1.〔θ の範囲に注意せよ〕(青山学院大)

t を $0 \leqq t \leqq \pi$ を満たす実数とし, xy 平面上の放物線

$C : y = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$

の頂点を P とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ.

(2) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求めよ.

(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき, 点 P の y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの t の値を求めよ.

考え方

よくある典型的な解の配置問題です.(3) で少々方針を決めかねるかも知れませんが, 合成で普通に解きましょう.

解

(1) $f(x) = x^2 - 2(2\sin t)x + \sin t \cos t$ とおくと,

$f'(x) = 2x - 2(2\sin t)$ なので, 点 P の座標は, $\boldsymbol{(2\sin t,\ -4\sin^2 t + \sin t \cos t)}$……**(答え)**

(2)「C が x 軸の正の部分で異なる 2 点と交わる.」$\iff \begin{cases} \text{点 P の } x,\ y \text{ 座標が共に正} \\ F(0) > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \sin t > 0 \\ -4\sin^2 t + \sin t \cos t > 0 \\ \sin t \cos t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t > 0 \\ \cos t > 0 \\ \sin t(4\sin t - \cos t) < 0 \end{cases}$$

$\iff \boldsymbol{0 < t < \dfrac{\pi}{2}}$……**(答え)**

(3) $g(t) = -4\sin^2 t + \sin t \cos$ とおくと, 半角の公式より, $g(t) = -4 \cdot \dfrac{1-\cos 2t}{2} + \sin t \cos t$ と書ける.

これを整理すると, $g(t) = \dfrac{1}{2}\left(\sin 2t + 4\cos 2t\right) - 2$ と書くことができるので, これを更に合成することにより,

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}\sin\left(2t + \phi\right)\right) - 2 \cdots ① \quad \left(\text{ただし, } \phi \text{ は} \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin\phi = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \text{を満たす角である.}\right)$$

ここで、$2t + \phi$ の取りうる値の範囲は, ϕ が第一象限の角であることから, $\dfrac{\pi}{2} < 2t + \phi < 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$ なので,

$$\begin{cases} \max g(t) = \dfrac{\sqrt{17}}{2} - 2 \\ \min g(t) = -\dfrac{\sqrt{17}}{2} - 2 \end{cases}$$ ……(**答え**) である．

2.〔見た目に惑わされてはいけない〕(中央大)

数列 $\{a_n\}$を, 条件 $a_1=1$ と漸化式

$a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!(n=1, 2, 3, \cdots)$

によって定める. ただし, $0!=1$ である. また, 数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_n}{n!}$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) b_1, b_2, b_3を求めよ. 答えのみ記せば良い.

(2) $\{b_n\}$の満たすべき漸化式を求めよ. また, $\{b_n\}$の一般項を求め$\{a_n\}$の一般項を求めよ.

(3) n を自然数とする. 次の等式を証明せよ.

$\sum_{K=1}^{n} 2^{k-1}a_k=2^n n!-1$

考え方

誘導に乗ることができればどの小問も優しいです. 教科書レベルの問題になります. ただ,(2)に関しては, $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ を b_nの式だけで表したいので a_{n+1}の漸化式を両辺 $(n+1)!$で割り算すれば $\boldsymbol{b_n}$ の階差数列になります.

解

(1) $b_1=\dfrac{a_1}{1!}=\mathbf{1}$

$b_2=\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{2\cdot a_1+0!}{2\cdot 1}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$b_3=\dfrac{a_3}{3!}=\dfrac{3\cdot a_2+1!}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$……**(答え)**

(2) $a_{n+1}=(n+1)a_n+(n-1)!$の両辺を $(n+1)!$で割ることにより,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}(n\geqq 1)}\text{……(答え)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\left[\frac{1}{k}\right]_1^n\\&=1-\left(\frac{1}{n}-1\right)=2-\frac{1}{n}(n\geqq 1)\end{aligned}$$

これは、$n=1$ のときも成立する.

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) n!\,(n \geqq 1)}$$ ……**（答え）**

（３）（２）より，（３）における示すべき等式は次のように書ける．

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) k! = 2^n n! - 1 \cdots\cdots ①$$

このことより，

$$2^{k-1}\left(2 - \frac{1}{k}\right)k! = 2^{k-1}\{2k! - (k-1)!\}$$

$$= 2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!$$ ☜**差分型！（階差型！）**

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\{2^k \cdot k! - 2^{k-1}(k-1)!\} = \Big[\, 2^{k-1} \cdot (k-1)! \,\Big]_1^{n+1}$$

$$= 2^n \cdot n! - (1 \cdot 0!) = 2^n n! - 1$$ **（証明終わり）**

3.〔人は見かけによらない〕(津田塾大-文系)

次の問いに答えよ.

