a}$$

$$= \frac{11+1}{16}\vec{a} = \mathbf{\frac{3}{4}}\vec{\boldsymbol{a}}\text{……}\textbf{(答え)}$$

（ v ） $\boxed{\text{コメント}}$: $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$が使えたら嬉しい.

円の幾何学的性質より，点 H は線分 DE の中点であるから, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$……① を満たす.

このことより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3}{2}\vec{a} - \left(\frac{11}{16}\vec{a} + \frac{5}{16}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{13}{16}\vec{a} - \frac{5}{16}\vec{b}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{p} = \mathbf{\dfrac{13}{16}},\ \boldsymbol{q} = -\mathbf{\dfrac{5}{16}}$……**(答え)**

傾向と対策の補足

	Ⅱ	Ⅲ
2018	$\boxed{\text{II}}$ 三角関数と微積	$\boxed{\text{B}}$ ベクトル
2019	$\boxed{\text{II}}$ 微積	$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
2020	$\boxed{\text{II}}$ 微積	$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{II}}$ 三角関数と整数
2023.2/6	$\boxed{\text{B}}$ 複利計算	$\boxed{\text{II}}$ 微積
2023.2/9	$\boxed{\text{A}}$ 確率	$\boxed{\text{I}}\boxed{\text{II}}$ 絶対値のついた二次関数， 微積
2024.2/6	$\boxed{\text{II}}$ 微積	$\boxed{\text{C}}$ ベクトル
2024.2/9	$\boxed{\text{B}}$ 漸化式	$\boxed{\text{I}}\boxed{\text{II}}$ 二次関数と微積
2025.2/6	$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}$ 確率漸化式	$\boxed{\text{II}}$ 微積
2025.2/9	$\boxed{\text{II}}$ 三角関数と図形の融合問題	$\boxed{\text{II}}$ 微積

8.4　2024 年度 2 月 9 日実施

Ⅰ.

解

(i)　(与式) $= 2^0\cdot 1 + 2^1\cdot 1 + 2^2\cdot 0 + 2^3\cdot 1 \times (2^0\cdot 1 + 2^1\cdot 1) + 2^0\cdot 1 + 2^1\cdot 1 + 2^2\cdot 1 + 2^3\cdot 1 =$
$33 + 15 = \mathbf{48}$……**(答え)**

(ii)　赤玉の数を n 個とすると，白玉の数は $20-n$ 個なので，赤玉が 2 個取り出される確率は，$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2}$ である．
従って，

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{21}{38} &\iff {}_n\mathrm{C}_2\cdot 38 = 21\cdot 10\cdot 19\\ &\iff n(n-1) = 210\\ &\iff n^2 - n - 210 = 0\\ &\iff (n+14)(n-15) = 0\end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{n = 15}$……**(答え)**

(iii)　$\triangle$ABC に着目すると，$\cos\angle ACB = \dfrac{4+16-9}{2\cdot 2\cdot 4} = \dfrac{11}{16}$
次に，$\triangle$AMC に着目すると，$\mathrm{AM}^2 = 4 + 4 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \dfrac{11}{16} = 8 - \dfrac{11}{2} = \dfrac{5}{2}$
$\therefore \mathbf{AM} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{2}}$……**(答え)**

(iv)　$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = (x + \dfrac{1}{x})^3 - 3(x + \dfrac{1}{x}) = -27 + 9 = \mathbf{-18}$……**(答え)**

(v)　$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ の最小値を求める．
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2)$　これより，以下の増減表を得る．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{40}{27}$	$\nearrow$

$\therefore$　$\mathbf{min}\, \boldsymbol{f(x)} = -\dfrac{\mathbf{40}}{\mathbf{27}}$……**(答え)**

(vi)　A$(-10, -3, 8)$ を通り, $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$に平行な直線の方程式は, ある実数 t を用いて,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-3\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdots\cdots(*)$$ と表せる.

今, $(*)$において, z 成分 0 なので, $z=0 \Longleftrightarrow 8=2t \Longleftrightarrow t=4$　である.

$\therefore$　$\boldsymbol{(x, y, z)=(-6, 5, 0)}$……**(答え)**

Ⅱ.

解

（ｉ）

$$\begin{cases} a_3 = \sqrt{\dfrac{2^3}{2 \cdot 1}} = 2 \\ a_4 = \sqrt{\dfrac{2^3}{2 \cdot 2}} = \sqrt{2} \\ a_5 = \sqrt{\dfrac{1/2^3}{2 \cdot 2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{1}{2}}$……(**答え**)

（ii） $a_{n+2} = \sqrt{\dfrac{a_{n+1}^3}{2a_n}}$ について，両辺を 2 乗して，両辺に $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}$ をかけると，

$$a_{n+2}^2 = \frac{a_{n+1}^3}{2a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_{n+1}^2$$

$$\iff \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\iff b_{n+1}^2 = \frac{1}{2} b_n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{b_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n}{2}}}$$……(**答え**)

