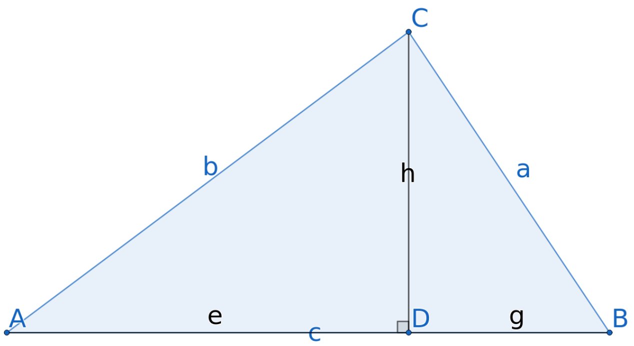
MAC0105 - Entrega dos exercícios 1, 3, 8, 9

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 1

Proof. Observe abaixo o triângulo ΔABC **retângulo em** C e com altura h. Vamos provar o Teorema de Pitágoras, ou seja, que

Teorema de Pitágoras. *Existe triângulo retângulo com catetos* a, b *e hipotenusa* $c \implies a^2 + b^2 = c^2$



Considere os triângulos ΔCDB e ΔACB. Por semelhança de triângulos,

$$\frac{a}{g} = \frac{c}{a} \implies a^2 = cg$$

Considere também os triângulos ΔADC e ΔACB. Por semelhança de triângulos,

$$\frac{b}{c-g} = \frac{c}{b} \implies b^2 = c^2 - cg \implies cg = c^2 - b^2$$

Combinando as equações, temos que

$$a^2 = cg \implies a^2 = c^2 - b^2 \implies a^2 + b^2 = c^2$$

□

Exercício 3

Vamos provar que $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$:

Proof.

$$\begin{aligned} \alpha \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) &\iff (\alpha \in X \wedge \alpha \in Y) \vee (\alpha \in X \wedge \alpha \in Z) \\ &\iff (\alpha \in X) \wedge (\alpha \in Y \vee \alpha \in Z) \\ &\iff \alpha \in X \cap (Y \cup Z) \end{aligned}$$

□

Exercício 8

- $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$
- $\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{3}{2} \leq x \leq 10 \} \cap [6] = \{ x \in \mathbb{Z} : 1.5 \leq x \leq 10 \} \cap \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $([n] \setminus [n-3]) \cap ([n-1] \setminus [n-4]) = \{ n-2, n-1, n \} \cap \{ n-3, n-2, n-1 \} = \{ n-2, n-1 \}$

Exercício 9

Vamos provar que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$:

Proof.

$$\begin{aligned}
\alpha \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\iff \alpha \in (A \cap B) \wedge \alpha \notin (A \cap C) \\
&\iff (\alpha \in A \wedge \alpha \in B) \wedge (\alpha \notin A \vee \alpha \notin C) \\
* &\iff (\alpha \in A \wedge \alpha \in B) \wedge (\alpha \notin C) \\
&\iff \alpha \in A \wedge (\alpha \in B \wedge \alpha \notin C) \\
&\iff \alpha \in A \wedge (\alpha \in B \setminus C) \\
&\iff \alpha \in A \cap (\alpha \in B \setminus C)
\end{aligned}$$

* *O $\alpha \notin A$ foi 'cancelado' pois contradiz com o $\alpha \in A$ e com a verdade da sentença completa*

Logo, os conjuntos são iguais. □