MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Gabriel Haruo Hanai Takeuchi **Número USP: 13671636**

Assinatura

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E11 **Data: 01/09/2022**

SOLUÇÃO

(i) Solução por indução em n.

Base $p(1)$**:** Trivial. $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}$ já que $\beta_1, a_{11} \in \mathbb{R}$.

$$a_{11}\hat{x}_1 = \beta_1$$
$$\hat{x}_1 = \beta_1/a_{11}$$

Passo $p(n) \implies p(n+1)$**:**

Por hipótese, o sistema é triangular, então suponha um com $n+1$ linhas, tal que $a_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + a_{13}\hat{x}_3 + \ldots + a_{1n}\hat{x}_n &= \beta_1 \\ a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 + \ldots + a_{2n}\hat{x}_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}\hat{x}_n + a_{n(n+1)}\hat{x}_{n+1} &= \beta_n \\ a_{(n+1)(n+1)}\hat{x}_{n+1} &= \beta_{n+1} \end{aligned}$$

Sabemos resolver um sistema com n linhas, e portanto, resolver da linha 2 até $n+1$. Facilmente descobrimos $\hat{x}_{n+1}$, e consequentemente, $\hat{x}_n, \ldots, \hat{x}_2$. Agora, resta a primeira linha para ser resolvida.

$$a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + a_{13}\hat{x}_3 + \ldots + a_{1n}\hat{x}_n = \beta_1$$

Felizmente, temos os valores de $\hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$, e substituindo, descobrimos $\hat{x}_1$. É possível afirmar que todos os $\hat{x}_i \in \mathbb{R}$, já que $a_i, \beta_i, \hat{x}_{n+1}, \ldots, \hat{x}_n \in \mathbb{R}$. Logo, temos $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, como queríamos.

(ii) Solução por indução em n.
Base $p(1)$**:** Suponha $\hat{x}, \hat{y}$.

$$\begin{aligned} a_{11}\hat{x}_1 &= \beta_1 \\ \hat{x}_1 &= \beta_1/a_{11} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{11}\hat{y}_1 &= \beta_1 \\ \hat{y}_1 &= \beta_1/a_{11} \end{aligned}$$

Temos $\hat{x}_n = \hat{y}_n$, como queríamos.

Passo $p(n) \implies p(n+1)$**:** Suponha $\hat{x}, \hat{y}$. Por hipótese, temos 2 sistemas triangulares:

$$\begin{aligned} a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + a_{13}\hat{x}_3 + \ldots + a_{1n}\hat{x}_n &= \beta_1 \\ a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 + \ldots + a_{2n}\hat{x}_n \beta_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}\hat{x}_n + a_{n(n+1)}\hat{x}_{n+1} &= \beta_n \\ a_{(n+1)(n+1)}\hat{x}_{n+1} &= \beta_{n+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{11}\hat{y}_1 + a_{12}\hat{y}_2 + a_{13}\hat{y}_3 + \ldots + a_{1n}\hat{y}_n &= \beta_1 \\ a_{22}\hat{y}_2 + a_{23}\hat{y}_3 + \ldots + a_{2n}\hat{y}_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}\hat{y}_n + a_{n(n+1)}\hat{y}_{n+1} &= \beta_n \\ a_{(n+1)(n+1)}\hat{y}_{n+1} &= \beta_{n+1} \end{aligned}$$

O procedimento agora é análogo ao item (i): resolvemos das linhas 2 até n+1 e descobrimos que $(\hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) = (\hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$. Por substituição, achamos $\hat{x}_1$ e $\hat{y}_1$, e logicamente, temos que $\hat{x}_1 = \hat{y}_1$. Portanto, $\hat{x}$ é único.

(iii) Se $\beta_k \neq \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}\hat{x}_i$, o sistema não admite solução. Isto pois:

$$a_{kk}\hat{x}_k + a_{k(k+1)}\hat{x}_{k+1} + \ldots + a_{kn}\hat{x}_n = \beta_k$$

Por hipótese, $a_{kk} = 0$, então:

$$0\hat{x}_k + a_{k(k+1)}\hat{x}_{k+1} + \ldots + a_{kn}\hat{x}_n = \beta_k$$

Então, basta $\beta_k \neq \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}\hat{x}_i$ para que não exista $\hat{x}_k$ que satisfaça a equação e, consequentemente, para que o sistema não admita solução.

(iv) A argumentação será semelhante à do item anterior.
Caso $\beta_k = \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}\hat{x}_i$, o sistema terá infinitas soluções. Isto pois:

$$0\hat{x}_k + a_{k(k+1)}\hat{x}_{k+1} + \ldots + a_{kn}\hat{x}_n = \beta_k$$

Então, se $\beta_k = \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}\hat{x}_i$, para qualquer que seja $\hat{x}_k$, o sistema será possível.