（iii） （ii）の結果に 2 を底とする対数をとると，

$$\log_2 b_{n+1} = \log_2 \sqrt{\frac{b_n}{2}} = \frac{1}{2}(\log_2 b_n - 1)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{1}{2} c_n - \frac{1}{2}}$……(**答え**)

（iv） $\{c_n\}$の一般項を求める．

特性方程式を解くことにより，次のように変形し，一般項を求めることができる．

$$c_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(c_n + 1)$$

$$\iff c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(c_1 + 1) - 1$$

$$\iff c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1 \quad \left(\because c_1 = \log_2 b_1 = \log_2 \frac{a_2}{a_1} = 1\right)$$

これより，S_nは，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{2-\left(\frac{1}{2}^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}-n$$

$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n$$

$$\therefore \boldsymbol{S_n=2-\left\{n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（ｖ）　$a_n=2^{d_n}$の d_nを求める．

今, $c_n=\log_2 b_n=\log_2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$　より, $t_n=\log_2 a_n$　とおくと,

$$c_n=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=t_{n+1}-t_n(=\text{階差数列})$$

$$\Longleftrightarrow \{c_n\}\text{は}\{t_n\}\text{の階差数列}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}c_k=\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)$$

$$\therefore\quad c_n=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n$$

$$=t_{n+1}-t_n=(t_2-t_1)+(t_3-t_2)+\cdots+(t_{n-1}+t_{n-2})+(t_n-t_{n-1})$$

$$=t_n-t_1(n\geqq 2)$$

$$\therefore\quad t_n=t_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k\quad(n\geqq 2)$$

従って,（iv）の結果より，$\{t_n\}$の一般項は,

$$t_n=t_1\sum_{k=1}^{n-1}c_k=t_1+S_{n-1}$$

$$=\log_2 a_1+4-\left\{(n-1)+\left(\frac{1}{2}^{n-3}\right)\right\}$$

$$=\log_2 1+4-n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$=5-n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\quad(n\geqq 2)$$

$$\therefore\quad \log_2 a_n=5-n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

上式に $n=1$ を代入すると, $a_1=1$ になるので, $n\geqq 1$ で上式は成立する.

$$\therefore\quad \boldsymbol{d_n=5-\left\{n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}(n\geqq 1)}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

Ⅲ.

解

（ｉ）

$$
\begin{aligned}
C\text{ が }\ell\text{に接する} &\iff \exists x!,\ x^2+(2p+1)x+q-\frac{3}{4}=0\\
&\iff (\text{判別式})(2p+1)^2-4q+3=0\\
&\iff \boldsymbol{q=p^2+p+1}\cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

（ii） C の式を平方関西すると, $y=(x+p)^2-p^2+q$ より, 頂点の座標 $(-p,\ -p^2+q)$ なので,（ｉ）の結果より, $\boldsymbol{(-p,\ p+1)}$……(**答え**)

（iii） C が x 軸に接するから, C の頂点の y 座標は 0 である.

∴ $p+1=0 \iff p=-1$

∴ 頂点の座標 $(1,\ 0)$ より, $\boldsymbol{C:y=(x-1)^2}$……(**答え**). 頂点の x 座標は, $\boldsymbol{x=1}$……(**答え**)

（iv） 今,（ii）より, $C:y=(x+p)^2+p+1$……(＊)とおいてもよい.

ここで, C と 2 つの直線のいずれか一方の接点の x 座標を $x=s$ とおくと,

$$
\exists s!,\ \begin{cases}(s+p)^2+p+1-2s=0\\(s+p)^2+p+1+s-\dfrac{3}{4}=0\end{cases} \iff \exists s!,\ \begin{cases}s^2+(2p-2)s+p^2+p+1=0\cdots\cdots①\\s^3+(2p+1)s+p^2+p+\dfrac{1}{4}=0\cdots\cdots②\end{cases}
$$

$\iff$ (① または ② の判別式) $=0$ （この場合の中括弧は「または」の意味である.）

$\iff$ (① の判別式) $=(p-1)^2-(p^2+p+1)=0$

$\iff -3p=0$

$\iff p=0$

∴ $p=0$ を(＊)に代入して, $\boldsymbol{C:y=x^2+1}$……(**答え**)

