MAC0105 - Exercícios para 17/05

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 49

Prove os seguintes itens.

(a) Seja n um inteiro positivo. Se a diferença entre as somas dos dígitos de n em posição par e a soma dos dígitos de n em posição ímpar é múltiplo de 11, então n é múltiplo de 11;

Proof. Vamos convencionar uma notação para os algarismos de n (ou qualquer inteiro): seja $n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1]$ tal que a_1 é o algarismo da unidade, a_2 é a dezena, e assim por diante.

Suponha um n tal que

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_n) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) \equiv 0 \pmod{11} \qquad (I)$$

e queremos chegar em

$$10^{n-1}a_n + 10^{n-2}an - 1 + \cdots + 10^1 a_2 + 10^0 a_1 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Multiplicando (I) por 10^{n-1}, o resultado ainda é múltiplo de 11:

$$\begin{aligned} &10^{n-1}[(a_1 + a_3 + \cdots + a_n) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1})] \equiv 0 \pmod{11} \\ \implies &(10^0)(10^{n-1}a_n) + (-10^1)(10^{n-2}a_{n-1}) + \cdots + (-10^{n-2})(10^1 a_2) + (10^{n-1})(10^0 a_1) \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

Observe que $10 \pmod{11} = -1$. Logo, se x é ímpar, então $10^x \pmod{11} = -1$, e se x é par, então $10^x \pmod{11} = 1$. Com isso, podemos reduzir as potências de 10 para 1 ou -1.

$$\begin{aligned} &(10^0)(10^{n-1}a_n) + (-10^1)(10^{n-2}a_{n-1}) + \cdots + (-10^{n-2})(10^1 a_2) + (10^{n-1})(10^0 a_1) \equiv 0 \pmod{11} \\ \implies &10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_2 + 10^0 a_1 \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

□

(b) 11 é o único número primo palíndromo com uma quantidade par de dígitos.

Proof. Inicialmente, considere um número palíndromo p com $2n$ dígitos. Usando a notação exibida no exercício 51 para representar os algarismos de p, temos

$$p = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}]$$

sendo a_{2n} o algarismo das unidades, a_{2n-1} o algarismo das dezenas, etc.

Note que, por p ser palíndromo, então

$$p = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

Note que a diferença entre as somas dos dígitos de p em posição par e a soma dos dígitos de n em posição ímpar é igual a 0. Como 0 é múltiplo de 11, então p é múltiplo de 11. Logo, o único p (palíndromo com quantidade par de dígitos) que é primo é o próprio 11.

□

Exercício 51

Prove ou dê um contraexemplo para os itens abaixo, em que $n \in \mathbb{N}$.

(a) $3^{4n+1} + 2^{8n+3} \equiv 1 \pmod 5$;

Proof. Lembre-se que, para um número x ser divisível por 5, então o algarismo da unidade de x deve ser 0 ou 5. Para $3^{4n+1} + 2^{8n+3} \equiv 1 \pmod 5$, então basta que o algarismo da unidade de $3^{4n+1} + 2^{8n+3}$ seja $0 + 1 = 1$ ou $5 + 1 = 6$.

Agora, vamos provar que:

- O algarismo da unidade de 3^{4n+1} é sempre 3;
- O algarismo da unidade de 2^{8n+3} é sempre 8;

Dessa forma, o algarismo da soma sempre será 1, como queremos.

Proof. Vamos provar por indução em n que o algarismo da unidade de 3^{4n+1} é sempre 3: **Base:** Para $n = 0$, temos que $3^{4n+1} = 3$.

Passo: Fixe $n = 1$ e suponha para $n - 1$. □

□

(b) $2^{3n} + 6 \equiv \pmod 7$;

(c) Se $n \geq 4$, então para todo $x \in \mathbb{Z}$ vale que se $x^2 \equiv 4 \pmod n$, então $x \equiv 2 \pmod n$.

(d) Existe $m \in \mathbb{Z}$ positivo tal que $\forall x \in \mathbb{Z}$, se $x^2 \equiv 4 \pmod m$, então $x \equiv 2 \pmod m$.

Exercício 52

Prove que as relações R definidas nos itens abaixo são relações de equivalência e **descreva as classes de equivalência** de R em cada item.

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon x^2 \equiv y^2 \pmod 4\}$;

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x - y \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon 3x - 5y \equiv 0 \pmod 2\}$;

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 2\}$.