FAKULTAS TEKNOLOGI MAJU DAN MULTIDISIPLIN

VARIABEL RANDOM DISKRIT

Oleh : Tim Dosen Pengantar Statistika

OUTLINE

- Variabel Random
- Distribusi Probabilitas Variabel Random Diskrit
- Ekspektasi (Mean) & Deviasi Standar Distribusi Probabilitas
- Percobaan Bernoulli dan Distribusi Binomial
- Distribusi Khusus lainnya

Random Variable (variabel acak)

adalah suatu ukuran numerik yang tidak tentu yang nilainya **bergantung pada kesempatan atau kejadian.**

Dalam bahasa matematika, variabel acak yaitu fungsi bernilai real yang didefinisikan pada ruang sampel atau **fungsi yang memetakan** elemen ruang sampel S tepat satu pada **bilangan real.**

Elementary Outcome

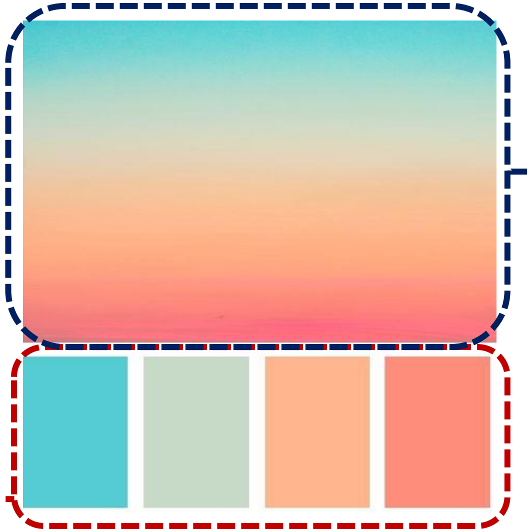
- **Kualitatif**

  Pelemparan koin, muncul Gambar atau Angka

- **Kuantitatif**

  jumlah perampokan di suatu kota setiap hari, pendapatan rumah tangga

Random Variables



Variabel acak diskrit

Hasil dari suatu kejadian yang **dapat dihitung (countable)**

Variabel acak kontinu

Hasil dari suatu kejadian yang **tidak dapat dihitung (uncountable) /dapat diukur (measurable)**

Contoh:

- Banyak orang
- Banyak mobil
- Nilai uang

Contoh:

- Tinggi badan
- Suhu badan
- *Lifetime*

Random Variables

Variabel acak diskrit, jika variabel tersebut memiliki jumlah nilai berhingga (*finite*) atau banyak nilai tak terhingga (*infinite*) yang dapat disusun secara berurutan.

Nilai Berhingga
Contoh: nilai X adalah 1, 2, … , 50

Nilai Tak Berhingga
Contoh: nilai X adalah 1, 2, …

Variabel acak kontinu, jika variabel acak mewakili beberapa pengukuran pada skala kontinu dan karena itu mampu mengasumsikan semua nilai dalam suatu interval.

Contoh: $45 < x \leq 55$

Contoh Kasus

Misalkan X adalah banyak gambar yang didapatkan dari tiga kali pelemparan koin. Buatlah daftar nilai numerik X beserta *outcome* yang berkaitan.

X adalah variabel acak karena:

- X dapat **bernilai numerik** (yaitu 0, 1, 2, 3), **ditentukan dari karakteristik yang berkaitan dengan hasil** (banyak gambar pada tiga kali pelemparan koin)
- hasil percobaan atau nilai terkait dari X yang terjadi **tidak dapat diprediksi dengan pasti** (keluar Angka atau Gambar)

Sample Space 3 kali Pelemparan Koin?

S = {GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA}

X = banyak Gambar

Setiap *elementary outcome* hanya ada satu nilai X (memenuhi definisi fungsi), tetapi beberapa *elementary outcome* dapat menghasilkan nilai yang sama.

