MAC0105 - Exercícios para 17/05

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 41

Prove que para todo inteiro positivo n, vale que 13^n pode ser escrito como a soma de dois quadrados.

Proof. Vamos provar por indução em n.

Base: Para $n = 1$, diretamente $13^1 = 2^2 + 3^2$.

Passo: Fixe $n \geq 2$ e suponha para $n - 1$, ou seja, nossa hipótese de indução verifica que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $13^{n-1} = x^2 + y^2$.

Queremos provar que existem $z, w \in \mathbb{Z}$ tais que $13^n = z^2 + w^2$. Observe que $13^n = 13^{n-1} \cdot 13^1$. Pela base, temos que $13^1 = 2^2 + 3^2$, e pela hipótese de indução, $13^{n-1} = x^2 + y^2$. Logo,

$$\begin{aligned} 13^n = 13^{n-1} \cdot 13^1 &= (x^2 + y^2) \cdot (2^2 + 3^2) \\ &= (2^2x^2 + 3^2y^2) + (3^2x^2 + 2^2y^2) \\ &= ((2x)^2 + (3y)^2) + ((3x)^2 + (2y)^2) \ . \end{aligned}$$

Vamos manipular a expressão para criar 2 quadrados perfeitos.

Observe que, para formar 2 quadrados perfeitos, faltam os termos $\pm 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot xy = \pm 12xy$. Logo, ao se somar $+12xy$ e $-12xy$ em $((2x)^2 + (3y)^2) + ((3x)^2 + (2y)^2)$, mantemos a igualdade:

$$\left[((2x)^2 + (3y)^2) + ((3x)^2 + (2y)^2)\right] + \left[12xy - 12xy\right] = (2x + 3y)^2 + (3x - 2y)^2$$

Portanto, os z, w que queríamos existem e são $z = (2x + 3y)$ e $w = (3x - 2y)$.

□

Exercício 42

Uma máquina automática é preenchida com uma quantidade ímpar de exercícios de FUMAC e uma quantidade ímpar de exercícios de Cálculo I. Sempre que colocamos uma ficha na máquina, ela libera 2 exercícios de uma vez. A máquina só é abastecida após ficar vazia. Prove que, antes de ficar vazia, a máquina irá liberar pelo menos um par que é composto por um exercício de FUMAC e um exercício de Cálculo I.

Proof. Sejam f, c os números não-negativos de exercícios de FUMAC e de Cálculo I, respectivamente. Como tanto f quanto c são ímpares, então existem $f', c' \in \mathbb{Z}$ tais que $f = 2f' + 1$ e $c = 2c' + 1$.

Vamos começar a retirada de pares de exercícios das máquinas.

Caso sejam retirados um par FUMAC-Cálculo, temos o que queremos. Então vamos esgotar nossas possibilidades retirando pares com exercícios iguais. Observe que é possível retirar, no máximo, f' pares de exercícios de FUMAC e c' pares de exercícios de Cálculo I. Agora, temos a máquina na seguinte situação:

- Tínhamos $f = 2f' + 1$ exercícios de FUMAC. Retiramos $2f'$, então sobrou 1 na máquina.
- Tínhamos $c = 2c' + 1$ exercícios de Cálculo I. Retiramos $2c'$, então sobrou 1 na máquina.

Como previsto, em última instância sobrou um par FUMAC-Cálculo.

□

Exercício 47

Prove que para todo inteiro $n \geq 2$, se $x_1, \ldots, x_n$ são números reais, então

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n| \ .$$

Obs.: Pode ser útil considerar um número positivo z tal que $z^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Proof. Vamos provar por indução em n.

Base: Para $n = 2$, $\square$