Lista 2 - MAC0210 (2024)

$\boxed{Q2}$ a) A expressão (i) $\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$ é mais barata computacionalmente.

Observe a expressão (ii) $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}^2)$.

Note que em (ii), para o cálculo de cada termo do somatório, é necessário realizar uma subtração $(x_i^2 - \bar{x}^2)$. Isso introduz n erros de cancelamento.

Enquanto isso, não há esses erros de cancelamento em (i). Há apenas a subtração $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$, o que torna (i) mais barato computacionalmente.

Entretanto, a expressão (ii) deve produzir resultados mais acurados. Isto pois, caso x_i seja muito pequeno ou muito grande, a operação x_i^2 em (i) introduzirá erros de arredondamento. Enquanto isso, a operação $(x_i - \bar{x})$ em (ii) evita que o termo do somatório seja extremo, e portanto evita erros de arredondamento.

$\boxed{Q4}$ $g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

a) $g(x) = x \leftrightarrow x^2 + \frac{3}{16} = x \leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$:

Por bhaskara, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.3/16}}{2.1} = \frac{1 \pm 1/2}{2}$

$= \frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$. Logo, $3/4$ e $1/4$ são pontos fixos de g.

b) Considere $g'(x) = 2x$. Vamos verificar se as hipóteses do Teorema do ponto fixo valem ao redor de $x^* = \frac{1}{4}$ e $x^* = 3/4$.

Já provamos acima que existem pontos fixos. Então vamos verificar se existe $\rho < 1$ tal que $|g'(x)| \leq \rho$ para os intervalos $x \in [\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon]$ (ao redor de $\frac{1}{4}$) e $x \in [\frac{3}{4} - \varepsilon, \frac{3}{4} + \varepsilon]$ (ao redor de $\frac{3}{4}$). obs.: $\varepsilon > 0$!

- Fixando $\varepsilon = \frac{1}{8}$, então $\forall x \in [\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon]$ é verdade que $|g'(x)| = |2x| \leq |2(\frac{1}{4} + \frac{1}{8})| = \frac{3}{4} < 1 \longleftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{8}$. Adotando $\rho = \frac{3}{8}$, está provado que a sequência da iteração do ponto fixo converge para x_0 ao redor de $\frac{1}{4}$ como definido anteriormente.

- Para $x \in [\frac{3}{4} - \varepsilon, \frac{3}{4} + \varepsilon]$, note que $|g'(x)| = |2x| \leq |2(\frac{3}{4} + \varepsilon)| = |\frac{3}{2} + 2\varepsilon|$ é sempre maior que 1. Logo, não existe $\rho < 1$ tal que $|g'(x)| \leq \rho$ para x ao redor de $3/4$. Isso significa que não é garantido que a iteração do ponto fixo convirja para x_0 ao redor de $3/4$.

c) Para $\rho^K \approx 0.1 \rightarrow K \cdot \log_{10} \rho \approx -1 \longrightarrow K \approx \left\lceil -\frac{1}{\log_{10} \rho} \right\rceil$.

Para $x^* = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $\rho = \frac{3}{8}$, temos $K \approx 2$.

$\boxed{Q6}$ (a) Para $f(x) = x - 1$ em $[0, 2.5]$, podemos facilmente calcular analiticamente a derivada $f'(x) = 1$ (podemos concluir que nenhuma avaliação da derivada será 0). O método de Newton é adequado para esse caso, e como f é linear, então é necessário apenas <u>1 iteração</u> para achar a raiz.

(b) Como não podemos assumir derivadas de f e nem aproximá-las facilmente, então cabe usar o método da bissecção.

(c) Como é muito difícil especificar/computar $f'(x)$, então não é adequado o método de Newton. Entretanto, $f \in C^5$ no intervalo requisitado, e portanto é viável aproximar suas derivadas. Logo, é adequado usar o método da secante nesse caso.