MAC0338 - Entrega da lista x

Exercício 1

Lembre-se que $\lg n$ denota o logaritmo na base 2 de n. Prove os seguintes itens usando a definição de notação $\mathcal{O}$ e escreva explicitamente a escolha de constantes c e n_0.
(a) 3^n não é $\mathcal{O}(2^n)$

Proof. Vamos provar por contradição. Portanto, assuma que 3^n seja $\mathcal{O}(2^n)$. Logo, há constantes inteiras positivas c e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, então $\boldsymbol{3^n \leq c\,2^n}$.
Note que, para $n > \dfrac{\lg c}{\lg \frac{3}{2}}$, temos

$$n > \frac{\lg c}{\lg \frac{3}{2}} \implies n \lg \frac{3}{2} > \lg c \implies \lg \left(\frac{3}{2}\right)^n > \lg c \implies \frac{3^n}{2^n} > c \implies \boldsymbol{3^n > c\,2^n},$$

uma contradição. Portanto, 3^n não é $\mathcal{O}(2^n)$.

$\square$

(c) $\lg n$ é $\mathcal{O}(\log_{10} n)$

Proof. Note que

$$\lg n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log_{10} 2} \log_{10} n \implies \lg n \leq \frac{1}{\log_{10} 2} \log_{10} n$$

Como temos uma igualdade, podemos adotar $c = \dfrac{1}{\log_{10} 2}$ e $n_0 = 1$, e está provado.

$\square$

Exercício 2

Prove os seguintes itens usando a definição de notação $\mathcal{O}$ e escreva explicitamente a escolha de constantes c e n_0.
(a) $n^2 + 10n + 20 = \mathcal{O}(n^2)$

Proof. Vamos provar que existem constantes positivas c e n_0 tais que, para $n \geq n_0$, então $n^2 + 10n + 20 \leq c\,n^2$. Adote $c = (1 + 10 + 20)$. Então, temos que

$$c\,n^2 = (1 + 10 + 20)n^2 = n^2 + 10n^2 + 20n^2 \geq n^2 + 10n + 20$$

para todo $n \geq 1 = n_0$. Como explicitamos as constantes, está provado.

$\square$

(b) $\lceil n/3 \rceil = \mathcal{O}(n)$

Proof. Vamos provar que existem constantes positivas c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, então $\lceil n/3 \rceil \leq c\,n$. Note que $\lceil n/3 \rceil \leq n/3 + 1$. Adote $c = (1 + 1)$ e perceba que

$$c\,n = (1 + 1)\,n = n + n \geq \frac{n}{3} + 1$$

para todo $n \geq 1 = n_0$. Como as constantes foram explicitadas, então está provado.

$\square$

(e) $n/1000$ não é $\mathcal{O}(1)$

Proof. Vamos supor por contradição que $n/1000$ é $\mathcal{O}(1)$, ou seja, que existem constantes positivas c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, temos $\boldsymbol{n/1000 \leq c \cdot 1}$. Ora, mas para qualquer $n > 1000c$, temos $\boldsymbol{n/1000 > c}$, uma contradição. Portanto, $n/1000$ não é $\mathcal{O}(1)$.

$\square$

(e) $n^2/2$ não é $\mathcal{O}(n)$

Proof. Vamos supor por contradição que $n^2/2$ seja $\mathcal{O}(n)$. Logo, há constantes positivas c e n_0 tais que, para todo $n \geq n_0$, então $n^2/2 \leq cn$. Isso implica que $\boldsymbol{n/2 \leq c}$. Ora, mas para todo $n > 2c$ temos $\boldsymbol{n > c}$, uma contradição. Logo, $n^2/2$ não é $\mathcal{O}(n)$.

$\square$

Exercício 3

Proof. $\square$

Exercício 4

Proof. $\square$