(1) 袋の中に赤玉5個, 白玉3個の合計8個の玉が入っている. この中から一度に3個の玉を取り出したとき, 赤玉が1個, 白玉が2個取り出される確率を求めよ.

(2) 袋の中に赤玉 n 個, 白玉9個の合計 $n+9$ 個の玉が入っている. この中から一度に3個の玉を取り出したとき, 赤玉が1個, 白玉が2個取り出される確率 P_n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(3) (2) の P_n について, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ を満たす n を全て求めよ.

(4) (2) の P_n について, P_n を最大にする n を求めよ.

考え方

愚直に確率を計算するだけです. 計算ミスに気をつけましょう.

解

(1) $\dfrac{{}_5C_3\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\mathbf{\dfrac{15}{56}}$ ……**(答え)**

(2) $P_n=\dfrac{{}_nC_1\times{}_9C_2}{{}_{n+9}C_3}=\boldsymbol{\dfrac{216n}{(n+9)(n+8)(n+7)}}$ ……**(答え)**

(3) $P_{n+1}=\dfrac{216(n+1)}{(n+10)(n+9)(n+8)}$ より,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{216(n+1)/(n+10)(n+9)(n+8)}{216n/(n+9)(n+8)(n+7)}=\frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)}$$

なので,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}>1\iff\frac{(n+1)(n+7)}{n(n+10)}>1$$

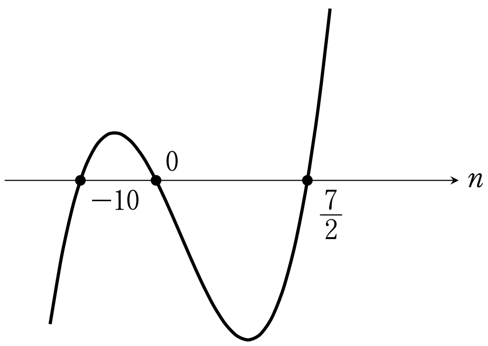
$$\iff\frac{(n+1)(n+7)-n(n+10)}{n(n+10)}>0$$

$$\iff-\frac{2n-7}{n(n+10)}>0$$

$$\iff\frac{2n-7}{n+10}<0$$

$$\iff(2n-7)n(n+10)<0 \cdots\cdots ①$$

① が満たす領域を図示すると次図の斜線部である.



上図の斜線部が ① が満たす領域である.n が自然数であることから, $0 < n < \dfrac{7}{2}$ を満たす自然数 n を求めればよいので, 求める n は $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$……(**答え**)

（４） ① より,

$$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 \cdots$$

なので, P_nを最大にするような n は、$\boldsymbol{n = 4}$……(**答え**) $\left(\because \begin{cases} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Longrightarrow n < 4 \\ \dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \Longrightarrow n > 4 \end{cases} \right)$

1.〔そろそろ見飽きた三平方の整数問題〕(一橋大)

以下の問いに答えよ.

(1) 整数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき, ab は 4 の倍数であることを示せ.

(2) 3 辺の長さがすべて整数で, そのうちの一辺の長さが 2025 である三角形の面積は 162 の倍数であることを示せ.

考え方

(1) はもうお手のものですね.**背理法** でいきましょう.

(2)(i)$a=2025$ または $b=2025$(ii)$c=2025$ の二つの場合に限られるとうことは見抜けるでしょう. ポイントは, **$2025=3^4\cdot5^2$, $162=3^4\cdot2$ と因数分解できる.** ということです.

解

(1)「a, b が 4 の倍数」$\Longleftrightarrow$「$a\equiv0 \pmod 4$ または $b\equiv 0 \pmod 4$」

ここで, $\begin{cases} a\not\equiv 0 \pmod 4 \\ b \not\equiv 0 \pmod 4\end{cases}$ と仮定すると, ある整数 k, l を用いて, $\begin{cases} a=4k+1 \\ b=4l+1\end{cases}$ と書くことができる.

このことより,

$$a^2+b^2=16k^2+16l^2+8k+8l+2\equiv 2 \pmod 4$$

$$\therefore\quad c^2\equiv 2 \pmod 4$$

ここで, 一般の整数 n について, 法を 4 とすると, 下表のような結果を得る.

$n \pmod 4$	0	1	2	3
$n^2 \pmod 4$	0	1	0	$9\equiv 1$

上表より, (1) は, 矛盾である.

$\therefore$ ab は 4 の倍数である. **(証明終わり)**

(2) 今, 直角三角形の 3 辺の長さを大小関係をつけて $a, b, c(a\leqq b\leqq c)$, 直角三角形の面積を S とおくことにする.

(1) から ab の少なくとも一方は 4 の倍数であるから, 1 辺の長さが 2025 である直角三角形は次の 2 つの場合に限定される.

