

DISTRIBUSI SAMPLING

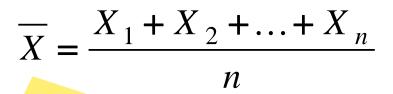
Oleh: Tim Dosen Pengantar Statistika UNAIR

Parameter dan Statistik

- Parameter adalah ukuran numerik dari suatu populasi.
- Statistik adalah ukuran numerik dari sampel.
- Parameter diestimasi/ diperkirakan dengan statistik.
- Statistik disebut juga dengan estimator dari parameter. Saat satu nilai digunakan sebagai estimasi, estimasi tersebut disebut estimasi titik dari populasi parameter.

Estimator (Sample Statistic)		Population Parameter
\overline{X}	estimates	μ
S ²	estimates	σ^2
P	estimates	р

Parameter dan Statistik



statistik karena nilai numeriknya dapat dihitung setelah data sampel, yang terdiri dari nilai $X_1, X_2,, X_n$ tersedia



Tiga poin penting

- Karena sampel hanya sebagian dari populasi, maka nilai numerik statistik tidak dapat diharapkan memberi kita nilai pasti suatu parameter.
- Nilai yang diamati dari suatu statistik bergantung pada sampel tertentu yang terpilih.
- 3. Akan ada beberapa **variabilitas**dalam nilai statistik selama berbagai
 kesempatan pengambilan sampel.

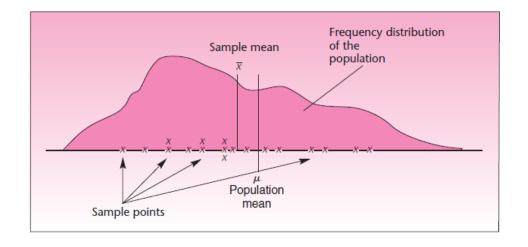
Distribusi Sampling suatu Statistik

- Statistik akan bervariasi dari sampel ke sampel.
- Statistik adalah variabel acak dan memiliki distribusi probabilitasnya sendiri.
- Variabilitas statistik, dalam pengambilan sampel berulang, dijelaskan oleh distribusi probabilitas ini.

Distribusi probabilitas suatu statistik disebut distribusi samplingnya (atau hanya disebut distribusi statistik).

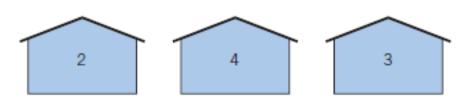
Distribusi sampling suatu statistik ditentukan dari distribusi f(x) yang mengatur populasi, dan juga bergantung pada ukuran sampel n.

FIGURE 5–2 A Population Distribution, a Random Sample from the Population, and Their Respective Means



Ilustrasi Distribusi Sampling

Contoh 1:



Suatu populasi terdiri dari tiga unit rumah, di mana nilai X, jumlah kamar yang disewakan di setiap unit ditunjukkan pada ilustrasi di atas.

Pertimbangkan untuk mengambil sampel acak berukuran 2 dengan pengembalian. X_1 adalah hasil pengambilan pertama dan X_2 adalah pengambilan kedua.

Temukan distribusi sampling $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$

Ysolusi

Tabel I. Distribusi populasi

x	f(x)
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{3}$

Sampel yang mungkin terambil dan nilai masing-masing $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$

(x_1, x_2)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)
$=\frac{\bar{x}}{2}$	2	2,5	3	2,5	3	3,5	3	3,5	4

Y

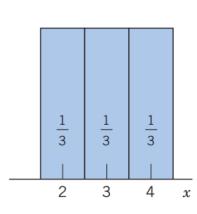
Solusi Ilustrasi Distribusi Sampling

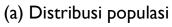
3

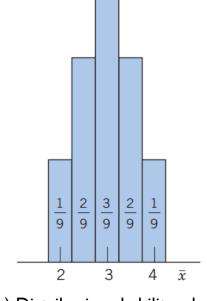
Tabel 2. Distribusi probabilitas \overline{X} =	$=\frac{X_1+X_2}{2}$
---	----------------------

1	
4	

Nilai dari $ar{X}$	Probabilitas
2	1
2	9
2,5	$\frac{2}{9}$
2,3	
3	3
3	9
3,5	2
3,3	9
4	1
7	9







(b) Distribusi probabilitas dari $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$

Ketika populasi sangat besar dan ukuran sampel relatif kecil, tidak penting apakah suatu unit diganti atau tidak sebelum unit berikutnya dipilih. Di bawah kondisi ini juga, kami menyebut pengamatan sebagai sampel acak.

Pengamatan $X_1, X_2,, X_n$ adalah sampel acak berukuran n dari distribusi populasi, jika dihasilkan dari seleksi independen dan setiap observasi memiliki distribusi yang sama dengan populasi.

