《矩阵特征值计算》 24

- 求矩阵按模最大特征值的乘幂法
- 求矩阵按模最小特征值的反幂法

§1 乘幂法

设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零列向量x使关系式：

$$Ax=\lambda x,$$

则称数λ为方阵A的特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量。

特征值λ计算方法(行列式)：

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

上述称为A的特征多项式，零根即为A的特征值。

BUT! 在n非常大时，直接求解特征值及其对应的特征向量开销会很大(因为行列式计算量巨大)。因此可以用乘幂法解其数值！

乘幂法是适用于求矩阵按模最大特征值及相应特征向量的算法.

设A是n阶矩阵, 其n个特征值按模从大到小排序为

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

其中$u_1, u_2, \ldots, u_n$为n个线性无关的特征向量

1) 首先考虑 λ_1 为单特征根情况：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

任意取定初始向量x_0

$$x_0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \quad (a_1 \neq 0)$$

建立迭代公式： $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1}$

$$x_1 = Ax_0 = a_1 Au_1 + a_2 Au_2 + \cdots + a_n Au_n$$

$$= a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + a_n \lambda_n u_n$$

$$x_2 = Ax_1 = A^2 x_0 = a_1 \lambda_1^2 u_1 + a_2 \lambda_2^2 u_2 + \cdots + a_n \lambda_n^2 u_n$$

$$\vdots$$

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0 = a_1 \lambda_1^k u_1 + a_2 \lambda_2^k u_2 + \cdots + a_n \lambda_n^k u_n$$

$$= \lambda_1^k [a_1 u_1 + a_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k u_2 + \cdots + a_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k u_n]$$

$$x_{k+1} = Ax_k = A^{k+1}x_0 = a_1\lambda_1^{k+1}u_1 + a_2\lambda_2^{k+1}u_2 + \cdots + a_n\lambda_n^{k+1}u_n$$
$$= \lambda_1^{k+1}[a_1u_1 + a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1}u_2 + \cdots + a_n(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^{k+1}u_n]$$

由上式有：

特征值 λ_1 为(近似)： $\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda_1$

对应的特征向量为(近似)： x_k

特别地，因为 $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \quad i = 2, \cdots, n$

$\boxed{\text{故当}k\to\infty\text{时，}\; x_k \to \lambda_1^k a_1 u_1.}$

因此，特征值λ_1的近似特征向量x_k为上式！

BUT! 有一严重缺点: 当 $|\lambda_1|>1$，u_1中不为零的分量将随k的增大而无限增大，计算机就可能出现上溢;

当 $|\lambda_1|<1$，u_1中不为零的分量将随k的增大而无限趋于0，计算机就可能出现下溢.

解决方法：可按规范法计算方式，每步先对向量 x_k 进行规范化处理：

迭代格式改为:

$$z_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \qquad x_{k+1} = Az_k$$

$$k = 0,1,2,\cdots$$

乘幂法求矩阵的特征值及特征向量的方法可归纳如下：

输入：矩阵A, 初始向量 x_0, 误差限 e, 最大迭代次数 N, $k \leftarrow 0$, $\lambda_0 = 0$

1) 规范化计算得到：

$$z_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$$

2) 递归计算：

$$x_{k+1} = \mathrm{A} z_k$$

3) 计算最大值：$\lambda = \|x_{k+1}\|_\infty$ (即：$\lambda = \max\{x_{k+1}\}$)

4) 如果 $|\lambda - \lambda_0| < e$, 则输出：

λ (特征值), z_{k+1} 或 x_{k+1}(特征向量)

最终计算得λ_1

5) 否则($|\lambda - \lambda_0| >= e$):

如果$k<N$, 则$k \leftarrow k+1$, $\lambda_0 \leftarrow \lambda$;

转1)

同理：计算其他特征值λ_i, i=1, 2, 3, …, n:

