MAC0239 - EP2

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - 13671636

12/2022

Questão 1

Apresentar uma fórmula da LPO que, quando verdadeira em algum modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \cdot^{\mathcal{M}})$, força o domínio $\mathcal{A}$ a ser infinito; esta fórmula não é verdadeira em modelos com domínio finito.

Resposta:
A intuição é assumir que todo elemento do domínio tem pelo menos um elemento maior que ele. Funciona para os inteiros com a função de potenciação e a ordem parcial $<$.

$$\varphi : \forall x \exists y (x^2 < y^2)$$
$$\Sigma = \Big(\mathcal{C} = \{\}, \mathcal{F} = \{(\cdot^2)^1\}, \mathcal{P} = \{<^2\}\Big)$$
$$\mathcal{M} :$$
$$\mathcal{A} : \mathbb{Z}$$
$$(.^2)^{\mathcal{M}} : \text{elevado ao quadrado}$$
$$<^{\mathcal{M}}: \text{menor}$$

Questão 2

Apresentar duas fórmula que satisfaçam as seguintes restrições:
(a) Uma fórmula que seja verdadeira se e somente se o modelo tiver pelo menos 2 elementos.

Resposta:
A intuição é diferenciar pelo menos 2 elementos do domínio.

$$\varphi : \forall x \exists y (x \neq y)$$

(b) Uma fórmula que seja verdadeira sse o modelo tiver pelo menos 4 elementos.

Resposta:
Agora, a intuição é diferenciar pelo menos 4 elementos do domínio.

$$\varphi : \forall x \exists y \exists z \exists w (x \neq y \land x \neq z \land x \neq w \land y \neq z \land y \neq w \land z \neq w)$$

Questão 3

Apresentar uma fórmula que seja verdadeira sse, dado $n \in \mathbb{N}^+$, o modelo possui pelo menos $2n$ elementos.

Dica: usar os conectivos generalizados

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \qquad \bigvee_{i=1}^{n} \phi_i = \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$$

Resposta:
A intuição é garantir a existência de **pelo menos** n elementos distintos e afirmar que, para cada elemento x desses n, existe um que é o dobro de x. Como o domínio requisitado é $\mathbb{N}$, então não é necessário mencionar que se $x \neq y$, então $2x \neq 2y$.

$$\forall x \exists y_1, \ldots, y \exists z_1, \ldots, z_n \left[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} x \neq y_i \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{n} 2x = z_j \Big) \right]$$

Questão 4

Mostrar que se um conjunto de fórmulas garante que o modelo possua pelo menos $2i$ elementos para $i \in [1, n]$, então sempre há um modelo com tamanho par.

Resposta:
Para essa demonstração, será usada a definição de um número "par". Segue a definição:

Um número $x \in \mathbb{Z}$ é **par** se existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $2y = x$.

Portanto, se for possível mostrar que

$$\forall i \Big(i \in [1, n] \implies \exists x (2x = 2i) \Big)$$

é verdade, então está demonstrado.
De fato, sempre existe x que satisfaça a sentença acima. Basta adotar x como i.
Facilmente conseguimos um modelo que satisfaça o que foi pedido.
Adote um modelo $\mathcal{M}$ com uma assinatura genérica $\Sigma = (\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f^1\}, \mathcal{P} = \{P\})$ e domínio $\mathcal{A}$ com cardinalidade $2i$. Como $2i$ é sempre par (como provado acima), então $\mathcal{M}$ com certeza é par.

Questão 5

Mostrar que não existe na Logica de Primeira Ordem uma fórmula que seja verdadeira em todos os modelos com domínio finito e par, e apenas nestes.

Resposta (baseada cruelmente no slide de compacidade do Finger):
Por contradição, suponha que $\exists \phi$ tal que ϕ é verdadeiro $\iff$ o modelo é finito e par, e apenas nestes.
Agora, suponha que $\exists \psi_i$ tal que ψ_i é verdadeiro $\iff$ o domínio $\mathcal{A}$ possui $2i$ elementos. Foi provado na Questão 3 que ψ existe.
Considere o conjunto de fórmulas $\alpha = \{\phi\} \cup \{\psi_i | i \in \mathbb{N}\}$. Observe que todo subconjunto finito de α tem modelo. Entretanto, α propriamente dito não tem modelo, já que ϕ condiciona que o modelo seja **finito**, mas ψ_i tende ao **infinito** pois $i \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ é infinito. Isso fere a compacidade da LPO.
Chegamos em uma contradição, logo a hipótese inicial é falsa.