早稲田大学ー社会科学部ー過去問演習と良問演習

大島　遙斗

2026 年 1 月 17 日

はじめに

長い長い受験勉強もとうとう終わりが見えてきました．今これを書いているのは 12 月の 14 日の深夜です．今から，2 ヶ月後の理瀬さんはもう大学入試を終えています．さて， どんな景色が見えているのでしょうか．

今から志望校の合格にできることは， たくさん問題をといてパターンをたくさん身につけるのではなく，

出会った問題から何を学ぶか?

です．
1 日 1 日を大切に頑張っていきましょう．

また， 勉強の相談やメンタル的にしんどいなどあれば気軽に電話なり， 直接僕に話しかけたりして教えてください！いつでも相談にのります!最終局面に向けて一緒に頑張りましょう．

大島　遙斗

本書の使い方

まず，このテキストは **早稲田の三年分の過去問と僕が選んだ良問** の二部から構成されています．

それぞれ 1 週間のうちに解いてきてください．

・過去問について

　言わずもがなよく復習してください．何がダメで次はどうすれば解けるようになるのか，どのような発想があったら解くことができていたのか，を考えながら復習しましょう．

・良問について

　立教が一応のところの第一志望だと思うので掲載する問題は，**|標準|〜|やや難|** の問題を集めます．また，以下の記号を用います．

A→ 基本的な問題．教科書レベル．

B → 標準的な問題．ぜひ解き切って欲しい問題．

C → 難問．この問題が解けなくても，周りの受験生とはあまり差がつかない．

　例えば，次のように問題の横に書いたら次のように捉えてください．

〔B15〕= 標準的な問題で目標解答時間は，15 分

また，本題の他に ▶ 類題演習 ◀ というものを掲載します．必ずしも解いてくる必要はありません．自分の実力向上に役立ててください．

目次

1　早稲田大学過去問題編

1.1　2023 年実施

2023 年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで， 問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと.
2. 問題は **10〜11 ページ** に記載されている. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明， ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は， 手を挙げて試験員に知らせること.
3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること.
4. 記述解答用紙記入上の注意

   （1）試験開始後， 記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に， 氏名及び受験番号を正確に記入すること.

   （2）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある.

   （3）受験番号の記入にあたっては， 次の数字見本にしたがい， 読みやすいように， 正確に記入すること.

   （4）受験番号は右詰めで記入し， 余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること.

   （5）計算の途中過程を記述すること. 記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある.

   （6）　定規， コンパスを使用してもよい.
5. あとは
6. なんだかんだ
7. 色々と
8. 注意事項が
9. 書いてあります.

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

曲線 $y=ax^2+b$ 上に x 座標が p である点 P をとり, 点 P における接線を ℓ とする.
ただし, 定数 a,b は $a>0,\ b>0$ を満たすとする. 次の問に答えよ.

（１） 接線 ℓ の方程式を $a,\ b,\ p$ を用いて表せ.

（２） 接線 ℓ と $y=ax^2$ で囲まれた部分の面積 S を $a,\ b$ を用いて表せ.

（３） 接線 ℓ と曲線 $y=ax^2+\dfrac{b}{2}$ で囲まれた図形の面積を S' としたとき, S' を S を用いて表せ.

（４） 接線 ℓ と曲線 $y=ax^2+c$ で囲まれた部分の面積 S'' とする.$S''=\dfrac{S}{2}$ のとき, c を $a,\ b$ を用いて表せ. ただし, $b>c$ とする.

2.

定数 m に対して $x,\ y,\ z$ の方程式

$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+m \qquad \cdots①$$

を考える. 次の問に答えよ.

（１） $m=1$ のとき ① 式をみたす実数 $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ.

（２） $m=5$ のとき ① 式を満たす実数 $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ. ただし, $x\leqq y\leqq z$ とする.

（３） $xyz=x+y+z$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ. ただし, $0<x\leqq y\leqq z$ とする.

3.

$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする. 次の問に答えよ.

（１）　a^3を a の 1 次式で表せ.

（２）　a は整数であることを示せ.

（３）　$b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするとき, b を超えない最大の整数を求めよ.

〔以　下　余　白〕

1.2　2024 年度実施

2024年度：数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで， 問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと.

2. 問題は **17〜18 ページ** に記載されている. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明， ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は， 手を挙げて試験員に知らせること.

3. 解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること.

4. 記述解答用紙記入上の注意

（1）試験開始後， 記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に， 氏名及び受験番号を正確に記入すること.

（2）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある.

（3）受験番号の記入にあたっては， 次の数字見本にしたがい， 読みやすいように， 正確に記入すること.

（4）受験番号は右詰めで記入し， 余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること.

（5）計算の途中過程を記述すること. 記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある.

（6）　定規， コンパスを使用してもよい.

5. あとは

6. なんだかんだ

7. 色々と

8. 注意事項が

9. 書いてあります.

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

連立不等式

$$y \leqq -\frac{2}{3}x+4, \qquad y \geqq x-1, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0$$

の表す領域を D とする．点 $(x,\, y)$ が D を動くとき，次の問に答えよ．

（１） 領域 D を座標平面上に図示せよ．

（２） $-2x+y$ の最大値と，そのときの $x,\, y$ の値を求めよ．

（３） $2x+y$ の最大値と，そのときの $x,\, y$ の値を求めよ．

（４） a がすべての実数を動くとき，$ax+y$ の最大値を a で分類せよ．

2.

$\mathrm{OA}=6,\ \mathrm{OB}=5,\ \mathrm{AB}=7$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ について，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく．次の問に答えよ．

（１） $\triangle\mathrm{OAB}$ の内心を I，辺 AB と直線 OI の交点を C とする．$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a},\ \vec{b}$で表せ．

（２） $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$を$\vec{a},\ \vec{b}$で表せ．

（３） 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ．

（４） $\triangle\mathrm{OAB}$ の垂心を H，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}},\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}$を$\vec{a},\ \vec{b},\ s,\ t$ で表せ．

（５） $s,\ t$ の値を求めよ．

3.

n を $n \geqq 3$ である自然数とする. 相異なる n 個の正の数を小さい順に並べた集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を考える.$a_1=k$ とするとき, 次の問に答えよ.

（１） $a_i-a_1(i=2, 3, \cdots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_2を求めよ.

（２） （１） のとき, a_nを n で表せ.

（３） $\dfrac{a_i}{a_1}(i=2, 3, \cdots, n)$ がすべて S の要素となるとき, a_nを n の式で表せ.

〔以　下　余　白〕

1.3　2025 年度実施

2025 年度：数学

注意事項

1.　試験開始の合図があるまで，問題冊子及び記述解答用紙には手を触れないこと．

2.　問題は **24〜25 ページ** に記載されている．試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気づいた場合は，手を挙げて試験員に知らせること．

3.　解答はすべて，HB の黒鉛筆または HB のシャープペンシルで記入すること．

4.　記述解答用紙記入上の注意

　（１）試験開始後，記述解答用紙の所定欄（2 箇所）に，氏名及び受験番号を正確に記入すること．

　（２）所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合はある．

　（３）受験番号の記入にあたっては，次の数字見本にしたがい，読みやすいように，正確に記入すること．

　（４）受験番号は右詰めで記入し，余白が生じる場合でも受験番号の前に「0」を記入すること．

　（５）計算の途中過程を記述すること．記述されていない答案は採点の対象外になる場合がある．

　（６）　定規，コンパスを使用してもよい．

5.　あとは

6.　なんだかんだ

7.　色々と

8.　注意事項が

9.　書いてあります．

計算用紙

計算用紙

計算用紙

計算用紙

1.

自然数 n, p に対して, n^p の 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す. 次の問に答えよ.

（1） $f_2(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.

（2） $f_5(n)-f_1(n)$ の値をすべて求めよ.

（3） $f_{100}(n)$ の取りうる値をすべて求めよ.

2.

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{B_n\}$, すなわち,

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする. 次の問に答えよ.

（1） $a_n = -\dfrac{1}{n}$ のとき, b_m を n の式で表せ.

（2） $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ のとき, a_n を n の式で表せ.

（3） 数列 $\{b_n\}$ が以下を満たすとき a_n を n の式で表せ. ただし, $a_1 = 1$ とする.

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = n(n+1) \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

3.

θ の関数

$$f(\theta) = \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

を考える. ただし, $0 \leqq \theta\pi$ とする. 次の問に答えよ.

（1） $k = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ とおくとき, $f(\theta)$ を k の関数で表せ.

（2） $f(\theta)$ の最大値, 最小値をも求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.

（3） （1）の k に対して, θ の方程式 $f(\theta) = ak$ の解の個数を求めよ. ただし, 定数 a は $0 < a \leqq 3$ とする.

〔以　下　余　白〕

2　良問集問題編

2.1　第 1 回

　まずは，単純な計算問題で肩慣らしといきましょう．おっとその前に公式の確認です．

公 式

1°　$\boldsymbol{|X| = k \iff X = \pm k}$ **かつ** $\boldsymbol{k \geqq 0}$

2°　$\boldsymbol{|X| < k \iff -k < X < k}$

3°　$\boldsymbol{|X| > k \iff X > k}$ **または** $\boldsymbol{X < -k}$

1.0.〔絶対値と不等式 (A10)〕

以下の不等式をそれぞれ解け．

（1）　$|x+3| \geqq |x-2|$　　（25　宮崎大・教，農）

（2）　$|4x-1| < |x+3|$　　（25　福島大）

▶ 類題演習 1.1◀

（1）　不等式 $|2x-3| \leqq 2$ の解を求めよ．さらに，不等式 $|2x-3| \leqq 2 \leqq \dfrac{1-3a}{3}x-1$ の解が $1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ となるような定数 a の値を求めよ．　　（25　同志社女子大）

（2）　$|x|+|x-3| < 4$ を解け．　　（25　大東文化大）

続いて，座標平面と幾何の絡んだ問題です．立教の過去問演習を見ている感じ，苦手そうだったので特集します．

1.2.0.〔座標平面と幾何 1〕(B20)

座標平面上の点 Q(3, 5) と放物線 C: $y = x^2$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ について，以下の問に答えよ．

（1） 点 Q から放物線 C へ引いた 2 本の接線の方程式とそれぞれの接点の座標を求めよ．

（2） 点 P が点 (2, 4) から点 (−3, 9) まで動くとき，線分 PQ が通過する領域の面積を求めよ．

（25　福岡大・理）

1.2.1〔座標平面と幾何 2〕(B15)

座標平面上に A(25, 0), B(0, 20), C(10, 0) がある．点 P が点 C を中心とする半径 6 の円周上を動くとき，△ABP の面積の最小値を求めなさい．

（25　福島大）

▶ 類題演習 1.2.2◀

座標平面において，原点を中心とする半径 3 の円 O_1 に点 A(3, 0) において内接する半径 2 の円を O_2 とする．O_2 上の点 $\mathrm{B}(2,\ \sqrt{3})$ において O_2 に外接し，O_1 と内接する円 O_3 の中心を P とするとき，

（1） O_2 の中心を C とする．$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とするとき，P の座標を t で表せ．

（2） P の座標と O_3 の半径 r を求めよ．

（愛知医大・医学部）

2.2　第 2 回

先週解説することが叶わなかった，第 2 回目の良問演習です．こちらは，解答をつけておきます．

2.1.0〔軌跡と領域の雑台〕(B30)

（1）　m が $m>0$ の範囲を動くとき，直線 $y=mx-m^2$ 　が通りうる範囲を求め，図示せよ．

（2）　点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が原点を中心とする半径 1 の内部を動くとき，点 $\mathrm{Q}(x+y,\,xy)$ の動く範囲を図示せよ．

（3）　m が $m>0$ の範囲を動くとき，2 直線 $(m-1)x-y+1=0\cdots$①，$mx+(m-2)y+2=0\cdots$② の交点の軌跡を求め，図示せよ．

（4）　t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，$x=2t-1\cdots$①，$y=t^2+t\cdots$② を座標とする点 $(x,\,y)$ の軌跡を求め，図示せよ．

2.1.1〔軌跡と領域の図示〕(B25)

xy 平面において，実数 t に対し，2 点 $\mathrm{P}(-4,\,2t^2-4t-1)$，$\mathrm{Q}(4,\,2t^2+4t-1)$ をとる．

（1）　2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

（2）　t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する部分を D とする．ただし，その境界（境界線）も含むとする．

（i）　2 点 $\mathrm{A}(0,\,-2)$，$\mathrm{B}(1,\,3)$ はそれぞれ D に含まれないことを示せ．

（ii）　D を図示し，その面積を求めよ．

（お茶の水女子・理）

▶ 類題演習 2.1.2◀

不等式 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6>0$ の表す領域を D とおき，不等式 $x^2+y^2-2kx-y+k^2<0$ の表す領域を E とおく．ただし，k は実数の定数とする．

（1）　$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$ を因数分解せよ．

（2）　領域 D を図示せよ．

（3）　領域 D と領域 E の共通部分が空集合となるような k の値の範囲を求めよ．

（法政大）

次の話題は方程式です．もう結構お腹いっぱいかもしれませんがデザートにどうぞ．

2.2.0〔不等式の色々〕(B40)

（1） $A = \alpha + \beta,\ B = 2\sqrt{\alpha + \beta},\ C = \sqrt{2\alpha} + \sqrt{2\beta}$ の大小関係を不等号を用いて表せ．

（2） $x > 0,\ y > 0,\ x + 7y = 1$ のとき，$\dfrac{1}{7x} + \dfrac{1}{y}$ の最小値を求めよ．

（3） $x > 0$ のとき，$\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x + 1}$ の最小値を求めよ．

（4） $x,\ y,\ z$ を正の実数とする．$\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)(x + y + z)$ の取りうる値の最小値を求めよ．また最小値をとるときの $x,\ y,\ z$ の条件を求めよ．

（上智大・茨城大・横浜市立大・鹿児島大）

▶ 類題演習 2.2.1◀

（1） $x > 0,\ y > 0$ のとき，$\left(x + \dfrac{1}{y}\right)\left(y + \dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ．

（2） $x > 0$ のとき，$\dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 16}$ の最大値を求めよ．

（3） すべての正の実数 x に対して，$\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^6 \geqq y$ を満たす y の最大値を求めよ．

（同志社女子大学・岩手県立大・中京大）

2.3　第 3 回

なにをしようかなあと思いましたが，やはり解析分野（関数）と幾何学分野（図形）あたりを演習することにしました．

3.1.0〔 座標平面と幾何 3〕(B15)

r, a, b を実数とし，$r > 0$, $a \neq 0$ とする．座標平面上において，中心が点$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$で半径が r の円を K，放物線 $y = ax^2 + b$ を C とする．円 K と放物線 C はともに点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$で同じ直線 ℓに接しているとする．このとき次に問に答えよ．

（１）　r, a, b の値を求めよ．

（２）　直線 ℓの方程式を求めよ．

（３）　$\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}} (ax^2 + b)dx$ の値を求めよ．

（４）　連立不等式

$$\begin{cases} x \leqq \sqrt{3}, \quad y \leqq 0, \quad y \geqq ax^2 + b \\ \left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 \geqq r^2 \end{cases}$$

の表す領域の面積 S を求めよ．

（関西学院大学・文系）

3.1.1〔 軌跡は簡単 〕(B10)

a を実数とし，2 つの放物線 $y = x^2$と $y = -x^2 + 2ax - a$ が異なる 2 点 A, B で交わっているとする．このとき，次の問に答えよ．

（１）　実数 a の取りうる値の範囲を求めよ．

（２）　a が（１）で求めた範囲を動くとき，線分 AB の中点の軌跡を求め，図示せよ．

（小樽商科大）

▶ 類題演習 3.1.2◀

m がすべての実数の値を取りながら変わるとき，2 つの直線 $mx - y = 1$ と $x + my = m + 2$ の交点の軌跡を求めよ．

（東京女子大）

次は早稲田大学（社会学部）で頻出の整数問題の演習です. かなり難しいですが頑張りましょう. それでは参ります.

