# MAC0338 - Entrega da lista 8

## Exercício 3

Uma fórmula booleana $\mathcal{C}$ sobre um conjunto $X$ de variáveis booleanas (não necessariamente em CNF) é uma tautologia se toda atribuição a $X$ satisfaz $\mathcal{C}$. O problema tautologia consiste em, dado $X$ e $\mathcal{C}$, decidir se $\mathcal{C}$ é ou não uma tautologia. Prove que o problema tautologia está em coNP.

### Resposta:

Vamos provar que o problema TAUT (tautologia) está em coNP. Podemos provar, equivalentemente, que o complemento de TAUT (ou seja, $\overline{\text{TAUT}}$) está em NP. O problema $\overline{\text{TAUT}}$ consiste nas fórmulas booleanas que não são tautologias. Para verificar que uma fórmula não é uma tautologia, basta encontrar uma atribuição que a falsifique. Existem algoritmos que fazem essa verificação **em tempo polinomial**. Logo, $\overline{\text{TAUT}}$ está em NP, o que implica que TAUT está em coNP.

# Exercício 6

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se quaisquer dois vértices de $S$ não são adjacentes. Ou seja, não há nenhuma aresta do grafo com as duas pontas em $S$. O problema IS consiste no seguinte: dado um grafo $G$ e um inteiro $k \geq 0$, existe um conjunto indepentente em $G$ com $k$ vértices? Mostre que o problema IS é NP-completo. **Não** pode usar o fato que o problema CLIQUE é NP-completo, mas pode se inspirar na prova deste teorema.

## Resposta:

Vamos mostrar que o problema IS é tanto NP quanto o problema NP-completo 3-SAT pode ser reduzido para IS.

Primeiramente, vamos provar que o problema IS está em NP apresentando um algoritmo polinomial que, dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de vértices $S$ (um certificado), verifica se $S$ é independente. O algoritmo consiste em verificar se existe aresta para cada par de vértices em $S$. Se não existir, então $S$ é independente. Caso contrário, $S$ não é independente. A complexidade desse algoritmo é $O(|V| + |E|)$, polinomial.

Agora, vamos provar que 3-SAT $\leq_P$ IS. Seja $\phi$ uma fórmula booleana em **3-CNF** com $n$ variáveis e exatamente $k$ cláusulas. Considere um grafo $G = (V, E)$. Cada vértice de $G$ representa um literal de cada cláusula de $\phi$. Vamos criar as arestas de forma que

- os 3 vértices de literais de cada cláusula sejam ligados 2 a 2, formando um triângulo - é necessário que exatamente 1 literal de cada cláusula seja verdadeiro para garantir a independência do conjunto;
- os vértices de literais complementares sejam ligados (ou seja, todos os $x_i$ e $\neg x_i$) - isso garante que $x_i$ e $\neg x_i$ nunca serão simultaneamente verdadeiros ao escolher um conjunto independente.

Agora vamos provar que $\phi$ é satisfatível $\iff$ $G$ tem um conjunto independente com $k$ vértices.

($\Rightarrow$) Seja $\alpha$ uma atribuição que torna $\phi$ verdadeira. Logo, todas as cláusulas são verdadeiras. Como temos exatamente $k$ cláusulas e queremos montar um conjunto independente $S$ com exatamente $k$ vértices, então exatamente 1 literal em cada cláusula é verdadeiro para que todas as cláusulas sejam verdadeiras. Pelas propriedades citadas anteriormente, não há conflito de literais complementares. Logo, $S$ é um conjunto independente.

($\Leftarrow$) Seja $S$ um conjunto independente com $k$ vértices. Como $S$ é independente, não há conflito de literais complementares. Como $S$ tem $k$ vértices e temos $k$ cláusulas em $\phi$, então exatamente 1 literal em cada cláusula é verdadeiro para que todas as cláusulas sejam verdadeiras. Como $S$ é independente, então todas as cláusulas são verdadeiras. Logo, $\phi$ é satisfatível.

Logo, 3-SAT $\leq_P$ IS, o que implica que IS é NP-completo.

## Exercício 9

Mostre que o problema abaixo é NP-completo.

> **Problema** MOCHILA: Dado um número $W$, um número $V$, um número inteiro positivo $n$, uma coleção de números $w_1, \ldots, w_n$, e uma coleção de números $v_1, \ldots, v_n$, decidir se existe um subconjunto $S$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que
>
> $$\sum_{i \in S} w_i \leq W \text{ e } \sum_{i \in S} v_i \leq V.$$

Pode assumir que o problema PARTIÇÃO (Exercício 8) é NP-completo.

### Resposta: