MAC0105 - Exercícios para 07/05

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 18

Dadas casas de pombo $h_1, \ldots, h_t$ e inteiros $n_1, \ldots, n_t$, se $1 + \sum_{i=1}^{t}(n_i - 1)$ pombos são distribuídos entre as t casas de pombo, então existe i tal que h_i contém pelo menos n_i pombos.

Proof. Vamos iniciar avaliando a quantidade máxima de pombos em uma casa. Se distribuídos igualmente (na medida do possível, pois estamos lidando com inteiros) em todas as casas, a quantidade máxima de pombos em uma casa é

$$\left\lceil \frac{1 + \sum_{i=1}^{t}(n_i - 1)}{t} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 - t + \sum_{i=1}^{t} n_i}{t} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} n_i \right\rceil.$$

Vamos separar em casos, de acordo com o critério dos n_i.

Caso I: Se $n_1 = \cdots = n_i$, então

$$\left\lceil \frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} n_i \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{t} - 1 + n_1 \right\rceil = n_1 = \cdots = n_i.$$

Note que $0 < \frac{1}{t} \leq 1$, logo $-1 < \frac{1}{t} - 1 \leq 0$, e portanto o teto acima é exatamente igual a $n_1 = \cdots = n_i$.

Observe que $\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} n_i$ é a média aritmética entre os n_i. Como supomos que todos são iguais, então esse somatório é igual a qualquer n_i (particularmente, é igual a n_1).

O resultado que tivemos é que o número máximo de pombos em cada casa é n_1 (mais especificamente, todas as casas têm exatamente n_1 pombos). Logo, claramente existe uma casa com pelo menos n_i pombos, como queríamos.

Caso II: Se os n_i não são todos iguais, então existe um menor n_i. Seja n_m o menor dos n_i's. então

$$\left\lceil \frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} n_i \right\rceil \geq \left\lceil \overbrace{\frac{1}{t} - 1}^{>-1 \text{ e } \leq 0} + n_m \right\rceil = n_m.$$

Logo, existe um i desejado tal que h_i contém no mínimo n_i pombos. Nesse caso, $i = m$, o índice do menor n_i.

Cobertos todos os casos, está demonstrado o resultado. □

Exercício 22

Prove que para quaisquer $n + 1$ números escolhidos de $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, existem 2 desses números cuja soma é igual a $2n$.

Proof. Note: os pares que somados resultam em $2n$ são os elementos de A tal que

$$A = \{\{1, 2n - 1\}, \{2, 2n - 2\}, \{3, 2n - 3\}, \ldots, \{n - 1, n + 1\}\}$$

Observe que há $n - 1$ elementos em A. Note que único elemento de {1, 2,..., 2n - 1} que não possui par em A é n.

Por exaustão, vamos escolher $n + 1$ elementos de A com o objetivo de não termos 2 números que somam $2n$, ou seja, que não formem um par não-ordenado de A. Perceba que pelo princípio da casa dos pombos, o máximo de elementos que podemos pegar e não termos um par de A é n. O n-ésimo primeiro termo obrigatoriamente formará um par que some $2n$.

Logo, sempre existirão 2 números cuja soma resulta em $2n$, como queríamos. □

Exercício 24

Prove que a soma dos termos de uma progressão geométrica com n termos, termo inicial a e razão q é dada por

$$\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Proof. Note que a a soma dos termos de uma progressão geométrica com n termos é

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}. \qquad (i)$$

Multiplicando os dois lados por q, temos

$$qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n. \qquad (ii)$$

Subtraindo (i) de (ii), temos

$$\begin{gathered} S_n - qS_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} - (aq + aq^2 + \cdots + aq^n) \\ S_n(1 - q) = a - aq^n \\ S_n = \frac{a - aq^n}{(1 - q)} = \frac{a(1 - q^n)}{(1 - q)} \end{gathered}$$

Multiplicando por $\frac{-1}{-1}$, temos finalmente que

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{(q - 1)},$$

como queríamos. □

Exercício 25

O número harmônico de ordem n, denotado por H_n, é definido como $H_n = \sum_{i=1}^{n}(1/i)$. Prove que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Proof. Vamos provar por indução.

Base: Para $n = 0$,

$$H_{2^n} = H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1 \geq \frac{1}{2}.$$

Passo: Suponha que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$. Vamos provar que $H_{2^{(n+1)}} \geq 1 + (n+1)/2$.

$$\begin{aligned} H_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \\ &\implies 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 + \frac{n}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \\ &\implies 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{2}$ é sempre maior que $\frac{1}{2^{(n+1)}}$ para todo $n \geq 0$. Logo, temos o resultado

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^{(n+1)}}\right) \geq 1 + \frac{n+1}{2} \\ &\implies H_{2^{(n+1)}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Exercício 26

Mostre que para todo inteiro positivo n vale que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Proof. Vamos provar por indução.

Antes de iniciar a prova em si, note que $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$. Vamos usar esse resultado para facilitar o passo indutivo.

Base: Suponha n = 1.

Diretamente, $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \dfrac{1}{6}(1+1)(2*1+1)$.

Passo: Fixe $n \geq 2$ e suponha que vale para $n-1$.

Por hipótese,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Logo,

$$\implies \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

como queríamos (de acordo com a observação pré-prova).

$\square$