このとき, C と ℓの接点の座標は, C と ℓを連立して解くことにより,

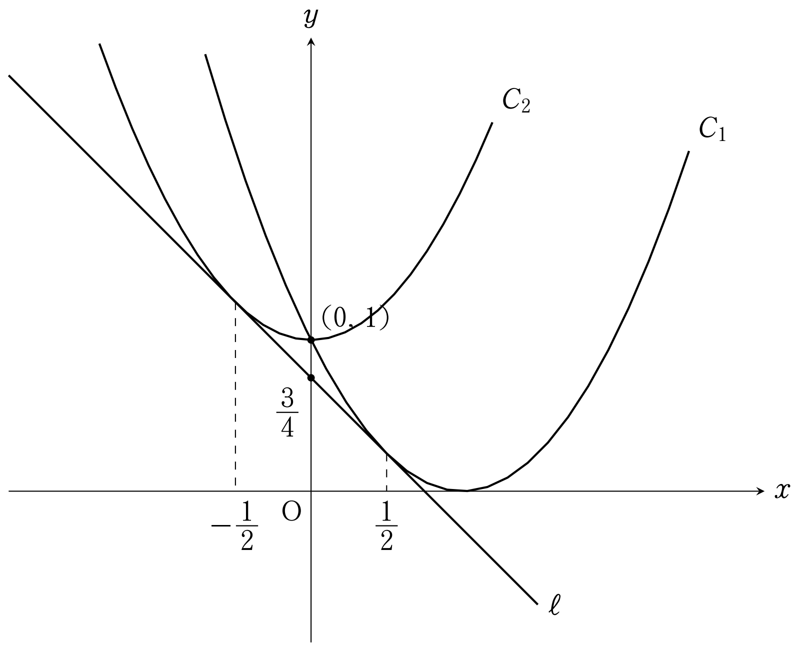
$$
\begin{aligned}
&s^2+1=-s+\frac{3}{4} \iff 4s^2+4s+1=0\\
&\iff (2s+1)^2=0 \iff s=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

∴ $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$……(**答え**)

（v） まず，ℓと C_1, C_2のそれぞれの接点の x 座標を求める．ℓと C_2の x 座標は（iv）より得ているので ℓ と C_1の接点の x 座標のみ求めれば良い．

$$(x-1)^2 = -x + \frac{3}{4} \iff x^2 - 2x + 1 = -x + \frac{3}{4}$$
$$\iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$
$$\iff (x - \frac{1}{2})^2 = 0$$
$$\iff x = \frac{1}{2}$$

以上より， 求める面積を図示すると， 下図のようになっている．



∴ 求める面積 S は，上図の網目部なので，

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^2 + 1 + x - \frac{3}{4}\right)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left((x-1)^2 - (-x + \frac{3}{4})dx\right)$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^2 + x - \frac{1}{4}\right)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right)dx$$
$$= \frac{1}{24} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{12}} \cdots\cdots(\textbf{答え})$$

8.5　2025 年度 2 月 6 日実施

Ⅰ.

解

（ i ）　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$……①

ここで, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5-2=3$　なので, ①$=9-2\cdot 1=$**7**……(**答え**)

（ii）　加法定理より，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos x$　を展開して計算すると,

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\cos x\\&=\sin x+\cos x+2\cos x\\&=2\cos x+\sin x\\&=\sqrt{10}\sin(x+\phi)\quad\left(\text{ただし}\ \phi\ \text{は},\ \sin\phi=\frac{3}{\sqrt{10}}\ \text{かつ}\ \cos\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}\ \text{をみたす角である.}\right)\end{aligned}$$

また，$\cos\phi \fallingdotseq 0$ なので, $\phi<\dfrac{\pi}{2}$である. 従って, $x+\phi$は, $x+\phi=\dfrac{\pi}{2}$を取りうる.

$\therefore\quad \max y=\boldsymbol{\sqrt{10}}$……(**答え**)

（iii）　$\log_2 x=2\log_x 4$……(*)の値を求める.

$\log_x 4=\dfrac{2}{\log_2 x}$なので,

$$\begin{aligned}(*)&\iff \log_2 x=2\cdot\frac{2}{\log_2 x}\\&\iff \log_2 x=\frac{4}{\log_2 x}\\&\iff (\log_2 x)^2=4\\&\iff \log_2 x=\pm 2\\&\iff x=2^{\pm 2}\end{aligned}$$

$\therefore\quad x=\boldsymbol{4,\ \frac{1}{4}}$……(**答え**)

(iv)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = p\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

これらより,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BE}\perp\mathrm{CD} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0\\
&\Longleftrightarrow \left(p\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{4}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - p\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{p}{8} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0\\
&\Longleftrightarrow -3p + 2 = 0\\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{p = \frac{2}{3}}\cdots\cdots\text{(答え)}
\end{aligned}
$$

(v)　$f(x) = x^2 - 4x + 9,\ g(x) = ax$

$\forall x,\ f(x) \geqq g(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x,\ x^2 - (a+4)x + 9 \geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ 放物線 $y = x^2 - (a+4)x + 9$ が常に x 軸より上側または接している.

$\Longleftrightarrow D = a^2 + 8a + 16 - 36 \leqq 0$($D$ は, $x^2 - (a+4)x + 9 = 0$ の判別式)

$\Longleftrightarrow (a+10)(a-2) \leqq 0$

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{-10 \leqq a \leqq 2}$……**(答え)**

《注》(v)の解答について

「解の配置だから, 判別式だけではなく, 軸や $x = 0$ での値も調べなくてはいけないのでは??」と思ったかもしれません. 結論としては, **調べなくて良い.** です.(v)の問題では, x のどの範囲に解を持つか指定されていない(つまり, x 軸のどの範囲で放物線が共有点を持つか)ので, 判別式だけでよいです.

