Distribusi Data, Tendensi Sentral, dan Dispersi (Variabilitas)



Topik

- Menghitung tendensi sentral
- + Membedakan jenis-jenis distribusi data
- + Melakukan uji normalitas data
- + Menginterpretasi hasil uji normalitas data
- + Menginterpretasi boxplot dan violin plot





Menghitung Tendensi Sentral (Mean, Median, Modus)

Nilai pusat dari sekumpulan data

Fungsi mencari tendensi sentral: Mencari nilai yang mewakili sekumpulan data Beberapa ukuran pemusatan/ ukuran sentral yaitu :

- 1. Rata-rata hitung (mean)
- 2. Rata-rata terboboti
- 3. Median
- 4. Modus
- 5. Rata-rata ukur
- 6. Rata-rata harmonis

Rata-Rata Hitung

Maka rata-rata hitungnya adalah :

$$rata - rata \ hitung = \frac{4 + 7 + 3 + 5 + 6 + 9 + 8 + 6 + 3 + 2 + 5 + 6 + 9}{13} = \frac{73}{13} = 5,615$$

Atau jika dirumuskan menjadi : (rumus untuk data individu)

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Rata-Rata Hitung Untuk Data Berkelompok

Nilai Ujian	Nilai Tengah	Jumlah Mahasiswa
20,00 - 29,99	24,995	4
30,00 - 39,99	34,995	9
40,00 - 49,99	44,995	25
50,00 - 59,99	54,995	48
60,00 - 69,99	64,995	20
70,00 - 79,99	74,995	5
Jumlah		111

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i f_i$$
 Dimana : m_i = nilai tengah f_i = frekuensi

Rata-Rata Hitung Untuk Data Berkelompok

Nilai Ujian	m_i	f_i	$m_i f_i$
20,00 - 29,99	24,995	4	99,98
30,00 - 39,99	34,995	9	314,995
40,00 - 49,99	44,995	25	1124,875
50,00 - 59,99	54,995	48	2639,76
60,00 - 69,99	64,995	20	1299,9
70,00 - 79,99	74,995	5	374,975
Jumlah		111	5854,445

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i f_i = \frac{1}{111} (5854,445) = 52,74$$

Median

Median disebut juga nilai tengah

Maka mediannya adalah :

Median Untuk Data Individu

```
Jika jumlah data ganjil ( n ganjil )
            n = 2k - 1
       misal: jumlah data n = 111
       n = 2k - 1
  111 = 2k - 1
  k = 56 (median terdapat pada data ke-56 atau X_{56})
Jika jumlah data genap ( n genap )
            n = 2k - 1
       misal: jumlah data n = 112
       n = 2k - 1
  112 = 2k - 1
  k = 56,5 (median terdapat pada data ke = (X_{56} + X_{57})/2)
```

Median Untuk Data Berkelompok

Nilai Ujian	Nilai Tengah	Jumlah Mahasiswa
20,00 - 29,99	24,995	4
30,00 - 39,99	34,995	9
40,00 - 49,99	44,995	25
50,00 - 59,99	54,995	48
60,00 - 69,99	64,995	20
70,00 - 79,99	74,995	5
Jumlah		111

$$M_d = B + \frac{(n/2) - F}{F_m - F} x i$$

B = tepi bawah kelas dimana kelas median berada

F = frekuensi kumulatif sebelum dimana kelas median berada

 F_m = frekuensi kumulatif dimana kelas median berada

i = interval kelas

Median Untuk Data Berkelompok

Nilai Ujian	f	F kum	Tepi kelas	
20,00 - 29,99	4	4	19,995	
30,00 - 39,99	9	13	29,995	
40,00 - 49,99	25	38	39,995	
50,00 - 59,99	48	86	49,995	
60,00 - 69,99	20	106	59,995	
70,00 - 79,99	5	111	69,995	
Jumlah	111			

$$n/2 = 55,5$$

$$M_d = B + \left(\frac{(n/2) - F}{F_m - F}xi\right) = 49,995 + \left(\frac{(111/2) - 38}{86 - 38}x10\right) = 53,640$$

Modus

Modus adalah nilai yang paling sering muncul

Maka modusnya adalah:

Modus Untuk Data Berkelompok

Nilai Ujian	Nilai Tengah	Jumlah Mahasiswa
20,00 - 29,99	24,995	4
30,00 - 39,99	34,995	9
40,00 - 49,99	44,995	25
50,00 - 59,99	54,995	48
60,00 - 69,99	64,995	20
70,00 - 79,99	74,995	5
Jumlah		111

