MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Gabriel Haruo Hanai Takeuchi **Número USP: 13671636**

Assinatura

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: 70 **Data: 03/12/2022**

SOLUÇÃO

(i) Vamos continuar o processo de escalonamento da matriz.
A última matriz do exemplo 7.3.3 é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2.5 & 0 & -10.5 & -2 \end{bmatrix}$$

Vamos multiplicar a linha 0 por 1.25 e somá-la com a linha 3. A matriz associada a essa transformação é a matriz M_4 tal que

$$M_4 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2.5 & 0 & -10.5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 8 \end{bmatrix} \implies M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.25 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos multiplicar a linha 2 da matriz transformada por -1.25 e somá-la com a linha 3. A matriz associada a essa transformação é a matriz M_5 tal que

$$M_5 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 10.5 \end{bmatrix} \implies M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Conseguimos a matriz desejada.
(ii) A última matriz-transformação no exemplo 7.3.3 é a matriz M' tal que

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após isso, construímos as matrizes M_4 e M_5 que completam o escalonamento. Perceba que ambas são matrizes inversíveis, logo a composição $M_5\, M_4\, M'$ também é inversível. Isso implica que a multiplicação entre a composição acima e a matriz A do exemplo têm o mesmo espaço das colunas.

Portanto, $M = M_5\, M_4\, M'$ e $MA = U$. Segue a matriz M abaixo (usei calculadora online de multiplicação de matrizes, o cálculo deve estar certo - acho).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -2 & 1 & 0 \\ 0.625 & 0 & -1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) A matriz U' é a junção da matriz escalonada que obtivemos no item (ii) ao lado da matriz transformação M, também de (ii).

$$U' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 & 0.5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 10.5 & 0.625 & 0 & -1.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $B = M$.

(iv) Não tenho a menor ideia de como provar formalmente, mas tentei no papel e deu certo. Algumas observações que tive:

Seja a matriz M_1 aquela primeira transformação de multiplicar a linha 1 por -2 e somar o resultado à linha 2.

$$M_1 A' = M_1 \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 A & M_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 A & M_1 \end{bmatrix}$$

Seja M_2 a segunda transformação.

$$M_2 \begin{bmatrix} M_1 A & M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 M_1 A & M_2 M_1 I \end{bmatrix}$$

Eventualmente, temos

$$\begin{bmatrix} M_k \ldots M_1 A & M_k \ldots M_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MA & MI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & M \end{bmatrix}$$

Tudo isso se deve à essa tal propriedade de multiplicação de matrizes aninhadas que

$$M \begin{bmatrix} N & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MN & MO \end{bmatrix}$$