MAC0338 - Entrega da lista 2

Exercício 1

Seja C uma constante real. Para todos os itens desta questão assuma que $T(1) \coloneqq 1$. Em cada um dos itens você deve encontrar uma fórmula fechada (não recursiva) para a recorrência que seja verdadeira em todos os valores do conjunto $S \subseteq N$ do item.

Item (c)

$T(b) \coloneqq 7T(n/3) + Cn^2$ para todo $n \geq 3$ e $S \coloneqq \{3^k : k \in \mathbb{N}\}$.

Proof. Expansão:

$$
\begin{aligned}
T(b) &= 7T(n/3) + Cn^2 = 7\Big(7T(n/3^2) + \frac{1}{3^2}Cn^2\Big) + Cn^2 \\
&= 7^2T(n/3^2) + \Big(1 + \frac{7}{3^2}\Big)Cn^2 = 7^2\Big(7T(n/3^3) + \frac{1}{3^4}Cn^2\Big) + \Big(1 + \frac{7}{3^2}\Big)Cn^2 \\
&= 7^3T(n/3^3) + \Big(1 + \frac{7}{3^2} + \frac{7^2}{3^4}\Big)Cn^2 = 7^3\Big(7T(n/3^4) + \frac{1}{3^6}Cn^2\Big) + \Big(1 + \frac{7}{3^2} + \frac{7^2}{3^4}\Big)Cn^2 \\
&= 7^4T(n/3^4) + \Big(1 + \frac{7}{9} + \frac{7^2}{9^2} + \frac{7^3}{9^3}\Big)Cn^2 \\
&\vdots \\
&= 7^kT(n/3^k) + Cn^2 \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\frac{7}{9}\Big)^i = 7^kT(n/3^k) + Cn^2 \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{7}{9}\Big)^{i-1} \\
&= 7^kT(n/3^k) + \overbrace{\frac{1-(7/9)^k}{1-7/9}}^{\text{soma de PG finita}} Cn^2 = 7^kT(n/3^k) + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^k\Big)Cn^2
\end{aligned}
$$

Conferência:
Para $k = \log_3 n$ e $n \in S$, vamos provar que

$$T(n) = 7^{\log_3 n} + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{\log_3 n}\Big)Cn^2.$$

Agora, fazendo indução em k, onde $k = \log_3 n$, temos essa expressão em termos de k:

$$T(3^k) = 7^k + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^k\Big)C3^{2k}.$$

Para $k = 0$,

$$T(3^0) = T(1) = 1 = 7^0 + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^0\Big)C3^{2\cdot 0}.$$

Agora, suponha $k \geq 1$ e verdade para $k-1$. Então

$$\begin{aligned}
T(3^k) &= 7T(3^{k-1}) + C3^{2k} \\
&= 7\underbrace{\left[7^{k-1} + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k-1}\Big)C3^{2(k-1)}\right]}_{\text{H.I.}} + C3^{2k} \\
&= 7^k + 7\cdot\frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k-1}\Big)\frac{1}{9}C3^{2k} + C3^{2k} \\
&= 7^k + C3^{2k}\Big[\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{9}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k-1}\Big) + 1\Big] \\
&= 7^k + C3^{2k}\Big[\frac{9}{2}\Big(\frac{7}{9} - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k}\Big) + \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{9}\Big] \\
&= 7^k + C3^{2k}\Big[\frac{9}{2}\Big(\frac{7}{9} - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k} + \frac{2}{9}\Big)\Big] \\
&= 7^k + \frac{9}{2}\Big(1 - \Big(\frac{7}{9}\Big)^{k}\Big)C3^{2k},
\end{aligned}$$

como queríamos.

□

Item (d)

$T(b) \coloneqq 2T(n/2) + Cn^3$ para todo $n \geq 2$ e $S \coloneqq \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$.