$$M_o = B + \frac{f_0 - f_{-1}}{(f_0 - f_{-1}) + (f_0 - f_{+1})} x i$$

$$f_o = \text{frekuensi kelas modus}$$

$$f_{-i} = \text{frekuensi sebelum kelas modus}$$

$$f_{+i} = \text{frekuensi sesudah kelas modus}$$

B = tepi bawah kelas modus berada

i = interval kelas

Modus Untuk Data Berkelompok

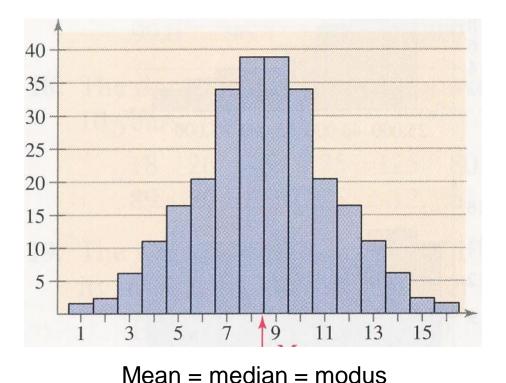
Nilai Ujian	f	Tepi kelas
20,00 - 29,99	4	19,995
30,00 - 39,99	9	29,995
40,00 - 49,99	25	39,995
50,00 - 59,99	48	49,995
60,00 - 69,99	20	59,995
70,00 - 79,99	5	69,995
Jumlah	111	

Kelas modus

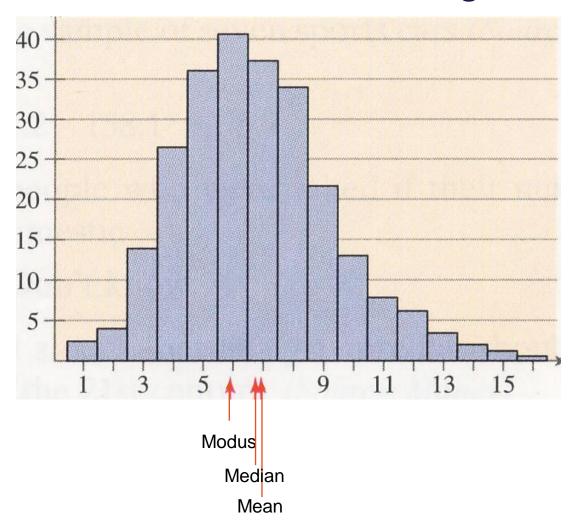
$$M_o = B + \frac{f_0 - f_{-1}}{(f_0 - f_{-1}) + (f_0 - f_{+1})} x i = 49,995 + \frac{48 - 25}{(48 - 25) + (48 - 20)} x 10 = 54,505$$

Hubungan Rata-rata hitung, Median dan Modus

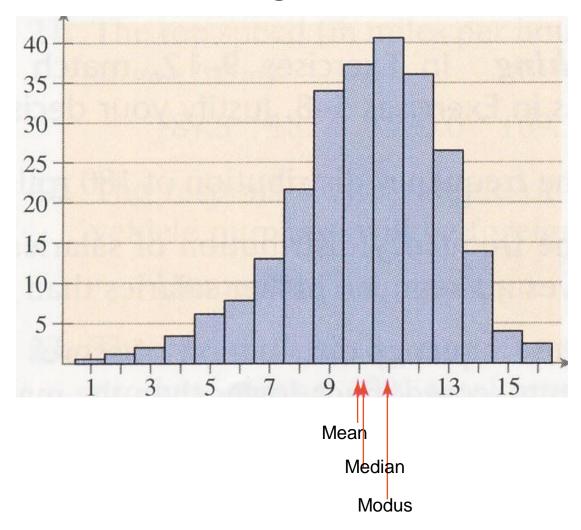
Jika distribusi simetris



+ Jika distribusi tidak simetris menceng ke kanan



+ Jika distribusi menceng ke Kiri



Variabilitas/Dispersi Data (*Range,* IQR, Varians, Standar Deviasi)

RANGE

adalah perbedaan antara entri maksimum dan minimum pada kumpulan data

Range = Nilai Terbesar – Nilai Terkecil

Nilai terbesar : nilai data paling besar Nilai terkecil : nilai data paling kecil

Kelemahan & Kelebihan Range

Kelebihan range yaitu:

- 1. Perhitungannya sederhana
- 2. Perhitungan dapat dilakukan secara cepat
- 3. Sudah dapat menggambarkan ketersebaran data observasi

Kelemahan range yaitu:

- 1. Hasil pengukurannya kasar
- 2. Perhitungan hanya berdasarkan pada dua titik ekstrim dalam distribusi sehingga informasi tentang pola ketersebaran nilainilai observasi tidak didapatkan.

Inter Quartile Range (IQR)

- Merefleksikan variabilitas di tengah 50% pengamatan dalam suatu kumpulan data (middle fifty)
- Inter quartile range (IQR)/Jarak interkuartil dari suatu kelompok data adalah perbedaan antara kuartil pertama dan ketiga
- IQR = Q3 Q1
- Kisaran yang besar dari IQR menunjukkan variabilitas yang besar antara di tengah 50% pengamatan yang relevan dan sebaliknya

4 (7) 9 11 (12) 20

$$IQR = Q3 - Q1 = 12 - 7 = 5$$

5 (8) 10 10 15 (18) 23

$$IQR = Q3 - Q1 = 18 - 8 = 10$$

Example: Finding the inter quartile range

The test scores of 15 employees enrolled in a CPR training course are listed. Find the inter quartile range (IQR) and what can you conclude from the result?

