Lista 3 - MAC0210

1) (a)
$$\begin{cases} c_0 - 1c_1 + (-1)^2 c_2 + (-1)^3 c_3 = 1 \\ c_0 + 0c_1 + 0^2 c_2 + 0^3 c_3 = 1 \\ c_0 + 1c_1 + 1^2 c_2 + 1^3 c_3 = 2 \\ c_0 + 2c_1 + 2^2 c_2 + 2^3 c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_2 = 1 \\ 2c_2 + 6c_3 = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_2 = 1 \\ 6c_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 7/6 \\ c_2 = 1/2 \\ c_3 = -2/3 \end{cases}$$

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \Rightarrow p(x) = 1 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

(b) Na interpolação de Lagrange, $c_i = y_i \ \forall i = 0, 1, 2, 3$.
Logo: $c_0 = 1$; $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} y_j \cdot L_j(x) = 1 \cdot L_0(x) + 1 L_1(x) + 2 L_2(x) + 0 \cdot L_3(x)$$

$$= \left[\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}\right] + \left[\frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)}\right] + 2\left[\frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)}\right]$$

$$= \left[-\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + \left[1 - \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right] + \left[2x + x^2 - x^3\right]$$

$$= 1 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

(d) Feita nos itens (a), (b), (c).

(c)

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$
0	-1	1 $\rightsquigarrow c_0$			
1	0	1	$\frac{1-1}{0-(-1)} = 0 \rightsquigarrow c_1$		
2	1	2	$\frac{2-1}{1-0} = 1$	$\frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow c_2$	
3	2	0	$\frac{0-2}{2-1} = -2$	$\frac{-2-1}{2-0} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2-(-1)} = -\frac{2}{3} \rightsquigarrow c_3$

$$p(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1) + c_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 1 + 0\,(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - (-1))(x - 0) - \frac{2}{3}(x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$$

$$= 1 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

2) (a) Vamos achar um polinômio interpolador quadrático $v(x)$ t.q. $u(x_i) = e^{v(x_i)} = y_i$ para $i = 0, 1, 2$.

Considere $v(x) = \ln(\gamma_0) + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2$ e note que

$$e^{v(x_i)} = e^{\ln(\gamma_0) + \gamma_1 x_i + \gamma_2 x_i^2} = \gamma_0 \times e^{\gamma_1 x_i + \gamma_2 x_i^2} = y_i \quad p/\ i = 0, 1, 2$$

Logo, $v(x)$ é um polinômio interpolador quadrático.

③ Seja o polinômio interpolador de $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$

$$p_n(x) = f[x_0] + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Suponha uma nova observação $(x, f(x))$. Vamos construir o polinômio interpolador de $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n)), (x, f(x))$ com base em $p_n(x)$:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \underbrace{f[x_0, \dots, x_n, x]}_{g(x)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Pelo Teo. do erro da interp. polinomial, $p_{n+1}(x)$ é $f(x)$, e portanto

$$f(x) = p_n(x) + g(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \to f(x) - p_n(x) = g(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$\to g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad p/ \ \xi \in [x_0, x]$$

Vamos analisar a seguir os casos:

(a) Se $m \leq n$, então a derivação $f^{(n+1)}(\xi)$ resultará em 0, e portanto $g(x) = 0$.

(b) Se $m > n$, então a derivação $f^{(n+1)}(\xi)$ resultará em um polinômio de grau $m - (n+1) = m - n - 1$, e portanto $g(x)$ será um polinômio de grau $m - n - 1$.

④ (a) Usando o Teo. do erro na interp. polinomial, temos que:

$$\max_{0\le x\le 1}\left|e^{x}-p_2(x)\right| \le \frac{1}{3!}\max_{0\le t\le 1}\left|e^{t}\right| \max_{0\le s\le 1}\left|(s-0)(s-\tfrac{1}{2})(s-1)\right|$$

- $\max_{0\le t\le 1}\left|e^{t}\right| = e$ quando $t=1$ ($|e^{t}|$ é monotonicamente crescente)

- $\max_{0\le s\le 1}\left|(s-0)(s-\tfrac{1}{2})(s-1)\right| = \frac{\sqrt{3}}{36}$ quando $s=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ (os pontos críticos da função estão em $\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ de acordo com a dica do enunciado)

Logo, um upper bound p/ o erro é $\frac{e\sqrt{3}}{216}$.