4.1.0〔 多項式と整数 〕(B25)

多項式

$$P(x)=(x^6-3x^4+3x^2-1)x^3(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$$

を考える. 次の問に答えよ.

（1） 多項式 $P(x)$ が 2 次式 x^2-1 で割り切れることを示せ.

（2） 6480 を素因数分解せよ.

（3） n が 2 以上の整数のとき $P(n)$ は 6480 の倍数であることを示せ.

（富山大・理, 医, 薬）

4.1.1〔 漸化式と整数 〕(C30)

数列 $\{a_n\}$ を次で定める.

$$a_1=8,\ a_{n+1}=2a_n^2+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

さらに, a_nを 5 で割った商を b_n, 余りを r_nとする.

自然数 n に対して, 以下の問に答えよ.

（1） r_nを求めよ.

（2） b_nを 5 で割った余りを求めよ.

（3） a_nを 50 で割った余りを求めよ.

（中央大・理工）

▶ 類題演習 ◀

n を自然数とする. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n!},$$
$$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$$

とおく. a_nの値が整数となる n の値の最大値は $\boxed{\text{ア}}$, b_nの値が最大となる n の値は $\boxed{\text{イ}}$ である.

（同志社大・文, 経）

2.4　総合演習 1: 数式分野の総仕上げ

数式のセンスを美しく研ぎ澄ます!!

▶ 今年の入試問題の数式を中心とする問題から標準以上の問題を扱います. 焦らずどっしりと構えて参りましょう!◀

2.5　総合演習 2: 図形分野の総仕上げ

図形を鋭く光らせる!!

▶ 今年の入試問題の図形を中心とする問題から標準以上の問題を扱います. 焦らずどっしりと構えて参りましょう!◀

6.1.0〔 まずは， お絵描きから 〕(B20)

3 辺の長さが 4, 5, 6 である三角形の内部または周上の点 P から 3 辺へ引いた垂線の長さをそれぞれ x, y, z とするとき,

$$x+y+z$$

の最大， 最小を与える P の位置を求めよ.

6.1.1〔 どの断面図を描くか 〕(B20)

底面の半径 a, 高さ h の直円錐を頂点を通る平面で切る.

その切断面である三角形の面積の最大値を求めよ.

上の 2 題は， 初等幾何学を中心とする問題です. あまり解析的な手段に頼ることなく解答できます.

続いて， 幾何学と関数が奏でる美しいハーモニーです. 特に **ベクトル** を積極的に利用できるようになることが幾何学と関数の融合問題に強くなるコツです!

6.1.2〔ベクトルを使おう 1〕(B30)

a, b, t は実数であり, $t > 1$ とする.xy 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = x^2,\ C_2 : y = a(x-1)^2 + b(x-1) + 2$$

を考える. 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は C_1と C_2の共有点であり, 点 P において C_1の接線の傾きと C_2の接線の傾きが等しいとする.

（1） a と b を t の式でそれぞれ表せ.

（2） $a > 1$ であることを示せ.

（3） 放物線 C_2の頂点の x 座標を t の式で表せ.

（4） （3）で求めた式を $f(t)$ とする.$t > 1$ の範囲で $\dfrac{1}{f(t)}$ を最大にするような t の値を求めよ.

（5） t の値は（4）で求めた通りとする.C_2と直線 $y = 2$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.

3　早稲田大学過去問解答編

3.1　2023 年度実施

1.

考え方

標準的な微積分の問題です.

二次関数と ℓ の共有点の x 座標が厄介な形になるので, 文字で置き換えてから積分するのが計算ミスを減らすコツです.

また積分で面積を求めるときに, 項別に積分すると代入計算が大変面倒くさいです. 共有点を求める過程で, 因数分解ができるので $\frac{1}{6}$ 公式を使いましょう. そうすると大変キレイに面積を求めることができます.

解

(1)　s 接線 ℓ の方程式は, $y' = 2ax$　より,

$$\ell\colon y = 2ap(x-p) + ap^2 + b$$

$\therefore$　$\boldsymbol{y = 2apx - ap^2 + b}$……(答え)

(2)　$y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} ax^2 = 2apx - ap^2 + b &\iff x^2 = 2px - p^2 + \frac{b}{a} \\ &\iff x^2 - 2px + p^2 - \frac{b}{a} = 0 \\ &\iff x = p \pm \sqrt{p^2 - p^2 + \frac{b}{a}} = p \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

ここで, $y = ax^2$ と ℓ の共有点の x 座標の小さい方から, $x = \alpha$, $x = \beta$ とおくと,
$\alpha = p - \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\beta = p + \sqrt{\frac{b}{a}}$ であり, 直線 ℓ は $y = ax^2$ よりも常に上側なので求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{……(答え)} \end{aligned}$$

（3） ℓと $y=ax^2+\dfrac{b}{2}$の共有点の x 座標を小さい方から，α', β'とおくと，

$$2apx-ap^2+b=ax^2+\frac{b}{2}$$
$$\iff x^2-2px+p^2-\frac{b}{2a}=0$$
$$\iff x=p\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$$

$\therefore\quad \alpha'=p-\sqrt{\dfrac{b}{2a}},\ \beta'=p+\sqrt{\dfrac{b}{2a}}$ 従って，求める面積 S'は，

$$\begin{aligned}S'&=\int_{\alpha'}^{\beta'}-(x-\alpha')(x-\beta')dx\\&=\frac{1}{6}(\beta'-\alpha')^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\cdot\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{S'=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}S}$**……（答え）**

（4） ℓと $y=ax^2+c$ の共有点の x 座標を小さい方から γ, δ とおくと，

$$ax^2+c=2apx-ap^2+b\iff x^2-2px+p^2+\frac{c-b}{a}=0$$
$$\iff x=p\pm\sqrt{\frac{b-c}{a}}$$

$\therefore\quad \gamma=p-\sqrt{\dfrac{b-c}{a}},\ \delta=p+\sqrt{\dfrac{b-c}{a}}$ とおけるので，求める面積 S''は，

$$\begin{aligned}S''&=\int_{\gamma}^{\delta}-(x-\gamma)(x-\delta)dx\\&=\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\cdot\sqrt{\frac{b-c}{a}}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

よって，$S'' = \dfrac{S}{2}$なので，

$$
\begin{aligned}
S'' = \frac{S}{2} &\iff \frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&\iff 2\left(\frac{b-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&\iff 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{b-c}{a}\right) = \frac{b}{a} \quad \text{（両辺}\frac{2}{3}\text{乗した.）} \\
&\iff b-c = 2^{-\frac{2}{3}}\cdot b \\
&\iff c = b(1-2^{-\frac{2}{3}}) = b\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = b\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad \boldsymbol{c = b\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}$ ……**（答え）**

2.

考え方

整数問題です. 整数問題でまずやることは, **実験** ですが, 本問はそれ以前にすることがあります.

① が $\boldsymbol{x, y, z}$ **の交代式** なので, 因数分解ができます. なので, 因数分解することが先です. そこから, 因数分解された式を満たす x, y, z の組を求めましょう.

$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+m \qquad \cdots ①$$

解

（**1**）

$m=1$ のとき,

$$\begin{aligned}① &\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1\\ &\iff x(yz+1-y-z)+y+z-yz-1=0\\ &\iff x\{y(z-1)-(z-1)\}+(z-1)-y(z-1)=0\\ &\iff x(z-1)(y-1)+(z-1)(1-y)=0\\ &\iff (x-1)(y-1)(z-1)=0\end{aligned}$$

$\therefore$ これを満たす x, y, z は, $\boldsymbol{x=1}$ **または** $\boldsymbol{y=1}$ **または** $\boldsymbol{z=1}$……(**答え**)

（**2**）

$m=5$ のとき

$$\begin{aligned}① &\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5\\ &\iff xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1+4\\ &\iff (x-1)(y-1)(z-1)=4 \cdots\cdots\cdots ①'\end{aligned}$$

①′を $x\leqq y\leqq z$ なので, $x-1\leqq y-1\leqq z-1$ であるから, ①′を満たす $(x-1,\ y-1,\ z-1)$ の組は,

$$(x-1,\ y-1,\ z-1)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2),\ (-4,\ -1,\ 1),\ (-2,\ -2,\ 1),\ (-2,\ -1,\ 2),\ (-1,\ -1,\ 4)$$

従って, 求める $(x,\ y,\ z)$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 3),\ (-3,\ 0,\ 2),\ (-1,\ -1,\ 2),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 5)}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（**3**）

$$xyz = x + y + z \cdots\cdots\cdots (*)$$

考え方

今までの誘導を踏襲すると，**(　)(　) = (具体的な数)** にすることが目標です. 慣れていないと厳しいと思います. 解けなくても良い問題でしょう.

本問では, **$\boldsymbol{x = k}$ とおく.** ことから始めます.

解

$x = k \quad (x \in \mathbb{N})$ とおくと,

$$\begin{aligned} kyz = k + y + z &\iff k^2yz = ky + kz \\ &\iff k^2yz - ky - kz = k^2 \\ &\iff (ky-1)(kz-1) = k^2 + 1 \cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

ここで，$x \leqq y$ において, 両辺 k 倍して 1 を引くと,

$$\begin{aligned} kx - 1 \leqq ky - 1 &\iff ky - 1 \geqq kx - 1 \\ &\iff ky - 1 \geqq k^2 - 1 \cdots\cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

同様に，$y \leqq z$ なので, $z \geqq z$ より,

$$kz - 1 \geqq k^2 - 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

③, ④ より, ② について,

$$\begin{aligned} (ky-1)(kz-1) \geqq (k^2-1)(k^2-1) &\leqq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 2k^2 + 1 \leqq k^2 + 1 \\ &\iff k^4 - 3k^2 \leqq 0 \\ &\iff k^2 - 3 \leqq 0 \\ &\iff -\sqrt{3} \leqq k\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって， この不等式を満たす自然数は，$k = 1$ のみなので, $x = 1$ である.

・$x = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} yz = y + z + 1 &\iff y(z-1) - z + 1 - 1 = 1 \\ &\iff (z-1)(y-1) = 2 (y \leqq z) \end{aligned}$$

これを満たす $y,\ z$ の組は，$(y-1,\ z-1)=(1,\ 2)$ すなわち $(y,\ z)=(2,\ 3)$ のみ．

$\therefore$　（＊）を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)}$……**（答え）**

3.

$$a=\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{1}{3}}-\left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$\boxed{\text{考え方}}$

3 乗根の中身が複雑なので文字で置き換えて計算を簡単にしましょう.

解

（**1**） $\alpha=5\sqrt{2}+7,\ \beta=5\sqrt{2}-7$ とおくと,

$$\begin{aligned}(*)\Longleftrightarrow a&=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3\\&=\alpha-\beta-3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\\&=\alpha-\beta-3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{cases}\alpha-\beta=14\\\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}=50-49=1\end{cases}$$

より, $\boldsymbol{a^3=14-3a}$……(**答え**)

（**2**）

$$\begin{aligned}a^3=14-3a&\Longleftrightarrow a^3+2a-14=0\\&\Longleftrightarrow (a-2)(a^2+2a+7)=0\\&\Longleftrightarrow a=2 \text{ または } a^2+2a+7=0\end{aligned}$$

$\therefore$ $a^2+2a+7=0$ の解は複素数なので, $a=2$ である.

$\therefore$ $a\in\mathbb{Z}$ である. **(証明終わり)**

（**3**）　$b=\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$ の整数部分を求める．

（**1**）と同様にして，b^3を計算する．

$$
\begin{aligned}
b^3 &= \alpha+\beta+3\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} \\
&= \alpha+\beta+2\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\left(\alpha^{\frac{1}{3}+\beta^{\frac{1}{3}}}\right) \\
&= 10\sqrt{2}+3b \\
&\iff b^3=3b+10\sqrt{2} \\
&\iff b^3-3b-10\sqrt{2}=0 \\
&\iff (b-2\sqrt{2})(b^2+2\sqrt{2}b+5)=0
\end{aligned}
$$

$\therefore$　$b^2+2\sqrt{2}b+5=0$ の解は複素数なので, $b=2\sqrt{2}$.

$\therefore$　$2\sqrt{2}$ の整数部分は, 2 なので求める整数は, **2**……(**答え**)

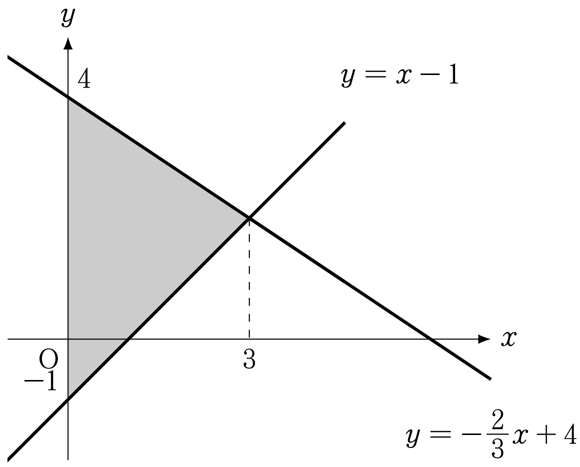
3.2　2024 年度実施

1.

線形計画法の典型的な問題です. 完答以外はありえません.

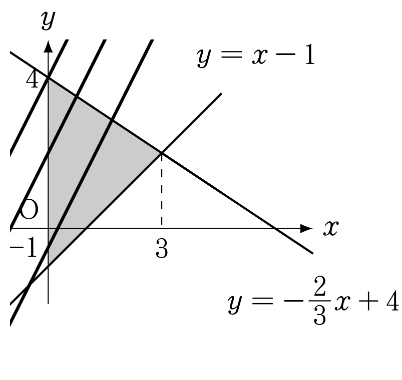
解

（**1**）　$D:\begin{cases} y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4 \\ y \geqq x-1 \\ x,\, y \geqq 0 \end{cases}$ 　を図示すると, 下図のようになる.



上図の網目部 が D で境界をすべて含む.

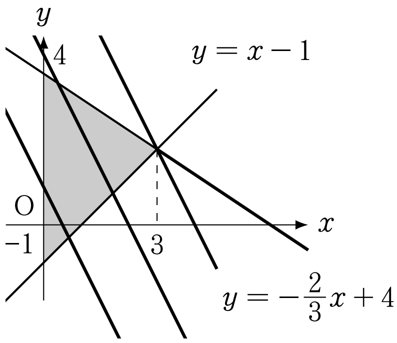
（**2**）　$-2x+y=k$ とおいて, 下図に図示すると, 下図太実線部が $y=2x+k$ である.



∴　上図より, $(x,\, y)=(0,\, 4)$ を通るとき最大より,

求める最大値は, **$(x,\, y)=(0,\, 4)$ のとき, $\max k=4$**……(**答え**)

（３） $2x+y=\ell$とおいて, 下図に図示すると, 下図太実線部が $y=-2x+\ell$である.



∴　上図より, $(x,\,y)=(3,\,2)$ を通るとき最大より,

求める最大値は, $\boldsymbol{(x,\,y)=(3,\,2)}$ **のとき**, $\boldsymbol{\max \ell=8}$……**(答え)**

(４) $ax+y=m$ とおいて, $a=0$, $a>\dfrac{2}{3}$, $a<\dfrac{2}{3}$の三つの場合で分けて考える.