13, 9, 18, 15, 14, 21, 7, 10, 11, 20, 5, 18, 37, 16, 17

Sebagai bahan untuk latihan mandiri

Varians

Ukuran penyebaran dengan melibatkan deviasi kuadrat rata-rata disebut dengan varians

Rumus penghitungan varians untuk data individu adalah:

Cara I. Dengan Rumus Umum

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$$
 dimana : σ^2 = varians (ragam)
$$\frac{X_i}{\overline{X}}$$
 = data ke- i = rata-rata

Cara II. Dengan Rumus Perhitungan Singkat

$$\sigma^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i}^{2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_{i}\right)^{2}}{n}}{n}$$

Rumus penghitungan varians untuk data berkelompok adalah:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} \left(m_i - \overline{X} \right)^2 f_i}{n}$$

Cara II. Dengan Rumus Perhitungan Singkat

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^2 f_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k m_i f_i}{n}\right)^2$$

Cara III. Dengan Cara Coding

dimana :
$$u_i$$
 = coding ke- i i = interval kelas

Cara III. Dengan Cara Coding
dimana:
$$u_i = \text{coding ke-}i$$
 $i = \text{interval kelas}$

$$\sigma^2 = i^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^k u_i^2 f_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k u_i f_i}{n} \right)^2 \right]$$

Deviasi Standar

Deviasi standar merupakan akar dari varians. Deviasi standar dihasilkan melalui proses standarisasi unit-unit pengukuran pada varians. Deviasi standar adalah ukuran penyimpangan dari nilai ratarata

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$Rata-rata = \overline{X}$$

Bahan Diskusi

Budi adalah mahasiswa semester III yang sedang mengambil Mata Kuliah Statistika dan Biologi Dasar. Pada ujian mata kuliah Statistika, Budi mendapatkan nilai 80. Rata-rata nilai ujian mata kuliah Statistika di kelasnya sebesar 92 dengan deviasi standar sebesar 5. Sedangkan untuk mata kuliah Biologi Dasar mendapatkan nilai 65. Rata-rata nilai ujian mata kuliah Biologi Dasar di kelasnya sebesar 60 dengan deviasi standar sebesar 40. Menurut anda, prestasi Budi lebih baik di mata kuliah Statistika atau Biologi Dasar?

Bahan Diskusi

Intervensi yang dilakukan untuk sekelompok balita gizi buruk dilakukan di 2 posyandu (Posyandu A dan B) dengan memberikan makanan tambahan dengan gizi terukur. Setelah intervensi dilakukan selama 6 bulan dilakukan pengukuran peningkatan berat badan balita yang mendapatkan intervensi. Rata-rata kenaikan BB balita di Posyandu A 1,5 kg dengan deviasi standar 0,5 kg. Sedangkan rata-rata kenaikan BB balita di Posyandu B 2 kg dengan deviasi standar 1,5 kg. Bagaimana pendapat anda tentang keberhasilan intervensi pada kedua Posyandu ini?

Distribusi normal, Dist Normal Standar (*Gaussian*) Menghitung Nilai *Critical Z, Skewed distribution*

- Data yang berdistribusi normal adalah data yang pola distribusinya berbentuk lonceng dan simetris, artinya pola data tersebut tidak menceng ke kiri ataupun ke kanan
- Distribusi normal dapat disebut juga sebagai distribusi Gauss.
- Distribusi normal sangat penting untuk dipelajari terutama dalam melakukan analisis data statistika. Dengan data yang diambil secara acak dan berdistribusi normal akan memudahkan dalam melakukan analisis dan meramalkan serta mengambil kesimpulan untuk cakupan yang lebih luas

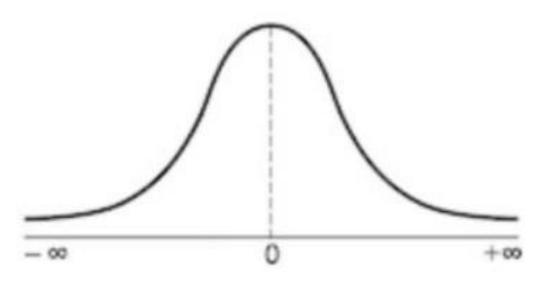
Bagaimana data dikatakan memiliki distribusi normal?

Apabila skewness menunjukkan simetri maka dikatakan data membentuk distribusi normal, apabila kemiringan distribusi data agak condong ke kanan ditunjukkan dengan nilai skewness yang negatif, selanjutnya apabila kemiringan distribusi data condong ke kiri yang ditunjukkan bahwa nilai skewness positif

Ciri-ciri kurva normal:

- Bentuk kurva normal
- Menyerupai lonceng (genta/bel).
- Merupakan suatu poligon yang dilicinkan yang mana ordinat (sumbu tegak) merupakan frekuensi dan absisnya (sumbu alas) memuat nilai variabel.
- Simetris.
- Luas daerah merupakan nilai rata-rata (mean).
- Luas daerah sebelah kiri dan kanan mendekati 50%.
- Memiliki satu modus (disebut juga unimodal)

Bentuk kurva dari data berdistribusi normal yaitu sebagai berikut.



Kurva distribusi normal

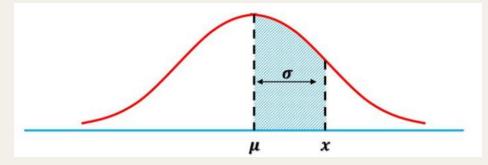
Distribusi normal dipengaruhi oleh dua parameter, yaitu **mean** dan **standar deviasi**.

