Relatório - EP1 de MAC0121

Autor: Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Setembro, 2022

1 Aspectos matemáticos e computacionais

1.1 Números da forma 2^n

Os números da forma $2^n : n \in \mathbb{N}$, ou seja, as 'potências de 2' respeitam um padrão facilmente reconhecível: a quantidade necessária de passos equivale ao expoente n do número na forma 2^n.

Por exemplo, $16 = 2^4$. Seguindo a conjectura:

- 16 é par, então $f(16) = 16/2 = 8$;
- 8 é par, então $f(8) = 8/2 = 4$;
- 4 é par, então $f(4) = 4/2 = 2$;
- 2 é par, então $f(2) = 2/2 = 1$;

Observa-se que, de fato, foram necessários 4 passos para convergir a 1.

Prova rápida por indução em n
Base: Seja n = 0. Aplicando a função, $f(2^n) = f(2^0) = f(1)$, a qual é estacionária. De fato, $passos(2^0) = 0$.
Seja n = 1. Aplicando a função, $f(2^1) = 2/2 = 1$. Aplicando novamente, $f(f(2^1)) = f(1)$, estacionária. De fato, $passos(2^1) = 1$.
Passo: Suponha 2^{n+1}. Aplicando a função, $f(2^{n+1}) = 2^{n+1}/2 = 2^n$, o que adiciona 1 passo na contagem. Agora temos 2^n que, por hipótese, necessita n passos. Portanto, temos $passos(2^{n+1}) = 1+passos(2^n) = 1+n$, como queríamos.

Como se trata de um intervalo ordenado, então é garantido que 2^n deverá ser processado antes de 2^{n+1}. Dessa forma, tendo n como uma potência de 2, sempre é possível pré-calcular quantos passos a próxima potência de 2 dará. No caso, sempre um passo a mais.

Complementando o exemplo anterior, para $16 = 2^4$ são necessários 4 passos, e portanto, para $32 = 2^5$ são necessários 5 passos.

Com isso, economiza-se um pouco de poder de processamento.

1.2 Pequenas observações estatísticas

Esta subseção considera os dados obtidos no teste da conjectura para o intervalo [1, 100.000], coletados e impressos em dois arquivos *.csv* pelo programa auxiliar *printcsv.c* e processados em *Python - Jupyter Notebook* com o auxílio das bibliotecas *pandas* e *matplotlib*. As interpretações gráficas estão localizadas no final do documento.

1.2.1 Números versus Passos

A reação imediata quando se analisa os dados dessa conjectura é comparar quantos passos cada número deu. É possível observar na Figura 1 (página 3) que, nesse intervalo, a quantidade de passos inicia em 1 e se limita em cerca de 120. Já nas Figuras 2 e 3, se mantêm entre 50 e 225.

O aspecto mais interessante é a alternância entre intervalos com saltos de grande amplitude e intervalos em que o número de passos é constante, dando destaque às Figuras 2 e 3.

1.2.2 Passos versus Frequência

Outra análise um pouco menos óbvia é projetar quantos números deram tantos passos. Para o intervalo [0, 100.000] usado, não há número que deu mais de 350 passos.

Na Figura 4, nota-se uma distribuição aparentemente exponencial no intervalo [0, 25], até que iniciam-se as flutuações, dando destaque ao pico de 1424 números que deram 63 passos. Após essa turbulência, a oscilação tende a abaixar, estacionando-se em 1 número que deu 350 passos.

