MAC0338 - Entrega da lista 8

Exercício 3

Uma fórmula booleana $\mathcal{C}$ sobre um conjunto X de variáveis booleanas (não necessariamente em CNF) é uma tautologia se toda atribuição a X satisfaz $\mathcal{C}$. O problema tautologia consiste em, dado X e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. Prove que o problema tautologia está em coNP.

Resposta:

Vamos provar que o problema TAUT (tautologia) está em coNP. Podemos provar, equivalentemente, que o complemento de TAUT (ou seja, $\overline{\text{TAUT}}$) está em NP. O problema $\overline{\text{TAUT}}$ consiste nas fórmulas booleanas que não são tautologias. Para verificar que uma fórmula não é uma tautologia, basta encontrar uma atribuição que a falsifique. Existem algoritmos que fazem essa verificação **em tempo polinomial**. Logo, $\overline{\text{TAUT}}$ está em NP, o que implica que TAUT está em coNP.

Exercício 6

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se quaisquer dois vértices de S não são adjacentes. Ou seja, não há nenhuma aresta do grafo com as duas pontas em S. O problema IS consiste no seguinte: dado um grafo G e um inteiro $k \geq 0$, existe um conjunto indepentente em G com k vértices? Mostre que o problema IS é NP-completo. **Não** pode usar o fato que o problema CLIQUE é NP-completo, mas pode se inspirar na prova deste teorema.

Resposta:

Vamos mostrar que o problema IS é tanto NP quanto o problema NP-completo 3-SAT pode ser reduzido para IS.

Primeiramente, vamos provar que o problema IS está em NP apresentando um algoritmo polinomial que, dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de vértices S (um certificado), verifica se S é independente. O algoritmo consiste em verificar se existe aresta para cada par de vértices em S. Se não existir, então S é independente. Caso contrário, S não é independente. A complexidade desse algoritmo é $O(|V| + |E|)$, polinomial.

Agora, vamos provar que 3-SAT $\leq_P$ IS. Seja ϕ uma fórmula booleana em **3-CNF** com n variáveis e exatamente k cláusulas. Considere um grafo $G = (V, E)$. Cada vértice de G representa um literal de cada cláusula de ϕ. Vamos criar as arestas de forma que

- os 3 vértices de literais de cada cláusula sejam ligados 2 a 2, formando um triângulo - é necessário que exatamente 1 literal de cada cláusula seja verdadeiro para garantir a independência do conjunto;
- os vértices de literais complementares sejam ligados (ou seja, todos os x_i e $\neg x_i$) - isso garante que x_i e $\neg x_i$ nunca serão simultaneamente verdadeiros ao escolher um conjunto independente.

Agora vamos provar que ϕ é satisfatível $\iff$ G tem um conjunto independente com k vértices.

($\Rightarrow$) Seja α uma atribuição que torna ϕ verdadeira. Logo, todas as cláusulas são verdadeiras. Como temos exatamente k cláusulas e queremos montar um conjunto independente S com exatamente k vértices, então exatamente 1 literal em cada cláusula é verdadeiro para que todas as cláusulas sejam verdadeiras. Pelas propriedades citadas anteriormente, não há conflito de literais complementares. Logo, S é um conjunto independente.

($\Leftarrow$) Seja S um conjunto independente com k vértices. Como S é independente, não há conflito de literais complementares. Como S tem k vértices e temos k cláusulas em ϕ, então exatamente 1 literal em cada cláusula é verdadeiro para que todas as cláusulas sejam verdadeiras. Como S é independente, então todas as cláusulas são verdadeiras. Logo, ϕ é satisfatível.

Logo, 3-SAT $\leq_P$ IS, o que implica que IS é NP-completo.

Exercício 9

Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

Problema MOCHILA: Dado um número W, um número V, um número inteiro positivo n, uma coleção de números $w_1, \dots, w_n$, e uma coleção de números $v_1, \dots, v_n$, decidir se existe um subconjunto S de $\{1, \dots, n\}$ tal que

$$\sum_{i \in S} w_i \le W \text{ e } \sum_{i \in S} v_i \ge V.$$

Pode assumir que o problema PARTIÇÃO (Exercício 8) é NP-completo.

Resposta:

Vamos mostrar que o problema MOCHILA é tanto NP quanto o problema NP-completo PARTIÇÃO pode ser reduzido para MOCHILA.

Primeiramente, vamos provar que o problema MOCHILA está em NP. Isso é facilmente verificado, pois basta computar $\sum_{i \in S} w_i \le W$ e $\sum_{i \in S} v_i \ge V$, o que toma tempo polinomial.

Agora, vamos provar que PARTIÇÃO $\le_P$ MOCHILA. Ou seja,

$$\text{existe solução } S' \text{para PARTIÇÃO} \iff \text{existe solução } S \text{para MOCHILA}$$

($\Rightarrow$) Considere o problema PARTIÇÃO com $S = s_1, \dots, s_n$, e considere o problema MOCHILA com

$$W = V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \text{ e } w_i = v_i = s_i \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Suponha que exista uma solução para PARTIÇÃO, ou seja, um subconjunto $S' \subset S$ tal que

$$\sum_{i \in S'} s_i = \sum_{i \in S \setminus S'} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Se considerarmos que os índices de S' são os itens escolhidos para a mochila, então temos que

$$\sum_{i \in S'} w_i = \sum_{i \in S'} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i = W \implies \sum_{i \in S'} w_i \le W.$$

Analogamente, também temos que

$$\sum_{i \in S'} v_i = \sum_{i \in S'} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i = V \implies \sum_{i \in S'} v_i \ge V.$$

Logo, S' é uma solução para MOCHILA.

($\Leftarrow$) Considere uma solução S' para MOCHILA, ou seja, um subconjunto $S' \subset \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\sum_{i \in S'} w_i \le W \text{ e } \sum_{i \in S'} v_i \ge V.$$

Se considerarmos que S' é a partição desejada de PARTIÇÃO e $W = V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i$, então temos que

$$\sum_{i \in S'} w_i = \sum_{i \in S'} s_i \le W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \text{ e } \sum_{i \in S'} v_i = \sum_{i \in S'} s_i \ge V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

As expressões acima implicam que

$$\sum_{i \in S'} s_i \begin{cases} \ge \\ \le \end{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \implies \sum_{i \in S'} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Seja $S'' = \{1, \dots, n\} \setminus S'$, ou seja, a outra partição que sobrou de $\{1, \dots, n\}$. Então

$$\sum_{i \in S'} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \implies \sum_{i \in S''} s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \implies \sum_{i \in S''} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Como as partições tem a soma igual, então S' também é solução para PARTIÇÃO. Logo, está provada a redução, e portanto MOCHILA é NP-completo.