Lista 1 - MAC0210 (2024)

1a) Por Taylor:

$$\text{(I)}\ f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \cdots$$

$$\text{(II)}\ f(x_0-h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \cdots$$

Subtraindo as equações (I) e (II), temos:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + 2 \cdot \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \cdots$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \left(\frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \cdots \right)$$

Note que o erro é:

$$\left| f'(x_0) - \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right) \right| = \left| \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \cdots \right|$$

$$= O(h^2)$$

E note que o termo dominante do erro é, como esperado,

$$\frac{h^2}{6} f'''(x_0)$$

(2) Vamos avaliar o condicionamento da função

$$g(x) = \tanh(cx) = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}} \quad p/ \ x \approx 0 \ \text{e} \ c > 0$$

Para aproximar $\tanh(cx)$, aproximamos e^{cx}, e^{-cx} por Taylor centrado na origem:

- $e^{cx} \approx e^{c \cdot 0} + (x-0) \cdot c \cdot e^{c \cdot 0} = 1 + cx$
- $e^{-cx} \approx 1 - cx$

Logo, $\tanh(cx) \approx \dfrac{1 + cx - (1 - cx)}{1 + cx + 1 - cx} = cx$:

Considere $x_0 = 0$ e $x \approx 0$.

$$|g(x) - g(x_0)| = |\tanh(cx) - \tanh(cx_0)|$$
$$\approx |cx - cx_0| = |c(x - x_0)| = O(|x - x_0|)$$

pela definição de $O(\cdot)$

c	$\lvert g(x) - g(x_0)\rvert$	$\lvert x - x_0\rvert$
10^{-2}	$10^{-2} x$	x
10^{0}	x	x
10^{10}	$10^{10} x$	x

Note que o condicionamento do problema depende de c.
Se c é grande, então o problema é mal-condicionado.
Se c é pequeno, então o problema é bem-condicionado.

3.a. No exemplo 1.6, temos que $y_n = \frac{1}{n} - 10\, y_{n-1}$.
Isolando y_{n-1}, temos $y_{n-1} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$.

3b. Suponha $\varepsilon > 0$ e n inteiro positivo.
Considere $E_K = |y_K - \overline{y_K}|$ o erro de arredondamento acumulado na etapa K. y_K é o valor real da avaliação. $\overline{y_K}$ é o valor arredondado.

Logo, $E_{m-1} = |y_{m-1} - \overline{y_{m-1}}| = \left|\frac{1}{10}\left(\frac{1}{m} - y_m\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{m} - \overline{y_m}\right)\right|$

Inicializando $\overline{y_m} = 0$, temos: $E_{m-1} = \frac{1}{10}|y_m|$.

Perceba que $E_n = |y_n - \overline{y_n}| = \frac{1}{10^{m-n}}|y_m|$

$$\Rightarrow 10^{m-n} = \frac{|y_m|}{E^{m-n}} \Rightarrow m-n = \log(|y_m|) - \log(E^n)$$

$$\Rightarrow \log(E^n) = \log(|y_m|) - m + n$$

Queremos $\varepsilon > E^n \Rightarrow \log(\varepsilon) > \log(E^n)$.

$$\log(\varepsilon) > \log(E^n) = \log(|y_m|) - m + n$$

$$\Rightarrow m > \log(|y_m|) + n - \log(\varepsilon)$$

Sabe-se que $|y_m| < \frac{1}{10}$, logo

$$m > \log\left(\frac{1}{10}\right) + n - \log(\varepsilon) = -1 + n - \log(\varepsilon)$$

Escolhendo $m = \lceil -1 + n - \log(\varepsilon) \rceil \in \mathbb{Z}$, temos $E_n < \varepsilon$.

3c. A cada passo do algoritmo, o erro decai em um ~~fator~~ fator de 10, resolvendo o problema de instabilidade do algoritmo original.