（vi）

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+2 \text{ が } x=-1 \text{ と } x=\frac{1}{3}\text{で極値をとる.} \Longrightarrow \begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(\frac{1}{3})=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3-2a+b=0 \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}a+b=0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ 2a+3b=-1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{a=1, b=-1}$……(**答え**)

また， このとき $f(x)=x^3+x^2-x+2$ なので, $f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$ なので, 以下の増減表を得る.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↖

上表から極大値は，$x=-1$ のときで, その値は, $f(-1)=\boldsymbol{3}$……(**答え**)

《**注**》極値を持つ条件について

上の解答の，$\boldsymbol{x=a}$ **で極値を持つ** $\boldsymbol{\Longrightarrow f'(a)=0}$ というのは， 必要十分条件ではなく **必要条件である** ということに注意してください.

例えば， 記述答案の中で，「$f(x)$ は, $x=a$ で極値を持つので, $f'(a)=0$」と書いたら減点される可能性が高いです.

では， どうすれば減点されないかというと，「まずは， 必要条件で $f'(a)$ を計算してから, 求めた定数を $f(x)$ に戻して, $\boldsymbol{f(x)}$ **の増減表を書き,** $\boldsymbol{x=a}$ **の前後で符号変化する** こと」を言えば良いのです**!**

記述でこのような問題に遭遇した際は， 十分に気を付けてください.

Ⅱ.

解

p_n：n 個の数の和が偶数になる確率

（ｉ） $p_1 =$（偶数を引く）$= \mathbf{\frac{3}{7}}$……**(答え)**

$p_2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} = \mathbf{\frac{25}{49}}$……**(答え)**

（ii） $p_3 = \underbrace{p_2 \times \frac{3}{7}}_{\text{ぐ→ぐ→ぐ}} + \underbrace{(1-p_2)\times\frac{4}{7}}_{\text{き→き→ぐ}} = \frac{75}{7^3} + \frac{24\cdot4}{7^3} = \mathbf{\frac{171}{343}}$……**(答え)**

（iii） （ii）の計算過程より，p_nは次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{3}{7}p_{n-1} + \frac{4}{7}(1-p_{n-1})\\
&= -\frac{1}{7}p_{n-1} + \frac{4}{7}\\
&\therefore \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{4}{7}}
\end{aligned}
$$
……**(答え)**

（iv） （iii）で得られた漸化式を特性方程式を解くことにより，等比型に変形しよう．

$$
\begin{aligned}
&p_{n+1} = -\frac{1}{7}p_n + \frac{4}{7}\\
&\Longleftrightarrow p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)\\
&\Longleftrightarrow p_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}\cdot\frac{-1}{14}\\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}
\end{aligned}
$$
……**(答え)**

（ｖ）

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k &= \frac{n}{2} - \frac{1}{14}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^n}{1+\frac{1}{7}}\\
&= \frac{n}{2} - \frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^n}{7+1}\cdot 7\\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{7}\right)^n\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{n + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{7}\right)^n - \frac{1}{8}\right\}}
\end{aligned}
$$
……**(答え)**

Ⅲ.

解

（i） $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$は ℓの法線ベクトルなので，ℓ上の点 $(x,\ y)$ について，

$$\begin{pmatrix}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=0$$

$$\iff x-\frac{1}{\sqrt{2}}-y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\iff \boldsymbol{y=x-\sqrt{2}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（ii）

ℓが C と接する $\iff (x^2+ax+b-x+\sqrt{2}=0$ の判別式$)=0$

$\iff (x^2+(a-1)x+b+\sqrt{2}=0$ の判別式$)=0$

$\iff (a-1)^2-4b-4\sqrt{2}=0$

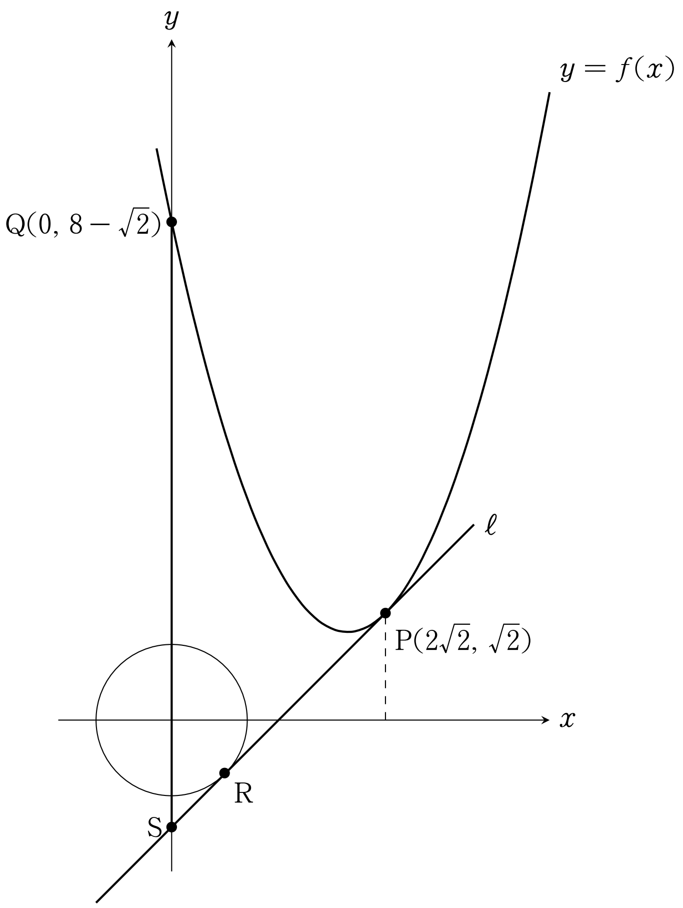
$\iff \boldsymbol{b=\frac{1}{4}(a-1)^2-\sqrt{2}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$