Proof. Expansão:

$$\begin{aligned}
T(b) &= 2T(n/2) + Cn^3 = 2\Big[2T(n/2^2) + \frac{1}{2^3}Cn^3\Big] + Cn^3 \\
&= 2^2T(n/2^2) + \Big(1 + \frac{1}{2^2}\Big)Cn^2 = 2^2\Big[2T(n/2^3) + \frac{1}{2^6}Cn^3\Big] + \Big(1 + \frac{7}{2^2}\Big)Cn^3 \\
&= 2^3T(n/2^3) + \Big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}\Big)Cn^3 = 2^3\Big[2T(n/2^4) + \frac{1}{2^9}Cn^2\Big] + \Big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}\Big)Cn^3 \\
&= 2^4T(n/2^4) + \Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}\Big)Cn^3 \\
&\vdots \\
&= 2^kT(n/2^k) + Cn^3 \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\frac{1}{4}\Big)^i = 2^kT(n/2^k) + Cn^3 \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{i-1} \\
&= 2^kT(n/2^k) + \overbrace{\frac{1-(1/4)^k}{1-1/4}}^{\text{soma de PG finita}} Cn^3 = 2^kT(n/2^k) + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^k\Big)Cn^3
\end{aligned}$$

Conferência:
Para $k = \log_2 n$ e $n \in S$, vamos provar que

$$T(n) = 2^{\log_2 n} + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\log_2 n}\Big)Cn^3$$

Agora, fazendo indução em k, onde $k = \log_2 n$, temos essa expressão em termos de k:

$$T(2^k) = 2^k + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^k\Big)C2^{3k}.$$

Para $k = 0$,

$$T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^0\Big)C2^{3\cdot 0}.$$

Agora, suponha $k \geq 1$ e verdade para $k-1$. Então

$$\begin{aligned}
T(2^k) &= 2T(2^{k-1}) + C2^{3k} \\
&= 2\underbrace{\Big[2^{k-1} + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-1}\Big)C2^{3(k-1)}\Big]}_{\text{H.I.}} + C2^{3k} \\
&= 2^k + 2 \cdot \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-1}\Big)\frac{1}{8}C2^{3k} + C2^{3k} \\
&= 2^k + C2^{3k}\Big[\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-1}\Big) + 1\Big] \\
&= 2^k + C2^{3k}\Big[\frac{4}{3}\Big(\frac{1}{4} - \Big(\frac{1}{4}\Big)^k\Big) + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\Big] \\
&= 2^k + C2^{3k}\Big[\frac{4}{3}\Big(\frac{1}{4} - \Big(\frac{1}{4}\Big)^k + \frac{3}{4}\Big)\Big] \\
&= 2^k + \frac{4}{3}\Big(1 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^k\Big)C2^{3k},
\end{aligned}$$

como queríamos.

□

Exercício 3

Considere a sequência de vetores $A_k[1..2^k], A_{k-1}[1..2^{k-1}], \ldots, A_1[1..2^1]$, e $A_0[1..2^0]$. Suponha que cada um dos vetores é crescente. Queremos reunir, por meio de sucessivas operações de intercalação (= *merge*), o conteúdo dos vetores $A_0, \ldots, A_k$ em um único vetor crescente $B[1..n]$, onde $n = 2^{k+1} - 1$. Escreva um algoritmo que faça isso em $\mathcal{O}(n)$ unidades de tempo. Use como subrotina o INTERCALA visto em aula.

Algorithm 1 mergeAll

procedure MERGEALL(A)
    $k \leftarrow \log_2(\text{len(A)} + 1) - 1$
    for $i \leftarrow 1$ to k **do**
        INTERCALA$(A, 0, 2i - 2, 2i)$
    end for
    return A
end procedure

Algorithm 2 Main

$A0 \leftarrow [5]$
$A1 \leftarrow [1, 7]$
$A2 \leftarrow [2, 3, 4, 6]$
$A \leftarrow [\underbrace{5}_{\text{A0}}, \underbrace{1, 7}_{\text{A1}}, \underbrace{2, 3, 4, 6}_{\text{A2}}]$
$B \leftarrow$MERGEALL(A)