Mean menentukan lokasi pusat statistik dan standar deviasi menentukan lebar dari kurva normal.

Berdasarkan kurva distribusi normal di atas, distribusi normal memiliki ratarata (mean) sama dengan 0 dan simpangan baku sama dengan 1.

Distribusi Normal dan Distribusi Normal Standard

Distribusi Normal

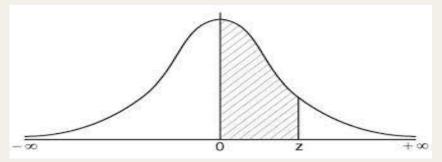


Mempunyai rumus fungsi distribusi normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dengan rata-rata = $\frac{P}{Q}$

Distribusi Normal Standard



Mempunyai fungsi distribusi normal standard

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z)^2}$$

dengan rata-rata = 0 dan standar deviasi = 1

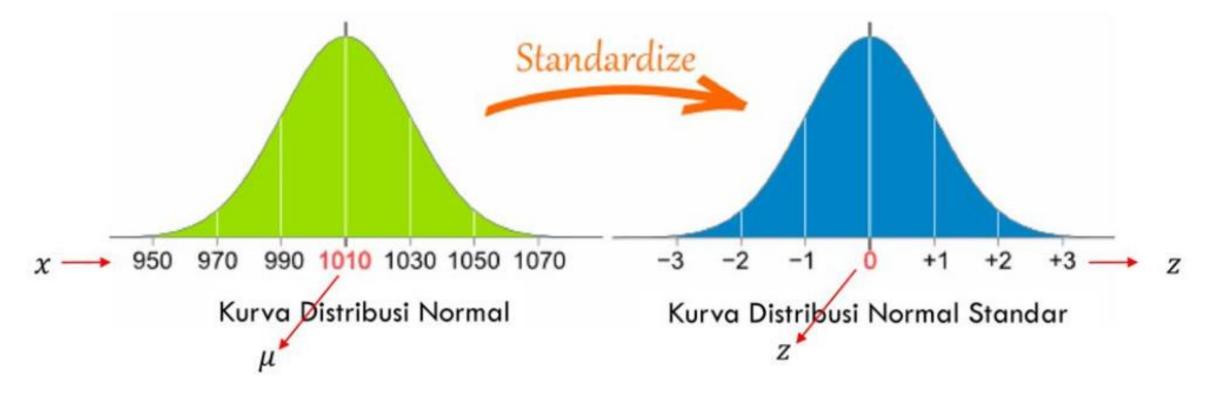
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

x =suatu nilai dari data

 $\mu = \text{rata-rata dari data}$

 $\sigma = \text{standar deviasi dari data}$

Formula diatas adalah untuk mentransformasi kurva normal menjadi Z-score normal standard (menstandarisasi nilai X menjadi Z)



Contoh Transformasi Nilai X ke Z-score

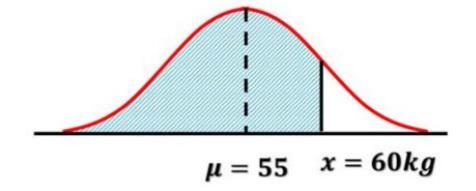
Sekelompok data Berat Badan siswa mengikuti distribusi normal dengan rata-rata 55 dan standar deviasi 5. Maka nilai Z-score untuk Berat Badan 60 adalah

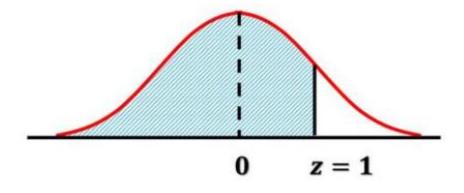
$$x = 60$$

$$\mu = 55 \text{ dan } \sigma = 5$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 55}{5} = 1$$

Fungsi distribusi normal standar ini adalah menstandarisasi nilai pada distribusi normal. Data X pada distribusi normal dapat dalam bentuk satuan apapun (kg, km, mmHg, liter, dll).Namun nilai tersebut dapat distandarisasi pada fungsi distribusi normal standar untuk memudahkan menghitung luasan dibawah kurva (wilayah yang diarsir dibawah kurva) sebagai bentuk menghitung peluang sebuah kejadian dengan menggunakan <u>Tabel Normal Standard</u>. Misalnya Peluang Siswa yang Berat Badannya kurang dari 60 kg.





