Теоретическая механика (заметки)

В. А. Клячко

19 ноября 2022 г.

Оглавление

Введение

Основы математического подхода

{cha:math_begin}

B1.1 Lorem

{sec:lorem}

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

$$x + y = 4. \tag{1}$$

{eq:example1}

Если верить формуле (1), то $x = y = 2$.

$$i + j = k \tag{2}$$
$$j + k = i \tag{3}$$
$$k + i = j \tag{4}$$
$$i + j + k = ? \tag{5}$$

Основы теории векторов

{cha:vec}

Определение 1. С точки зрения теоретической механики вектор — это физическая величина, которая помимо скалярного (численного) значения имеет *направление*. Помимо *свободных* векторов в механике применяют векторы *скользящие* и *закреплённые*.

Примем стандартные обозначения вектора $\mathbf{a}$, его длины $|\mathbf{a}|$ и вектора по двум точкам $\overrightarrow{AB}$. Иногда для ясности будем использовать обозначение $\vec{a}$. Угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем обозначать либо так $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, либо для ясности $\cos(\widehat{\mathbf{ab}})$. Их скалярное произведение обозначим как $\mathbf{ab}$ или $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, либо $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если требуется ясность.

Для определения вектора необходимо задать систему координат. В дальнейшем мы будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$. Различают два рода прямоугольных координат: правую (английскую, положительно ориентированную) и левую (французскую). В правой системе, которую мы в основном будем использовать, вращение от оси O кратчайшим образом к оси у вокруг оси Oz происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси Oz[1].

Вектор на графике принято изображать стрелкой, чья длина равна его скалярному значению, а направление совпадает с направлением вектора. В качестве примера скалярных величин можно привести массу, температуру, энергию и т. д. Примером векторной величины в физике служат сила и скорость, которые помимо численной характеристики имеют направление.

Рассмотрим сначала вектор как абстрактную величину. Точку A вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. Рис. В2.1) назовём *точкой приложения* вектора, а точку B его *концом*.

Определение 2. *Свободными* векторами представляются векторные физические величины, не изменяющиеся при переходе от одной точки пространства к любой другой. Такой вектор характеризует физическую величину во всем исследуемом пространстве. Так, при поступательном движении твердого тела скорости в каждой точке тела равны между собой по величине и по направлению. Скорость такого движения твердого тела задается одним свободным вектором.

[1] В левой системе координат соответственно *по* часовой стрелке

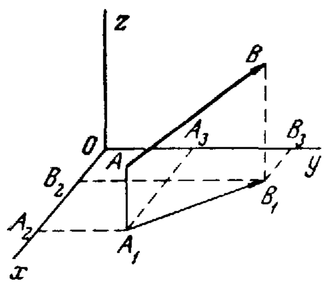


Рис. B2.1. Изображение вектора на графике. {fig:vec01}

Скользящие векторы представляют собой векторные величины, остающиеся неизменными вдоль *линии действия*[2] вектора и изменяющиеся при переходе к другой точке пространства, не лежащей на линии действия. Например, сила, приложенная к точке A твердого тела, сообщит последнему вполне определенное движение из данного его состояния. Такое же движение сообщит эта сила, будучи приложенной к произвольной точке B, расположенной на той же линии действия. Но если эту же силу приложить к точке C твердого тела, не принадлежащей данной линии действия, она сообщит телу уже совсем иное движение. Таким образом, по своему действию на твердое тело сила должна рассматриваться как скользящий вектор.

Закреплённые векторы представляют векторные физические величины только в данной точке пространства. В других точках пространства они либо имеют уже другое значение, либо вообще теряют смысл. Такими векторами являются, например, вектор скорости движущейся материальной точки и вектор силы, приложенной к деформируемому телу.

Рассмотрим последовательно эти три категории векторов и изучим их свойства.

B2.2 Свободный вектор

{sec:free_vec}

B2.2.1 Основные определения

{sub:main_defs_free_vec}

Свободные векторы подробно рассматривались на курсе математики. Поскольку точка начала вектора здесь не имеет значения, как правило, свободные векторы рассматриваются и изображаются с точкой приложения в начале декартовых координат.

В качестве входных данных свободный вектор имеет только направление и длину. Направление (без длины) можно задать с помощью т. н. *направляющих косинусов* — косинусов углов, которые образует вектор с положительными полуосями координат. Из самых разных соображений очевидно

[2]Прямая, построенная на векторе

получаем соотношение

{napr_cos01}
$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1, \tag{6}$$

из которого сразу следует, что для определения направления вектора с точностью до знака одного из направляющих косинусов достаточно задать любые два его направляющих косинуса. Тогда, определив длину, из трёх независимых параметров получим два вектора, отличающихся знаком неизвестного косинуса в формуле (6).

Можем устранить неоднозначность, задав и длину, и направление с помощью алгебраических значений проекций вектора на оси Ox, OyиOz (его координат). *Алгебраическим значением* проекции вектора на ось мы называем отношение вектора проекции к единичному вектору оси[3], т. е. его длину со знаком, зависящим от направления оси. Саму проекцию (а когда понятно из контекста, и её алгебраическое значение) вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ будем обозначать так: $\mathbf{a_b}$.

B2.2.2 Сложение свободных векторов {sub:add_vec}

Нам уже известно, как складывать векторы геометрически (результатом будет вектор с началом в начале первого и концом в конце второго) и аналитически (складывая соответствующие координаты)[4].

Важную роль играло в курсе аналитической геометрии утверждение о линейности ортогональной проекции, в первую очередь о её аддитивности (сумма проекций равна проекции суммы).

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})_\mathbf{A} = \mathbf{B_A} + \mathbf{C_A} \tag{7}$$ {eq:pr_sum}

До него можно дойти, опять, как геометрическим путём (см. рис. B2.2), так и аналитическим.

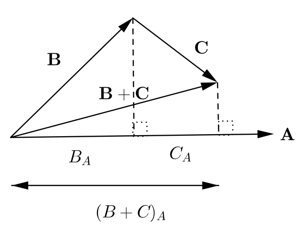


Рис. B2.2. {fig:pr_sum}

Рассмотрим длину суммы двух векторов. Исходя из длины как корня скалярного квадрата, а также из линейности (дистрибутивности) скалярного произведения, которая, в свою очередь, в евклидовой геометрии вытекает

[3] Осью называется прямая с заданным направлением и единицей измерения длин.

[4] Впрочем, здесь и далее нас, конечно, в первую очередь интересует геометрический подход

из тождества (7), получаем

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab}\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) + \mathbf{b}^2}. \qquad (8)$$ {len_sum_vec}

То же равенство можно было бы получить исходя из евклидовой геометрии с помощью теоремы косинусов.

B2.2.3 Инварианты системы свободных векторов и операции произведения

{sub:inv_vec}

Рассмотрим те свойства свободных векторов, которые не зависят от выбора прямоугольной системы координат с фиксированной единицей измерения, и назовём их *инвариантными* по отношению к преобразованию системы координат (за исключением зеркального отображения[5]), а сами величины — *инвариантами.* Свойство инвариантности для физики по понятным причинам гораздо важнее, чем для математики. Перечислим некоторые инварианты:

{it:inv_len_vec}

а) Величина вектора. При изменении системы координат меняются проекции вектора на оси (координаты), однако длина $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ вектора a является инвариантом. В евклидовом пространстве строго это вытекает из теоремы Пифагора и простейших заключений, хотя сама инвариантность геометрической фигуры и её свойств, таких как длина при фиксированной системе измерения, очевидно следует из первичности фигур в евклидовом пространстве (существование фигуры — существования длины у некоторых фигур — существование базисов — подсчёт длины через базис).

б) Скалярное произведение. Угол (а значит, и его мера, которая не зависит от СК, а также её косинус), как любая геометрическая фигура, инвариантен относительно любой системы координат. Инвариантность длин нам известна из пункта B2.2.3. Исходя из формулы вычисления скалярного произведения $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|cos(\widehat{\mathbf{ab}})$, делаем заключение об его инвариантности. На всякий случай: *координатная запись* скалярного произведения в ортонормированной системе координат выглядит как $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_j b^i = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3$.

в) Векторное произведение. Мы знаем, что *векторным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, образующий с ними прямые углы, направленный так, что все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют положительно ориентированную (правую) тройку и имеющий длину, равную $|\mathbf{c}| = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{ab}})$ площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$[6]. Если учесть первые два пункта, то в этом определении нас заинтересует только момент с положительной ориентацией

[5] Можно строго доказать, что зеркального отображения СК невозможно добиться непрерывным преобразованием, какое только и имеет место в физике.

[6] Эту формулу из геометрии легко получить, если вспомнить, что число $|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{ab}})$ равно высоте параллелограмма, проведённой к $\mathbf{a}$

тройки векторов. Однако при отсутствии отражений ориентация наших двух систем координат будет совпадать. Тройка векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ по отношению к ним *обеим* будет ориентирована либо так же, либо противоположно (если наши системы координат отрицательно ориентированы) — третьего не дано, направление первого вектора при движении ко второму идёт по часовой стрелке или против неё (случай, когда они совпадают, очевиден). Из определения сразу вытекает *антикоммутативность* векторного произведения: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Его дистрибутивность доказывается несколько сложнее, однако с её помощью, разложив векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в линейную комбинацию и применив группировку, мы легко получим *координатное выражение* векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь операции, производные от обсужденных — *смешанное произведение* и *двойное векторное произведение*. Само собой, они тоже являются инвариантами.

Смешанное произведение. Как известно из курса аналитической геометрии, смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на результат векторного произведения векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Из координатных выражений предыдущих операций сразу получаем *координатное выражение смешанного произведения*:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = a_i \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]^j = a^1 \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} b^3 & b^1 \\ c^3 & c^1 \end{vmatrix} + a^3 \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Поскольку при двух перестановках строк определитель не меняется, имеет место следующее свойство смешанного произведения:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Отсюда в том числе становится ясно, почему в обозначении смешанного произведения отсутствуют квадратные скобки. Действительно, раз скалярное произведение обладает свойством симметричности, то $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

Двойное векторное произведение. Менее известный вид произведения трёх векторов векторно умножает первый вектор на векторное произведение второго и третьего:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}_1]].$$

Вектор $\mathbf{Q}$ (на рис. В2.2.3 не указан) перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{m}$. В свою очередь вектор $\mathbf{m}$ перпендикулярен к плоскости π, на которой расположены **b** и **c**. Отсюда следует, что **Q** лежит на плоскости π и, значит, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов **b** и **c**, т. е.

$$\exists \beta, \gamma \colon \mathbf{Q} = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}. \tag{9}$$ {eq:vec02}

Таким образом, однозначное определение **Q** теперь зависит от двух параметров. В плоскости π введём вектор $\mathbf{c}_1$, перпендикулярный вектору **c**. Скалярно умножая равенство (9) на вектор $\mathbf{c}_1$, находим

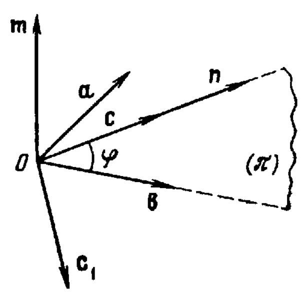
$$(\mathbf{Q}, \mathbf{c}_1) = \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Подставим сюда значение **Q**:

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{c}_1) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{c}_1 \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{c}_1, \mathbf{a} \rangle.$$

Найдём значение этого скалярного произведения. Для этого сначала вычислим длину $|[\mathbf{m}, \mathbf{c}_1]|$

$$|\mathbf{n}| = |[\mathbf{m}, \mathbf{c}_1]| = |\mathbf{m}||\mathbf{c}_1| = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|sin(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})|\mathbf{c}_1|.$$



{fig:dbl_vec_prod} Рис. B2.3.

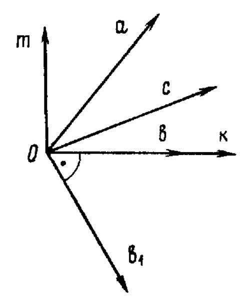


Рис. B2.4.

Вектор $[\mathbf{m}, \mathbf{c}_1]$ коллинеарен вектору **c**, поскольку оба перпендекулярны плоскости $\mathrm{Span}\{\mathbf{m}, \mathbf{c}_1\}$[7].

B2.3 Скользящий вектор

{sec:sliding_vec}

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

[7]То есть плоскости, построенной на неколлинеарных векторах **m** и $\mathbf{c}_1$

Часть I

Кинематика

Простейшие движения твёрдого тела

0.4 Поступательное движение твёрдого тела

Некоторые из свойств поступательного движения тела:

1. Траектории точек конгруэнтны, то есть одинаковы и могут быть получены одна из другой параллельным переносом;

2. Скорости всех точек одинаковы;

3. Ускорения всех точек одинаковы.

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: чтобы задать движение и определить кинематические характеристики тела, совершающего поступательное движение, достаточно задать движение одной его любой точки (например полюса A, т. е. $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$) и найти ее кинематические характеристики.

Таким образом, само понятие тела здесь приближается к понятию материальной точки. В том числе степень свободы при разных условиях здесь совпадает со степенью свободы материальной точки.

0.5 Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Определение 3. *Вращением* твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором существует прямая, остающаяся неподвижной в течение всего времени движения тела.

Эта прямая называется *осью вращения* твёрдого тела. Очевидно, что для её существования необходимо и достаточно существование двух неподвижных точек, поскольку любая точка, находящаяся с ними на одной прямой, учитывая сохранение расстояний между точками, не может находиться в течение движения в другом месте (сферы имеют внешнее касание).

Для определения степени свободы сделаем следующие построения: построим НСК $Oxyz$ так, чтобы ось Oz совпадала с осью вращения. Построим теперь ПСК $OXYZ$, совпадающую с $Oxyz$. Положение тела можно в точности определить с помощью двугранного угла φ между плоскостями Oxz и OXZ.

Из этих соображений мы выяснили, что *степень свободы тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна единице.*

Определение 4. Уравнение, определяющее угол φ в зависимости от времени t:

$$\varphi = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – дважды дифференцируемая [непрерывная] функция, называют *законом вращения твёрдого тела* вокруг неподвижной оси.

Замечание. Впрочем, φ может быть углом между любыми двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, где одна неподвижна, а другая подвижна и привязана к телу.