(ｉ) $a=0$ のとき,

$y=m$ なので, $(x,\,y)=(0,\,4)$ のとき, $\max m=4$ である.

(ii) $a>\dfrac{2}{3}$ のとき,

このとき, $y=-ax+m$ は, 傾き負の 1 次関数で, $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ の傾きよりも大きくなるので $(x,\,y)=(0,\,4)$ で $\max m=4$ である.

(iii) $a<\dfrac{2}{3}$ のとき,

このとき, $y=-ax+m$ は, 傾き負の 1 次関数で, $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ の傾きよりも小さくなるので $(x,\,y)=(3,\,2)$ で $\max m=2-3a$ である.

∴　以上より, 求める最大値は,

$$\boldsymbol{\max m=\begin{cases}4 & \left(a=0,\,a>\dfrac{2}{3}\right)\\ 2-3a & \left(a<\dfrac{2}{3}\right)\end{cases}}\quad \text{……(答え)}$$

2.

《**注**》幾何学図形（座標平面に書かないやつ.）を書くには， 僕の技量不足で書けないので， あとで別紙（手書き）を渡します.

考え方

ベクトルの典型的な問題です.（**5**）の係数比較の計算が厄介ですがこれも完答をして欲しいところです.

解

（**1**） 角の二等分線の性質より，AC : AB = 6 : 5 なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\frac{5}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（**2**） 添付図のように点 D, E をおく. このとき，$p,\ q \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{cases} \mathrm{EI : IB = p : 1 - p} \\ \mathrm{DI : IA = q : 1 - q} \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OI}} = p\vec{b} + \dfrac{5}{12}(1-p)\vec{a}\cdots\cdots\cdots① \\ \overrightarrow{\mathrm{OI}} = q\vec{a} + \dfrac{6}{13}(1-q)\vec{b}\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

①, ② をそれぞれ係数比較して，

$$\begin{cases} p = \dfrac{6}{13}(1-q) \\ \dfrac{5}{12}(1-p) = q \end{cases} \iff \begin{cases} 13p = 6\left(1 - \dfrac{5}{12} + \dfrac{5}{12}p\right) \\ q = \dfrac{5}{12}(1-p) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p = \dfrac{1}{3} \\ q = \dfrac{5}{18} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \boldsymbol{\frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（**3**） 余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BOA} = \frac{25 + 36 - 49}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{6}$$

なので，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathbf{6}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

（4） 添付の図より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \vec{a}$$
$$= (\boldsymbol{s}-1)\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{b}}$$ ……**(答え)**

同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \vec{b}$$
$$= \boldsymbol{s}\vec{\boldsymbol{a}} + (\boldsymbol{t}-1)\vec{\boldsymbol{b}}$$ ……**(答え)**

（5） 重心の性質より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{b} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (s-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + t\left|\vec{b}\right|^2 = 0 \\ s\left|\vec{a}\right|^2 + (t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6s + 25t = 6 \\ 6s + t = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t = \frac{5}{24} \\ 6s = \frac{9}{24} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boldsymbol{s} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{144}} \\ \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{24}} \end{cases}$$ ……**(答え)**

3.

$\boxed{\text{考え方}}$ 数列は集合論で定義されている問題です. 抽象的な数学（大学数学とか）に慣れていないと解答できる問題は，１つもないのではないでしょうか．これは全滅でも仕方ありません.

解

$n \in \mathbb{N} \geqq 3 . S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} . a_1=k$

（１），（２）　$a_i-a_1(i \geqq 2) \in S$ のとき, a_2を求める.

$$
\begin{aligned}
& a_1 \\
& a_2-k \\
& a_3-k \\
& a_4-k \\
& \vdots \\
& a_n-k
\end{aligned}
$$

は すべて S の元になるので, $a_n-k<a_n$より, $S=\{a_2-k, a_3-k, \cdots, a_n-k\}$について, これは等差数列になる.

すなわち,

$$
\begin{aligned}
& a_2-k=a_2-a_1=k \Longrightarrow a_2=2k \\
& a_3-k=a_3-a_1=(a_2+k)-k \Longrightarrow a_3=3k \\
& \vdots \\
& a_n=nk
\end{aligned}
$$

$\therefore$　$\boldsymbol{a_2=2k}$……**(答え)**　（**1**）

$\therefore$　$\boldsymbol{a_n=nk}$……**(答え)**　（**2**）

（**3**）　$\dfrac{a_i}{a_1}(i \geqq 2)$ がすべて S の元のとき, $\left\{\dfrac{a_i}{k}\right\}$は

$\dfrac{a_2}{k}, \dfrac{a_3}{k}, \cdots, \dfrac{a_n}{k}$………(＊)

なので, k が次の３つの場合のときを考える.

$$
\begin{cases}
k=1 \\
0<k<1 \\
k>1
\end{cases}
$$

(ⅰ)$k=1$ のとき

このとき(＊)は,

$\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$

となるので，a_nは n で表すことができない.

(ⅱ)$0<k<1$ のとき

このとき, すべての i に対して, $\dfrac{a_i}{k} > a_n$になるので, 下限から上限までのすべての元が S の元にならない.

よって, a_nは存在しない.

(ⅲ)$k>1$ のとき

このとき, すべての i に対して, $\dfrac{a_i}{k} < a_n$になるので, 確かに S の元になる.

従って,

$$\frac{a_2}{k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 \cdot k}{a_1} = k \Longrightarrow a_2 = k^2$$
$$\frac{a_3}{k} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2 \cdot k}{a_1} = k^2 \Longrightarrow a_3 = k^3$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_n}{k} = k^{n-1} \Longrightarrow a_n = k^n$$

$\therefore \quad a_n = k^n$.

$\therefore$ 以上より, a_nは

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \text{表せない.}(k>1) \\ \text{存在しない.}(0<k<1) \\ k^n (k>1) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答え})$$

3.3　2025 年度実施

1.

考え方

剰余に関する問題です.n 桁の数の 1 の位の数を調べたかったら, **mod 10 で考える.** というのが鉄則です.

解

（**1**）　$f_2(n) \Longleftrightarrow n^2$の 1 の位.

以下, mod 10 で考える.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$n^2 \pmod{10}$	1	4	9	6	5	6	9	4	1

上表より, $f_2(n)$ は, 0, 1, 4, 5, 6, 9 を周期的に繰り返し, その周期は 6 である.

$\therefore$　**0, 1, 4, 5, 6, 9**……(**答え**)

（**2**）　$f_5(n) - f_1(n) \Longleftrightarrow n^5 - n$ の 1 の位

$n^2 \pmod{10}$	0	1	4	5	6	9
$n^5 \pmod{10}$	0	1	4	5	6	9
$n^5 - n \pmod{10}$	0	0	0	0	0	0

$\therefore$　上表より, $f_5(n) - f_1(n)$**0**……(**答え**)

（**3**）　（**2**）より, $n^5 \equiv n \pmod{10}$ なので,

$$n^{100} = (n^5)^{20} \equiv n^20 = (n^5)^4 \equiv n^4 \pmod{10}$$

これより, $n^{100} \equiv n^4 \pmod{10}$ なので,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^4 \pmod{10}$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

これよ, 0, 1, 5, 6 を周期的に繰り返すので, **0, 1, 5, 6**……(**答え**)

2.

考え方

階差数列に関する問題です．これは完答しましょう．

解

（１）　$b_n = -\boldsymbol{\frac{1}{n+1}} + \boldsymbol{\frac{1}{n}}$……**(答え)**

（２）

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right\} \\ &= a_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right\} \\ &= 1 - \left[\frac{1}{n}\right]_1^n \\ &= 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

また，これは $n=1$ のときも成立している．

$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2 - \frac{1}{n}}$……**(答え)**

（３）　$\Delta a_n = n(n+1)$ なので，和差分の関係より，

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_n \\ &= \left[\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\right]_1^n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)} \end{aligned}$$

……**(答え)**

3.

$\boxed{\text{考え方}}$

三角関数と解の個数の問題です. この種の問題で一番難しいと思いました. 特に, (**3**)では, **対応する $\boldsymbol{k}$ の個数と $\boldsymbol{\theta}$ の個数** に注意しないといけません.

解

(**1**)

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= 2\cos^2\theta - 1 - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 4\sqrt{3}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3} \\
&= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 4\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2} + 2\sqrt{3} \\
&= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} - 1 \\
&= \left(2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1\right) - 2 + 2\left(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\right)\cdots\cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

また, $k^2 = 2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$ なので, ① について,

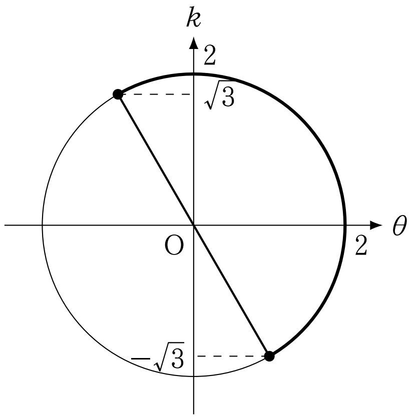
$$f(\theta) = \boldsymbol{k^2 + 2k - 2}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

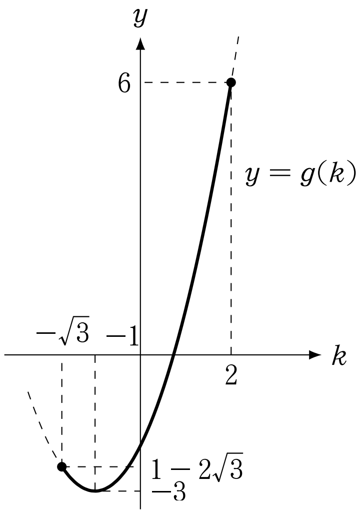
(**2**)　ここで, $g(k) = k^2 + 2k - 2$ とおく.

$k = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$なので, k の取りうる値の範囲は, $-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{2\pi}{3}\cdots\cdots\cdots(\,*\,)$である.

このことより,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leqq 1 \iff -\sqrt{3} \leqq k \leqq 2$$





上図より，$y=g(k)$ は $k=-1$ を対称軸とする下に凸の放物線なので，求める最大値及び最小値は，

$k=-1 \Longleftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値を取る．

$k=2 \Longleftrightarrow \theta=\dfrac{5\pi}{6}$ のとき，最小値を取る．

∴　求める最大値及び最小値は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\max g(k)=6 \quad \left(\theta=\dfrac{5\pi}{6}\right)} \\ \boldsymbol{\min g(k)=-3 \quad \left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)}\end{cases}$$ ……**(答え)**

（**3**）

（１）の k に対して，$f(\theta)=ak$ の解の個数を求める．

$\Longleftrightarrow$ $f(\theta)=ak$ の共有点の個数は，ky 平面における $(k,\,y)$ の個数に対応する．(全射であって，単射ではない．)

また，その $(k,\,y)$ に対して，θk 平面の共有点 $(\theta,\,k)$ に変換したものが求める解の個数．(これも全射)

以下，《**注**》

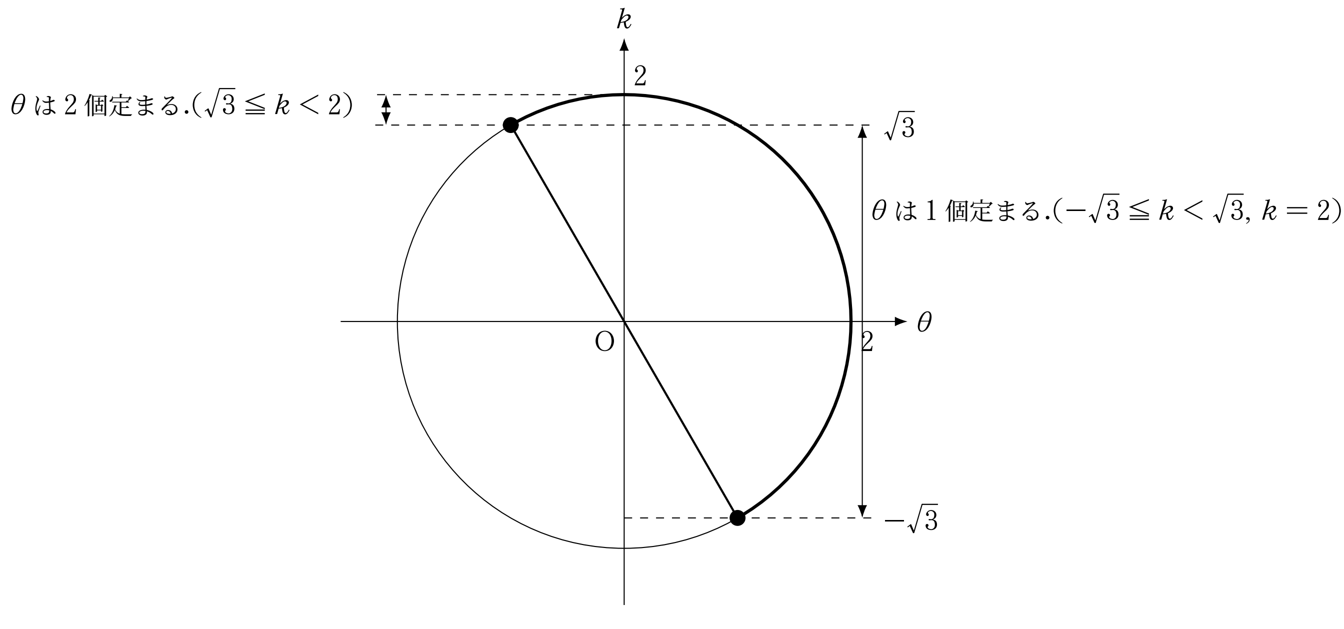
上で言っていることはすなわち，

$y=g(k)$ と $y=ak$ の共有点の個数は本来求める解の個数ではない．

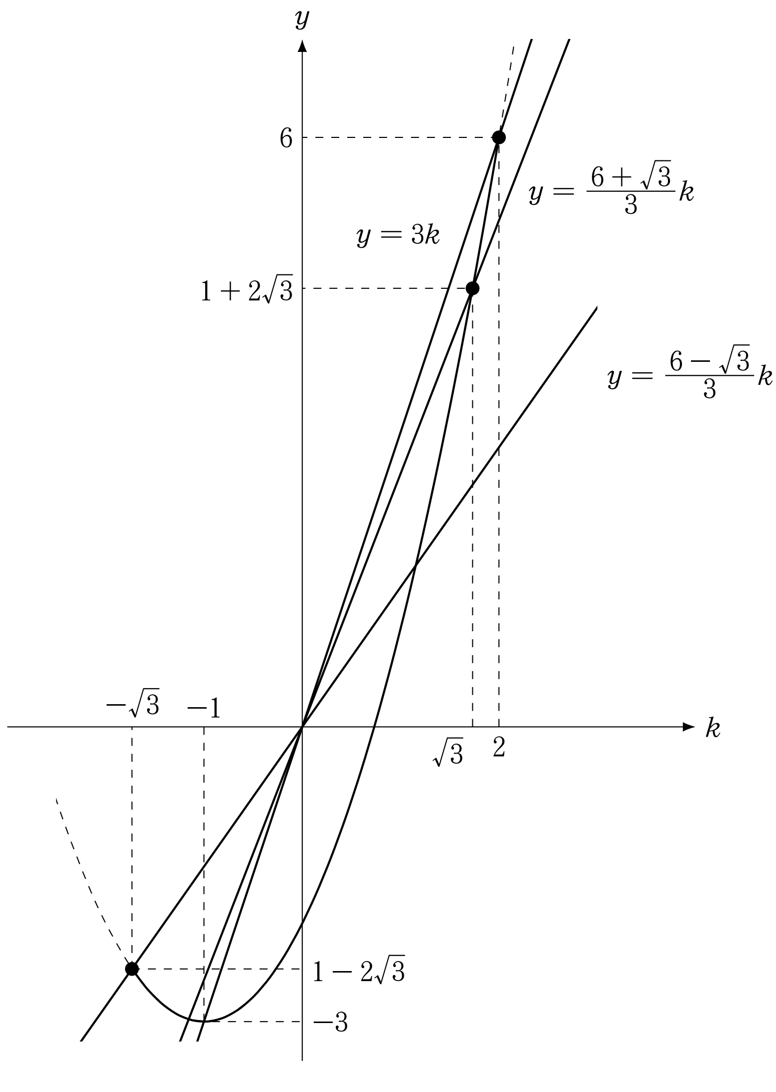
$y=f(\theta)$ と $y=ak$ の共有点の個数が本来求めるもの．ということ．イメージは下みたいな感じ．