Daftar elementary outcome dan nilai terkait dari X

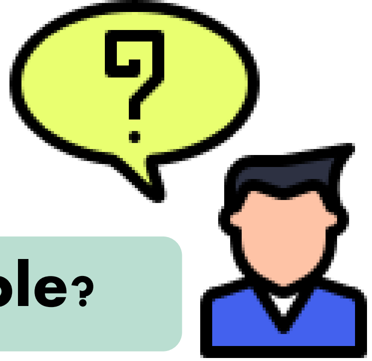
Outcome	Nilai dari X
GGG	3
GGA	2
GAG	2
AGG	2
AAG	1
AGA	1
GAA	1
AAA	0

Mengidentifikasi kejadian yang sesuai dengan nilai-nilai yang berbeda dari X

Nilai numerik X sebagai sebuah kejadian	Komposisi dari kejadian
$[X = 0]$	{AAA}
$[X = 1]$	{AAG, AGA, GAA}
$[X = 2]$	{AGG, GAG, GGA}
$[X = 3]$	{GGG}

Random Variable

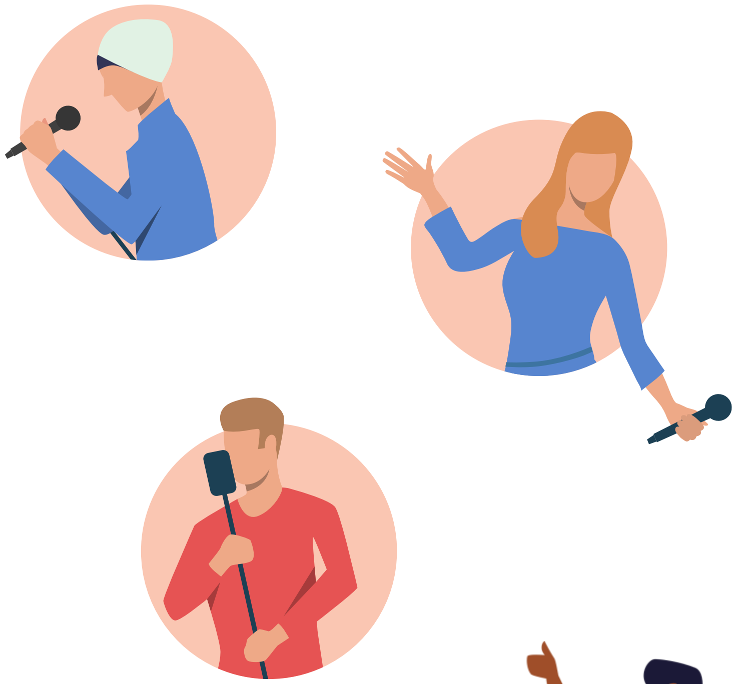
Latihan Soal



Discrete or Continuous Random Variable?

1. Number of empty seats on a flight from Atlanta to London.
2. The percentage of fruit juice in a drink mix.
3. The number of cars sold at a dealership on one day.
4. The seating capacity of an airplane.
5. The magnitude of an earthquake as measured on the open-ended Richter scale.
6. The loss of weight following a diet program.
7. Time it takes for a plumber to fix a bathroom faucet.
8. Yearly low temperature in your city.

Latihan Soal



Tiga finalis untuk penghargaan adalah A, B, dan C. Mereka akan dinilai oleh dua juri. Setiap juri memberikan peringkat 1 untuk yang terbaik, 2 untuk menengah, dan 3 untuk yang terburuk. Misalkan X menunjukkan skor total untuk finalis A (jumlah peringkat yang diterima dari dua juri).

a. Buat daftar semua pasangan peringkat yang dapat diterima finalis A.
b. Sebutkan nilai-nilai yang berbeda dari X.

Latihan Soal

Setiap minggu seorang pembelanja membeli minuman ringan kaleng (K) atau botol (B). Jenis minuman ringan yang dibeli dalam 3 minggu berturut-turut harus dicatat

a. Buat daftar ruang sampel.
b. Jika jenis minuman ringan yang berbeda dibeli dari pada minggu sebelumnya, kami mengatakan bahwa ada peralihan. Misalkan X menunjukkan jumlah peralihan. Tentukan nilai X untuk setiap elementary outcome. (Contoh: Untuk BBB, X = 0; untuk BKB, X=2.)

Distribusi Probabilitas

Distribusi probabilitas atau distribusi dari suatu variabel acak X adalah suatu daftar nilai numerik X yang berbeda beserta dengan probabilitasnya.