Mean dan Median Sampel Memiliki Distribusi Sampling masing-masing

Contoh 2:

Sebuah populasi besar dideskripsikan oleh distribusi probabilitas

x	f(x)
0	0.2
3	0.3
12	0.5

Misalkan X_1, X_2, X_3 menjadi sampel acak berukuran 3 dari distribusi ini.

- (a) Daftar semua sampel yang mungkin dan tentukan probabilitasnya.
- (b) Tentukan distribusi sampling dari mean sampel.
- (c) Tentukan distribusi sampling dari median sampel.



Population mean: $E(X) = 0(.2) + 3(.3) + 12(.5) = 6.9 = \mu$ Population variance: $Var(X) = 0^2(.2) + 3^2(.3) + 12^2(.5) - 6.9^2$ = 27.09 = σ^2

Oleh :Tim Dosen Pengantar Statistika UNAIR

	Possible Samples x_1 x_2 x_3	Sample Mean \overline{x}	Sample Median <i>m</i>	Probability
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27	0 0 0 0 0 3 0 0 12 0 3 0 0 12 0 0 12 12 3 0 12 3 0 12 3 0 12 3 3 3 3 12 0 3 12 0 3 12 12 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0 0 12 0	0 1 4 1 2 5 4 5 8 1 2 5 2 3 6 5 6 9 4 5 8 9 8 9 1 2	0 0 0 3 3 0 3 12 0 3 3 3 3 12 0 3 12 12 12 12 12	(.2)(.2)(.2) = .008 (.2)(.2)(.3) = .012 (.2)(.2)(.5) = .020 (.2)(.3)(.2) = .012 (.2)(.3)(.3) = .018 (.2)(.3)(.5) = .030 (.2)(.5)(.2) = .020 (.2)(.5)(.3) = .030 (.2)(.5)(.5) = .050 (.3)(.2)(.2) = .012 (.3)(.2)(.3) = .018 (.3)(.2)(.3) = .018 (.3)(.2)(.5) = .030 (.3)(.3)(.2) = .018 (.3)(.3)(.3) = .027 (.3)(.3)(.3) = .027 (.3)(.3)(.5) = .045 (.3)(.5)(.2) = .030 (.3)(.5)(.2) = .030 (.3)(.5)(.2) = .030 (.5)(.2)(.2) = .020 (.5)(.2)(.2) = .020 (.5)(.2)(.3) = .030 (.5)(.2)(.5) = .050 (.5)(.3)(.5) = .075 (.5)(.3)(.5) = .075 (.5)(.3)(.5) = .075 (.5)(.5)(.3) = .075 (.5)(.5)(.5)(.2) = .050 (.5)(.5)(.5)(.2) = .050 (.5)(.5)(.5)(.5) = .075
				Total = 1.000



Solusi

b

Distribusi sampling dari \bar{X}

\overline{x}	$f(\bar{x})$
0	.008
1	.036 = .012 + .012 + .012
2	.054 = .018 + .018 + .018
3	.027
4	.060 = .020 + .020 + .020
5	.180 = .030 + .030 + .030
	+ .030 + .030 + .030
6	.135 = .045 + .045 + .045
8	.150 = .050 + .050 + .050
9	.225 = .075 + .075 + .075
12	.125 = .125

$$E(\overline{X}) = \sum \overline{x} f(\overline{x}) = 0(.008) + 1(.036) + 2(.054) + 3(.027) + 4(.060) + 5(.180) + 6(.135) + 8(.150) + 9(.225) + 12(.125)$$

$$= 6.9 \text{ same as } E(X), \text{ pop. mean}$$

$$Var(\overline{X}) = \sum \overline{x}^2 f(\overline{x}) - \mu^2 = 0^2 (.008) + 1^2 (.036) + 2^2 (.054) + 3^2 (.027) + 4^2 (.060) + 5^2 (.180) + 6^2 (.135) + 8^2 (.150) + 9^2 (.225) + 12^2 (.125) - (6.9)^2$$
$$= 9.03 = \frac{27.09}{3} = \frac{\sigma^2}{3}$$

 $Var(\overline{X})$ is one-third of the population variance.