OGIVE

A Cumulative Frequency Graph (Ogive)

- Merupakan grafik garis yang menampilkan frekuensi kumulatif setiap kelas pada batas kelas atas (upper class boundary)
- Batas atas ditandai pada sumbu horizontal dan frekuensi kumulatif ditandai pada sumbu vertikal

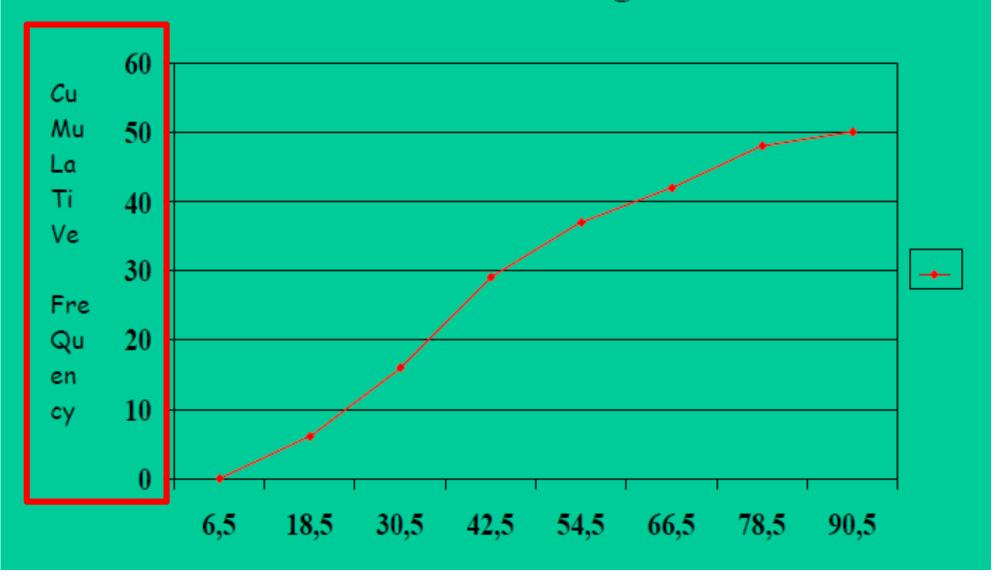
Constructing an ogive

- Buatlah tabel frekuensi yang mencakup frekuensi kumulatif
- Tentukan skala horizontal dan vertikal.
 - Skala horizontal : batas kelas atas
 - Skala vertical: mengukur frekuensi kumulatif
- Plot point yang mewakili batas kelas atas dan frekuensi kumulatifnya yang sesuai
- Hubungkan point/titik dari kiri ke kanan
- Grafik harus dimulai pada batas bawah yang pertama (frekuensi kumulatif adalah nol) dan harus berakhir pada batas atas kelas terakhir (frekuensi kumulatif sama dengan ukuran sampel)

Contructing an ogive

Class Upper Class Boundaries	f	Cumulative Frequencies
18,5	6	6
30,5	10	16
42,5	13	29
54,5	8	37
66,5	5	42
78,5	6	48
90,5	2	50

Internet Usage



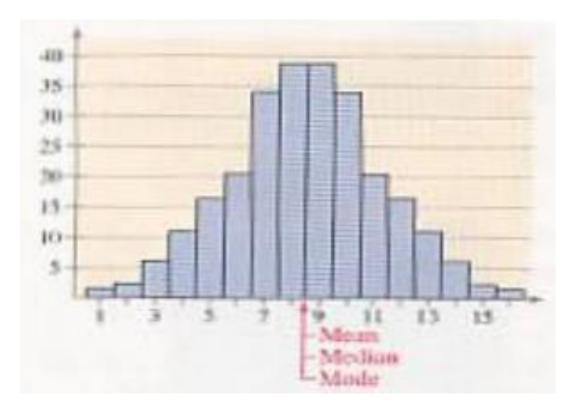
Distribusi Unimodal/Bimodal

BENTUK DISTRIBUSI DATA DAN POLA PADA DATA

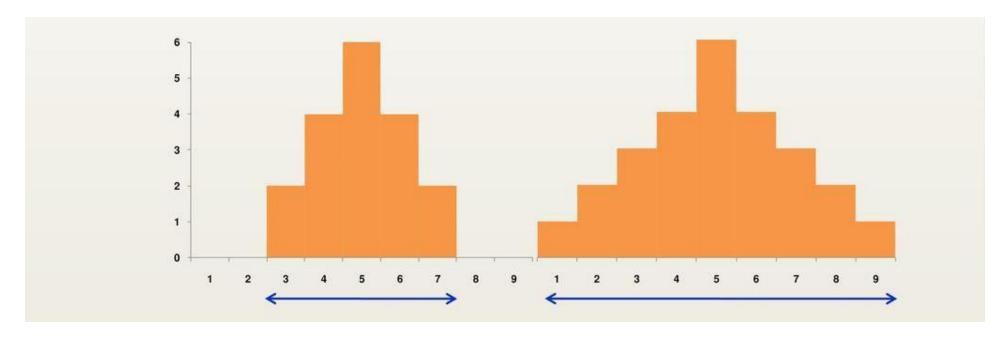
- 1. Distribusi frekuensi disebut simetris jika garis vertikal dapat ditarik di tengah grafik suatu distribusi dan hasilnya membagi separuh di sisi kiri dan separuh di sisi kanan (approximately mirror images)
- 2. Distribusi frekuensi disebut seragam (uniform / rectangular) jika semua nilai data atau kelas-kelas dalam suatu distribusi memiliki nilai / frekuensi yang sama. Distribusi uniform ini juga simetris.
- 3. Distribusi frekuensi disebut menceng (skewed) jika ekor dari salah satu grafik menjulur lebih panjang dari sisi lainnya. Distribusi ini dapat berupa skewed left (menceng kiri) and skewed right (menceng kanan). Menceng kiri: jika ekor menjulur lebih panjang ke kiri, Menceng kanan: jika ekor menjulur lebih panjang ke kanan.