Contoh :

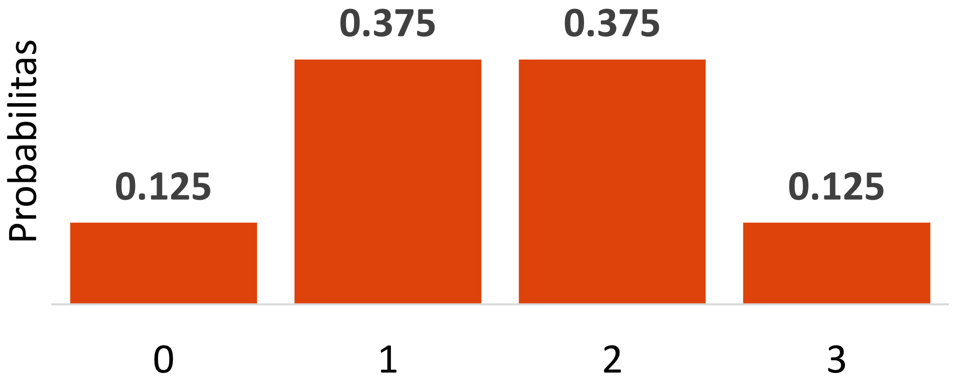
Pelemparan Koin Sebanyak 3 Kali

Setiap *elementary outcome* sama-sama mungkin (***equally likely***) sehingga masing-masing diberi **probabilitas 1/8**.

S = {GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA}

X = banyak Gambar

Nilai X	Probabilitas
0	$P(X=0)=\frac{1}{8}=0{,}125$
1	$P(X=1)=\frac{3}{8}=0{,}375$
2	$P(X=2)=\frac{3}{8}=0{,}375$
3	$P(X=3)=\frac{1}{8}=0{,}125$
Total	**1**



Berapa probabilitas banyak Gambar yang **muncul adalah 2 kali?**

Berapa probabilitas banyak Gambar yang muncul adalah **paling sedikit 2 kali?**

Berapa probabilitas banyak Gambar yang muncul adalah **paling banyak 2 kali?**

Contoh

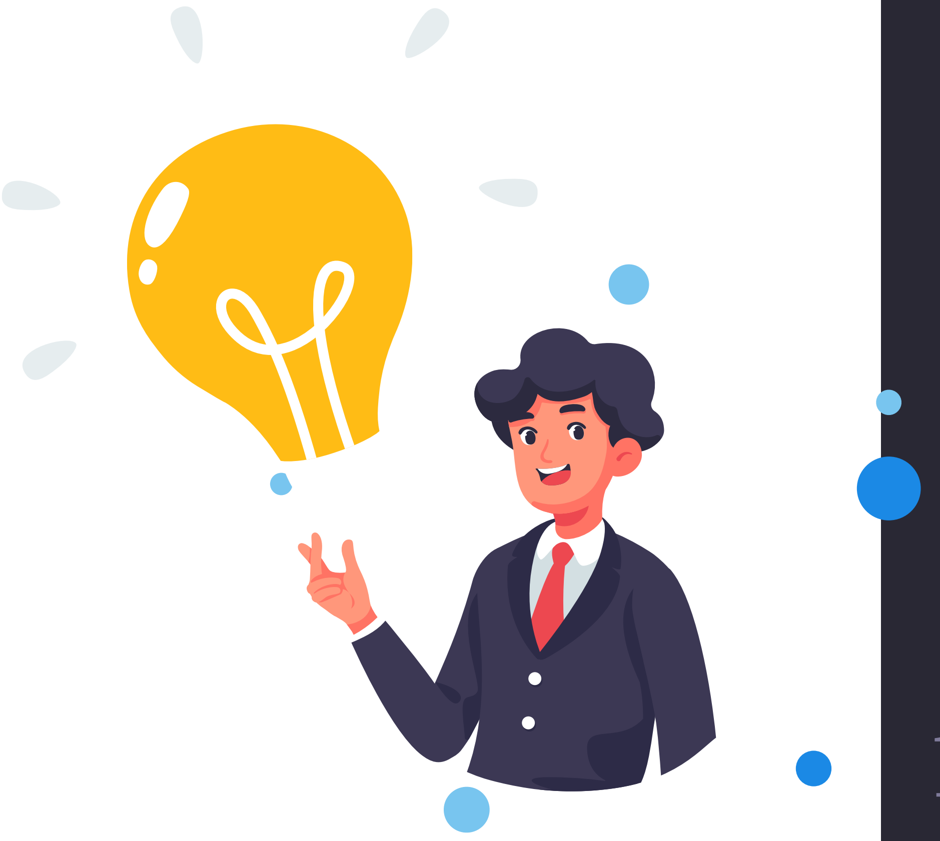
Ana mempunyai kedai kopi. Ana ingin menganalisis hasil penjualan kopinya dan mengembangkan bisnis kopi tersebut. Ana mengumpulkan data dari bulan lalu untuk mengetahui **berapa banyak kopi yang terjual** pada setiap transaksi. Kemudian, didapatkan hasil bahwa paling sedikit konsumen memesan 1 gelas kopi dan maksimal 8 gelas. Berikut adalah hasilnya