「$y=g(k)$ と $y=ak$ の共有点の個数　((２) の放物線の座標平面で考える)」

$\xrightarrow{\text{変換}}$「$y=f(\theta)$ と $y=ak$ の共有点の個数　((２) の円の座標平面で考える)」《**注**》**終わり**



P.50 の図より，$-\sqrt{3} \leqq k < \sqrt{3}$, $k = 2$ のとき θ は 1 つ決まり，$\sqrt{3} \leqq k < 2$ のとき θ は 2 つ決まる．このことから，$k = -\sqrt{3}$, -1, $\sqrt{3}$, 2 上の放物線の座標を通る直線を描くと下図を得る．



上図より，

- $0 < a < \dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$ のとき, k は 1 つで, 対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 1 つ.
- $\dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \leqq a < \dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$ のとき, k は 2 つで, $-\sqrt{3} \leqq k < \sqrt{3}$ より対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 1 つ, $k < 0$ 側に 1 つで合計 2 つ.
- $\dfrac{6+\sqrt{3}}{3} \leqq a < 3$ のとき, k は 2 つで, $\sqrt{3} \leqq k < 2$ より対応する θ は P.50 の図で $k > 0$ 側に 2 つ, $k < 0$ 側に 1 つで合計 3 つ.
- $a = 3$ のとき, k は 2 つで, $k = 2$ より対応する θ は 2 つ. まとめると次のようになる.

$$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \text{のとき, 対応する } \theta \text{ は } 1 \text{ つ.} \\ \dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \leqq a < \dfrac{6+\sqrt{3}}{3},\ a = 3 \text{ のとき, 対応する } \theta \text{ は } 2 \text{ つ.} \\ \dfrac{6+\sqrt{3}}{3} \leqq a < 3 \text{ のとき, 対応する } \theta \text{ は } 3 \text{ つ.} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答え})$$

4　良問集解答編

4.1　第 1 回

1.0

解

（**1**） 両辺が 0 以上であるから， 両辺 2 乗しても同値性は崩れないので， 両辺を 2 乗することにより，

$$\begin{aligned}(x+3)^2 \geqq (x-2)^2 &\iff x^2+6x+9 \geqq x^2-4x+4 \\ &\iff \boldsymbol{x \geqq -\frac{1}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（**2**） 両辺が 0 以上であるから， 両辺 2 乗しても同値性は崩れないので， 両辺を 2 乗することにより，

$$\begin{aligned}(4x-1)^2 < (x+3)^2 &\iff (4x-1)^2-(x+3)^2 < 0 \\ &\iff \{(4x-1)+(x+3)\}\{(4x-1)-(x+3)\} < 0 \\ &\iff (5x+2)(3x-4) < 0 \\ &\iff \boldsymbol{-\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

▶ 類題演習 1.1◀

解

（**1**）

$$\begin{aligned}|2x-3| \leqq 2 &\iff -2 \leqq 2x-3 \leqq 2 \\ &\iff \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

また，$|2x-3| \leqq 2 \leqq \dfrac{1-3a}{3}x-1$ は，$-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{4}{3}$ かつ $\dfrac{1-3a}{3}x \geqq 3$……① となり ① が $x \geqq 1$ のとき，$1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}$ を得る．

従って，$1-3a > 1$ のとき，$x \geqq \dfrac{9}{1-3a}$．この式の右辺が $\dfrac{9}{1-3a}=1$ となるのは，$\boldsymbol{a=-\frac{8}{3}}$……(**答え**）である．

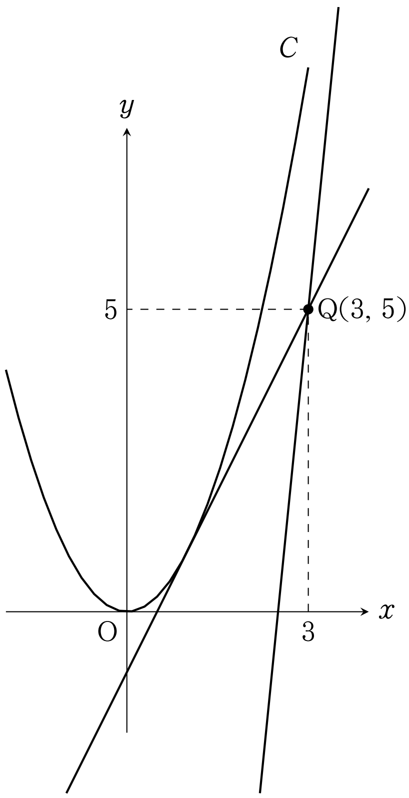
（2）

$$
\begin{aligned}
|x|+|x-3|<4 &\iff |x|<4-|x-3| \\
&\iff |x-3|-4<x<4-|x-3| \\
&\iff \begin{cases} |x-3|<x+4 \\ |x-3|<4-x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -(x+4)<x-3<x+4 \\ x-4<x-3<-x+4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \\
&\iff \boldsymbol{-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

1.2.0

解

与えられた状況を図示すると下図のようになる．



(**1**)2 本の接線と $y=x^2$の接点の x 座標を $x=s$ とおくと，この点における接線の方程式は，

$$y=2s(x-s)+s^2\cdots\cdots\cdots①$$

① が点 Q(3, 5) を通るので，

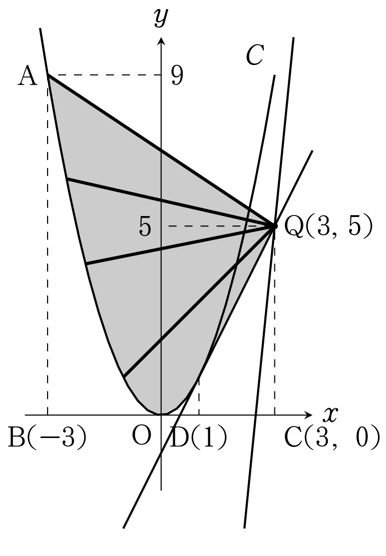
$$5=2s(3-s)+s^2 \iff -s^2+6s=5$$
$$\iff (s-1)(s-5)=0$$

$\therefore\quad s=1, 5$

$\therefore\quad s=1$ のとき，①：$y=2(x-1)+1$　　$\therefore\quad \boldsymbol{y=2x-1}$**，接点 (1, 1)**……(答え)

$s=5$ のとき，①：$y=10(x-5)+25$　　$\therefore\quad \boldsymbol{y=10x-25}$**，接点 (5, 25)**……(答え)

(**2**)P が (2, 4) から (−3, 9) まで動くとき，線分 PQ が通過する領域は，下図の網目部である．



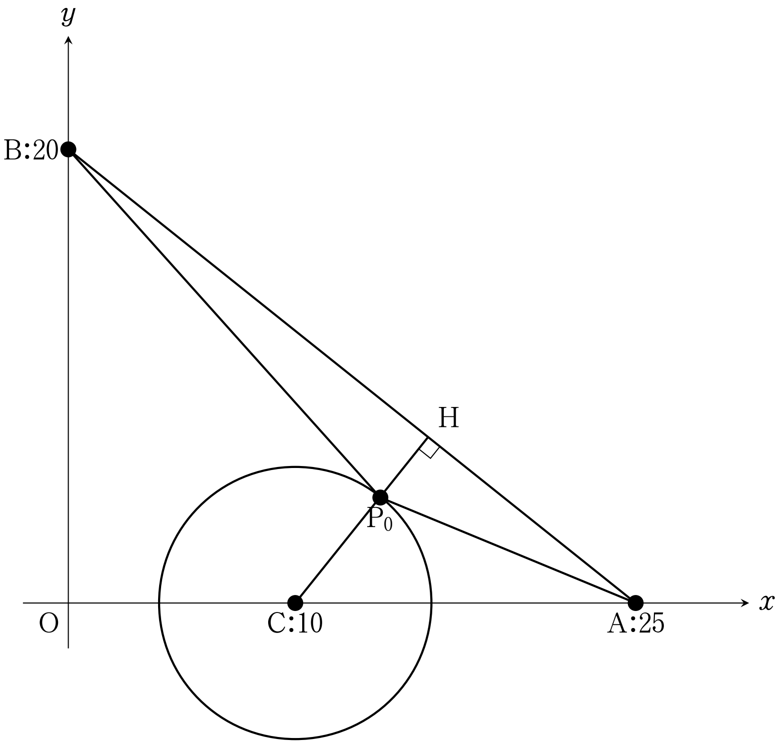
ここで，(−3, 9) を A，(−3, 0) を B，(3, 0) を C，(1, 0) を D，(1, 1) を E とすると，求める面積 S は，

$$S=(\text{台形 ABCQ})-\left(\int_{-3}^{1}x^2dx+\text{台形 (DEQB)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(9+5)\cdot 6-\left(\frac{1}{3}\Big[\,x^3\,\Big]_{-3}^{1}-\frac{1}{2}(1+5)\cdot 2\right)$$
$$=36-\frac{28}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{80}{3}}\cdots\cdots(\text{答え})$$

1.2.1

解

まずは，図示すると下図のような状況．



ここで，線分 AB に C から引いた垂線の足を H，H から C に向かって引いた直線と円との交点を P_0とすると, 円上を動く P が P_0にきた時に △ABP は最小になるので,

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot (\mathrm{AH} - 6) \cdots\cdots\cdots ①$$

と書ける．

ここで, $\mathrm{AB}^2 = 25^2 + 20^2$であり, AB を通る直線の方程式は, $4x + 5y = 100$ なので, 点と直線の距離公式より, $\mathrm{CH} = \dfrac{|4 \cdot 10 - 100|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \dfrac{60}{\sqrt{4^2 + 5^2}}$.

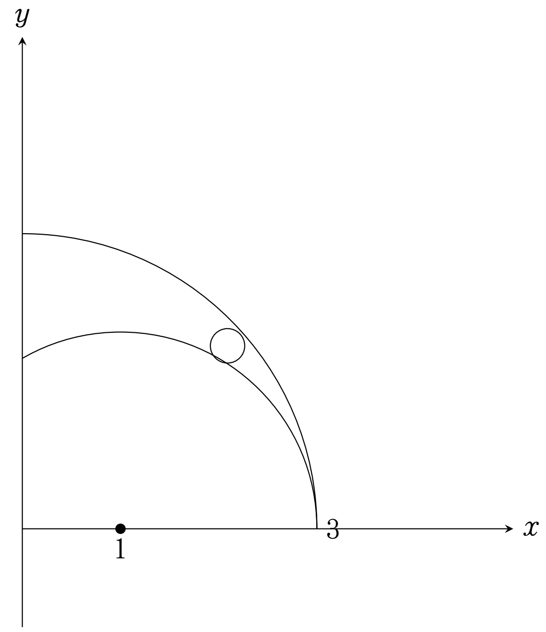
$$\therefore \quad \triangle \mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5^2 + 4^2}\left(\frac{10}{\sqrt{5^2 + 4^2}} - 1\right)6 = \mathbf{15}\left(\mathbf{10} - \sqrt{\mathbf{41}}\right) \cdots\cdots (\textbf{答え})$$

▶ 類題演習 1.2.2◀

解

（**1**） O_2の中心がC, 半径が 2 であることより, C の座標は$(1,\ 0)$であるとすぐにわかる.

従って 3 つの円をすべて図示すると下図のようになる.



よって, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$なので,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&\quad\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\&\quad\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\\&\quad\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}t+1\\\sqrt{3}t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore$ **$\mathbf{P}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{3}})$……（答え）**

（**2**） O_3の半径 r とすると, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$より,

$$\mathrm{CB}:\mathrm{CP}=1:t$$

これより, $\mathrm{BP}=t-1$ より, $r=(t-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|=2(t-1)$.

従って, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} t+1 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$を r を用いて表すと,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=(3-r)=\{3-2(t-1)\}$$

このことより,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=(5-2t)^2 &\iff (t+1)^2+3t^2=25-20t+4t^2 \\ &\iff 22t=24 \\ &\iff t=\frac{12}{11}\end{aligned}$$

$\therefore$ Pの座標は, $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{23}{11}},\ \boldsymbol{\frac{12\sqrt{3}}{11}}\right)$……(**答え**)

半径 r は, $r=2\cdot\frac{1}{11}=\boldsymbol{\frac{2}{11}}$……(**答え**)

4.2　第 2 回

考え方

領域・軌跡の総合的な演習です. 領域・軌跡の典型的な解答は, **自然流（順像法）** か **逆手流（逆像法）** の 2 つです.

軽くまとめておきましょう.

〔軌跡・領域の城跡〕

$y = f(t)$ の t が全ての実数を動くとき, その軌跡（領域）W を求めたい.

1°順像法：t をすべての実数で動かして, それらをすべて集める.

2°逆像法：$(x,\, y) \in W \Longleftrightarrow y = f(t)$ を満たす t が少なくとも一つ存在する. $\Longleftrightarrow \cdots$

注　逆像法を選択するか順像法を選択するかは, 問題によって違う. 例えば, ベクトルの和の形で表すことができるなら, それは順像法のほうが楽な場合が多いです.

2.1.0

解

以下, (**1**), (**2**), (**3**), (**4**)の通過領域を $W_i (i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ とおく.

(**1**)

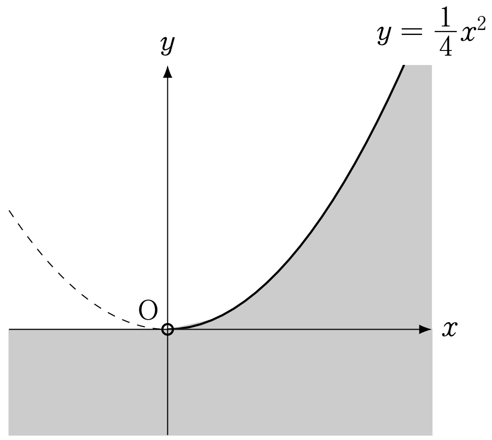
$$(x,\, y) \in W_1 \Longleftrightarrow \exists m > 0,\; m^2 - mx + y = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $f(m) = m^2 - mx + y$　とおくと,

$$① \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4y \geqq 0 \\ f(0) > 0 \text{ かつ } x > 0 \\ f(0) < 0 \text{ かつ } (x < 0 \text{ または } x > 0) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y \leqq \dfrac{x^2}{4} \\ y > 0 \text{ かつ } x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

これを図示すると, 次図を得る.



求める領域は左図の網目部で原点を除き，$y = \dfrac{1}{4}x^2$ 上の境界以外すべて除く.

