MAC0105 - Exercícios

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 2

Prove que dado um inteiro n ímpar, vale que

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

Obs.: Para quem sabe o que é *indução*, não é para usar neste exercício.

Proof. Some o primeiro e último elemento da sequência: temos $1 + n$. Agora, some o segundo e penúltimo: temos $2 + (n-1) = 1 + n$. Facilmente, é possível fazer uma indução, mas a pura intuição basta para o problema. Note que estamos extraindo $\frac{n-1}{2}$ **pares** da sequência, mas temos um n ímpar, enão resta o número do meio $\frac{n+1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ &= \frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-1+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

□

Exercício 4

Dizemos que A e B são conjuntos *comparáveis* se $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Escreva com suas palavras uma demonstração do seguinte resultado:

Seja X um conjunto finito com n elementos. Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ são subconjuntos de X, todos distintos entre si. Então existem i e j com $1 \leq i \leq n+2$ e $1 \leq j \leq n+2$ tais que A_i e A_j ***não*** *são comparáveis.*

Proof. □

Exercício 30

Prove que para todo inteiro positivo n vale que $n^3 \leq 3^n$.

Proof. Vamos provar por indução forte.

Base: Para $n = 1$, diretamente $1^3 = 1 \leq 3 = 3^1$. Para $n = 2$, diretamente $2^3 = 8 \leq 9 = 3^2$

Passo: Fixe $n \geq 3$ e suponha a H.I. para $n - 1$.

$$\text{(H.I.): } (n-1)^3 < 3^{n-1}.$$

$$n^3 = \left(\frac{n(n-1)}{(n-1)}\right)^3 = n^3 \frac{n-1}{n-1}$$

□

Exercício 38

Proof. □