Banyak kopi terjual (x)	Banyak pelanggan	P(X=x)
1	459	0,387
2	278	0,235
3	133	0,112
4	98	0,083
5	84	0,071
6	76	0,064
7	34	0,029
8	23	0,019

Banyak kopi terjual (x)	Banyak pelanggan	P(X=x)
1	459	0,387
2	278	0,235
3	133	0,112
4	98	0,083
5	84	0,071
6	76	0,064
7	34	0,029
8	23	0,019
Total	**1.185**	**1**

Random Variable

Mengestimasi probabilitas dengan menggunakan Frekuensi Relatif



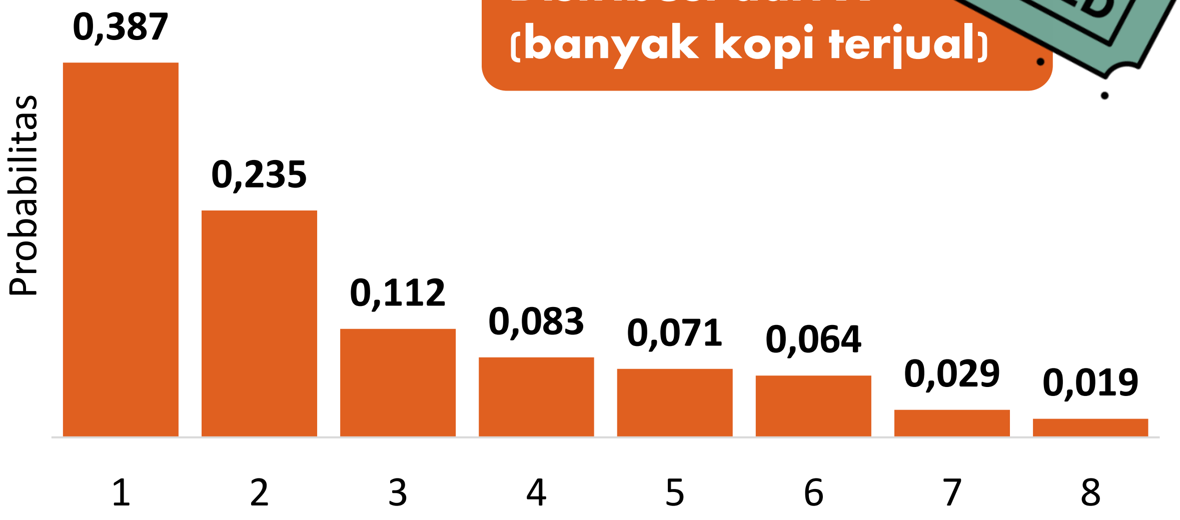
Distribusi dari X
(banyak kopi terjual)

Banyak kopi terjual (x)	P(X=x)
1	0,387
2	0,235
3	0,112
4	0,083
5	0,071
6	0,064
7	0,029
8	0,019

Berapa **peluang konsumen** selanjutnya **membeli sebanyak 1 gelas?**

Jika terdapat **300 orang**, berapa orang yang kita harapkan **membeli kopi lebih dari 4 gelas?**

Distribusi dari X (banyak kopi terjual)



Distribusi Probabilitas Variabel Random Diskrit

Secara umum, **nilai yang berbeda** pada variabel acak X sebanyak k nilai, disimbolkan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Probabilitas x_i disimbolkan dengan $f(x_i)$ sehingga probabilitas x_1, $x_2, \ldots,$ x_k adalah $\boldsymbol{f(x_1)}$, $\boldsymbol{f(x_2)}$, … , $\boldsymbol{f(x_k)}$**.**

Distribusi probabilitas dari variabel random distkrit X dinyatakan sebagai fungsi

$$f(x_i) = P[X = x_i]$$

yang memberikan probabilitas untuk setiap nilai dan memenuhi:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$ untuk setiap x_i dari X
2. $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$

Latihan Soal

Dihadapkan dengan tenggat waktu yang ketat pada dua proyek besar, Anda memutuskan untuk mempekerjakan dua dari lima orang yang tersedia untuk membantu menyelesaikan pekerjaan. Mereka masing-masing memiliki 1, 2, 4, 2 dan 1 tahun pengalaman. Karena referensi mereka sangat mirip, Anda memutuskan untuk memilih dua pekerja ini secara acak. Misalkan X menunjukkan jumlah pengalaman tahun mereka.