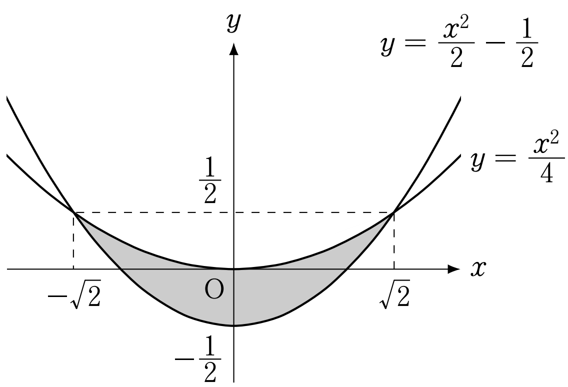
（**2**） P$(x,\,y)$ は方程式 $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たす. またこのとき，$\begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \end{cases}$ とおくと，

$$(X,\,Y) \in W_2 \iff \exists(x,\,y),\ \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \\ x^2 + y^2 \leqq 1 \end{cases} \iff \exists(x,\,y),\ \begin{cases} X = x + y \\ Y = xy \\ (x + y)^2 - 2xy \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X^2 - 2Y \geqq 1 \\ \exists t,\ t^2 - Xt + Y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y \geqq \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{1}{2} \\ X^2 - 4Y \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y \geqq \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{1}{2} \\ Y \leqq \dfrac{X^2}{4} \end{cases}$$

これらを図示すると， 下図の網目部が W_2である. また, 境界はすべて含む.



(**3**)

$$(x,\,y)\in W_3 \Longleftrightarrow \exists m,\ \begin{cases}(m-1)x-y+1=0\cdots\cdots\cdots①\\ mx+(m-2)y+2=0\cdots\cdots②\\ m>0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③\end{cases}$$

ここで ① より,

$$mx-x-y+1=0 \Longleftrightarrow m=\frac{x+y-1}{x}\quad (x\fallingdotseq 0)$$

なので,

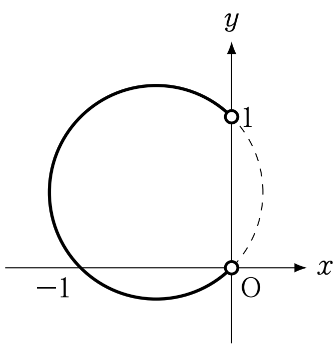
$$\exists m,\ \begin{cases}①\\ ②\\ ③\end{cases} \Longleftrightarrow \exists m,\ \begin{cases}m=\dfrac{x+y-1}{x}\quad (x\fallingdotseq 0)\\ m(x+y)-2y-2=0\\ m>0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y-1}{x}(x+y)-2y-2=0\\ \dfrac{x+y-1}{x}>0\\ x\fallingdotseq 0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x}=0\\ x(x+y-1)>0\\ x\fallingdotseq 0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\\ x(x+y-1)>0\\ x\fallingdotseq 0\end{cases}$$

これを図示すると, $\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$中心の円において, $x\fallingdotseq 0$ より, y 軸上の点を全て含まないことに注意して, 次図を得る.



W_3は, 左下図の太実線部で, 原点, $(1,\,0)$ を除き, それ以外の境界すべて含む.

（**4**）

$$(x,\,y)\in W_4 \iff -1 \leqq \exists t \leqq 1,\ \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^2+t \end{cases}$$

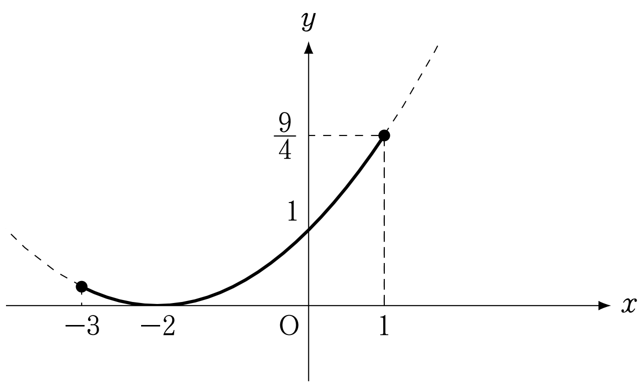
$$\iff -1 \leqq \exists t \leqq 1,\ \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4}x^2+x+1 \end{cases}$$

$$\iff -1 \leqq \exists y \leqq 1 \begin{cases} t=\dfrac{1}{2}(x+1) \\ y=\dfrac{1}{4}x^2+x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2 \leqq x+1 \leqq 2 \\ y=\dfrac{1}{4}(x+2)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3 \leqq x \leqq 1 \\ y=\dfrac{1}{4}(x+2)^2 \end{cases}$$

よって, 下図を得る.



W_4は, 上図の太実線部で, 境界すべて含み, 黒丸もすべて含む.

2.1.1

解

（１） 2 点 P，Q を通る直線は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{8t}{8}(x-4) + 2t^2 + 4t - 1 \\ &= t(x-4) + 2t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

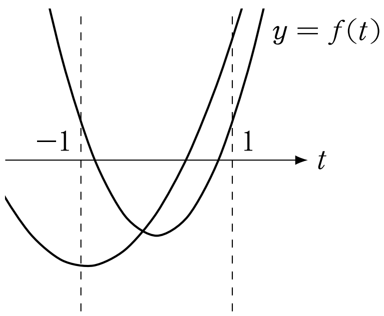
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = tx + 3t^2 - 1} \cdots\cdots \textbf{(答え)}$$

（２） 領域 D を先に図示してから, 2 点 A, B が D に含まれないことを言う.

D の表す式は,

$$\begin{aligned} \exists(x, y) \in D &\iff -1 \leqq \exists t \leqq 1,\ y = tx + 2t^2 - 1 \\ &\iff -1 \leqq \exists t \leqq 1,\ 2t^2 + xt - y - 1 = 0 \\ &\iff \text{二次関数 } f(t) = 2t^2 + xt - y - 1 \text{ が } -1 \leqq t \leqq 1 \text{ の範囲に少なくとも一つ実数解をもつ.} \end{aligned}$$

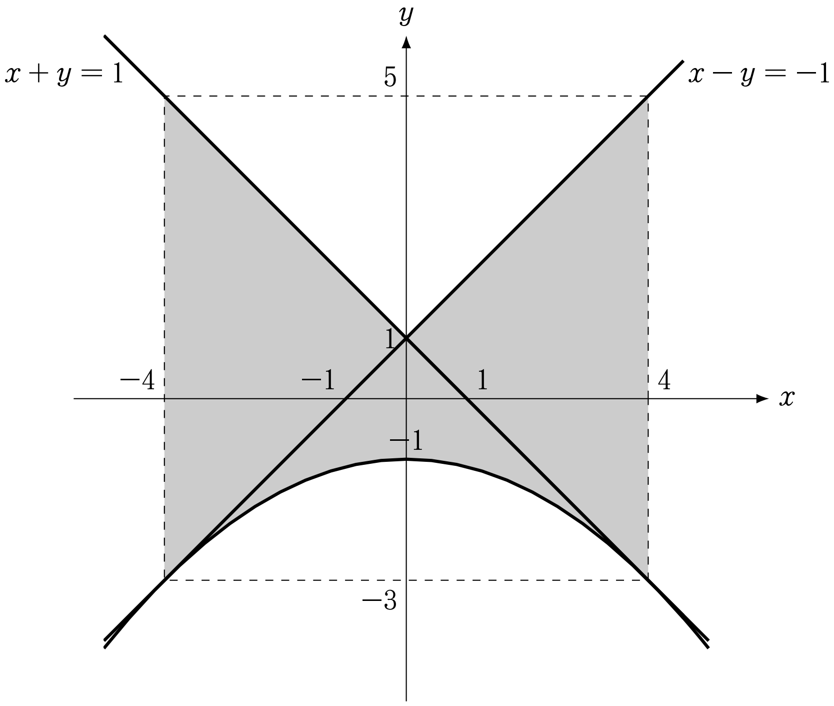
$y = f(t)$ が, $-1 \leqq t \leqq 1$ に少なくとも一つ実数解を持つ条件をもつための条件は, 下図を参照することにより,



$$f(-1)f(1) \leqq 0 (\text{端点の積が異符号}) \text{ または } \begin{cases} (f(t) = 0 \text{ の判別式}) x^2 + 8(y+1) \geqq 0 \\ -1 < \dfrac{x}{4} < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

$$\iff (-x - y + 1)(x - y + 1) \leqq 0 \text{ または } \begin{cases} y < -x + 1 \\ y < x + 1 \\ -4 < x < 4 \\ y \geqq -\dfrac{1}{8}x^2 - 1 \end{cases}$$

ところで, $y' = -\dfrac{1}{2}x$ より, $y = -\dfrac{1}{8}x^2 - 1$ は, $x = \pm 4$ で $y' = \mp 1$(復号同順) なので, $x + y = 1$ と $x - y = -1$ とそれぞれ $x = \pm 4$ で接する. これに注意して図示すると, 次図が D である.



上図の網目部が D で, A, B は含まれない.　　　　**(証明終わり)**(ｉ)

D は y 軸に関して対称なので, 求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= -\int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 - 1\right)dx + (1+5)\cdot 4\cdot \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{24}\Big[\, x^3 \,\Big]_0^4 + 4 + 12\\ &= \frac{8}{3} + 16\\ &= \frac{56}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad S = \boldsymbol{\frac{112}{3}}$$……**(答え)**

▶ 類題演習 2.1.2◀

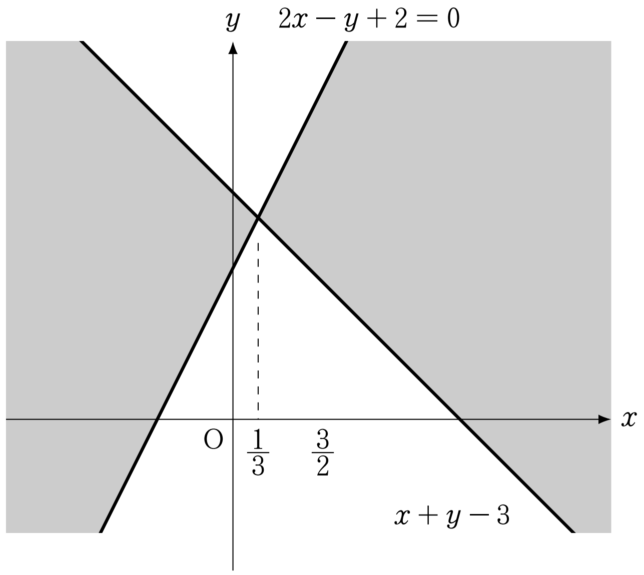
解

（**1**）

$$\begin{aligned} 2x^2+xy-y^2-4x+5y-6 &= 2x^2+x(y-4)-y^2+5y-6 \\ &= 2x^2+x(y-4)-(y-2)(y-3) \\ &= \{x+(y-3)\}\{2x-(y-2)\} \\ &= \boldsymbol{(x+y-3)(2x-y+2)} \cdots\cdots \textbf{(答え)} \end{aligned}$$

（**2**）　$D:(2x+y-3)(x-y+2)>0$ を描く．

$(x,\,y)=(0,\,0)\notin D$ なので，D の表す領域は下図の網目部となり，境界はすべて除く．



（**4**）

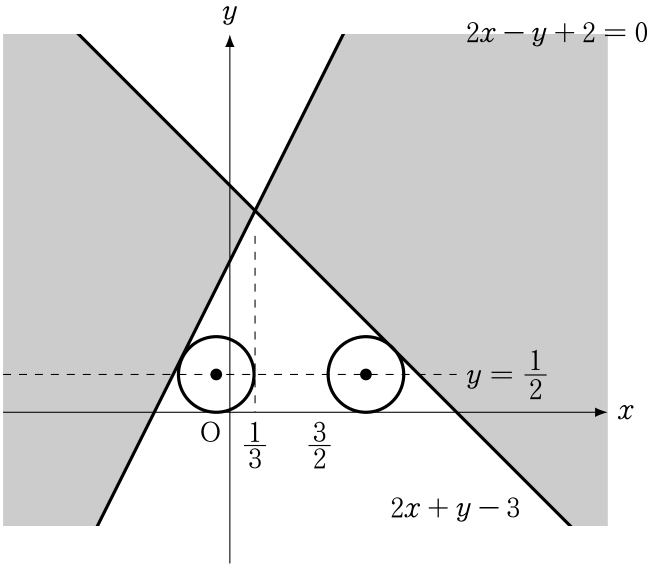
$$\begin{aligned} x^2+y^2-2kx-y+k^2<0 &\iff (x-k)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4} \\ &\iff \text{中心}\left(k,\,\frac{1}{2}\right),\ \text{半径}\frac{1}{2}\text{の円の内部}. \end{aligned}$$

これより，$D\cap E=\emptyset$ となる k の下限値と上限値はそれぞれ，

$x-y=-2$ と E が接するとき.(下限値)

$2x+y=3$ と E が接するとき.(上限値)

である．これより，E と（**1**）を同一平面内で図示して，下限値と上限値の状態を描くと，図は次のような図になる．



点と直線の距離公式より，E とそれぞれの直線が接するなら， 中心からの距離と半径が一致するので， まず下限値は,

$$\frac{\left|2k-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{1}{2}\iff\left|2k+\frac{3}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff k=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である. また上限値は,

$$\frac{\left|k+\frac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\left|k-\frac{5}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff k=\frac{5\pm\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①, ②　より, $D\cap E=\emptyset$ になるためには下限値が, $k>-1$, 上限値が, $k<\frac{3}{2}$ をそれぞれ満たす必要があるので, 求める k の値の範囲は,

$$\boldsymbol{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}\leqq k\leqq\frac{5-\sqrt{2}}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

2.2.0

考え方

（１）　は情報不足により，解答することができなくなっています．

（２）　内積の不等式を使えそうな形ですが，大きさの計算の部分で $x+7y=1$ を出すことができません．視点を変えて，**1** に注目してみると $\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ に $x+7y$ を掛け算しても良いことになります．

（３）　分子の次数は分母の次数より大きいので，字数下げをしないと始まりません．

（４）　全力展開**!!**

解

（**1**）解答不能．

（**2**）　$\dfrac{1}{7x}+\dfrac{1}{y}$ に $x+7y$ をかけると，

$$\begin{aligned}(x+7y)\left(\frac{1}{7x}+\frac{1}{y}\right)&=\frac{1}{7}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+7\\&\geqq 7+\frac{1}{7}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}\\&=9+\frac{1}{7}=\frac{64}{7}\end{aligned}$$

等号は，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}\iff x=y=\dfrac{1}{8}$（$\because x+7y=1\iff 8y=8x=1$）のとき成立する．

$\therefore$　求める最小値は，$\boldsymbol{\dfrac{64}{7}}$……（**答え**）

（**3**）　♠ 分子の次数が分母の次数より大きいので，次数下げをしましょう．そこから，項が三つの AM − GM の関係を使います．♠

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{x^2+2x+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{(x+1)^3+4}{(x+1)^2}\\&=x+1+\frac{4}{(x+1)^2}\\&=\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{4}{(x+1)^2}\geqq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{4}{(x+1)^2}}=3\quad(\because \mathrm{AM}-\mathrm{GM})\end{aligned}$$

また等号は，

$$\frac{x+1}{2}=\frac{4}{x+1}\iff x+1=2 \text{ のとき成立．}$$

$\therefore$　$\boldsymbol{\min f(x)=3}$……（**答え**）

（**4**）

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)=3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$$
$$\geqq 3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}=9 \quad (\because \mathrm{AM}-\mathrm{GM})$$

また等号は,

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{x}$かつ$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$かつ$\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{y} \Longleftrightarrow x=y=z$ のとき成立する.

