

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Gabriel Haruo Hanai Takeuchi

Número USP: 13671636

Assinatura

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E33

Data: 28/09/22

SOLUÇÃO

By hypothesis, f is a linear function and $g = f^{-1}$ is the inverse function of f . Therefore, $f(u) = v \iff g(v) = u$ for any $u \in U$ and $v \in V$.

For g to be a linear function, it must satisfy two properties:

$$g(\alpha v) = \alpha g(v) \tag{1}$$

$$g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2) \tag{2}$$

Proof of (1):

$$\begin{aligned} g(\alpha v) &= g(\alpha f(u)) && \text{(by hypothesis)} \\ &= g(f(\alpha(u))) && \text{(by linearity of } f) \\ &= \alpha u && \text{(by definition of inverse function)} \\ &= \alpha g(v) && \text{(by hypothesis)} \end{aligned}$$

Proof of (2):

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2) &= g(f(u_1) + f(u_2)) && \text{(by hypothesis)} \\ &= g(f(u_1 + u_2)) && \text{(by linearity of } f) \\ &= u_1 + u_2 && \text{(by definition of inverse function)} \\ &= g(v_1) + g(v_2) && \text{(by hypothesis)} \end{aligned}$$

■