（iii） $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=x-\sqrt{2}$ とおくと，$y=g(x)$ が $x=2\sqrt{2}$ で $y=f(x)$ に接するので，$\begin{cases}f(2\sqrt{2})=g(2\sqrt{2})\\ f'(2\sqrt{2})=g'(\sqrt{2})\end{cases}$ ……① を満たす．このことより，

$$①\iff\begin{cases}2\sqrt{2}-\sqrt{2}=8+2\sqrt{2}a+b\\ 1=2\cdot 2\sqrt{2}+a\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\boldsymbol{b=8-\sqrt{2}}\\ \boldsymbol{a=1-4\sqrt{2}}\end{cases}$$ ……(**答え**)(⇨**注**　参照せよ.p.83)

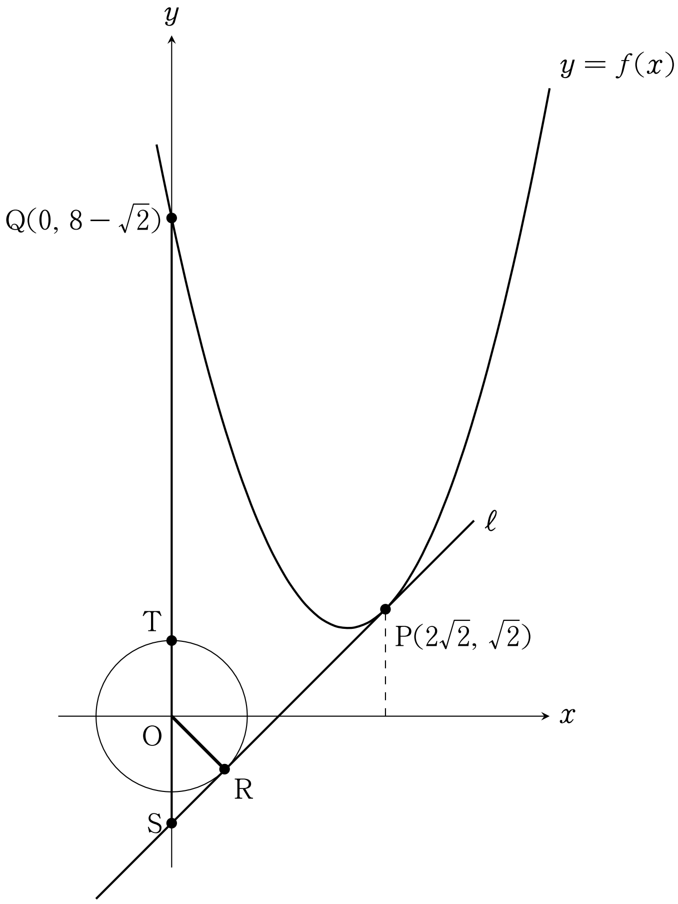
（iv） （iii）より，$f(x)=x^2+(1-4\sqrt{2})x+8-\sqrt{2}$ である．また，それぞれの座標は，$\mathrm{S}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{P}(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\mathrm{Q}(0,\ 8-\sqrt{2})$ である．このとき，線分 SP, QS 及び，C の $0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積 X を求める．



上図より， 求める面積は，

$$
\begin{aligned}
X &= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^2 + (1-4\sqrt{2})x + 8 - \sqrt{2} - x + \sqrt{2}\right)dx \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^2 - 4\sqrt{2}x + 8\right)dx \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{3}\Big[\left(x - 2\sqrt{2}\right)^3\Big]_0^{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

（ｖ） 線分 PR， 線分 QT， 線分 TR，C の $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ で囲まれた部分の面積 Y を求める．



上図より， 求める面積 Y は, $Y = X -$（扇形 TOR）$-$（△ORS）なので, 扇形 TOR, △ORS の面積をそれぞれ S_1, S_2とおく．

$\angle\mathrm{TOR} = \dfrac{3\pi}{4}$ なので, 扇形の面積の公式より,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \quad \text{である．}$$

また，△ORS について, $\mathrm{OR} = \mathrm{RS} = 1$($\because \angle\mathrm{SOR} = \dfrac{\pi}{4}$) なので,

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad Y = X - (S_1 + S_2) = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}} \cdots\cdots \textbf{(答え)}$$

《注》　2 曲線の接点の座標の求め方について

これは， 次の関係式を用いて答えを出しています．

公式

2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ について, $x=t$ で共通な接線を持つならば次の関係式を満たす．

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(t)=g(t)} \\ \boldsymbol{f'(t)=g'(t)} \end{cases} \iff \exists \boldsymbol{t}, \begin{cases} \boldsymbol{f(t)=g(t)} \\ \boldsymbol{f'(t)=g'(t)} \end{cases}$$

8.6　2025 年度 2 月 9 日実施

Ⅰ.