在A中去掉主特征值λ_1对应向量的元素:

$$A=A-\lambda_1 z_{k+1} z_{k+1}^T,$$

接下来再找下一个特征值λ_2 (类似计算)。

2） 考虑 λ_1 不为单特征根情况(复根)，之前结论依然成立：

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$$

此时有：

特征值 λ_1 依然为(近似)：
$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lambda_1$$

对应的特征向量为(近似)：
$$x_k=\lambda_1^k(a_1u_1+a_2u_2)$$

例：用乘幂法求矩阵A的按模最大特征值和相应特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解：初值 $x_0 = (0, 0, 1)^T$, $e = 10^{-3}$, $\lambda_0=0$

→ $z_0 = x_0 = (0, 0, 1)^T$

$x_1 = Az_0 = (0, -1, 2)^T$ → $\lambda=2$, 判断$|\lambda-\lambda_0|<e$??

No: $\lambda_0 = \lambda$

Yes: 输出λ 和特征向量z_1或x_1

$z_1 = x_1/\max(|x_1|) = (0, -0.5, 1)^T$

$x_2 = Az_1 = (0.5, -2, 2.5)^T$, → 判断窗口

$z_2 = x_2/\max(|x_2|) = (0.2, -0.8, 1)^T$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} x_8 = Az_7 = (2.7650948, -2.9981848, 2.9990924)^T, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow \lambda_0 = 2.9990924 \\ z_8 = x_8/\max(x_8) = (0.9119772, -0.99969073, 1)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = Az_8 = (2.8436517, -2.9993946, 2.9996973)^T, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow \lambda = 2.9996973 \\ z_9 = x_9/\max(|x_9|) \end{cases}$$

此时：$|\lambda - \lambda_0| = |\underline{2.9996973}-2.9990924| = 0.0006049 < e$

故第一个特征值：$\lambda_1 \approx 2.9996973$

特征向量：$u_1 \approx x_9 = (2.8436517, -2.9993946, 2.9996973)^T$

事实上：

A的特征值：$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 1$

与λ_1的特征向量为：$(1, -1, 1)^T$

而乘幂法求得的特征值：

$$\lambda_1 \approx 2.9996973$$

特征向量：

$$u_1 \approx (2.8436517, -2.9993946, 2.9996973)^T$$

§2 反幂法

反幂法目的:

求A按模最小特征值及相应的特征向量（有时候想先知道最小特征值）

若A非奇异, 且$Ax=\lambda x$, 则$A^{-1}x=\lambda^{-1}x$

(可记为$\lambda^{-1}=a$, $A^{-1}x=ax$)

注意：

1) 求A按模最小特征值，即是求A^{-1}的按模最大特征值和特征向量

2) 所以可以按照乘幂法来实现反幂法

3) 乘幂法和反幂法区别：

乘幂法：$x_{k+1}=Az_k$

反幂法：$x_{k+1}=A^{-1}z_k$

所以计算x_{k+1}时变为$Ax_{k+1}=z_k$, 而求解此方程用LU分解最为简单，所以反幂法中涉及LU分解

反幂法求矩阵的特征值及特征向量的方法可归纳如下：

输入：矩阵A, 初始向量x_0, 误差限e, 最大迭代次数N, k←0, $\lambda_0 = 0$

1) 规范化计算得到：

$$z_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$$

2) 对A作三角分解A=LU

即: $x_{k+1} = A^{-1} z_k$(与乘幂法不同)

3) 解方程组: $\boxed{LUx_{k+1} = z_k}$, (两步：$Lw_k = z_k$, $Ux_{k+1} = w_k$) (对比乘幂法$x_{k+1} = Az_k$)

4) 计算最大值：$a = \|x_{k+1}\|_\infty$ (即 a = max{|x_{k+1}|} 为A^{-1}的最大特征值近似)

5) 如果 $|a-\lambda_0| < e$, 则输出：

$\lambda=1/a$ (特征值), z_{k+1} 或 x_{k+1} (对应的特征向量)

6) 否则 $|a-\lambda_0| >= e$:

如果: $k<N$, 则 $k \leftarrow k+1$, $\lambda_0 \leftarrow a$;

转1)