$\therefore$　最小値は, **9**……(**答え**)

▶ 類題演習 2.2.1◀

解

（**1**）　$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)=xy+\dfrac{4}{xy}+5\geqq 4+5 \quad (\because \mathrm{AM}-\mathrm{GM})$

等号は, $xy=\dfrac{4}{xy} \Longleftrightarrow xy=2$ のとき成立する.

$\therefore$　最小値は, **9**……(**答え**)

（**2**）　$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+16}$………① とおく.$x \fallingdotseq 0$ なので, ① の両辺に逆数をとると,

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2+2x+16}{x+2}=x+\frac{16}{x+2}$$
$$=(x+2)+\frac{16}{x+2}-2\geqq 8-2=6(\because \mathrm{AM}-\mathrm{GM})$$

また, 等号成立は,

$x+2=\dfrac{16}{x+2} \Longleftrightarrow x=2$ のとき成立する.

$\therefore$　$\dfrac{1}{f(x)}$の最小値は 6 なので, $f(x)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$……(**答え**)

（**3**）　AM − GM の関係より,

$$x+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{2} \quad (\text{等号成立は}, x=\sqrt{2})$$

これより,

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^6\geqq 512$$

なので, 常に $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6\geqq y$ が成り立つための条件は, $y\leqq 512$

$\therefore$　最大値は, **512**……(**答え**)

4.3　第 3 回

3.1.0

考え方

(4) は積分だけで面積を求めることができないので，**大きい面積から余分な面積を引く．**ことを考えましょう**!!**また， 面積の計算結果は汚くなることが多いです．数学 $\boxed{\text{II}}$ だと面積計算は出題されにくいので， 一応注意しておきます．

解

(**1**)，(**2**)　$\mathrm{A}\left(\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$を K の式に代入すると，

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=r^2 \iff \boldsymbol{r=1}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

また，A での接線の方程式は，

$$y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2} \iff \boldsymbol{y=\sqrt{3}x-\frac{7}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

ところで，C について $y'=2ax$ より，A での接線の傾きは一致するので

$$2\sqrt{3}a=\sqrt{3} \iff \boldsymbol{a=\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

このとき，

$$-\frac{1}{2}=3a+b \iff \boldsymbol{b=-2}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

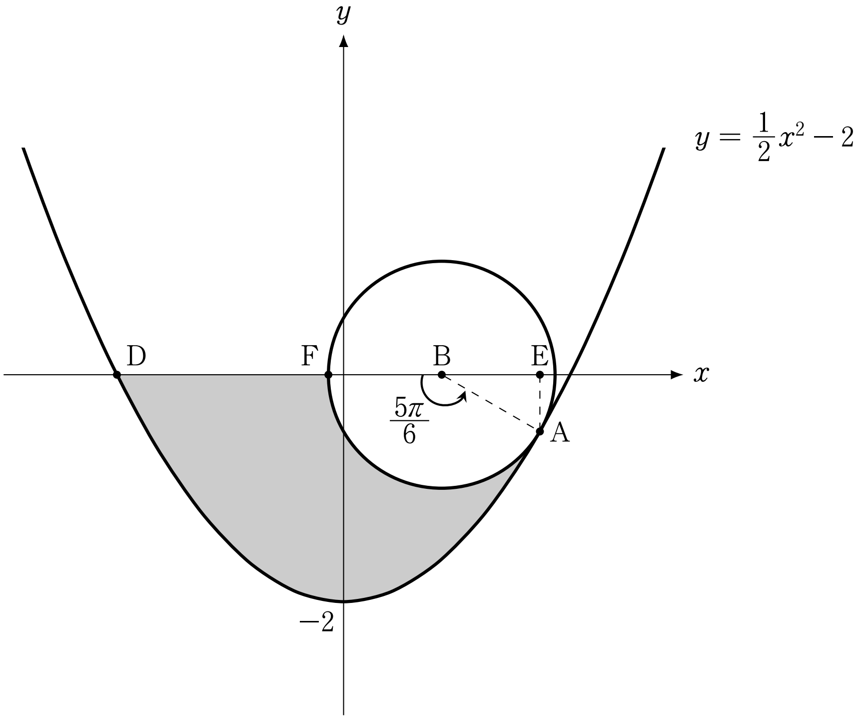
(**3**)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{\sqrt{3}}(ax^2+b)dx &= \left[\ \frac{a}{3}x^3+bx\ \right]_{-2}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{a}{3}\left(3\sqrt{3}+8\right)+b\left(\sqrt{3}+2\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}+8\right)-2\sqrt{\sqrt{3}+2} \\ &= \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

(**4**)表す領域を D とする．すなわち，

$$D: \begin{cases} x \leqq \sqrt{3},\ y \leqq 0,\ y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-2 \\ \left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$$

これを図示すると次図のようになる．



上図のように点 A$\left(\sqrt{3},\,-\dfrac{1}{2}\right)$, B$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\,0\right)$, D$(-2,\,0)$, E$\left(\sqrt{3},\,0\right)$, F：$C$ と x 軸の交点　とおく.

また △ABE は AE：EB $=\dfrac{1}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1:\sqrt{3}$ の直角三角形なので, $\angle\mathrm{DBA}=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$ である.

よって，求める面積 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{\sqrt{3}}\{-(ax^2+b)\}\,dx-\text{扇形 FBA}-\triangle\mathrm{ABE}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{3}-1^2\cdot\pi\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{3}-\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\\
&= \boldsymbol{\frac{11\sqrt{3}}{3}+\frac{8}{3}-\frac{5\pi}{12}}\cdots\cdots\textbf{(答え)}
\end{aligned}
$$

3.1.1

考え方

（２）はもともと a の存在条件を同値変形する問題ですが, AB の中点が a で表せないので, 適当な文字で A, B の座標を置くことから始めます.

解

$$\begin{cases} y = x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ y = -x^2 + 2ax - a \cdots\cdots② \end{cases}$$

（**1**） 2 曲線の交点異なる二つの共有点の持つための条件は, ① = ② より, $2x^2 - 2ax + a = 0 \cdots\cdots$③ の判別式が正であることなので

$$(③ \text{ の判別式}) a^2 - 2a > 0 \iff \boldsymbol{a < 0,\ a > 2} \cdots\cdots(\text{答え})$$

（**2**） A, B の中点の x 座標をそれぞれ, $X_1,\ X_2$ とおくと, AB の中点の座標 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{X_1 + X_1}{2},\ \dfrac{(X_1 + X_2)^2}{2}\right)$ とおける.

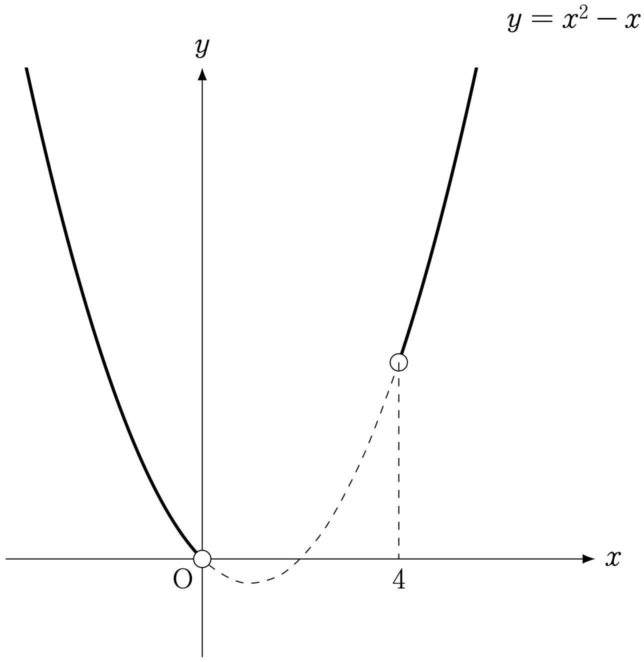
ここで, $X_1,\ X_2$ は ① の異なる 2 つの実数解なので, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_1X_2 = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2 - a}{2}\right)$ であり, 更に $X = \dfrac{a}{2},\ Y = \dfrac{a^2 - a}{2}$ とし, M の軌跡を W とすると,

$$\begin{aligned} (X,\ Y) \in W &\iff \exists a,\ \begin{cases} X = \dfrac{a}{2} \\ Y = \dfrac{a^2 - a}{2} \\ a < 0,\ a > 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y = X^2 - X \\ X < 0,\ X > 4 \end{cases} \\ &\iff W \text{ は } y = x^2 - x \text{ の } x < 0,\ x > 4 \text{ の部分.} \end{aligned}$$

これを図示すると下図の太実線部が W で, 白丸を除く.



$y = x^2 - x$
y
x
O
4

類題演習 3.1.2

考え方

頻出の交点の軌跡の問題です. 軌跡なので, 普通に存在条件に帰着させれば良いですが, 場合分けを忘れないようにしましょう.

解

$$\begin{cases} mx - y = 1 \cdots\cdots\cdots ① \\ x + my = m + 2 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ② の交点を (X, Y) とし, 交点の軌跡 W とする.

$$(X, Y) \in W \iff \exists m, \begin{cases} mX - Y = 1 \\ X + mY = m + 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(\ast)$$

(i) $\underline{X = 0 \text{ のとき}}$

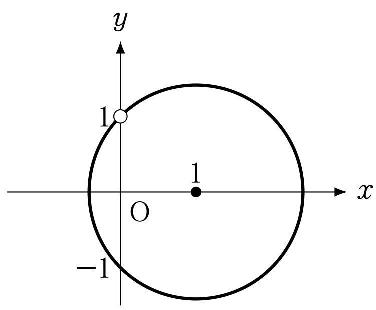
$$(\ast) \iff \exists m, \begin{cases} -Y = 1 \\ mY = m + 2 \end{cases} \quad \iff m = -1$$

(ii) $\underline{X \fallingdotseq 0 \text{ のとき}}$

$$(\ast) \iff \exists m, \begin{cases} m = \dfrac{y+1}{x} \\ ② \end{cases} \quad \iff \frac{x^2 + y^2 - 2x - 1}{x} = 0$$

$$\iff x\{(x-1)^2 + y^2 - 2\} = 0$$

よって, W は下図の太実線部で, 白丸を除く.



4.4　第 4 回

4.1.0

考え方

(1) では，割り算の性質 $P(x) \equiv 0 \pmod{x^2-1} \iff P(x) \equiv 0 \pmod{x-1}$ かつ $P(x) \equiv 0 \pmod{x+1}$ を用います．

(3) 素因数分解をさせた意味を考えましょう．

解

(1)　$x^2-1=(x-1)(x+1)$ なので，

$$\begin{cases} P(x) \equiv 0 \pmod{x-1} \\ P(x) \equiv 0 \pmod{x+1} \end{cases} \text{ を示す．}$$

いま，$x^2 \equiv x^5 \equiv x^4 \equiv x^3 \equiv \cdots \equiv 1 \pmod{x-1}$ なので，

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv (1-3+3-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \\ &\equiv 0 \pmod{x-1} \end{aligned}$$

同様に，$x^6 \equiv -x^5 \equiv x^4 \equiv -x^3 \equiv \cdots \equiv 1 \pmod{x+1}$ より，$P(x) \equiv 0 \pmod{x+1}$

$$\therefore \quad \begin{cases} P(x) \equiv 0 \pmod{x-1} \\ P(x) \equiv 0 \pmod{x+1} \end{cases} \iff P(x) \equiv 0 \pmod{x^2-1} \quad \textbf{（証明終わり）}$$

(2)

$$\begin{aligned} 6480 &= 10 \times 648 = 10 \times 4 \times 162 = 10 \times 4 \times 2 \times 81 \\ &= 2^4 \times 5 \times 9^2 \\ &= \mathbf{2^4 \times 3^4 \times 5} \cdots\cdots \textbf{（答え）} \end{aligned}$$

(3)　$P(n)=(n^6-3n^4+3n^2-1)n^3(n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)$　と因数分解できるので，

$$\begin{cases} P(n) \equiv 0 \pmod{2^4} \cdots\cdots\cdots ① \\ P(n) \equiv 0 \pmod{3^4} \cdots\cdots\cdots ② \\ P(n) \equiv 0 \pmod{5} \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

であることをそれぞれ言えばよい．

まず，① を示す. 合同式の対称性に注目して下表を得る.

n (mod 16)	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7
n^2 (mod 16)	0	1	4	9	0	9	4	1
n^4 (mod 16)	0	1	0	1	0	1	0	1
n^6 (mod 16)	0	1	0	1	0	1	0	1
$P(n)$ (mod 16)	0	0	0	0	0	0	0	0

上表より，① が示された.

② を示す.

$n \geqq 2$ なので, $P(n)$ の最小値は

$$P(2) = (64-48+12-1)\times 2^3\times 5\times 6\times 7 = 27\times 3\times 2^4\times 5\times 7$$
$$= 81\times 2^4\times 5\times 7 > 81$$

なので，$P(n) \equiv 0 \pmod 9$ を言えば十分である. これより, 下表を得る.

n (mod 9)	0	±1	±2	±3	±4
n^2 (mod 9)	0	1	4	0	7
n^4 (mod 9)	0	1	7	0	$49\equiv4$
n^6 (mod 9)	0	1	$28\equiv1$	0	$28\equiv1$
$P(n)$ (mod 9)	0	0	0	0	0

上表より，② が示された.

最後に ③ を示す.

n (mod 5)	0	±1	±2
n^2 (mod 5)	0	1	1
n^4 (mod 5)	0	1	$16\equiv1$
n^6 (mod 5)	0	1	4
$P(n)$ (mod 5)	0	0	$n^2+1\equiv0$

上表より，③ が示された.

∴ 以上 ①〜③ より $P(n)\equiv 0 \pmod{6480}$ である.**(証明終わり)**

4.1.1

$\boxed{\text{考え方}}$

かなりの難問です.(1)では　(mod 5) で考えて周期性を見つけて終わりです.(2)は b_nを 5 で割った余りは問題で与えられている文字だけでは表せないので, 新たに b_nを 5 で割った商と余りを文字で設定します.(3)は(2)ができればいけます.

解

(**1**)以下, 合同式の法を 5 で考える.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 8 = 5\cdot 1 + 3 \equiv 3 \\
a_2 &= 2a_1^2 + 1 \equiv 2\cdot 16 + 1 \equiv 4 \\
a_3 &= 2a_2^2 + 1 \equiv 2\cdot 16 + 1 \equiv 3 \\
a_4 &= 2a_3^3 + 1 \equiv 2\cdot 9 + 1 \equiv 4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

よって, r_nは mod 5 で 3 と 4 を周期的に繰り返し, $\boldsymbol{r_n = \begin{cases} 3 & (n\text{:奇数}) \\ 4 & (n\text{:偶数}) \end{cases}}$ ……(**答え**)

(**2**)　$a_n = 5b_n + r_n$を $a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$………① に代入すると,

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2(5b_n + r_n)^2 + 1 = 2(25b_n^2 + 10b_nr_n + r_n^2) + 1 \\
&= 5(10b_n^2 + 4b_nr_n) + 2r_n^2 + 1\text{………②}
\end{aligned}
$$

ここで, b_nを 5 で割った商を c_n, 余りを s_nとおくと, $b_n = 5c_n + s_n$と表せる. このことと, (1)の結果より,

(i)<u>n が奇数 $\Longleftrightarrow r_n = 3$ のとき</u>

② より, $a_{n+1} = 5(10b_n^2 + 12b_n) + 19$………③ なので,

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= 10b_n^2 + 12b_n + 3 = 10b_n^2 + 12(5c_n + s_n) + 3 \\
&\equiv 2s_n + 3 \pmod 5
\end{aligned}
$$

よって, s_{n+1}は $2s_n + 3$ を 5 で割った余りに等しい.