DISTRIBUSI FREKUENSI SIMETRIS

- Membagi setengah dari pusat data
- Memiliki sedikit atau beberapa puncak
 - 1 puncak = uni modal
 - 2 puncak = bimodal
 - Puncak tunggal di tengah = lonceng
- **Simetris pusat**: pusat distribusi data terletak di median dari suatu distribusi
- Simetris menyebar: mengacu variabilitas data (pengamatan punya jangkauan lebar: penyebaran lebih besar, jika pengamatan bergerombol: penyebaran lebih kecil)

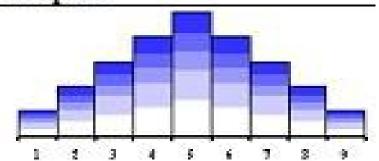


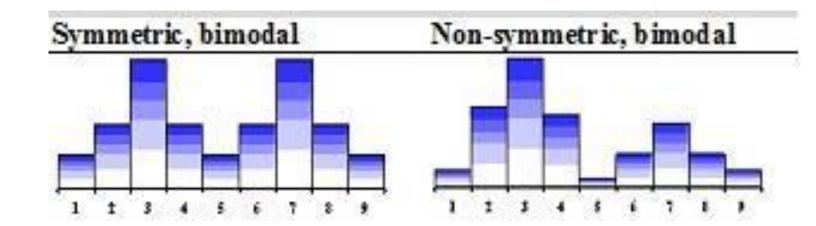
Simetris - Pusat



Simetris Menyebar (penyebaran kecil) Simetris Menyebar (penyebaran lebar)

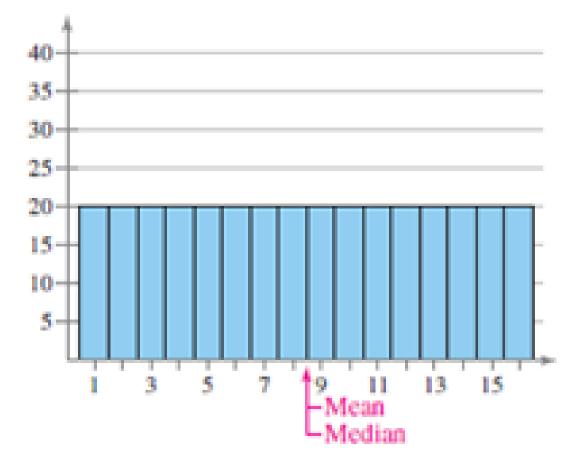
Symmetric, unimodal, bell shaped





DISTRIBUSI FREKUENSI UNIFORM

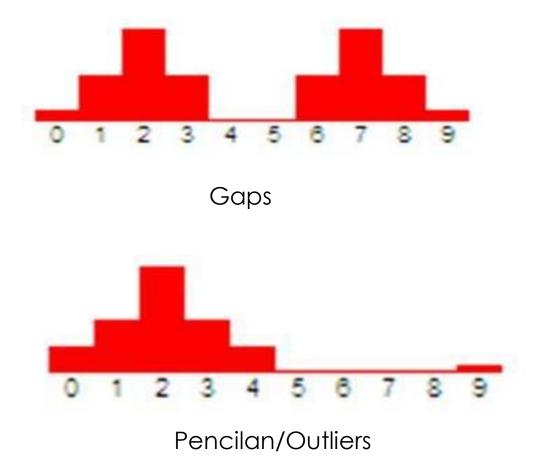
- Observasi dalam suatu data menyebar secara sama di berbagai distribusi.
- Tidak mempunyai puncak



Seragam (uniform)

GRAFIK DISTRIBUSI YANG TIDAK BIASA/TIDAK UMUM

- Gaps: merujuk pada area distribusi dimana tidak ada pengamatan
- Pencilan/Outliers:
 distribusi ditandai nilai nilai ekstrim yang
 berbeda jauh dari
 pengamatan lainnya



Uji Normalitas Distribusi Data (K-S, Shapiro-Wilk, Skewness, dan Kurtosis)

UJI NORMALITAS (KOLMOGOROV-SMIRNOV/K.S.)

Uji Kolmogorov-Smirnov menganalisis perbedaan antara fungsi distribusi empiris sampel dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi referensi. Uji ini juga dapat menganalisis perbedaan fungsi distribusi empiris dari dua kelompok sampel.

UJI NORMALITAS (SHAPIRO-WILK)

Uji Shapiro Wilk pada awalnya sensitif untuk ukuran sampel kurang dari 50 (uji ini baik untuk mendeteksi normalitas pada sampel kecil) dan kemudian berkembang juga sensitif untuk jumlah sampel besar. Uji ini mendeteksi normalitas bentuk kurva berdasarkan skewness (kemiringan) atau kurtosis (keruncingan), atau keduanya.

Manakah yang lebih powerfull antara Uji Kolmogorov Smirnov dan Uji Shapiro-Wilk. Pada umumnya jumlah sampel juga akan menentukan tingkat sensitifitas uji normalitas. Silakan referensi berikut sebagai bahan kajian.