2 Plots

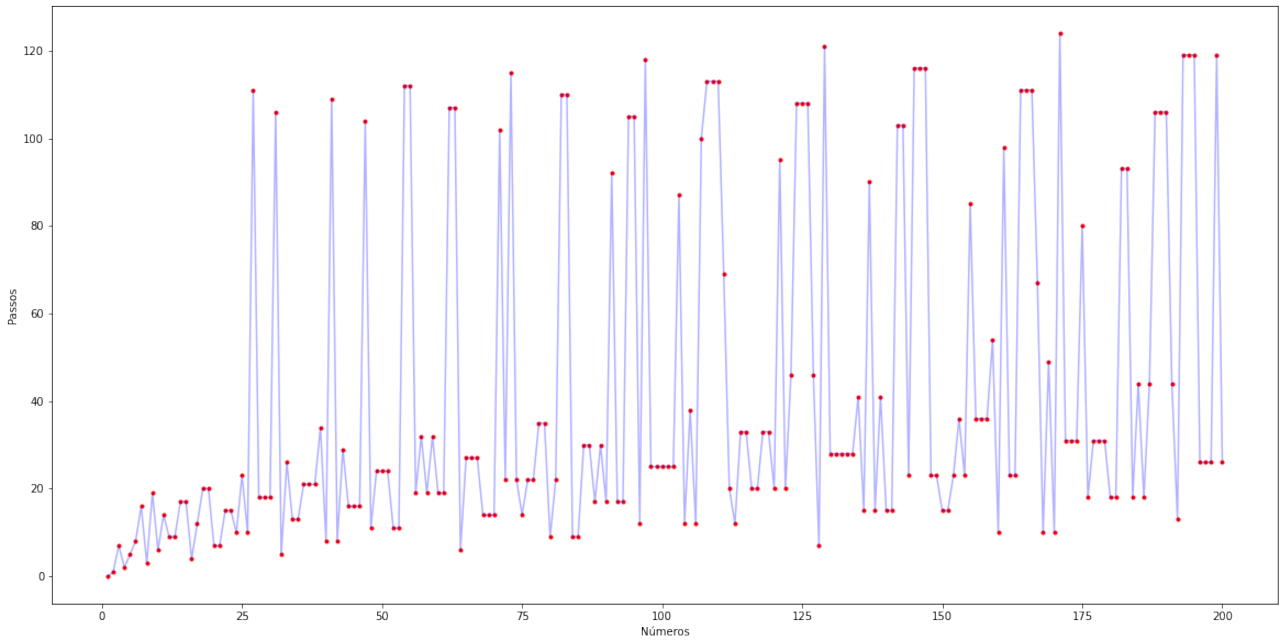

Figura 1: Gráfico de números versus passos no intervalo [1, 200]

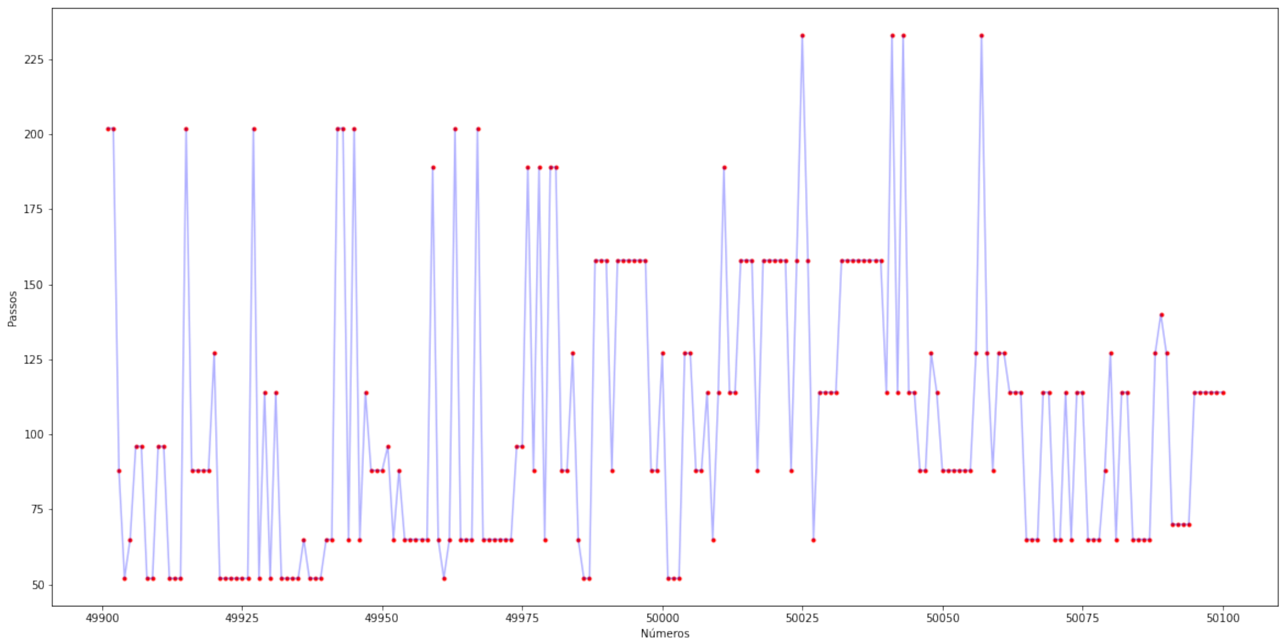

Figura 2: Gráfico de números versus passos no intervalo [49900, 50100]