C

Distribusi sampling dari Median m

m	f(m)
0	.104 = .008 + .012 + .020 + .012
3	+ .020 + .012 + .020 .396 = .018 + .030 + .030 + .018 + .030
12	$\begin{array}{c} + .018 + .027 + .045 + .030 + .045 \\ + .030 + .030 + .045 \\ .500 = .050 + .075 + .050 + .075 \\ + .050 + .075 + .125 \end{array}$

Mean of the distribution of sample median

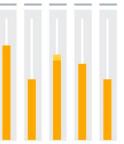
=
$$0(.104) + 3(.396) + 12(.500) = 7.188 \neq 6.9 = \mu$$

Different from the mean of the population distribution

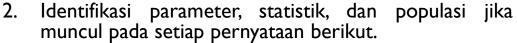
Variance of the distribution of sample median

=
$$0^2(.104) + 3^2(.396) + 12^2(.500) - (7.188)^2 = 23.897$$
 [not one-third of the population variance 27.09]





- I. Identifikasi setiap hal berikut sebagai parameter atau statistik.
 - (a) Standar deviasi sampel.
 - (b) Rentang interkuartil sampel.
 - (c) Kuartil pertama populasi.
 - (d) Median sampel.



- (a) Selama tahun 2008, empat puluh satu film berbeda menerima penghargaan menghasilkan pendapatan box office terbanyak untuk akhir pekan.
- (b) Sebuah survei terhadap semua orang minoritas yang tinggal di Chicago sebanyak 400 orang mengungkapkan bahwa 41 orang tidak bekerja.
- (c) Dari sampel 100 produk, 18 memiliki bentuk yang penyok.

- 3. Data yang diperoleh dari mengajukan pertanyaan yang salah pada waktu yang salah atau di tempat yang salah dapat menyebabkan statistik ringkasan yang menyesatkan. Jelaskan mengapa prosedur pengumpulan berikut cenderung menghasilkan data yang tidak berguna.
 - (a) Untuk mengevaluasi jumlah siswa yang bekerja setidaknya paruh waktu, peneliti mewawancarai siswa yang mengambil kelas malam.
 - (b) Untuk mempelajari pola pengeluaran orang-orang yang memperoleh upah minimum, survei dilakukan selama tiga minggu pertama bulan Desember.
- 4. Sebuah sampel acak berukuran 2 akan dipilih dengan pengembalian dari himpunan bilangan {0, 2, 4}.
 - (a) Daftar semua sampel yang mungkin dan tentukan probabilitasnya
 - (b) Tentukan distribusi sampling dari $ar{X}$
 - (c) Tentukan distribusi sampling dari S^2



Distribusi Sampel Mean

Mean and Standard Deviation of \overline{X}

The distribution of the sample mean, based on a random sample of size n, has

$$E(\overline{X}) = \mu$$
 (= Population mean)
 $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (= Population variance Sample size)
 $sd(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (= Population standard deviation $\sqrt{\text{Sample size}}$)

Mean dan Variansi Distribusi Sampling \overline{X}

Contoh 3:

Hitung mean dan deviasi standar untuk distribusi populasi yang diberikan dalam Tabel I dan untuk distribusi \bar{X} yang diberikan dalam Tabel 2. Verifikasi relasi $E(\bar{X}) = \mu$ dan $sd(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$



Tabel 3. Mean dan variansi dari $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$

	Population Distribution			Distrib	Distribution of $\overline{X} = (X_1 + X_2)/2 $			
\boldsymbol{x}	f(x)	x f(x)	$x^2 f(x)$	\overline{x}	$f(\overline{x})$	$\overline{x} f(\overline{x})$	$\overline{x}^2 f(\overline{x})$	
2	1/3	2 3	4 3	2	1 9	<u>2</u> 9	9	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{9}{3}$	2.5	<u>2</u> 9	$\frac{5}{9}$	12.5	
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$	3	<u>3</u> 9	9	<u>27</u> 9	
Total	1	3	<u>29</u> 3	3.5	9	7 9	9	
μ =	= 3			4	9	9	16 9	
σ^2	$=\frac{29}{3}$	$(3)^2 = -$	2/3	Total	1	3	84	

$$E(\overline{X}) = 3 = \mu$$

 $Var(\overline{X}) = \frac{84}{9} - (3)^2 = \frac{1}{3}$

By direct calculation, sd $(\overline{X}) = 1/\sqrt{3}$. This is confirmed by the relation $\operatorname{sd}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$ar{X}$ Normal ketika Sampling dari Populasi Normal

Dalam pengambilan sampel secara acak dari populasi normal dengan mean μ dan standar deviasi σ , mean sampel \bar{X} berdistribusi normal dengan mean μ dan standar deviasi σ/\sqrt{n} .

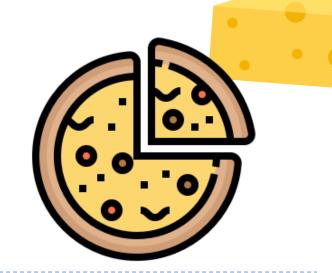
Contoh 4:

Menentukan Probabilitas Mean Sampel dari Distribusi Normal

Berat pizza pepperoni dan keju dari penyedia lokal adalah variabel acak yang distribusinya normal dengan rata-rata 16 ons dan deviasi standar 1 ons.