解

（ i ）　$2^{1-3x} \geqq \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 2^{-\frac{x}{2}}$

$\therefore$　$2^{1-3x} \geqq 2^{-\frac{x}{2}}$

$\therefore$　両辺の指数部分を比較して,

$$\begin{aligned} 1-3x \geqq -\frac{x}{2} &\iff 2-6x \geqq -x \\ &\iff \boldsymbol{x \leqq \frac{2}{5}} \cdots\cdots \textbf{(答え)} \end{aligned}$$

（ii）　赤玉と白玉の並べ方の総数は，7!である.

そのうち，両端にくる白玉の選び方は，${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り　である.

また 2 つの両端の白玉の並べ方は，2!通り　なので, 求める確率は,

$$\begin{aligned} \frac{5!\cdot 6\cdot 2}{7!} &= \frac{6!\cdot 2}{7!} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{7}} \cdots\cdots \textbf{(答え)} \end{aligned}$$

（iii）　$x < y$ のとき, $\begin{cases} 3,\ x,\ y \text{ が等差数列} \\ 4,\ x,\ y,\ z \text{ が等比数列} \end{cases}$　になるような x, y, z を求める.

数列の構造は，次のようになっている.

$3 \xrightarrow{+d} x \xrightarrow{+d} y$

$4 \xrightarrow{+d} x \xrightarrow{+d} y \xrightarrow{+d} z$

従って，このような x, y, z は存在せず, **解はなし……(答え)**

⇨注　問題のタイプミスで解けない問題になってしまっていました.

正しくは次のような問題です.

（iii）

x, y, z は実数であり, $x < y$ を満たすとする.3 つの数 3, x, y がこの順に等差数列となり, さらに, 4 つの数 4, x, y, z がこの順に等比数列となるとき, $x = \boxed{\textbf{ウ}}$, $y = \boxed{\textbf{エ}}$, $z = \boxed{\textbf{オ}}$ である.

正しい問題の解答も付けておきますが，一回自分で解いてみてください.

（正しい）(iii）の 解

4, x, y, z がこの順に等比数列なので, 公比を r とすると, $\begin{cases} x = 4r \\ y = 4r^2 \\ z = 4r^3 \end{cases}$ $\cdots(\ast)$ を満たす.

更に, 3, x, y がこの順で等差数列なので, 次のような構造になっている.

$$3 \xrightarrow{+d} x \xrightarrow{+d} y$$

このことより, $3 + y = 2x$ が成立する.

よって, x, y に$(\ast)$をそれぞれ適用すると,

$$\begin{aligned} 3 + 4r^2 = 2 \times 4r &\iff 4r^2 - 8r + 3 = 0 \\ &\iff (2r-3)(2r-1) = 0 \\ &\iff r = \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \\ &\iff r = \frac{3}{2} (\because x < y) \end{aligned}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x = 6, y = 9, z = \dfrac{27}{2}}$ ……**(答え)**

（iv） 「$(a+1)x+ay=1,\ ax+(a+2)y=2$ がただ一つ共有点を持つ.」$\iff$「2 直線が平行でない.」
なので, まず 2 直線が平行になるような条件を求めて, 最後にその条件を否定すれば良い.

$$\begin{cases} (a+1)x+ay=1 \iff \begin{pmatrix} a+1 \\ a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1\cdots\cdots\cdots① \\ ax+(a+2)y=2 \iff \begin{pmatrix} a \\ a+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

これらより, ①, ② の方向ベクトルをそれぞれ$\vec{d_1},\ \vec{d_2}$とおくと,

$$\begin{cases} \vec{d_1}=\begin{pmatrix} -a \\ a+1 \end{pmatrix} \\ \vec{d_2}=\begin{pmatrix} -a-2 \\ a \end{pmatrix} \end{cases}$$ がそれぞれとれる.

∴ これらが平行になる条件は,

$$\begin{aligned} \det\left\{\vec{d_1},\ \vec{d_2}\right\}=0 &\iff -a^2-(-a-2)(a+1)=0 \\ &\iff 3a+2=0 \\ &\iff a=-\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

∴ $(*)$を否定して, $\boldsymbol{a \fallingdotseq -\frac{2}{3}}$……**(答え)**

（v） $\displaystyle\int_0^2 (x+1)|x-1|dx$ を求める.
今, $I=\displaystyle\int_0^2 (x+1)|x-1|dx$ とおく.
・<u>$0 \leqq x \leqq 1$ のとき,</u>

$$\begin{aligned} I=\int_0^1 -(x+1)(x-1)dx &= -\int_0^1 (x^2-1)dx \\ &= -\frac{1}{3}\Big[\ x^3\ \Big]_0^1+1 \\ &= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

この積分値を I_1とおく,

・$\underline{1 \leqq x \leqq 2 \text{のとき,}}$

$$I = \int_0^2 (x+1)(x-1)dx = \frac{1}{3}\Big[\,x^3\,\Big]_1^2 - (2-1)$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 1$$
$$= \frac{4}{3}$$

この積分値を I_2とおく.