(ⅰ) $a=2025$　または　$b=2025$ のとき,

「$S=\dfrac{1}{2}\times 2025\times a$　または　$S=\dfrac{1}{2}\times 2025\times b$」$\Longleftrightarrow$「$S=\dfrac{1}{2}3^4\cdot 5^2\times 4k$　または　$S=\dfrac{1}{2}3^4\cdot 5^2\times 4l$
」

$\Longleftrightarrow$「$S=\dfrac{1}{2}324\times 25\times k$　または　$S=\dfrac{1}{2}324\times 25\times l$」$\Longleftrightarrow$「$S\equiv 0 \pmod{162}$」

(ⅱ) $c=2025$ のとき,

$a^2+b^2=(2025)^2=(3^4\cdot 5^2)^2\equiv 0 \pmod{3}$ なので, 適当な整数 p, q を用いて $\begin{cases} a=3p \\ b=3q \end{cases}$ と書くことができる.

$\therefore$　$a^2+b^2=9p^2+0q^2=(3^4\cdot 5^2)^2 \Longleftrightarrow p^2+q^2=(3^3\cdot 5^2)^2$

$\Longrightarrow p^2+q^2\equiv 0 \pmod{3}$

$\therefore$　$p\equiv q\equiv 0 \pmod{9}$ なので, $a\equiv b\equiv 0 \pmod{9}$ であるから, $c=2025$ のときの直角三角形の面積 S は, $S=\dfrac{1}{2}\times 81\times 4k$ と書ける.

$\therefore$　$S\equiv 0 \pmod{162}$

以上により, 題意は示された.　**(証明終わり)**

2〔**束** という概念 〕(一橋大・改)

t を実数とし, 座平面上において

$$x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0$$

で表される図形 C_t を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1)　$t=1$ のとき C_1 を図示せよ.

(2)　C_t の半径が 1 以上 4 以下になるための条件を t を用いて表せ.

(3)　C_t が (2) で求めた範囲を動くとき, C が通過してできる領域を求め, 図示せよ.

考え方

(1)　半径の正負に応じて円の方程式がどのような図形を表すか覚えていますか. その確認です.

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ とおく.

$$\begin{cases} \boldsymbol{r>0 \iff (a,\ b)} \text{ 中心の円} \\ \boldsymbol{r=0 \iff} \text{点 } \boldsymbol{(a,\ b)} \\ \boldsymbol{r<0 \iff} \text{図形を描かない} \end{cases}$$

(2)　x と y でまとめて, 定数項を右辺に寄せてやればいいですね.

(3)　通過領域の典型的な問題です. 通過領域は次のような同値変形をすることによりときます.

「ある点 $(X,\ Y)$ が通過領域 W に入る」$\iff$「$x=X,\ y=Y$ を代入した方程式を満たすような t が少なくと一つ存在する.」

解

(1)　$t=1$ のとき, $C_1:x^2+y^2-4x-2y-1+10=0 \iff (x-2)^2+(y-1)^2=-9$

　∴　**描く図形はない.**

(2)　$x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0 \iff x^2-4tx+y^2-2ty+10t-1=0$

$$\iff (x-2t)^2+(y-t)^2=5t^2-10t+1$$

これより,

「C_t の半径が 1 以上 4 以下」$\iff 1 \leqq \sqrt{5t^2-10t+1} \leqq 4$

$$\iff \begin{cases} t(t-2)\geqq 0 \\ (t+1)(t-3)\leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t\geqq 2 \vee t\leqq 0 \\ -1\leqq t\leqq 3 \end{cases} \iff \boldsymbol{2\leqq t\leqq 3 \vee -1\leqq t\leqq 0} \cdots\cdots(\text{答え})$$