(ii)<u>n が偶数 $\Longleftrightarrow r_n = 4$ のとき</u>

② より, $a_{n+1} = 5(10b_n^2 + 16b_n) + 33$………④ なので,

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= 10b_n^2 + 16b_n + 6 \\
&= 10b_n^2 + 16(5c_n + s_n) + 6 \\
&\equiv s_n + 1 \pmod 5
\end{aligned}
$$

(続きは次ページ)

よって，s_{n+1}はs_n+1を5で割った余りに等しい．

∴　以上をまとめると，

$$r_n=3(\Longleftrightarrow n\text{が奇数})\Longrightarrow b_{n+1}\equiv 2s_n+3 \pmod 5$$
$$r_n=4(\Longleftrightarrow n\text{が偶数})\Longrightarrow b_{n+1}\equiv s_n+1 \pmod 5$$

また，$b_1=1$より，$s_1=1$なので，

$(s_n, r_n)=(1, 3)$のとき，$(s_{n+1}, r_{n+1})=(0, 4)$
$(s_n, r_n)=(0, 4)$のとき，$(s_{n+1}, r_{n+1})=(1, 3)$

となって，(s_n, r_n)は$(0, 4)$, $(1, 3)$を周期的に繰り返す．

∴　$\boldsymbol{s_n=\begin{cases}0 & (n:\text{偶数})\\ 1 & (n:\text{奇数})\end{cases}}$ ……(**答え**)

(**3**)　まず，③よりnが奇数なので，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=50b_n^2+60b_n+19\\&=50b_n^2+60(5c_n+1)+19\\&\equiv 10+19 \pmod{50}\\&=29\end{aligned}$$

次に④より，nが偶数なので，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=50b_n^2+60b_n+33\\&=50b_n^2+60\cdot 5c_n+33\\&\equiv 33 \pmod{50}\end{aligned}$$

また，$a_1=8$に注意して，a_nを50で割った余りは，$\boldsymbol{\begin{cases}8 & (n=1)\\ 29 & (n:\text{偶数})\\ 33 & (n:3\text{以上の奇数})\end{cases}}$ ……(**答え**)

▶ 類題演習 4.1.2◀

考え方

$\boxed{\text{ア}}$: 整数や数列の問題で，よく分からない問題はとりあえず実験しましょう．

$\boxed{\text{イ}}$: この問題は「穴埋め」問題なので，しっかりとした記述は必要ありませんが，記述できるようにしておきましょう.（1）での実験から $n=5$ までの積が最大になることがわかります. ですが根拠がありません. すなわち, **$n \geqq 6$ で a_n が 1 より小さい単調減少な数列である.** ことを言う必要があります.

解

$\boxed{\text{ア}}$:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2\cdot3\cdot4 = 24\\
a_2 &= \frac{3\cdot4\cdot5}{2!} = 30\\
a_3 &= \frac{4\cdot5\cdot6}{3!} = 20\\
a_4 &= \frac{5\cdot6\cdot7}{4!} = \frac{35}{4}\\
a_5 &= \frac{6\cdot7\cdot8}{5!} = \frac{14}{5}\\
a_6 &= \frac{7\cdot8\cdot9}{6!} = \frac{7}{10} < 1\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

これより，a_n が整数になるような n の最大値は, **$n=3$……（答え）**

$\boxed{\text{イ}}$: 上の実験より，$n=1$ から $n=5$ までの積の値が最大になることが分かる. 従って, a_n が単調減少数列であることを示す.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{(n+4)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{4}{(n+1)^2} < 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $a_{n+1} < a_n$ なので, 数列 $\{a_n\}$ は単調減少数列である.

$\therefore$ b_n の値が最大になるような n の値は, **$n=5$……（答え）**

4.5 総合演習 1: 数式分野の総仕上げ: 解答

5　法政大学解答編

5.1　2023 年度実施

I

解

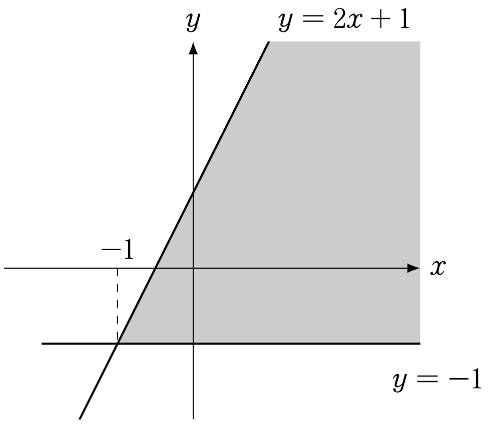
（**1**），（**2**）

D：$|x-y| \leqq x+1$

$$\begin{aligned} |x-y| \leqq x+1 &\iff -x-1 \leqq x-y \leqq x+1 \\ &\iff -2x-1 \leqq -y \leqq 1 \\ &\iff -1 \leqq y \leqq 2x+1 \cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① に $x=2$ を代入して，$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 5}$(**1**)……(**答え**)

さらに D を図示すると(**2**)の解答を得る．

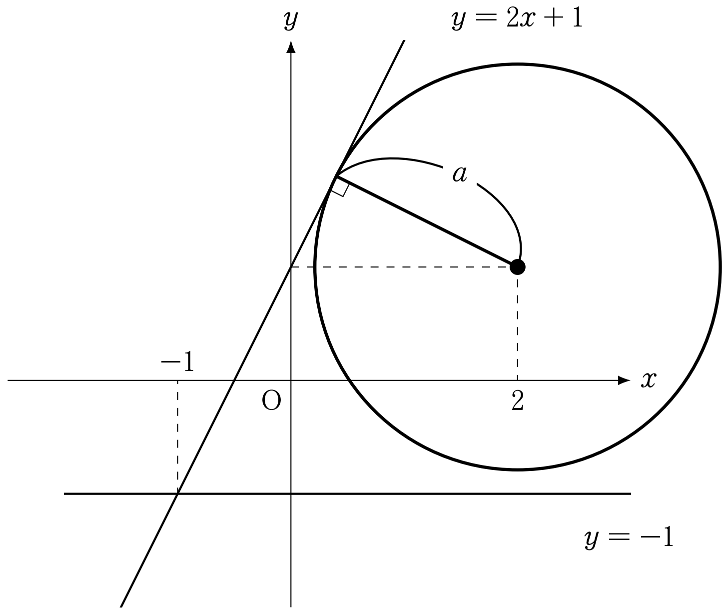


∴　W は上図の網目部で境界をすべて含む．

（**3**）　C：$x^2-4x+y^2-2y+5-a^2 \leqq 0$ とする.C が D の部分数集合となるような a の最大値を求める．

$$C: (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq a^2 \iff \text{中心}\ (2,\ 1)\ \text{半径}\ a\ \text{の円}$$

このことより，次図のとき a は最大値を取る．



$\therefore$　点と直線の距離公式より,

$$a = \frac{|4 - 1 + 1|}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{5}}{5}} \cdots\cdots\textbf{(答え)}$$

II

考え方

非常に厄介な確率の問題です.**場合分けが桁違いに多い.** です.(**1**),(**2**)を完答できていれば御の字です.

(**3**)では,3回目のBが引くカードがいずれにしても奇数であるということに気づく必要があります.そこからBの3回目のカードの値で場合分けします.

解

まず,A,Bの n 回目 $(1 \leqq n \leqq 3)$ のときのカードをそれぞれ a_n, b_nと表すことにする.

(**1**)　全事象は, $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 通りである.

ここで,$a = b$ が成立するのは,

$$a_1 + a_2 = b_1 \cdots\cdots\cdots ①$$

が成立するときである.

(i)$b_1 = 1, 2$ のとき

① を満たすような (a_1, a_2) は存在しない.

(ii)$b_1 = 3$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 2), (2, 1)$ の2通り.

(iii)$b_1 = 4$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 3), (3, 1)$ の2通り.

(iv)$b_1 = 5$ のとき

$(a_1, a_2) = (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$ の4通り.

(v)$b_1 = 6$ のとき　$(a_1, a_2) = (1, 5), (2, 4), (5, 1), (4, 2)$ の4通り.

∴　以上より, 求める確率は, $\dfrac{12}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$……(**答え**)

(**2**)　4枚の札を引くときの全事象は, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ 通りである.

このとき,

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 (= k \text{ とおく.}) \cdots\cdots\cdots ② \Longleftrightarrow k \text{ を2通りで表すことができる.}$$

これより,

(i)$k \leqq 4 or k \geqq 10$ のとき

② を満たすような (a_1, a_2, b_1, b_2) は存在しない.

(ii)$k = 5$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 4, 2, 3), (2, 3, 1, 4)$ の$(2! \times 2!) \times 2 = 8$ 通り.

(iii)$k=6$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2)=(2, 4, 1, 5), (1, 5, 2, 4)$ の$(2!\times 2!)\times 2=8$ 通り.

(iv)$k=7$ のとき

$3+4 \quad or \quad 1+6 \quad or \quad 2+5$ なので, ② を満たすような(a_1, a_2, b_1, b_2)の組は,

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{C}_2\times 2\times 2\times 2 &= \{(a_1, a_2)\text{か}(b_1, b_2)\text{の選び方}\}\times(3+4,\ 1+6,\ 2+5\text{の並び替え}) \\ &= 24\text{通り} \end{aligned}$$

(v)$k=8$ のとき　$(a_1, a_2, b_1, b_2)=(2, 6, 3, 5), (3, 5, 2, 6)$ の$(2!\times 2!)\times 2=8$ 通り.

(vi)$k=9$ のとき

$(a_1, a_2, b_1, b_2)=(3, 6, 4, 5), (4, 5, 3, 6)$ の$(2!\times 2!)\times 2=8$ 通り.

$\therefore$　求める確率は, $\dfrac{56}{360}=\boldsymbol{\dfrac{7}{45}}$……**(答え)**

(**3**)　余事象「6 回中少なくとも一回 $a=b$」が成立する確率を計算することにより, (**3**)の確率を求める. $a=b$ が実現するのは, 3 回目以降であり, 3 回目のと 4 回目で $a=b$ が成立する確率は(**1**)及び(**2**)で求めているので, 5 回目すなわち $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2(=\ell$とおく.) が成立する確率のみ調べれば良い.

今, 全事象は, $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=720$ 通りである.

ここで, $a_1+a_2+a_3=$(偶数) のとき, $a_n, b_n(1\leqq n\leqq 3)$ の組み合わせは下表の通り.

	a_1	a_2	a_3	b_4	b_5	b_6
case1	き	き	き	ぐ	ぐ	ぐ
case2	き	き	ぐ	ぐ	ぐ	き
case3	ぐ	ぐ	ぐ	き	き	き

case1 のとき, 3 つの異なる奇数の和が 3 つの異なる偶数の和で表すことはできないので, case1 は成立しない.

次に, $a_1+a_2+a_3=$(奇数) のときも同様に考える.

	a_1	a_2	a_3	b_4	b_5	b_6
case4	き	き	き	ぐ	ぐ	ぐ
case5	き	ぐ	ぐ	き	ぐ	き

このとき, casem4 も同様の理由により不適である. また, いずれの case にしても $\boldsymbol{b_3}$**は奇数** である.

このことより, $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=21$ であり, b_3は奇数であるから,

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2=2m$………③$(m\in\mathbb{N})$ と表せる.

このことより，$b_3 = 1, 3, 5$ の場合で場合分けする．

（ i ）$\underline{b_3 = 1 \text{ のとき}}$　$\ell = 10$ なので，これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases}(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 5) \\ (b_1, b_2) = (4, 6)\end{cases}$$

なので，$3! \times 2! = 12$ 通りが満たす．

（ ii ）$\underline{b_3 = 3 \text{ のとき}}$　$\ell = 9$ なので，これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases}(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 6) \\ (b_1, b_2) = (4, 5)\end{cases}$$

なので，12 通りがこれを満たす．

（ iii ）$\underline{b_3 = 5 \text{ のとき}}$

$\ell = 8$ なので，これを満たす (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2) の組は

$$\begin{cases}(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 4) \\ (b_1, b_2) = (2, 6)\end{cases}$$

なので，12 通りがこれを満たす．

$\therefore$　以上より，求める確率は，

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{7}{45} + \frac{1}{20}\right) &= 1 - \frac{1}{5}\left(\frac{18 + 28 + 9}{36}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{25}{36}} \cdots\cdots \textbf{（答え）} \end{aligned}$$

Ⅲ

考え方

(**2**)が漸化式？？と思いきや簡単な絶対不等式の問題です. **Ⅱ** に比べたら簡単です!

でも絵を描くのは無理だったので参考図（手書き）を添付します.

解

(**1**)　図より,

$$\mathrm{BE}_n = \frac{1}{2}a_n$$
$$\mathrm{CE}_n = 3 - \frac{1}{2}a_n$$
$$\mathrm{CF}_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{2}a_n\right) = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{AF}_n = 3 - \mathrm{CF}_n = \frac{a_n}{4} + \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{AD}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}_n = \frac{a_n}{8} + \frac{3}{4}$$
$$\mathrm{BD}_{n+1} = 3 - \mathrm{AD}_{n+1} = -\frac{a_n}{8} + \frac{9}{4}$$

よって, $\mathrm{BD}_{n+1} = a_{n+1}$なので,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{4} \iff a_n = 2 - \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$ （漸化式は暗算でいいよね？？）

$\therefore$ $\boldsymbol{a_2 = \frac{17}{8}, a_3 = \frac{127}{64}}$ **……(答え)**

(**2**)

$$|a_n - 2| < 10^{-9} \iff \frac{1}{8^{n-1}} < 10^{-9}$$
$$\iff 2^{-3(n-1)} < 10^{-9}$$
$$\iff (n-1)\log_{10} 2 > 3$$
$$\iff n > \frac{3}{\log_{10} 2} = 10.9\cdots \fallingdotseq 10.9$$

$\therefore$ $\boldsymbol{n = 11}$ **……(答え)**

5.2　2024 年度実施

I

考え方

(**2**)の連立方程式の計算が煩雑です. 同値性を崩さずに正しく場合分けできたでしょうか. 確認してください.

解

(**1**)　$a=1$ かつ $b=16$ のとき

$$\begin{aligned}&(\log_2 x)^2=\log_2 4x=2+\log_2 x\\ \Longleftrightarrow\ &(\log_2 x+2)(\log_2 x-1)=0\\ \Longleftrightarrow\ &\log_2 x=-2,\ 1\\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{x=\frac{1}{4},\ 2}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

(**2**)$x=2\sqrt{2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\left(\log_2 2\sqrt{2}\right)^2&=\log_2\left(\sqrt{b}\cdot 2\sqrt{2}^a\right)\\ &=\frac{1}{2}\log_2 b+a\log_2 2^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \left(\log_2 2^{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\log_2 b+a\log_2 2^{\frac{3}{2}}&\Longleftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\log_2 b+\frac{3}{2}a\\ &\Longleftrightarrow\frac{9}{2}=\log_2 b+3a\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで, $x=\dfrac{b}{4}$ を元の式に代入すると,

$$\left(\log_2\frac{b}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\log_2 b+a\log_2\frac{b}{4}\Longleftrightarrow(\log_2 b-2)^2=\frac{1}{2}\log_2 b+a(\log_2 b-2)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに ② に ① を代入すると,

$$\begin{cases}①\\ \left(\dfrac{9}{2}-3a-2\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2}-3a\right)+a\left(\dfrac{9}{2}-3a-2\right)\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}①\\ \left(\dfrac{5}{2}-3a\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2}-3a\right)+a\left(\dfrac{5}{2}-3a\right)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}①\\ 25-60a+36a^2=9-6a+10a=12a^2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}①\\ 3a^2-4a+1=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}①\\ a=\dfrac{1}{3},\ 1\end{cases}$$

(ｉ)$\underline{a = \dfrac{1}{3}\ のとき}$

　②より，$\dfrac{7}{2} = \log_2 b$

　　∴　$b = 2^{\frac{7}{2}} = 8\sqrt{2}$　これより，与式は $2\sqrt{2}$ を重解にもつことになり，(２)の前提に反する．

よって，$a \neq \dfrac{1}{3}$である．

(ii)$\underline{a = 1\ のとき}$

　②より，$\dfrac{9}{2} = \log_2 b + 3 \iff b = 2^{\frac{3}{2}}$

このとき，

$$
\begin{aligned}
&(\log_2 x)^2 = \log_2 2^{\frac{3}{4}} \cdot x = \frac{3}{4} + \log_2 x \\
&\iff 4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3 = 0 \\
&\iff (2\log_2 x - 3)(2\log_2 x + 1) = 0 \\
&\iff x = 2^{\frac{3}{2}},\ 2^{-\frac{1}{2}} \\
&\iff x = 2\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

これより，$a = 1$ のとき確かに $2\sqrt{2}$ と $\dfrac{b}{4}$を解に持つ．

　　∴　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 2^{\frac{3}{2}}}$……**(答え)**

II

考え方

難易度は高くありませんが計算が煩雑です. 落ち着いて計算しましょう.

解

(**1**) 参考図を適宜参照せよ.

$\begin{cases} \theta = 30^\circ \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{cases}$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EC}}$である. ここで,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{EC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 - \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{-3}{6}\right) + \frac{1}{2} \times 4 - \frac{2}{9} \times 9 \\ &= -\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答え}) \end{aligned}$$

(**2**) P は直線 BC 上の点なので, $0 \leqq t \leqq 1$ をみたすある実数 t を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と表せる.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}t\right) + \frac{t}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 - \frac{2}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= 6\cos\theta \times \frac{1}{6}(1 - 4t) + 2t - 2 \\ &= \cos\theta - 2 + t(2 - 4\cos\theta) \\ &= \cos\theta - 2 + 2t(1 - 2\cos\theta) \cdots\cdots\cdots ① \quad (0 \leqq t \leqq 1) \end{aligned}$$

t が $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす任意の値 w をとるとき, $t = 0$ でも成り立つので

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos\theta &\Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答え}) \end{aligned}$$

このとき, $\theta = \frac{\pi}{3}$を ① に代入して,

$k = \frac{1}{2} - 2 = -\boldsymbol{\frac{3}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答え})$

（**3**） EF $=$ EP かつ $k=-1$ を満たすとき BP : PC の値を求める．

$\boxed{\text{考え方}}$

どうしたらいいか判然としないタイプの問題は，とりあえず **与えられた情報を同値変形** しましょう！

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EF}=\mathrm{EP} &\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{FP}}\right|^2\\
&\iff \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\\
&\iff \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{4}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\\
&\iff 1-4\cos\theta+4=4t^2+4t\cos\theta+1\\
&\iff 4t^2+4t\cos\theta+4\cos\theta-4=0\\
&\iff t^2+\cos\theta(t+1)-1=0\cdots\cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

一方，$k=-1$ より

$$
\begin{aligned}
&-1=\cos\theta-2+2t(1-2\cos\theta)\\
&\iff -1=\cos\theta-2+2t-4t\cos\theta\\
&\iff \cos\theta(4t-1)=-1+2t\\
&\iff \cos\theta=\frac{2t-1}{4t-1}\cdots\cdots\cdots③
\end{aligned}
$$

よって，② と ③ より，③ を ② に代入すると

$$
\begin{aligned}
&t^2+(t+1)\cdot\frac{2t-1}{4t-1}-1=0\\
&\iff \frac{t^2(4t-1+(t+1)(2t-1)-(4t-1))}{4t-1}=0\\
&\iff \frac{4t^3+t^2-3t}{4t-1}=0\\
&\iff \begin{cases} t(t+1)(4t-3)=0\\ t\fallingdotseq\dfrac{1}{4}\end{cases}\\
&\iff t=0,\ -1,\ \frac{3}{4}\\
&\iff t=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $t=0$ のとき，$\theta=0$ となり不適であるので，$t=\dfrac{3}{4}$ である．

$\therefore$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ なので，**BP : PC = 3 : 1**……(**答え**)

Ⅲ

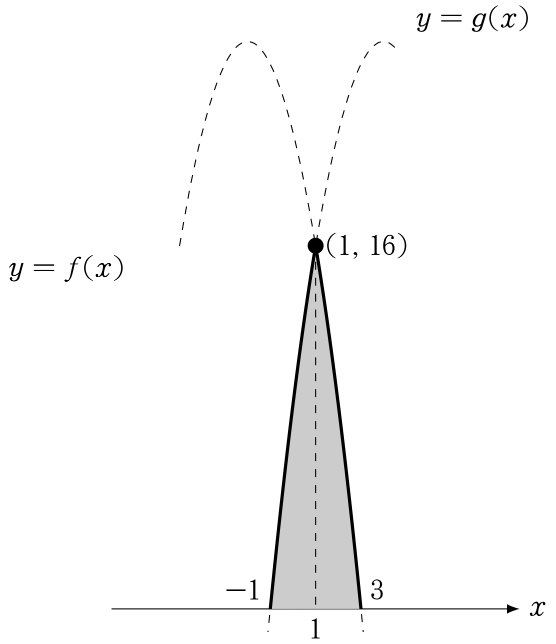
考え方

落ち着いて，グラフを描けば大丈夫です．

また関数形がややこしいので，$m(x)$ と $M(x)$ のどっちを採用するのか気をつけましょう．($f(x)$ と $g(x)$ の上下関係に気を付ける）

解

（**1**） $a = 21$ のとき, $m(x) = \begin{cases} g(x) = -x^2 + 8x + 9 = -(x-9)(x+1) \\ f(x) = -x^2 - 4x + 21 = -(x+7)(x-3) \end{cases}$ であり更に $f(x) - g(x) = -12x + 12 = 12(1-x)$ であるから下図の網目部が求める面積である．



$\therefore$ 求める面積 S_1とすると, 上図より,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 8x + 9)dx + \int_{1}^{3} (-x^2 - 4x + 21)dx \\
&= (\text{頑張って計算}\cdots) \\
&= \boldsymbol{\frac{104}{3}} \cdots\cdots (\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

（**2**） ℓの傾きが 2 より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の微分係数をそれぞれ計算することにより，

$$\begin{cases} g'(x)=-2x+8 \\ f'(x)=-2x-4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2=-2x+8 \\ 2=-2x-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=3 & (\ell\text{と } y=g(x) \text{ の接点の } x \text{ 座標}) \\ x=-3 & (\ell\text{と } y=f(x) \text{ の接点の } x \text{ 座標}) \end{cases}$$

よって，このとき ℓの方程式は，

$$\ell : y=2(x-3)+24=2x+18$$

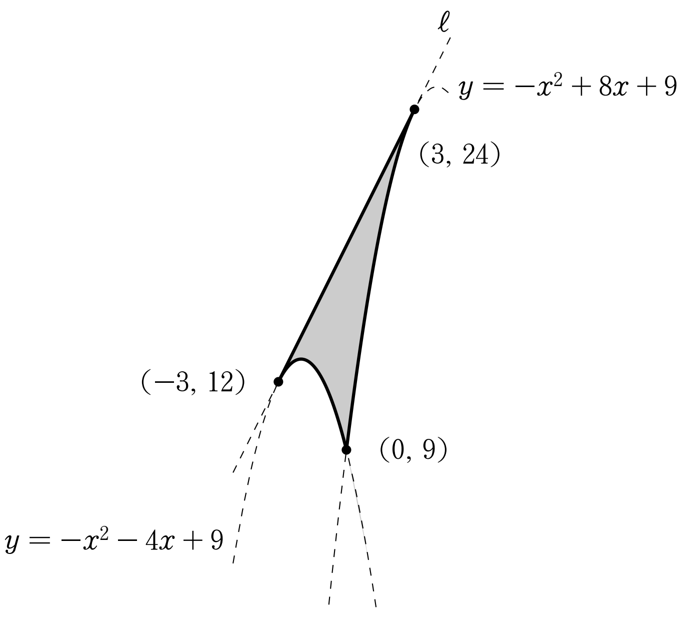
これより，$x=-3$ のとき，$f(-3)=12$ を満たすので，

$$-9+12+a=12 \iff \boldsymbol{a=9}\cdots\cdots(\textbf{答え})$$

$$\therefore \quad M(x)=\begin{cases} -x^2-4x+9 & (f(x) \geqq g(x)) \\ -x^2+8x+9 & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

$f(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標は，$f(x)=g(x) \iff x=0$ である．

従って，求める面積 S_2とすると，それは次図の網目部である．



上図より，S_2は，

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-3}^{0} \{2x+18-(-x^2-4x+9)\}dx+\int_{0}^{3} \{2x+18-(-x^2+8x+9)\}dx \\ &= (\text{頑張って計算}) \\ &= \mathbf{18}\cdots\cdots(\textbf{答え}) \end{aligned}$$

5.3　2025 年度実施

I

考え方

1 次元数直線上の解の個数の問題です.**共通部分なのか合併集合なのか** を意識して解けば間違えるところはありません.(合併集合＝合わせた部分)

解

$$\begin{cases} 2x^2-4bx+15b=0 \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+8x+b+15=0 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2とおく.

(**1**)　$a=5$ のとき

$$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2-4bx+15b=0 \\ x^2+8x+b+15=0 \end{cases}$$

なので,

$$\begin{cases} D_1=4b^2-30b=0 \\ D_2=16-b-15 \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b(2b-15)=0 \\ b \leqq 1 \end{cases}$$

$$\iff \boldsymbol{b=0} \cdots\cdots \text{(答え)}$$

(**2**)　D_1, D_2を計算すると,

$$\begin{cases} D_1=4b^2-6ab=0 \\ D_2=a^2-4a-6 \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2b(2b-3a)=0 \\ a^2-4a-6 \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=0 \quad or \quad b=\dfrac{3}{2}a \\ a^2-4a-6 \leqq 0 \end{cases}$$

これより,

- $\underline{b=0 \text{ のとき}}$

  $a^2-4a-6 \leqq 0 \iff 2-\sqrt{10} \leqq a \leqq 2+\sqrt{10} \cdots\cdots\cdots ③$

- $\underline{b=\dfrac{3}{2}a \text{ のとき}}$

$$a^2-4a-6+\frac{3}{2}a \leqq 0 \iff 2a^2-5a-12 \leqq 0$$
$$\iff (2a+3)(a-4) \leqq 0$$
$$\iff -\frac{3}{2}a \leqq a \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$a = \dfrac{2}{3}a$ より b の取りうる値の範囲は, $-\dfrac{a}{4} \leqq b \leqq 6$………⑤

∴　a の取りうる値の範囲は, ③ と ④ を合わせた範囲なので, $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{10}}$……(**答え**)

∴　b の取りうる値の範囲は, ⑤ と $b = 0$ を合わせた範囲なので, $\boldsymbol{-\dfrac{9}{4} \leqq b \leqq 6}$……(**答え**)

(**3**)　$-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{10}$ または $-\dfrac{9}{4} \leqq b \leqq 6$ を満たす a, b の個数を数えれば良い.

まず, $-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{10}$ を満たす a は, $a = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の計 7 個.

次に, $-\dfrac{9}{4} \leqq b \leqq 6$ を満たす b は, $b = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の計 9 個.

∴　求める (a, b) の組の個数は **9 個**……(**答え**).

II

考え方

完答意外ない.

解

（**1**） 玉を 2 回取り出して O にいる確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times 2\right)\times 2=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$……(**答え**)

（**2**） 玉を 3 回取り出して P が $(1, 0)$ にいるとき，

$\rightarrow\uparrow\downarrow$, $\rightarrow\rightarrow\leftarrow$

の 2 通りなので， 求める確率は， $3!\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{9}{64}}$……(**答え**)

（**3**） 玉を 4 回取り出して P が $(1, 1)$ にいるとき，

$\nearrow\rightarrow\leftarrow$, $\nearrow\uparrow\downarrow$

であり，$\nearrow=\rightarrow\uparrow$ であることに注意して，求める確率は，$\dfrac{4!}{2!}\times 2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$……(**答え**)

III

$\boxed{\text{考え方}}$

対称性 : $y=f(-x)=-f(x)$ であり, $-y=f(x)$ なので, $y=f(x)$ のグラフは原点について対称です. これで積分計算を楽に済ませせることができます.

解

$f(x)=3x^3-(a+1)^2x=x\left\{\sqrt{3}x+(a+1)\right\}\left\{\sqrt{3}x-(a+1)\right\}$ と因数分解でき, 更に $(x,\,y)=(-x,\,-y)$ とすると, $y=f(x)$ なので, $y=f(x)$ のグラフは原点について対称である.
また, $\alpha=-\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$, $\beta=\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}(\alpha<\beta)$ とおく.
(**1**) 対称性より,

$$\frac{27}{2}=2\times\int_0^{\beta}(-f(x))dx\cdots\cdots\cdots①$$

である.

ここで,

$$\begin{aligned}-\int_0^{\beta}f(x)dx&=\int_{\beta}^{0}\left\{3x^3-(a+1)^2x\right\}dx\\&=\frac{3}{4}\Big[\,x^4\,\Big]_{\beta}^{0}-\frac{(a+1)^2}{2}\Big[\,x^2\,\Big]_{\beta}^{0}\\&=-\frac{3}{4}\cdot\frac{(a+1)^4}{9}+\frac{(a+1)^4}{6}\\&=(a+1)^4\cdot\frac{1}{12}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(a+1)^4=\frac{27}{2}&\Longleftrightarrow(a+1)^4=3^4\\&\Longleftrightarrow a+1=3\\&\Longleftrightarrow \boldsymbol{a=2}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

(**2**) $f'(x)=9x^2-(a+1)^2=9\left(x+\dfrac{a+1}{3}\right)\left(x-\dfrac{a+1}{3}\right)$ より, 次の増減表を得る.

x	$\cdots$	$-\dfrac{a+1}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{a+1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって, $p=-\dfrac{a+1}{3}$ なので, 極大値は $f(p)=3p^3-(a+1)^2p$ 　であるから $(p,\,f(p))$ の軌跡を W と

すると, $X=p,\ Y=f(p)$ とおけて,

$$
\begin{aligned}
(X,\,Y)\in W &\Longleftrightarrow \exists p,\ \begin{cases} p=X \\ Y=3p^3-(a+1)^2p \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \exists a,\ \begin{cases} Y=3X^3-(a+1)^2X \\ a+1=-3X \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} Y=3X^3-9X^3=-6X^3 \cdots\cdots\cdots② \\ a>0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -3X-1>0 \\ ② \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} X<-\dfrac{1}{3} \\ ② \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad W$ は, $\begin{cases} y=-6x^3 \\ x<-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ で, 次図の太実線部である. ただし, 白丸は含まない.