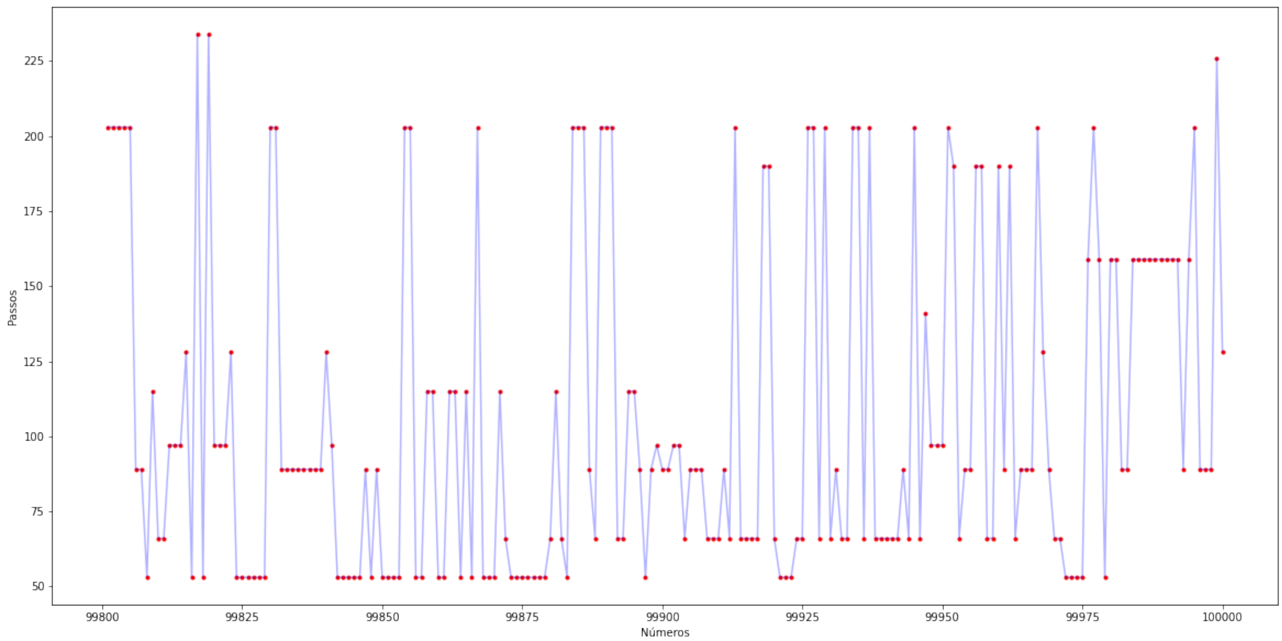

Figura 3: Gráfico de números versus passos no intervalo [99800, 100000]

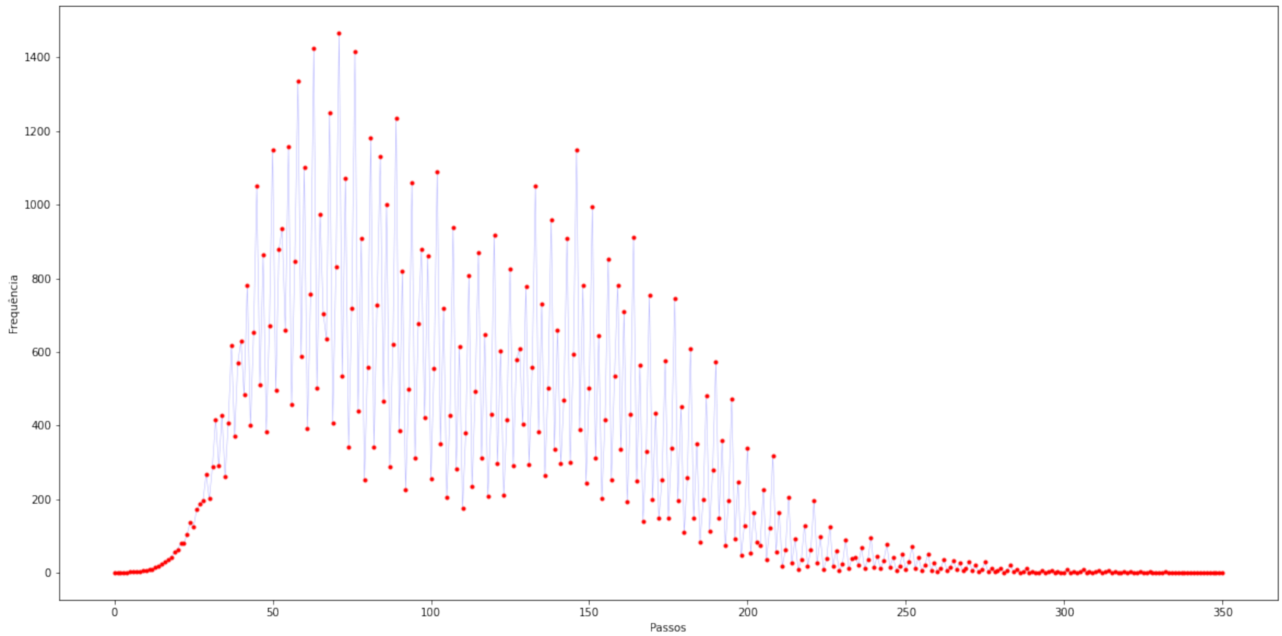

Figura 4: Gráfico de passos versus frequência no intervalo [1, 350]