Dapatkan distribusi probabilitas dari X !

Latihan Soal

Periksa apakah berikut ini adalah distribusi probabilitas yang valid ?

A

x	$f(x)$
-1	.3
2	.5
7	.2
9	.1

B

x	$f(x)$
1	.2
3	.4
4	.3
6	.1

C

x	$f(x)$
-2	.25
0	.50
2	.25
4	0

D

x	$f(x)$
0	.3
1	$-.1$
2	.8

Latihan Soal

Distribusi probabilitas X diberikan oleh fungsi

$f(x) = \frac{1}{30}\binom{5}{x}$ dengan $x = 1,2,3,4$

Hitung

a. $P[X = 3]$

b. $P[X \text{ genap}]$

Ekspektasi (Mean) dari Distribusi Probabilitas

Rata-rata (mean) dari distribusi probabilitas dari suatu variabel acak digunakan sebagai ukuran pemusatan dari distribusi tersebut.

Expected Value

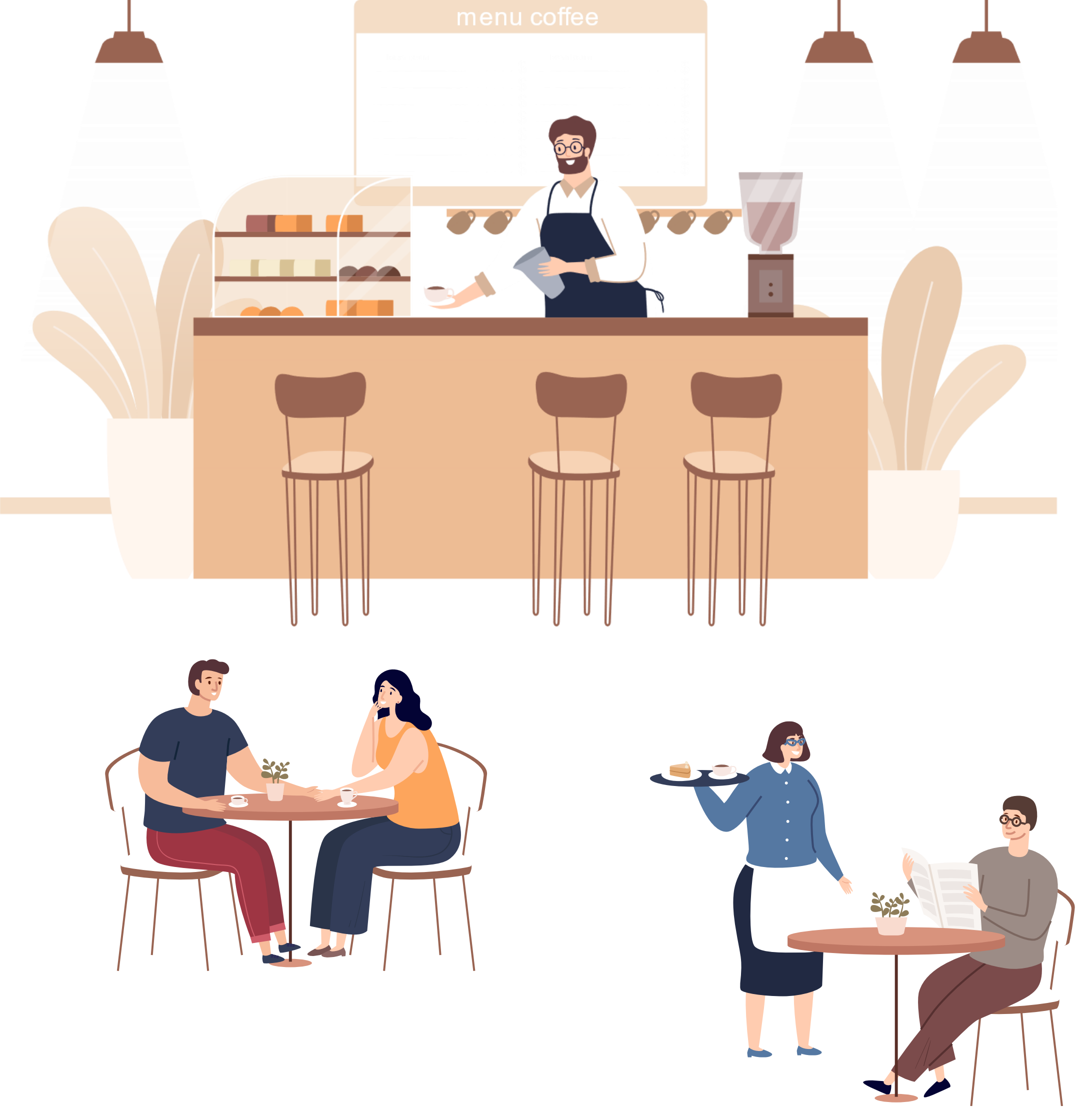
- Merupakan nilai yang diharapkan terjadi
- Didapatkan dari jumlah dari perkalian antara variabel acak dengan probabilitasnya

