MAC0338 - Entrega da lista 1

Gabriel Haruo Hanai Takeuchi - NUSP: 13671636

Exercício 1(b)

Lembre-se que $\lg n$ denota o logaritmo na base 2 de n. Prove os seguintes itens usando a definição de notação $\mathcal{O}$ e escreva explicitamente a escolha de constantes c e n_0.

(b) $\log_{10} n$ é $\mathcal{O}(\lg n)$

Proof. Vamos provar que existem constantes positivas n_0 e c tal que, para todo $n \geq n_0$, $\log_{10} n \leq c \lg n$. Note que

$$\log_{10} n = \frac{\lg n}{\lg 10} = \frac{1}{\lg 10} \lg n \implies \log_{10} n \leq \frac{1}{\lg 10} \lg n.$$

Como $\log_{10} n = \dfrac{1}{\lg 10} \lg n$ é uma igualdade, podemos fixar $c = \dfrac{1}{\lg 10}$ e $n_0 = 1$, por exemplo, e está provado. $\square$

Exercício 2(d)

Prove os seguintes itens usando a definição de notação $\mathcal{O}$ e escreva explicitamente a escolha de constantes c e n_0.

(d) $n = \mathcal{O}(2^n)$

Proof. Vamos provar que $n = \mathcal{O}(2^n)$, ou seja, que existem constantes positivas c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, $n \leq c\ 2^n$. Note que para qualquer $c \geq 1$ e $n_0 \geq 0$, é verdade que $n \leq 1 \cdot 2^n$. Vamos provar rapidamente por indução em n, fixando $c = 1$.

Base: Para $n = 0$, $0 \leq 1 \cdot 2^0 = 1$.

Passo: Fixe $n \geq 1$ e suponha verdade para $n - 1$. Então

$$n - 1 \leq 1 \cdot 2^{n-1} \implies 2n - 2 \leq 2^n \implies n \leq \frac{2^n + 2}{2} \leq 2^n.$$

Portanto, para $c = 1$ e $n_0 = 0$, está provado.

$\square$

Exercício 3(b)

Prove ou dê um contra-exemplo para as afirmações abaixo:

(b) Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$, então $f(n) = \Theta(h(n))$.

Proof. Note que temos $f(n) = \Theta(g(n))$, ou seja, existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, $c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$. Note também que $g(m) = \Theta(h(m))$, ou seja, existem constantes positivas k_1, k_2 e m_0 tais que, para todo $m \geq m_0$, $k_1\, h(m) \leq g(n) \leq k_2\, h(m)$. Combinando as afirmações acima, temos que

$$c_1(k_1\, h(m)) \leq c_1\;\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n) \leq c_2(k_2\, h(m)).$$

Logo, adotando as constantes $t_1 = c_1\, k_1$, $t_2 = c_2\, h_2$ e $v_0 = n_0 + m_0$ (isto pois v_0 deve ser pelo menos maior que n_0 e maior que m_0), então temos que, para todo $v \geq v_0$,

$$t_1 h(v) \leq f(v) \leq t_2 h(v)$$

o que implica que $f(v) = \Theta(h(v))$, como queríamos.

□

Exercício 4(a)

Prove os seguintes itens. Para o item (a) escreva explicitamente a escolha de constantes c e n_0.

(a) $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ é $\Theta(n^{11})$

Vamos separar a prova em duas partes:

Parte I: $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ é $\mathcal{O}(n^{11})$.

Vamos provar que existem constantes positivas c e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $\sum_{i=1}^{n} i^{10} \leq c\, n^{11}$. Note que

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = 1 + 2^{10} + \cdots + n^{10} \leq \underbrace{n^{10} + n^{10} + \cdots + n^{10}}_{n \text{ termos}} = n \cdot n^{10} = n^{11}.$$

Logo, temos as constantes $n_0 = 1$ e $c = 1$, como queríamos.

Parte II: $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$ é $\Omega(n^{11})$.

Vamos provar que existem constantes positivas c e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $\sum_{i=1}^{n} i^{10} \geq c\, n^{11}$. Note que