**1**.〔$\theta$ の範囲に注意せよ〕（青山学院大）

$t$ を $0 \leqq t \leqq \pi$ を満たす実数とし, $xy$ 平面上の放物線

$$C : y = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$$

の頂点を P とおくとき, 以下の問いに答えよ.

（1） 点 P の座標を $t$ を用いて表せ.

（2） 放物線 $C$ と $x$ 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような $t$ の値の範囲を求めよ.

（3） $t$ が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき, 点 P の $y$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの $t$ の値を求めよ.

**2.**〔見た目に惑わされてはいけない〕(中央大)

数列 $\{a_n\}$を, 条件 $a_1=1$ と漸化式

$a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!(n=1, 2, 3, \cdots)$

によって定める. ただし, $0!=1$ である. また, 数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_n}{n!}$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $b_1, b_2, b_3$を求めよ. 答えのみ記せば良い.

(2) $\{b_n\}$の満たすべき漸化式を求めよ. また, $\{b_n\}$の一般項を求め$\{a_n\}$の一般項を求めよ.

(3) $n$ を自然数とする. 次の等式を証明せよ.

$\sum_{K=1}^{n} 2^{k-1}a_k=2^n n!-1$

考え方

誘導に乗ることができればどの小問も優しいです. 教科書レベルの問題になります. ただ, (2)に関しては, $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ を $b_n$の式だけで表したいので $a_{n+1}$の漸化式を両辺 $(n+1)!$で割り算すれば $\boldsymbol{b_n}$ の階差数列になります.

解

(1) $b_1=\dfrac{a_1}{1!}=\mathbf{1}$

$$b_2=\frac{a_2}{2!}=\frac{2\cdot a_1+0!}{2\cdot 1}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$b_3=\frac{a_3}{3!}=\frac{3\cdot a_2+1!}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{\frac{5}{3}}\cdots\cdots(\text{答え})$$

(2) $a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!$の両辺を $(n+1)!$で割ることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)}\cdots\cdots(\text{答え})$$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\left[\frac{1}{k}\right]_1^n$$
$$=1-\left(\frac{1}{n}-1\right)=2-\frac{1}{n}(n\geqq 1)$$

これは、$n=1$ のときも成立する.

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\left(2-\frac{1}{n}\right)n!(n\geqq 1)}\cdots\cdots(\text{答え})$$

（３）（２）より,（３）における示すべき等式は次のように書ける.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot\left(2-\frac{1}{k}\right)k! = 2^n n! - 1 \cdots\cdots ①$$

このことより,

$$2^{k-1}\left(2-\frac{1}{k}\right)k! = 2^{k-1}\{2k! - (k-1)!\}$$

$$= 2^k\cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!$$ ☜**差分型！（階差型！）**

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\{2^k\cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!\} = \Big[\,2^{k-1}\cdot(k-1)!\,\Big]_1^{n+1}$$

$$= 2^n\cdot n! - (1\cdot 0!) = 2^n n! - 1$$ **（証明終わり）**

**3.**〔 人は見かけによらない 〕(津田塾大-文系)

次の問いに答えよ.

( 1 ) 袋の中に赤玉 5 個， 白玉 3 個の合計 8 個の玉が入っている. この中から一度に 3 個の玉を取り出したとき， 赤玉が 1 個， 白玉が 2 個取り出される確率を求めよ.

( 2 ) 袋の中に赤玉 $n$ 個, 白玉 9 個の合計 $n+9$ 個の玉が入っている. この中から一度に 3 個の玉を取り出したとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個取り出される確率 $P_n$を求めよ. ただし, $n$ は自然数とする.

( 3 ) ( 2 ) の $P_n$について, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ を満たす $n$ を全て求めよ.

( 4 ) ( 2 ) の $P_n$について, $P_n$を最大にする $n$ を求めよ.

考え方

愚直に確率を計算するだけです. 計算ミスに気をつけましょう.

解

( 1 ) $\dfrac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{{}_8C_3} = \mathbf{\dfrac{15}{56}}$……**(答え)**

( 2 ) $P_n = \dfrac{{}_nC_1 \times {}_9C_2}{{}_{n+9}C_3} = \boldsymbol{\dfrac{216n}{(n+9)(n+8)(n+7)}}$……**(答え)**

( 3 ) $P_{n+1} = \dfrac{216(n+1)}{(n+10)(n+9)(n+8)}$ より,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{216(n+1)/(n+10)(n+9)(n+8)}{216n/(n+9)(n+8)(n+7)} = \frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)}$$

なので,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Longleftrightarrow \frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)} > 1$$

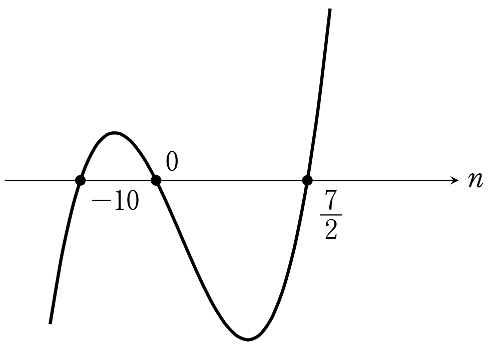
$$\Longleftrightarrow \frac{(n+1)(n+7) - n(n+10)}{n(n+10)} > 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{2n-7}{n(n+10)} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2n-7}{n+10} < 0$$

$$\Longleftrightarrow (2n-7)n(n+10) < 0 \cdots\cdots ①$$

① が満たす領域を図示すると次図の斜線部である.




上図の斜線部が ① が満たす領域である.$n$ が自然数であることから, $0 < n < \dfrac{7}{2}$ を満たす自然数 $n$ を求めればよいので, 求める $n$ は $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$……(**答え**)

（４） ① より,

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 \cdots$$

なので, $P_n$を最大にするような $n$ は、$\boldsymbol{n = 4}$……(**答え**)