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i) \text{ dengan } x = 1,2,\ldots,k$$

Contoh:

Kedai Kopi Ana

Banyak kopi terjual (x)	P(X=x)	xf(x)
1	0,387	0,39
2	0,235	0,47
3	0,112	0,34
4	0,083	0,33
5	0,071	0,35
6	0,064	0,38
7	0,029	0,20
8	0,019	0,16
Expected Value (E(X))		**2,62**



Jika terdapat **100 orang**, maka kopi yang diharapkan terjual adalah **262 gelas kopi**

Varians & Deviasi Standar Distribusi Probabilitas

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$\sigma = sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Rumus Alternatif

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

atau

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Latihan Soal

Diketahui distribusi probabilitas berikut mengenai situs Web yang dikunjungi hampir setiap hari:

x	$f(x)$
1	.1
2	.2
3	.3
4	.4

a. Buat histogram probabilitasnya
b. Dapatkan $E(X)$, σ^2, and σ.

Latihan Soal

Diberikan dua distribusi probabilitas

x	$f(x)$
1	.2
2	.6
3	.2

y	$f(y)$
0	.1
1	.2
2	.4
3	.2
4	.1

a. Buat histogram probabilitas. Distribusi mana yang memiliki sebaran lebih besar?
b. Pastikan kedua distribusi memiliki mean yang sama.
c. Bandingkan dua standar deviasi.

Bernoulli Trials

(Percobaan Bernoulli)

Percobaan

Sukses

Gagal

Setiap percobaan **menghasilkan satu dari dua hasil**, yang secara teknis disebut sukses (S) dan gagal (G).

Untuk setiap percobaan, **peluang sukses $P(S)$ adalah sama** dan dinotasikan dengan p. Peluang gagal adalah $P(G) = 1 - p$ untuk setiap percobaan dan dinotasikan dengan q.

Peluang setiap outcome pada suatu percobaan **tidak bergantung pada hasil dari percobaan sebelumnya.**

Identik

Independen

Contoh

Pelemparan Koin menghasilkan outcome **Angka atau Gambar**

Misal Sukses adalah Angka, maka **peluang sukses** adalah 0,5 ($p = 0{,}5$) dan **peluang gagal** adalah 0,5 ($q = 0{,}5$)

Contoh

Suatu pabrik lampu melakukan inspeksi kualitas produk yang dihasilkan. Petugas Quality Control menghitung berapa banyak lampu yang cacat. Jika terdapat dua kondisi yaitu :

- Pengambilan sampel dengan pengembalian
- Pengambilan sampel tanpa pengembalian

maka manakah yang merupakan **Percobaan Bernoulli?**

pengambilan sampel dengan pengembalian

Lampu diambil secara acak dan diperiksa apakah cacat atau tidak. Kemudian, lampu tersebut dikembalikan lagi untuk pengambilan sampel selanjutnya. Hal tersebut merupakan **percobaan Bernoulli karena pengambilan satu dengan lainnya tidak saling bergantung dan probabilitas *outcome* setiap percobaan sama.**

pengambilan sampel tanpa pengembalian

Lampu diambil secara acak dan diperiksa kualitasnya. Lampu yang sudah diambil tidak dikembalikan untuk pengambilan sampel selanjutnya. Hal tersebut **bukan percobaan Bernoulli karena hasil suatu percobaan bergantung pada percobaan sebelumnya**.