∴　以上より, 求める積分 I は, $I = I_1 + I_2 = \mathbf{2}$……(**答え**)

（vi）　$\vec{p}$は, $\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に垂直なので,

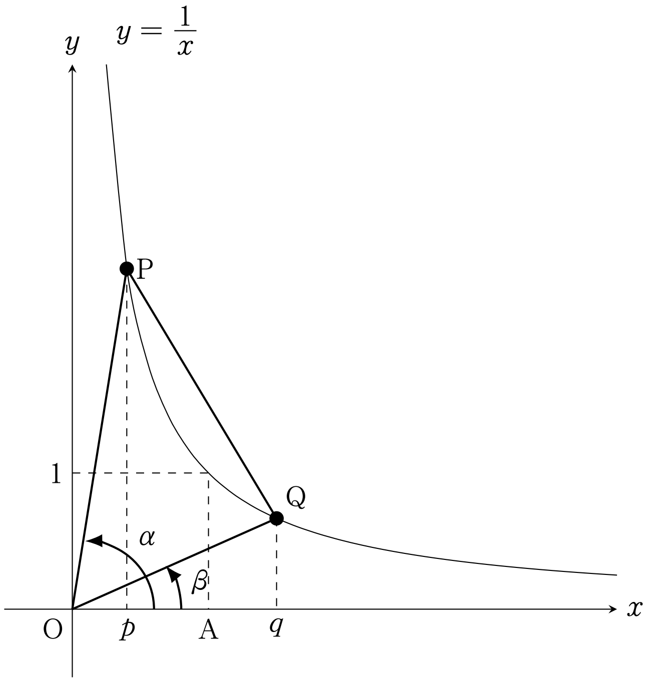
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

∴　$\boldsymbol{\vec{p} = (6,\ -2,\ 3)}$……(**答え**)

Ⅱ.

解

まず，与えられた条件を全て図示すると下図のようになる．



(ⅰ) 上図より，$p=\mathrm{OP}\cos\alpha$, $\dfrac{1}{p}=\mathrm{OP}\sin\alpha$ なので，$\mathrm{OP}=\sqrt{p^2+\dfrac{1}{p^2}}=\dfrac{1}{p}\sqrt{p^4+1}$ より，

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{p}{\mathrm{OP}}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{OP}}\end{cases}\iff\begin{cases}\boldsymbol{\cos\alpha=\dfrac{p^2}{\sqrt{p^4+1}}}\\ \boldsymbol{\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{p^4+1}}}\end{cases}$$ ……(**答え**)

角度 β に対しても同様なので，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\cos\beta=\dfrac{q^2}{\sqrt{q^2+1}}}\\ \boldsymbol{\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{q^4+1}}}\end{cases}$$ ……(**答え**)

（ii） 今, $\beta-\alpha$ を ϕ とおくと, $T=\tan\phi=\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$ である.

$$\begin{aligned}\cos\phi&=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\\&=\frac{q^2}{\sqrt{q^4+1}}\cdot\frac{p^2}{\sqrt{p^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{p^4+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{q^4+1}}\\&=\frac{1}{\{(q^4+1)(p^4+1)\}^{\frac{1}{2}}}\cdot(p^2q^2+1)\end{aligned}$$

$\sin\phi$ も同様にして,

$$\begin{aligned}\sin\phi&=\cos\phi\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\&=\frac{1}{\{(q^4+1)(p^4+1)\}^{\frac{1}{2}}}\cdot(p^2-q^2)\end{aligned}$$

∴ 以上より, $\boldsymbol{T=\dfrac{p^2-q^2}{p^2q^2+1}}$……**(答え)**

（iii） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}p\\ \frac{1}{p}\end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}q\\ \frac{1}{q}\end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\det\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{p^2-q^2}{pq}\right|\\&=\boldsymbol{\frac{q^2-p^2}{2pq}}(\because\ \boldsymbol{p<q})\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（iv） $t=pq$ より,

$$\begin{aligned}\frac{S}{T}&=\frac{p^2-q^2}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{q^2-p^2}\\&=-\boldsymbol{\frac{t^2+1}{2t}}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（v） $\dfrac{S}{T}=L$ とおくと,

$$L=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

なので，AM－GM の関係を用いると,

$$\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=1$$

これより, $-1 \leqq L$ であるが, $t \to \infty$ で $L \to -\infty$ なので, これは矛盾.

従って, **最小値は存在しない.**……(答え)

Ⅲ.

