▶ 問題 ◀

（1） $f(x)=e^{x+1}$, $g(x)=e^{-2x}$とするとき, $h(f(x))=g(x)$ なる関数 $h(x)$ を求める.

（2） 極方程式 $r^2-4r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+3=0$ を満たす円の方程式を求める.

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$を求める.

解説

（1） 関数の中に関数が入っているのが嫌なので， とりあえず $\boldsymbol{f(x)=t}$ と置いてみることにしました. そうすると,

$t=e^{x+1}\Longleftrightarrow x=\log\dfrac{t}{e}=\log t-1$ となる. これがポイントかなあと.

（2） 授業で言った通り, 極座標と直交座標系を繋ぐのは, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\cos\theta}\\ \boldsymbol{\sin\theta}\end{pmatrix}$…(∗)という関係です. これを, 少し変形して遊んでみましょう.

(∗)の両辺を大きさをとって, 2 乗してみると,

$$\left|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right|=r\left|\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right|$$

$\Longleftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$\Longleftrightarrow\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$ という関係式が導かれます.(☞ お風呂入っている時に思いつきました ☺)

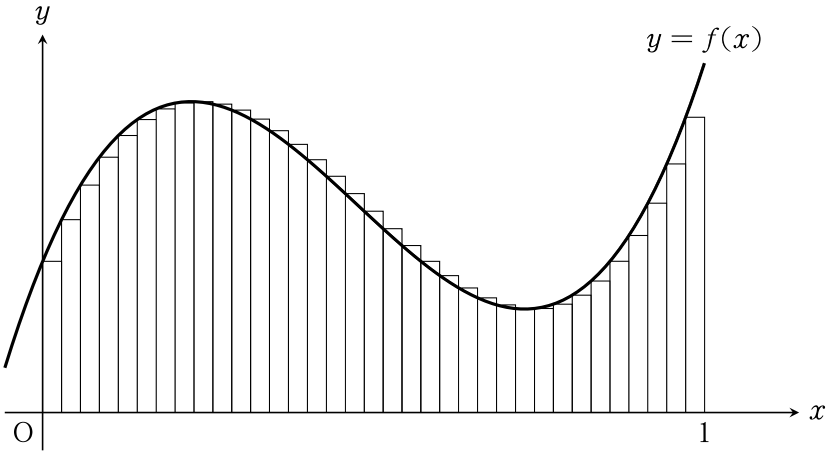
これで， 問題で与えられた極方程式を直行座標系の言葉で言い換えることができますね!

これは， 教科書では「暗記せよ」と書かれていますが， 考えれば当たり前ですね.

（3） 授業で言った通り， 区分求積法です. 定義式は次の通り.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

「なぜ， 無限級数の二つの式がイコールになるのか?」という疑問は下の図を見れば分かるはず.



$$\int_0^1 f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

つまり，長方形の縦の長さを左と右のどちらで始めるかによって「$\sum$のスタート」が変わるということです．

分からなかったら鈴木先生に聞いてみてください．(心先生，よろしくお願いします．)

従って，次のような変形をすれば区分求積の形に持っていくことができます．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-4}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}
\end{aligned}$$

これで晴れて，区分求積法に帰着することができました．(☞ これもお風呂で思いつきました．)

それでは，早速解答を書いてみます．

解

（**1**）　$t=f(x)$ とおくと, $t>0$ に注意して,

$$\begin{aligned} t=e^{x+1} &\iff e^x=\frac{t}{e} \\ &\iff x=\log t-1 \end{aligned}$$

$\therefore\quad h(t)=e^{-2\log t+2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{h(x)=e^{-2\log x+2}}$……(答え)

➾注 これしか僕は思いつきませんでした. 解答と違っていたらすいません.

☞ その時は, 心先生お願いします.

（ほかの問題は, 自信がある 😊）

（**2**）　まず, $r^2-4r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+3=0$…① を x, y で表す.

《注》直交座標系と極座標系を繋ぐ者（再掲）

$\boxed{解説}$ にも載せましたが, 一応もう一回.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} \\ \boldsymbol{\sin\theta} \end{pmatrix}$$

この関係式から, $\boldsymbol{r^2=x^2+y^2}$ の式も導くことができます.

$$\begin{aligned} ① &\iff x^2+y^2-4\left\{r\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}+3=0 \\ &\iff x^2+y^2-2r\sin\theta-2\sqrt{3}r\cos\theta+3=0 \\ &\iff x^2+y^2-2y-2\sqrt{3}x+3=0 \\ &\iff \left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2-3-1+3=0 \\ &\iff \left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2=1 \\ &\iff \textbf{中心 }(\sqrt{3},1)\textbf{, 半径 1 の円.}\text{……(答え)} \end{aligned}$$

（3）の解答は次ページ

（3）

$$\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-4}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{0}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$ と変形することができる．

従って，与えられた極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$ とかける．

よって，$x=\sin\theta$ と置くことにより, $dx=\cos\theta d\theta$ であり

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

なので，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$ ……**(答え)**

不明点があれば鈴木先生へ!(僕がいれば僕でも可)