Latihan Soal

Find

Dalam setiap kasus, periksa apakah pengulangan percobaan yang dinyatakan sesuai dengan model **percobaan Bernoulli.**

Jika modelnya sesuai, tentukan nilai numerik p atau tunjukkan bagaimana hal itu dapat ditentukan

a. Lempar dadu yang adil dan amati angka yang muncul.
b. Lempar dadu yang adil dan amati apakah angka 6 muncul atau tidak.
c. Lempar dua dadu yang adil dan amati total poin yang muncul.
d. Lempar dua dadu yang adil dan amati apakah keduanya menunjukkan angka yang sama atau tidak.
e. Lempar sebuah dadu yang terisi (ada pemberat) dan amati apakah muncul angka 6 atau tidak.

Latihan Soal

Sebuah toples berisi 25 permen yang 6 berwarna coklat, 12 berwarna kuning, dan 7 berwarna lain. Pertimbangkan 4 pengambilan berturut-turut dari 1 permen secara acak dari toples dan misalkan munculnya permen kuning adalah peristiwa yang menarik. Untuk setiap situasi berikut, nyatakan apakah model **percobaan Bernoulli** masuk akal atau tidak, dan jika demikian, tentukan nilai numerik p.

Find

(a) Setelah setiap undian, permen yang dipilih dikembalikan ke toples.

(b) Setelah setiap undian, permen yang dipilih tidak dikembalikan ke toples.

(c) Setelah setiap undian, permen yang dipilih dikembalikan ke toples dan satu permen baru dengan warna yang sama ditambahkan ke dalam toples.

Distribusi Binomial

Misal terdapat sebanyak n percobaan Bernoulli dengan peluang sukses p untuk setiap percobaan. Banyaknya sukses yang didapatkan dari n percobaan tersebut adalah variabel acak X. Distribusi probabilitas dari variabel acak tersebut adalah **Distribusi Binomial.**

- **Distribusi Binomial bergantung pada nilai *n* dan *p***, di mana

n = banyaknya percobaan Bernoulli

p = probabilitas sukses pada setiap percobaan

X = banyak sukses pada n percobaan

- **Fungsi probabilitasnya** adalah:

$$f(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

- **Rata-rata dan deviasi standar:**

Mean = np

Variance = npq

Sd = $\sqrt{npq}$

Contoh

Variabel acak X adalah banyak siswa yang lebih suka mencari berita dari internet dari jumlah sampel sebanyak 4 siswa. Misal proporsi populasi siswa yang lebih suka mencari berita dari internet adalah 0,6 ($p = 0{,}6$). Pada kasus ini, dimisalkan "internet" adalah Sukses (S) dan "bukan internet" adalah Gagal (G).

$p = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$

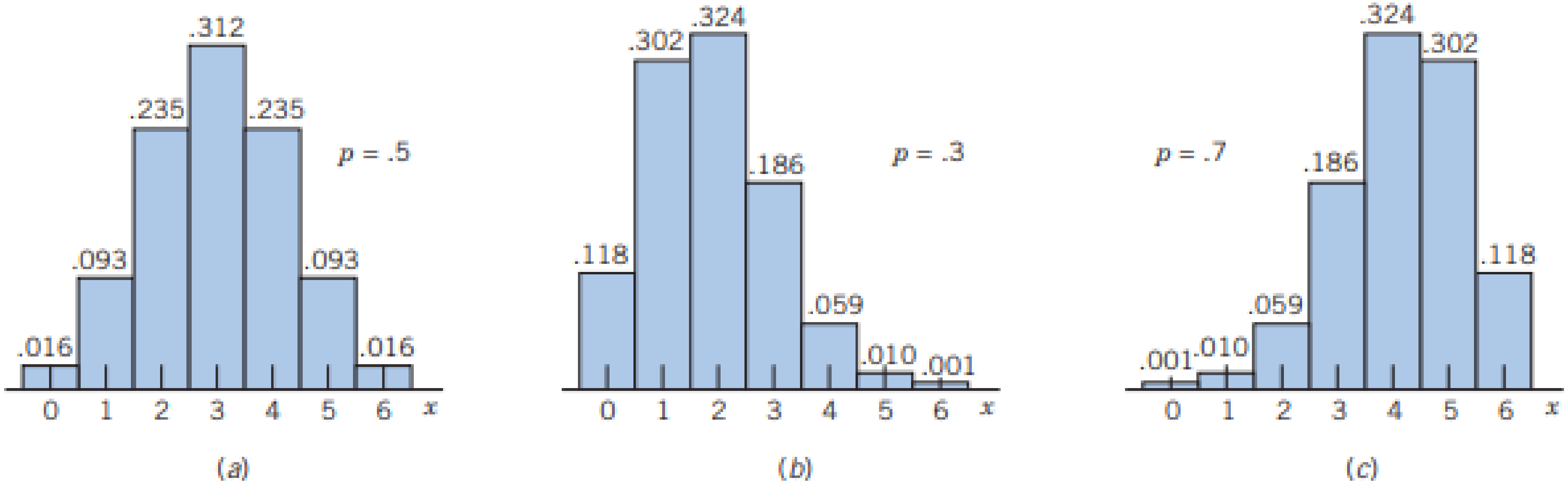
Outcome	Nilai X	Banyak Outcome	Probabilitas $f(x)$	
GGGG	0	$1 = \binom{4}{0}$	$\binom{4}{0} p^0 q^4$	0,0256
SGGG	1			
GSGG	1	$4 = \binom{4}{1}$	$\binom{4}{1} p^1 q^3$	0,1536
GGSG	1			
GGGS	1			
SSGG	2			
SGSG	2			
SGGS	2	$6 = \binom{4}{2}$	$\binom{4}{2} p^2 q^2$	0,3456
GSSG	2			
GSGS	2			
GGSS	2			
SSSG	3			
SSGS	3	$4 = \binom{4}{3}$	$\binom{4}{3} p^3 q^1$	0,3456
SGSS	3			
GSSS	3			
SSSS	4	$1 = \binom{4}{4}$	$\binom{4}{4} p^4 q^0$	0,1296

