ÁLGEBRA LINEAR I

2º SEMESTRE DE 2022

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA A P2

Estes são uns exercícios de revisão para a segunda prova. As perguntas nos *review questions* de **PNK** (Capítulos 6, 7, 8, 9 e 12) devem também ser revisados.

Q1 Prove o seguinte fato: não há $n+1$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{F}^n$. Procure dar uma prova simples e completa, que dependa o menos possível de fatos provados na disciplina (ou inclua a prova dos fatos que você usar, para sua prova ficar completa).

Q2 Prove o seguinte fato: se M é uma matriz quadrada $n \times n$ com posto n, então M é inversível. Procure dar uma prova simples e completa, que dependa o menos possível de fatos provados na disciplina (ou inclua a prova dos fatos que você usar, para sua prova ficar completa).

Q3 Seja $U \in \mathbb{F}^{m\times n}$ uma matriz na forma escalonada, com m_1 linhas não-nulas e m_2 linhas nulas (naturalmente, $m = m_1 + m_2$). Quantas *colunas* linearmente independentes tem a matriz U?

Q4 Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é verdadeira ou não. Em cada caso, justifique sua resposta.

(*i*) Seja $U \subset \mathbb{F}^n$ um espaço vetorial. Vale que $\mathbb{F}^n = U \oplus U^\circ$.

(*ii*) Seja $U \subset \mathbb{F}^n$ um espaço vetorial. Vale que $\dim U + \dim U^\circ = n$.

(*iii*) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Vale que $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.

(*iv*) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Vale que $\dim U + \dim U^\perp = n$.

Q5 Suponha que as matrizes $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ são tais $AB = I_m$, onde $I_m \in \mathbb{F}^{m\times m}$ é a matriz identidade.

(*i*) Prove que as colunas de B são linearmente independentes.

(*ii*) Prove que as colunas de A geram $\mathbb{F}^m$.

Q6 Seja M uma matriz tal que $M^\top M$ é a matriz identidade. É verdade que $MM^\top$ é a matriz identidade? Por quê? Há alguma hipótese simples sobre M que garanta a resposta positiva?

Q7 Fixe $b_1 \in \mathrm{GF}(2)$ e $b_2 \in \mathrm{GF}(2)$ e considere 'bitstrings' $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6) \in \mathrm{GF}(2)^6$. Tais bitstrings $\mathbf{x}$ são chamados do tipo (b_1, b_2) se $x_1 + x_3 + x_5 = b_1$ e $x_2 + x_4 + x_6 = b_2$. Quantos bitstrings do tipo (b_1, b_2) existem?

Data: 2022/12/8, 6:14pm

Q8 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(i) Prove que A é inversível como uma matriz real.

(ii) Prove que A não é inversível como uma matriz sobre GF(2).

Q9 Considere a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{GF}(2)^{n \times n}$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

(i) Prove que A é inversível no caso em que n é par.

(ii) Prove que A não é inversível no caso em que n é ímpar.

(iii) Prove que A tem posto $n - 1$ no caso em que n é ímpar.

Q10 Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Monte a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

onde $I_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Suponha que executamos operações de escalonamento, e conseguimos transformar A' na matriz

$$\begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Note que não apenas escalonamos A, mas prosseguimos o processo até obter a identidade I_n (é fácil ver que isso é possível de se fazer caso obtenhamos no processo de escalonamento de A uma matriz U que tem todos seus elementos diagonais não nulos). Prove que B é a inversa de A. [*Observação.* Esse fato sugere um algoritmo para se inverter A.]

Q11 Suponha que executamos o algoritmo sugerido na Questão **Q10** para inverter uma matriz A, mas a matriz escalonada que obtemos no meio do processo é tal que há zeros na diagonal. Prove que A não é inversível.

Q12 Considere a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sobre GF(2), onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Prove que esta equação não tem solução, considerando o vetor $\mathbf{y} = [1\ 0\ 1\ 1]^\top \in \mathrm{GF}(2)^4$. [*Sugestão.* Multiplique por $\mathbf{y}^\top$.]

Q13 Considere a equação $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $U \in \mathbb{F}^{m \times n}$ é uma matriz escalonada e $\mathbf{b} = [b_1 \ \dots \ b_m]^\top \in \mathbb{F}^m$. Suponha que U tenha m_1 linhas não-nulas e m_2 linhas nulas (naturalmente $m = m_1 + m_2$). Prove que $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite uma solução se e só se $b_{m_1+1} = \cdots = b_m = 0$.

Q14 Considere a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$. Considere as duas afirmações abaixo:

(A) A equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite solução (isto é, existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}^n$ tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$).

(B) Existe $\mathbf{y} \in \mathbb{F}^m$ tal que $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^\top\mathbf{b} \neq 0$.

Prove os seguintes dois fatos:

(*i*) As afirmações (A) e (B) não podem valer simultaneamente.

(*ii*) Necessariamente, ou a afirmação (A) vale ou a afirmação (B) vale.

Q15 Sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ vetores dois a dois ortogonais e seja $\mathbf{u} = \sum_{1\leq i\leq n} \mathbf{u}_i$. Prove que

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \|\mathbf{u}_i\|^2. \tag{6}$$

Q16 Seja

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

e sejam $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_4 \in \mathbb{R}^4$ as colunas de H. Assim $H = [\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_4]$. Seja $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ e $\mathbf{e}_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^\top \in \mathbb{R}^4$. Encontre a projeção ortogonal *sobre* V de $\mathbf{e}_1$ e a projeção ortogonal *a* V de $\mathbf{e}_1$. Isto é, encontre $\mathbf{e}_1^{\|V}$ e $\mathbf{e}_1^{\perp V}$ de forma que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{\|V} + \mathbf{e}_1^{\perp V}$, $\mathbf{e}_1^{\|V} \in V$ e $\langle \mathbf{e}_1^{\perp V}, \mathbf{v}\rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Q17 Sejam $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}\rangle = 0$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}\rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Prove que $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$.

Q18 Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Queremos encontrar $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \tag{8}$$

(*i*) Diga por que podemos supor que as colunas de A são linearmente independentes. Nos itens a seguir, supomos que as colunas de A são linearmente independentes.

(*ii*) Prove que $A^\top A$ é inversível.

(*iii*) Prove que $\hat{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1}A^\top\mathbf{b}$ satisfaz (8).

Q19 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Defina $\mathbf{u}_t$ $(t \geq 1)$ pondo $\mathbf{u}_t = A\mathbf{u}_{t-1}$. Defina F_t $(t \geq 0)$ pondo $F_t = t$ para $t = 0$ e $t = 1$ e $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$ para $t \geq 2$.

(*i*) Prove que $\mathbf{u}_t = [F_t\ \ F_{t-1}]^\top$ para todo $t \geq 1$.

(*ii*) Deduza que, para todo $t \geq 0$,

$$F_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^t - \varphi_2^t\right), \tag{10}$$

onde $\varphi_1 = (1+\sqrt{5})/2$ e $\varphi_2 = (1-\sqrt{5})/2$.