Referensi 1

Referensi 2

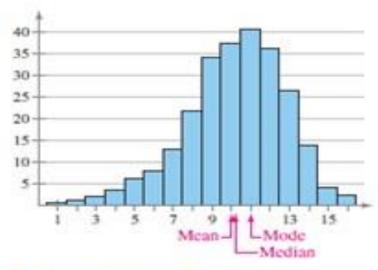
Ukuran Skewness dan Kurtosis

- Tingkat kemencengan kurva dari nilai tengahnya (skewness)
- Tingkat runcingnya sebuah kurva (Kurtosis) : parameter yang menunjukkan sebuah kurva berdistribusi normal/tidak:
 - Leptokurtik
 - Mesokurtik
 - Platikurtik
- Merupakan salah satu parameter untuk menentukan kenormalan sebuah kurva (distribusi peluang)

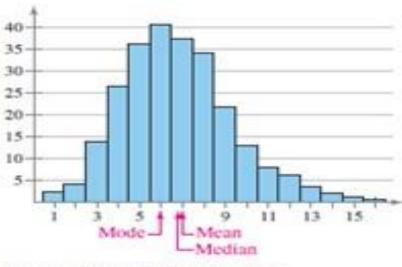
Skewed distribution

Merupakan salah satu parameter untuk menentukan kenormalan sebuah kurva(distribusi peluang)

- Beberapa distribusi memiliki banyak pengamatan di salah satu sisi grafik daripada yang lain
- Distribusi dengan sebagian besar pengamatan di sebelah kiri (nilai yang lebih rendah)
- Distribusi dengan sebagian pengamatan di sebelah kanan (nilai yang lebih tinggi)
- Nilai mean mengikuti ke arah nilai yang lebih rendah atau nilai yang lebih tinggi

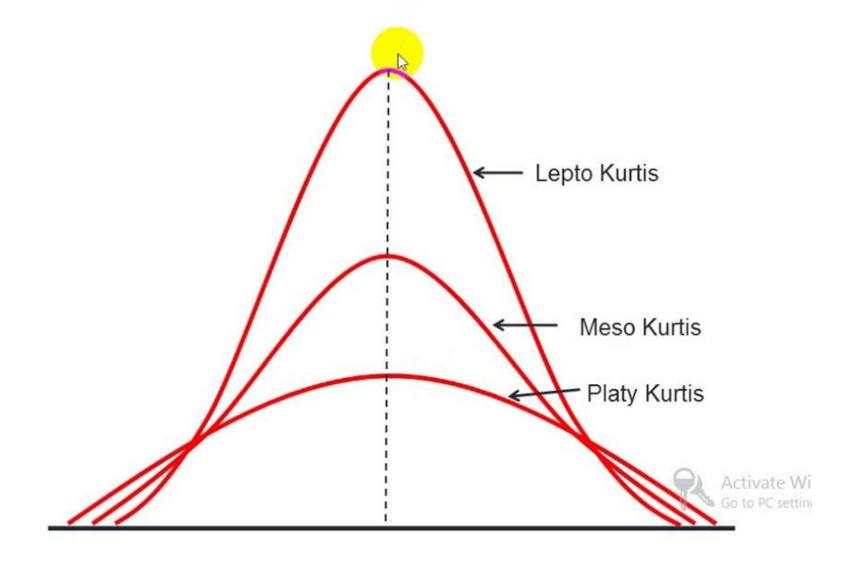


Skewed Left Distribution



Skewed Right Distribution

Tingkat Keruncingan Kurva (Kurtosis)



Boxplot & Violin plot

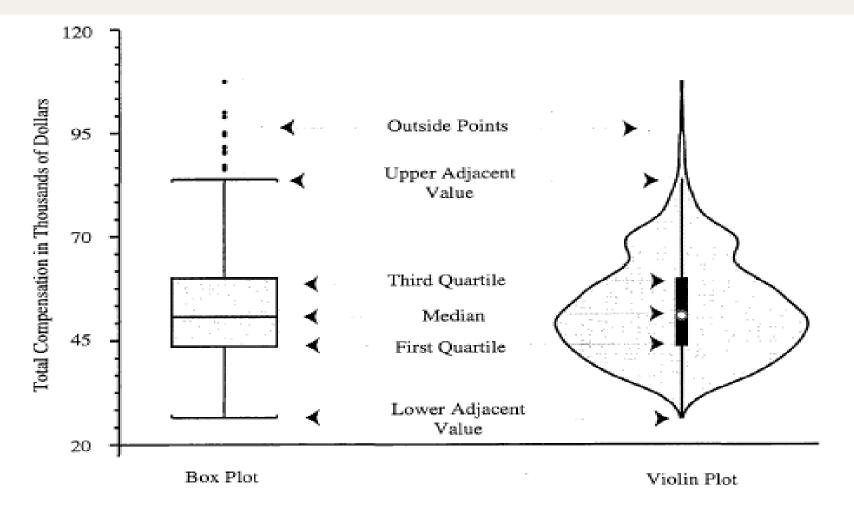


Figure 1. Common Components of Box Plot and Violin Plot. Total compensation for all academic ranks.

