Questão 1

Resolução I

Suponha que haja $n+1$ vetores LI em $\mathbb{F}^n$ Então, a única maneira de expressar o vetor 0 como combinação linear $\sum_{1\leq i\leq n+1} \alpha_i v_i = 0$ é se todo $\alpha_i = 0$.
Suponha uma matriz $M \in \mathbb{F}^{n\times n+1}$ tal que as colunas de M são os $n+1$ vetores v_i, $1 \leq i \leq n+1$ do enunciado. Vamos provar que o espaço nulo da equação abaixo não é trivial.

$$M \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$

Para isso, usaremos o Rank-Nullity Theorem.
A matrix M pode ser associada à função linear $f : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}^{n+1} &= \dim \mathrm{Null}\ M + \dim \mathrm{Col}\ M \\ n+1 &= \text{nullity}\ M + \dim \mathrm{Row}\ M \\ n+1 &= \text{nullity}\ M + n && [\text{ dim Row M é no máximo n }] \\ \text{nullity}\ M &= 1 \end{aligned}$$

Provamos que o espaço nulo de M não é trivial. Logo, é impossível que os v_i sejam linearmente independentes.

Resolução II

É conhecido o fato de que toda a base B para $\mathbb{F}^n$ tem cardinalidade n. Logo, todo vetor de $\mathbb{F}^n$ pode ser representado pela combinação linear de certos n vetores linearmente independentes. Em suma, não há mais que n vetores linearmente independentes em $\mathbb{F}^n$.

Questão 2

Por hipótese, $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ é uma matriz quadrada com rank $M = n$.
Pelo Rank-Nullity Theorem,

$$\begin{aligned} n &= \text{nullity}\ M + \text{rank}\ M \\ n &= \text{nullity}\ M + n \\ \text{nullity}\ M &= 0 \end{aligned}$$

Associe a matriz M com uma função linear $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$.
Pelo Linear-Function Invertibility Theorem, f é inversível sse $\dim \mathrm{Ker}\ f = 0$ e $\dim \mathbb{F}^n = \dim \mathbb{F}^n$.
Já temos que nullity $M = 0$, o que é equivalente a $\dim \mathrm{Ker}\ f = 0$ (critério de injetividade). Também temos que $\dim \mathbb{F}^n = \dim \mathbb{F}^n = n$ (critério de sobrejetividade).
Logo, f é de fato inversível, e consequentemente M é uma matriz inversível.

Questão 3

Seja a matriz escalonada $U \in \mathbb{F}^{m\times n}$ com m_1 linhas não-nulas e m_2 linhas nulas.
Sabendo do fato de que as linhas de uma matriz escalonada formam uma **base** para o espaço das colunas, então as linhas não-nulas de U são linearmente independentes e rank Col $U = m_1$
Pelo Rank Theorem, rank Row U = rank Col U; logo rank Row U = rank Col $U = m_1$.

obs.: O **rank** diz ”quantos vetores linearmente independentes o conjunto possui”.

Portanto, também há m_1 colunas linearmente independentes em U.

Questão 4

Item i

A afirmação é falsa.
Vamos prosseguir com um contra-exemplo em GF(2).
Seja $U \in \text{GF}(2)^2 = \{[0,0],[1,1]\}$ um espaço vetorial.
A condição primordial para que a soma direta $U \oplus U^0$ exista é se $U \cap U^0 = 0$, ou seja, se o único vetor em comum entre eles é o vetor nulo.
Por definição, o aniquilador de U é $U^0 = \{v \in \text{GF}(2)^2 : v \cdot u = 0, \forall u \in U\}$. Observe que $U^0 = \{[0,0],[1,1]\}$.
Logo, $U \cap U^0 = 0, [1,1]$ e a condição de soma direta não é satisfeita.

Item ii

Verdadeiro.
Considere as linhas de uma matriz A tal que seu espaço das colunas seja U. Note que U^0 é o espaço nulo de A. Isto pois

$$\begin{aligned} v \in \text{Null } A &\iff A_{1*}(\text{linha 1 de A}) \cdot v = 0, A_{*2} \cdot v = 0, ... \\ &\iff v \cdot a \ \forall \text{ linha de u} \\ &\iff v \in U^0 \end{aligned}$$

Note também que o rank A é a dimensão do espaço das colunas de A, e o espaço das colunas de A é U, como definimos anteriormente. Portanto, rank $A = \dim U$.
Usaremos o Rank-Nullity Theorem:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{F}^n &= \text{rank } A + \dim \text{Null } A \\ n &= \dim U + \dim U^0 \end{aligned}$$

Item iii

Verdadeiro.
Vamos mostrar que existe $U \oplus U^\perp$. A condição é se o único vetor em comum entre eles é o vetor nulo.
Suponha que w seja o único vetor em comum. Então $w \in U \oplus$ e $w \in U^\perp$.
Vamos definir $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$.
obs.: Grosseiramente, $U^\perp$ é o espaço vetorial dos vetores que são perpendiculares aos de U.
Note que se w pertence tanto ao espaço U quanto ao espaço $U^\perp$, então pela definição de $U^\perp$

$$\begin{aligned} w \cdot w &= 0 \\ \|w\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Observe que é necessário que $w = 0$.
Logo, foi provado que o único vetor em comum entre U e $U^\perp$ é de fato o vetor nulo. Portanto, existe tal soma direta.