Berapa probabilitas 2 siswa yang lebih suka mencari berita dari internet?

Berapa probabilitas paling sedikit 2 siswa yang lebih suka mencari berita dari internet?

Berapa probabilitas paling banyak 2 siswa yang lebih suka mencari berita dari internet?

- Jika nilai p lebih kecil dari 0,5 maka probabilitasnya akan bergerak ke nilai x yang lebih kecil dan distribusinya mempunyai ekor lebih panjang di kanan.
- Jika nilai p lebih besar dari 0,5 maka probabilitasnya akan bergerak ke nilai x yang lebih besar dan distribusinya mempunyai ekor lebih panjang di kiri.



Tables of the Binomial Cumulative Distribution

The table below gives the probability of obtaining at most x successes in n independent trials, each of which has a probability p of success. That is, if X denotes the number of successes, the table shows

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Latihan Soal

Dalam setiap kasus, temukan probabilitas x sukses dalam n percobaan Bernoulli dengan probabilitas sukses p untuk setiap percobaan.

Find

a. $x = 2\,;\ n = 3\,; p = 0.35$

b. $x = 3\,;\ n = 6\,; p = 0.25$

c. $x = 2\,;\ n = 6\,; p = 0.75$

Latihan Soal

Find

Sekitar 85% restoran memberikan voucher diskon kepada pengunjung pada akhir tahun. Misalkan n = 6 restoran dipilih secara acak. Carilah peluang bahwa

(a) tiga atau lebih memberikan voucher diskon kepada pengunjung.
(b) paling banyak tiga memberikan voucher diskon kepada pengunjung.
(c) temukan jumlah restoran yang diharapkan, dalam sampel, yang memberikan voucher diskon kepada pengunjung.

Distribusi Variabel Acak Diskrit Lainnya..

- Negative Binomial Distribution
  - Distribusi dari variabel acak X banyaknya percobaan sampai diperoleh **sukses yang ke-*s* (pada ulangan ke-*x*)**. Untuk distribusi binomial negatif, **banyaknya percobaan tetap** dan **banyaknya sukses random/ acak.**
- Geometric Distribution
  - Distribusi ini muncul dalam situasi percobaan binomial ketika percobaan dilakukan secara independen (dengan probabilitas p konstan dari S) sampai S **pertama terjadi**.
- Hypergeometric Distribution
  - Distribusi ini untuk menggambarkan situasi jenis berikut: m objek identik (misalnya, bola) dicampur secara menyeluruh dengan n objek identik (yang lagi-lagi dapat dianggap sebagai bola) tetapi berbeda dari m objek. Dari m+n benda ini, r diambil **tanpa pengembalian**, dan misalkan X adalah bilangan di antara r yang berasal dari m benda.
- Poisson Distribution
  - X terdistribusi Poisson dengan parameter λ dilambangkan dengan X ~ P(λ)

THANK YOU