# MAC0105 - Exercícios

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

## Exercício 11

Escreva a tabela verdade das seguintes proposições:

(a) $p \implies (q \vee r)$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \implies (q \vee r)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |

(b) $\neg q \implies (\neg q \vee r)$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q \vee r$ | $\neg q \implies (\neg q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

A sentença $\neg q \implies (\neg q \vee r)$ é uma tautologia.

(c) $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $p \implies q$ | $p \wedge (p \implies q)$ | $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |

A sentença $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$ é uma tautologia.

(d) $p \implies q$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $p \implies q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ |

(e) $\neg(p \implies q)$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $\neg(p \implies q)$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

(f) $\neg p \wedge q$

*Resposta:*

| $p$ | $q$ | $\neg p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

# Exercício 12

Prove os seguintes itens de forma direta ou utilizando a contrapositiva. Pense bem qual a melhor forma de provar cada item.

(a) Se $x$ é ímpar, então $x^2$ é ímpar.

*Proof.* Vamos provar diretamente.

Suponha que $x$ seja ímpar. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k + 1$. Multiplicando $x$ por $x$, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= (4k^2 + 4k) + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Observe que $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Note que $x^2$ é da forma $2m + 1$, sendo $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Logo, $x^2$ é da forma de um número ímpar, como queríamos.

$\square$

(b) Suponha que $x$ e $y$ são números reais. Se $y^3 + yx^2 \leq x^3 + xy^2$, então $y \leq x$.

*Proof.* Vamos provar por contrapositiva, ou seja, $y > x \implies y^3 + yx^2 > x^3 + xy^2$.

Suponha que $y > x$. Logo,

$$\begin{aligned} y > x &\implies y(y^2 + x^2) > x(x^2 + y^2), \quad \text{isto pois } (x^2 + y^2) > 0 \\ &\implies y^3 + yx^2 > x^3 + xy^2 \end{aligned}$$

Como queríamos. $\square$

(c) Sejam $x$, $y$ e $z$ números inteiros. Se $x \mid y$ e $y \mid z$, então $x \mid z$ ($a \mid b$ significa que $a$ divide $b$).

*Proof.* Vamos provar diretamente.

Suponha que $x \mid y$. Logo, $\exists a \in \mathbb{Z}$ tal que $y = a \cdot x$. Suponha que $y \mid z$, ou seja, $a \cdot x \mid z$. Logo, $\exists b \in \mathbb{Z}$ tal que $z = b \cdot a \cdot x$. Note que $z = (b \cdot a) \cdot x$, onde $ab \in \mathbb{Z}$. Portanto, $x \mid z$.

$\square$

## Exercício 15

Seja $p$ uma proposição como abaixo:

$$p = \forall x, y \in \mathbb{N}, ((x < y) \implies (\exists z \in \mathbb{N}, x < z < y))$$

Faça o que é pedido nos itens abaixo:

(a) Escreva a negação $\neg p$ de $p$:

*Resposta:*

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x, y \in \mathbb{N}, ((x < y) \implies (\exists z \in \mathbb{N}, x < z < y))) \\
&\equiv \neg(\forall x, y \in \mathbb{N}, (\neg(x < y) \vee (\exists z \in \mathbb{N}, x < z < y))) \qquad \text{note que } (p \implies q \equiv \neg p \vee q) \\
&\equiv \exists x, y \in \mathbb{N}, ((x < y) \wedge \neg(\exists z \in \mathbb{N}, x < z < y)) \\
&\equiv \exists x, y \in \mathbb{N}, ((x < y) \wedge \neg(\exists z \in \mathbb{N}, z > x \wedge z < y)) \\
&\equiv \exists x, y \in \mathbb{N}, ((x < y) \wedge (\forall z \in \mathbb{N}, z \leq x \vee z \geq y))
\end{aligned}$$

(b) Escreva em língua portuguesa, com palavras, o significado de $p$ e de $\neg p$:

*Resposta:*

Em português, $p$ é:

Para quaisquer $x, y$ naturais, se $x$ é menor que $y$, então existe $z$ natural tal que $z$ está entre $x$ e $y$.

Em português, $\neg p$ é:

Existe pelo menos um par $x, y$ de naturais tais que $x$ é menor que $y$ e todo natural é menor-igual a $x$ ou maior-igual a $y$.

(c) $p$ é verdadeira? Justifique.

*Resposta:*

A proposição $p$ é falsa. Vamos mostrar um contraexemplo:

Suponha $x = 1, y = 2$. Não existe natural entre $x$ e $y$ que seja diferente de $x$ e $y$.

(d) $\neg p$ é verdadeira? Justifique.

*Resposta:*

A proposição $\neg p$ é verdadeira. Basta mostrar um exemplo de $x, y$ que satisfaça as condições impostas.

O exemplo sempre ocorre se $y = x + 1$. Portanto, suponha $x, y = x + 1$. Perceba que qualquer número natural está no intervalo $[0, x] \cup [y, +\infty] = [0, x] \cup [x + 1, +\infty]$. Logo, existem $x, y$ tais que $(x < y)$ e $(\forall z \in \mathbb{N}, z \leq x \vee z \geq y)$.

Portanto, $\neg p$ é verdadeiro.