Item iv

Verdadeiro.
Seguimos da mesma linha de raciocínio de Item ii.
Volte ao item ii e note que $U^\perp$ é equivalente ao Null A, sendo A a matriz com o espaço das colunas U.
Segue diretamente do Rank-Nullity Theorem que de fato

$$\dim U + \dim U^\perp = n$$

Questão 5

Sejam as matrizes enunciadas $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$.

Item i

Vamos provar por contradição. Suponha que B tenha colunas linearmente dependentes. Então é impossível que B tenha o espaço nulo trivial, logo nullity $B > 0$ (falta provar isso).
Pelo Rank-Nullity Theorem,

$$\begin{aligned} \text{rank } B + \text{nullity } B &= m \\ m + \text{nullity } B = m \text{ nullity } B &= 0 \end{aligned}$$

Temos uma contradição, pois afirmamos que a nulidade de B é maior que 0.
Logo, B tem colunas linearmente independentes.

Item ii

[...]

Questão 6

Nem sempre é verdade que $MM^\intercal$ também seja igual à matriz identidade.
Sabemos que $M^\intercal M = I$. Se também $MM^\intercal = I$, então M é inversível e a própria $M^\intercal$ seria sua inversa. Sabemos que uma matriz inversa é sempre quadrada, logo basta que M não seja quadrada para que $MM^\intercal \neq I$.
Para que $MM^\intercal = I_m$, então é necessário que M seja uma matriz ortonormal.

Questão 7

[...]

Questão 8

item i

Vamos provar que A é inversível como uma matriz real.
Observe que a matriz é quadrada e as colunas de A são linearmente independente. Logo, A é inversível.

Aprofundando: Seja $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ a função linear associada à matriz A. A função f_A é inversível sse $\dim \ker f_A = 0$ (injetividade) e $\dim \mathbb{R}^5 = \dim \mathbb{R}^5$ (dimensão do domínio é a dimensão do contradomínio, sobrejetividade).
É fácil de perceber que a dimensão do domínio é igual à dimensão do contradomínio. Falta mostrar que o espaço nulo de A é trivial.
Pelo Rank-Nullity Theorem,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^5 &= \dim \text{Col } A + \dim \text{Null } A \\ 5 &= 5 + \dim \text{Null } A \\ \text{nullity } A &= 0 \end{aligned}$$

Logo, A segue o critério de invertibilidade.

item ii

Vamos provar que A não é inversível como uma matriz sobre GF(2).
Observe que a matriz ainda é quadrada, mas as colunas de A não são linearmente independentes, pois a última coluna pode ser obtida pela soma de todas as outras.

Aprofundando: Seja $f_A : \mathrm{GF}(2)^5 \to \mathrm{GF}(2)^5$ a função linear associada à matriz A. A função f_A é inversível sse $\dim \ker f_A = 0$ (injetividade) e $\dim \mathrm{GF}(2)^5 = \dim \mathrm{GF}(2)^5$ (dimensão do domínio é a dimensão do contradomínio, sobrejetividade).
É fácil de perceber que a dimensão do domínio é igual à dimensão do contradomínio. Falta mostrar que o espaço nulo de A não é trivial.
Pelo Rank-Nullity Theorem,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{GF}(2)^5 &= \dim \mathrm{Col}\ A + \dim \mathrm{Null}\ A \\ 5 &= 4 + \dim \mathrm{Null}\ A \\ \text{nullity}\ A &= 1 \end{aligned}$$

Logo, A não é inversível.

Questão 9

Note que a matriz do enunciado é uma matriz quadrada com a diagonal principal composta de 0's e os outros espaços compostos por 1's.

Item i

Vamos provar que A é inversível quando n é par.
Lembremos o critério de inversibilidade:

$$\begin{aligned} \text{A matriz A é inversível} &\iff \text{A é quadrada e as colunas de A são LI} \\ &\iff \text{A é quadrada e rank } A = n \\ &\iff \text{A é quadrada e nullity } A = 0 \end{aligned}$$

O primeiro passo é perceber que a matriz é quadrada, então temos meio caminho andado. Resta provar que as colunas são linearmente independentes.

Item ii

Item iii