解

（ｉ） 一瞬で，$\boldsymbol{y = k(x-1)+1}$……(**答え**)

（ii） $f'(x) = 3x^2 - 2x = \boldsymbol{x(3x-2)}$……(**答え**)

（iii） $f'(x)$ は下に凸の 2 次関数なので, 次の増減表を得る.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{23}{27}$	$\nearrow$

∴ 上の増減表より, 極値は

$$\begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{(x=0)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{\frac{23}{27}\left(x=\frac{2}{3}\right)} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（iv）

$$\begin{aligned} \text{「}C\text{ と }\ell\text{が 2 つ共有点をもつ」} &\iff \text{「}x^3 - x^2 + 1 = k(x-1) + 1 \text{ が実数解を 2 つもつ」} \\ &\iff x^3 - x^2 - k(x-1) \quad \text{が実数解を 2 つもつ} \\ &\iff (x-1)(x^2-k) = 0 \cdots\cdots\cdots(*) \quad \text{が実数解を 2 つもつ} \end{aligned}$$

(*)について考察する.

$(x^2 - k) = 0$ が重解になるとき, (*)は実数解を二つもつので, $k = 0,\ 1$ のとき, それぞれ,

$$x^2(x-1) = 0,\ (x+1)(x-1)^2 = 0$$

となることから， 求める k は, $\boldsymbol{k = 0,\ 1}$……(**答え**)

（ｖ） （iv）と同様に (*)について考察すると, $(x^2 - k) = 0$ が $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$ と因数分解できるとき, (*)は異なる三つの実数解をもつので, $k \fallingdotseq 0,\ 1$ に注意して, 求める k の範囲は, $\boldsymbol{k > 1,\ 0 < k < 1}$……(**答え**)

(vi)

考え方

関数と比の問題は， 幾何学的に解くことが多いですが，y_1, y_2, y_3の座標が全くわからないので, $y = k(x-1)+1$ を使って, 計算で押すしかありません.

また, (ｖ) が誘導になっていることにも気づきましょう.

すなわち, $\boldsymbol{(x-1)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0}$ **の** $\boldsymbol{x}$ **座標に順序が生じる.** ということです.

解

y_1, y_2, y_3に対応する x 座標をそれぞれ, x_1, x_2, x_3とおく.

$$
\begin{aligned}
(y_2-y_1):(y_3-y_2)=1:2 &\iff k(x_2-x_1):k(x_3-x_1)=1:2 \\
&\iff x_2-x_1:x_3-x_2=1:2 \\
&\iff 2x_2-2x_1=x_3-x_2 \\
&\iff 2x_1-3x_2+x_3=0 \cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで, (iv) より, 異なる 3 つの共有点は, $x=1$, $x=\pm\sqrt{k}$ なので, 次の二つの場合分けが生じる.

・$0<k<1$ のとき,

$x_1=-\sqrt{k}$, $x_2=\sqrt{k}$, $x_3=1$ である. これらを ① にそれぞれ代入することにより,

$$
\begin{aligned}
-2\sqrt{k}-3\sqrt{k}+1=0 &\iff 5\sqrt{k}=1 \\
&\iff \sqrt{k}=\frac{1}{5} \\
&\iff k=\frac{1}{25}
\end{aligned}
$$

∴ これは, 確かに $0<k<1$ を満たすので, 真である.

・$k>1$ のとき, $x_1=-\sqrt{l}$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt{k}$ である. これらを ① にそれぞれ代入することにより,

$$
-2\sqrt{k}-3+\sqrt{k}=0 \iff \sqrt{k}=-3
$$

∴ これを満たすような k は存在しない.

∴ 以上より, 求める k の値は, $\boldsymbol{k=\frac{1}{25}}$ ……**(答え)**

おわりに

立教大学の過去問題を解説していく中で，「確実に力がついてきているなあ」と回を重ねるごとに感じていました．

夏のときの理瀬さんと比べて本当に成長していると感じます．

毎日毎日， 夜遅くまで（木曜は違うかもだけど....）予備校で勉強する生活は， かなりストレスだと思うし眠い目擦りながら勉強しているのが容易に想像できます．

僕も 1 年前は同じでした．共通テストが近づいてきて， メンタル的にもやられてくる頃だと思うけど， 焦らず演習していこう．

今の榎本さんなら絶対に大丈夫だと思っています！

なので， ここまで積み上げてきたものを信じて， これからも日々の演習に取り組んで欲しいと思います．

ここまで積み上げた勉強量と経験は絶対に少なくありません！理瀬さんは， 壮絶な中学受験体験をしているから今はそれほど.... と思うかもしれないけれど， 予備校に 15 時間こもって勉強するなんてそんなことできる人はいません.(僕の予備校の東工大志望のクラスの平均が 15 時間くらいだった...）

周りの MARCH 志望の人なんてやって 10 時間くらいでしょう．

なので， 自信をもってください！絶対にいけます．

春先に理瀬さんの合格報告を聞けるのを楽しみにしています！陰ながら応援しています．頑張ってください！！

大島　遙斗