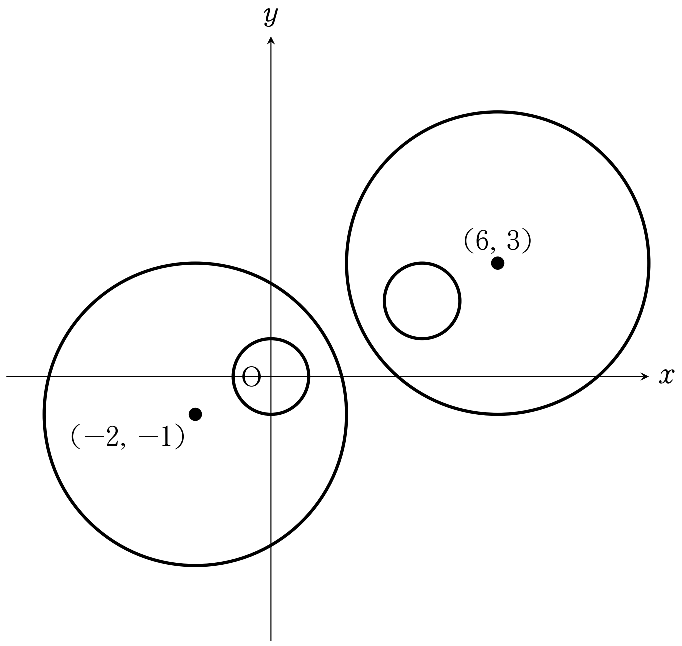
（３）　C が通過する領域を W,（２）で得られた t の範囲を ① とおく．

$(X,\,Y) \in W \iff (X,\,Y)$ が W を通るような t が ① の範囲に少なくとも一つ存在する．

$$\iff \exists t \in ①,\ X^2+Y^2-1-t(4X+2Y-10)=0 \iff \exists t \in ①,\ t=\frac{X^2+Y^2-1}{4X+2Y-10}$$

$$\iff \begin{cases} (X^2+Y^2-1)\{(X-4)^2+(Y-2)^2-1\} \geqq 0 \cdots ② \\ \{(X+2)^2+(Y+1)^2-16\}\{(X-6)^2+(Y-3)^2-16\} \leqq 0 \cdots ③ \end{cases}$$

このことより，② と ③ の零領域を描いて領域を図示すると下図を得る.(☜**かわりばんこの法則を使う!!**)



3. 相反方程式（東京医大・改）

4 次方程式

$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0\cdots(\ast)$

について考える．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくことにより$(\ast)$を y で表せ．

（2） 4 次方程式$(\ast)$の 4 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とおくとき，次のそれぞれの値を求めよ．

（i） $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$

（ii） $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

（iii） $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$

$\boxed{\text{考え方}}$

相反方程式の基本的な問題です．

（1） $(\ast)$の両辺を x^2 で割ることにより，y で表すことができます．

（2） （1）の誘導を踏襲しましょう．y について解くと，二つの解が得られます．

ということは、**$(y-(\text{解}))(y+(\text{解}))=0$ と因数分解することができる!**

解

（1）$(\ast)$の両辺を x^2 で割ることにより，

$$
\begin{aligned}
&x^2+11x+31+\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}=0\\
&\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+31=0\\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{y^2+11y+29=0}\cdots\cdots(\textbf{答え})
\end{aligned}
$$

（2） （1）より，y ついて解くと，$y=\dfrac{-11\pm\sqrt{5}}{2}$ なので，

$$
\begin{aligned}
&y^2+11y+29=0 \Longleftrightarrow \left(y-\frac{-11\pm\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-\frac{-11\pm\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \left(x^2+\frac{11-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{11+\sqrt{5}}{2}x+1\right)=0
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ は（＊）の異なる 4 解なので，

$$x^2+\frac{11-\sqrt{5}}{2}x+1 \Longleftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=0\cdots①$$

かつ

$$x^2+\frac{11+\sqrt{5}}{2}x+1 \Longleftrightarrow (x-\gamma)(x-\delta)=0\cdots②$$

としても，一般性を失わない．

∴　① と ② に解と係数の関係を用いて，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-11+\sqrt{5}}{2}\\[2ex] \alpha\beta=1\end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases}\gamma+\delta=-\dfrac{11+\sqrt{5}}{2}\\[2ex] \gamma\delta=1\end{cases}$$ と書くことができる．

（ i ）

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\\ &=\frac{-11+\sqrt{5}-11-\sqrt{5}}{2}\\ &=\mathbf{-11}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（ii）

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\ &=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-11\right)^2-2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+11\right)^2-2\\ &=\frac{1}{4}\left(10-22\sqrt{5}+22\sqrt{5}+121\times 2\right)-4\\ &=\frac{1}{4}\times(252)-4=\mathbf{59}\cdots\cdots(\textbf{答え})\end{aligned}$$

（iii）

$$\begin{aligned}
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta) \\
&= \frac{1}{8}\left(-11+\sqrt{5}\right)^3-3\cdot\left(\frac{-11+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(11+\sqrt{5}\right)+3\cdot\left(\frac{11+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(11+\sqrt{5}+11-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{8}\left\{\left(\sqrt{5}-11\right)^3-\left(\sqrt{5}+11\right)^3\right\} \\
&= 33+\frac{1}{8}\left(-11^3\cdot 2-3\cdot 5\cdot 11\times 2+3\sqrt{5}\cdot 11^2-3\sqrt{5}\cdot 11^2\right) \\
&= 33-\frac{2\cdot 11}{8}(121+15) \\
&= 33-\frac{11}{4}\cdot 136 \\
&= 33-11\cdot 34 \\
&= -374+33 \\
&= \mathbf{-341}\cdots\cdots\text{(答え)}
\end{aligned}$$