A box-and-whisker plot (Box Plot)

- A box and whisker plot: alat analisis data eksplorasi yang menyoroti fitur penting kumpulan data.
- Suatu metode yang digunakan untuk mendeteksi adanya *outliers* pada suatu data.

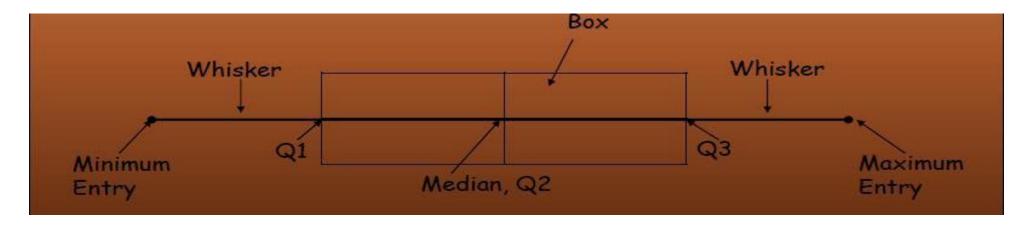
Untuk membuat grafik box and whisker plot: harus mengetahui nilai nilai berikut

1. Nilai minimum
2. Q1
3. Median
4. Q3

5. Nilai Maksimum

Panduan membuat a Box-and-Whisker Plot

- 1. Temukan ringkasan 5 angka dari kumpulan data
- 2. Gambar skala horisontal yang mencakup rentang data
- 3. Plot lima angka (pada poin 1) di atas skala horizontal
- 1. Gambar kotak di atas skala horizontal dari Q1 ke Q3 dan gambarlah garis vertikal di kotak pada Q2
- 2. Gambar Whiskers dari kotak ke entri minimum dan maksimum



Example: Finding a Box-and-Whisker Plot

The test scores of 15 employees enrolled in a CPR training course are listed. Draw a box-and Whisker Plot

13, 9, 18, 15, 14, 21, 7, 10, 11, 20, 5, 18, 37, 16, 17

Solusi

- Urutkan data: 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 20, 21, 37
- Temukan ringkasan 5 angka

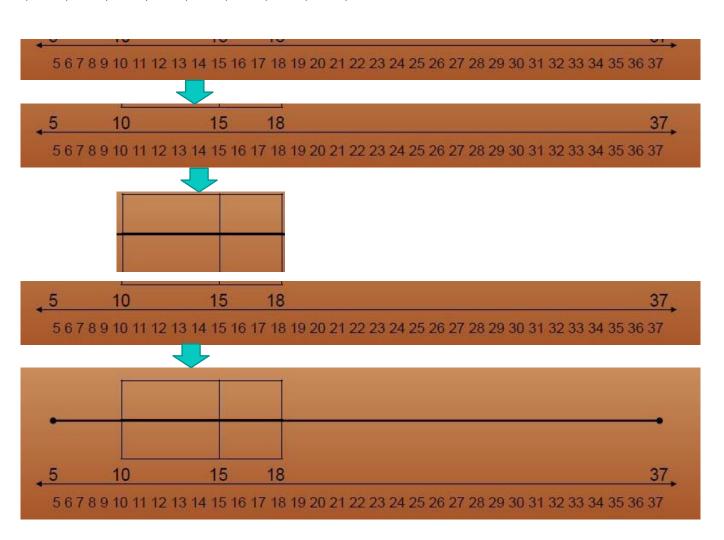
$$-$$
 Minimum $= 5$,

$$-Q1 = 10,$$

$$-Q2 = 15,$$

$$-Q3 = 18$$
,

- Maximum = 37

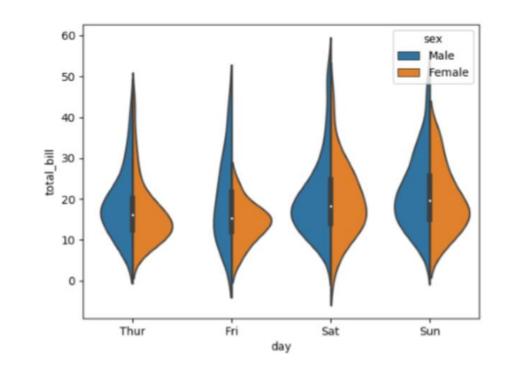


Violin plot

- Tujuan dari violin plot yaitu untuk memudahkan pengguna menganalisis distribusi data yang kontinyu untuk setiap kategori atau membuat perbandingan distribusi antara beberapa kelompok.
- semakin cembung grafik data violin plot yang divisualisasikan maka, kepadatan data peluangnya semakin besar.
- Sebaliknya, semakin pipih grafik data violin plot yang divisualisasikan maka, kepadatan data peluangnya semakin kecil.

Contoh:

- Distribusi total pembayaran dalam seminggu dengan memisahkannya sesuai jenis kelamin.
- Pada violin plot nilai kuartil dan whisker nya dimasukkan kedalam violin plot itu sendiri. Sehingga, pada violin plot tidak dapat diketahui outliers pada data yang digunakan.





THANK YOU. SEE YOU NEXT WEEK!