MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Gabriel Haruo Hanai Takeuchi **Número USP: 13671636**

Assinatura

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E55 **Data: 27/10/2022**

SOLUÇÃO

(i) Vamos provar que existe função linear requisitada. Precisamos que:

• Para qualquer $u \in \text{Span}(S)$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{F}$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Suponha um vetor $u \in \text{Span}(S)$ tal que $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Logo, é necessário que

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)) \\ &= f(\alpha\beta_1 v_1 + \cdots + \alpha\beta_n v_n) \\ &= f(\alpha\beta_1 v_1) + \cdots + f(\alpha\beta_n v_n) && \text{(pela linearidade de f)} \\ &= \alpha\beta_1 f(v_1) + \cdots + \alpha\beta_n f(v_n) && \text{(pela linearidade de f)} \\ &= \alpha\beta_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha\beta_n \varphi(v_n) \end{aligned}$$

• Para quaisquer $u, v \in \text{Span}(S)$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$

Suponha então $u, w \in \text{Span}(S)$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Logo, é necessário que

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= f((\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n) \\ &= f((\alpha_1 + \beta_1)v_1) + \cdots + f((\alpha_n + \beta_n)v_n) && \text{(pela linearidade de f)} \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)f(v_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)f(v_n) && \text{(pela linearidade de f)} \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\varphi(v_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\varphi(v_n) \end{aligned}$$

Como mostrado acima, f existe dessa forma.

(ii) Vamos provar que f é única. Portanto, suponha $g : \text{Span}(S) \to W$ linear tal que $g(v_i) = \Phi(v_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Observe que g segue a mesma construção de linearidade que f em (i).

• Para qualquer $u \in \text{Span}(S)$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{F}$, $g(\alpha u) = \alpha g(u)$
Suponha um vetor $u \in \text{Span}(S)$ tal que $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Logo, é necessário que

$$\begin{aligned}
g(\alpha u) &= g(\alpha(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)) \\
&= g(\alpha\beta_1 v_1 + \cdots + \alpha\beta_n v_n) \\
&= g(\alpha\beta_1 v_1) + \cdots + g(\alpha\beta_n v_n) && \text{(pela linearidade de g)} \\
&= \alpha\beta_1 g(v_1) + \cdots + \alpha\beta_n g(v_n) && \text{(pela linearidade de g)} \\
&= \alpha\beta_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha\beta_n \varphi(v_n) \\
&= \alpha\beta_1 f(v_1) + \cdots + \alpha\beta_n f(v_n) \\
&= f(\alpha u)
\end{aligned}$$

• Para quaisquer $u, v \in \text{Span}(S)$, $g(u + v) = g(u) + g(v)$
Suponha então $u, w \in \text{Span}(S)$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. Logo, é necessário que

$$\begin{aligned}
g(u + v) &= g(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\
&= g((\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n) \\
&= g((\alpha_1 + \beta_1)v_1) + \cdots + g((\alpha_n + \beta_n)v_n) && \text{(pela linearidade de g)} \\
&= (\alpha_1 + \beta_1)g(v_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)g(v_n) && \text{(pela linearidade de g)} \\
&= (\alpha_1 + \beta_1)\varphi(v_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\varphi(v_n) \\
&= (\alpha_1 + \beta_1)f(v_1) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)f(v_n) \\
&= f(u + v)
\end{aligned}$$

Logo, $f = g$. Então, f é uma função linear única.