Exercício 4.2:

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.9:

a) $$Mh' = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-N+1 \bmod N} & \cdots & h_{-1 \bmod N} \\ h_{-1 \bmod N} & h_0 & h_{-N+1 \bmod N} \cdots & h_{-2 \bmod N} \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{-N+1 \bmod N} & & & h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & h_0 & h_1 \cdots & h_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ h_1 & & & h_0 \end{bmatrix}$$

Considerando que $Mh = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \cdots & h_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{N-1} & & & h_0 \end{bmatrix}$, é possível observar que

$Mh_{i,j} = h_{N-j+i \bmod N}$ e $Mh'_{i,j} = h_{N-i+j \bmod N}$. Assim, fica claro que há uma inversão entre linhas e colunas, então $Mh' = M_h^T$.

b)

Mh é simétrica $\Rightarrow h = h'$

se Mh é simétrica, temos $Mh = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \cdots & h_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ h_{N-1} & & & h_0 \end{bmatrix} = Mh' = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & h_0 & \cdots & h_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ h_1 & & & h_0 \end{bmatrix}$

Assim, sendo $h_{N-j+i} = h_{N+j-i}$ e $K = N-j+i$, temos que $h_K = h_{-K \bmod N}$. Assim, $h'_K = h_{-K \bmod N} = h_K$, então $h = h'$

$h = h' \Rightarrow Mh$ é simétrica

Sendo $h_K = h'_K = h_{-N \bmod N}$, temos que $h_{N-j+i} = h_{N-i+j}$. Como $Mh = h_{N-j+i}$ e $Mh' = h_{N-i+j}$, temos que $Mh = Mh'$. Como Mh é igual a sua transposta (Mh'), é possível afirmar que a matriz é simétrica.

Desse modo, a equivalência está provada.

c)

Já sabemos que, sendo h e $h' \in \mathbb{R}^N$, temos $Mh' = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & h_0 & \cdots & h_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ h_1 & & & h_0 \end{bmatrix} = Mh^T$.

Similarmente, para h e $h' \in \mathbb{C}^N$, temos $Mh' = \begin{bmatrix} \overline{h_0} & \overline{h_1} & \cdots & \overline{h_{N-1}} \\ \overline{h_{N-1}} & \overline{h_0} & \cdots & \overline{h_{N-2}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{h_1} & & & \overline{h_0} \end{bmatrix}$. Assim, podemos observar que $Mh' = \overline{Mh^T} = Mh^*$.

Exercício 4.10:

$$(g' * h')' \overset{?}{=} g * h$$

$$M_{(g'*h')'} = M_{g*h}$$

$$M^{T}_{(g'*h')} = M_g M_h$$

$$(M_{g'} M_{h'})^{T} = M_g M_h$$

$$(M_g^{T} M_h^{T})^{T} = M_g M_h$$

$$M_h \, M_g = M_g M_h$$

$$M_{h*g} = M_{g*h}$$

$$M_{g*h} = M_{g*h} \checkmark$$

Exercício 4.15:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$= h_0 \cdot e^{-i2\pi k \frac{1}{N}} + h_1 e^{-i2\pi k \cdot \frac{1}{N}} + \sum_{n=2}^{N-1} \cancelto{0}{h_n} \, e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{0} - \frac{1}{2} e^{-i2\pi \frac{k}{N}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\pi \frac{k}{N}} \left(e^{i\pi \frac{k}{N}} - e^{-i\pi \frac{k}{N}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\pi\frac{K}{N}} \left(2i\, sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right)$$

$$= e^{-i\pi\frac{K}{N}} \cdot i \cdot sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)$$

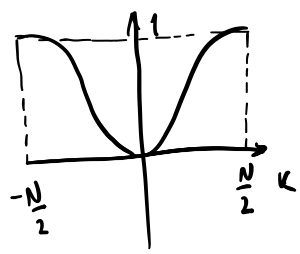
$$= e^{-i\pi\frac{K}{N}} \cdot \sqrt{-1} \cdot sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)$$

$$= e^{-i\pi\frac{K}{N}} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)$$

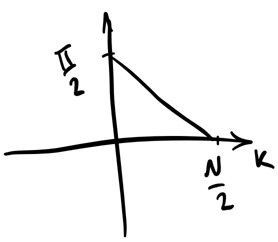
$$= e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{K}{N}\right)} \cdot sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)$$

Diante disso, podemos analisar a magnitude e fase:

$$|H_K| = \overset{1}{\cancel{\left|e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{K}{N}\right)}\right|}}\,\left|sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right| = \left|sen\left(\frac{\pi K}{N}\right)\right|$$



$$\angle H_K = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{K}{N}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi K}{N}$$



É possível entender o motivo desse filtro ser considerado "passa-altas" ao analisarmos sua magnitude, uma vez que os valores próximos a zero serão atenuados, e os valores próximos aos limites de $|\frac{N}{2}|$ serão acentuados, o que fica evidente no gráfico de $|H_K|$.