Anda berniat membeli empat pizza pepperoni dan keju. Berapa probabilitas bahwa:

- (a) Berat rata-rata dari empat pizza akan lebih besar dari 17,1 ons?
- (b) Berat total keempat pizza tidak akan melebihi 61,0 ons?



Contoh 4:

solusi

Karena populasi normal, distribusi dari mean sampel $\overline{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ secara pasti normal dengan mean 16 ons dan deviasi standar $\frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5$ ons.

a $\bar{X} \sim N(16, 0, 5)$

$$P[\overline{X} > 17.1] = P\left[\frac{\overline{X} - 16}{.5} > \frac{17.1 - 16}{.5}\right]$$

= $P[Z > 2.20] = 1 - .9861 = .0139$

Jarang, lebih dari satu kali dalam seratus pembelian empat pizza, berat rata-rata melebihi 17,1 ons

Peristiwa bahwa berat total $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4\overline{X}$ tidak melebihi 61,0 ons adalah peristiwa yang sama dengan berat rata-rata kurang dari atau sama dengan 61,0/4 = 15,25.

$$P[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 61.0] = P[\overline{X} \le 15.25]$$

$$= P\left[\frac{\overline{X} - 16}{.5} \le \frac{15.25 - 16}{.5}\right]$$

$$= P[Z \le -1.50] = .0668$$

Hanya sekitar tujuh kali dalam seratus pembelian, berat totalnya akan kurang dari 61,0 ons.

Central Limit Theorem

- lacktriangle Ketika pengambilan sampel dari populasi non-normal, distribusi $ar{X}$ bergantung pada bentuk tertentu dari distribusi populasi yang berlaku.
- Hasil yang mengejutkan, yang dikenal sebagai Central Limit Theorem, menyatakan bahwa jika ukuran sampel n besar, distribusi \bar{X} mendekati normal, terlepas dari bentuk distribusi populasinya.

Central Limit Theorem

Whatever the population, the distribution of \overline{X} is approximately normal when n is large.

In random sampling from an arbitrary population with mean μ and standard deviation σ , when n is large, the distribution of \overline{X} is approximately normal with mean μ and standard deviation σ/\sqrt{n} . Consequently,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$
 is approximately $N(0, 1)$

- Dalam praktiknya, perkiraan normal biasanya cukup jika n lebih besar dari 30.
- Oleh: Tim Dosen Pengantar Statistika UNAIR

Contoh 5:

Perhitungan Probabilitas untuk \overline{X} —Berdasarkan Sampel Besar Kegiatan

Data yang luas, menunjukkan bahwa jumlah kegiatan ekstrakurikuler per minggu dapat dimodelkan sebagai distribusi dengan mean 1,9 dan standar deviasi 1,6.

- (a) Jika sampel acak berukuran 41 dipilih, berapa peluang rata-rata sampel berada di antara 1,6 dan 2,1?
- (b) Dengan ukuran sampel 100, berapa peluang rata-rata sampel berada di antara 1,6 dan 2,1?

a
$$P[1.7 < \overline{X} < 2.1] = P[-.8 < Z < .8]$$

= .7881 - .2119
= .5762

b
$$P[1.7 < \overline{X} < 2.1] = P\left[\frac{1.7 - 1.9}{.16} < Z < \frac{2.1 - 1.9}{.16}\right]$$

= $P[-1.25 < Z < 1.25]$
= $.8944 - .1056$
= $.7888$

Interval (I.7, 2.1) berpusat di $\mu=1.9$. Probabilitas bahwa \bar{X} akan terletak pada interval ini lebih besar untuk n=100 daripada untuk n=41

Contoh 6:

Mendemonstrasikan Teorema Limit Pusat

Pertimbangkan populasi yang memiliki distribusi seragam diskrit yang menempatkan probabilitas 0,1 pada setiap bilangan bulat 0, 1, . . . , 9. Ini mungkin model yang tepat untuk distribusi digit terakhir dalam nomor telepon. Diagram garis dari distribusi ini tampak pada Gambar 2. Populasi memiliki $\mu=4.5$ dan $\sigma=2.872$. Ambil 100 sampel ukuran 5, hitung masing-masing, dan buat histogram untuk memperkirakan distribusi sampel \bar{X} (ditunjukkan dalam Gambar 3).

Ilustrasi Central Limit Theorem

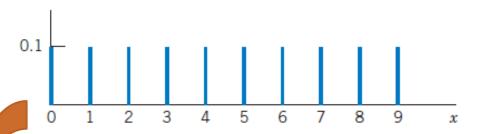


Figure 2 Uniform distribution on the integers 0, 1, . . . , 9.

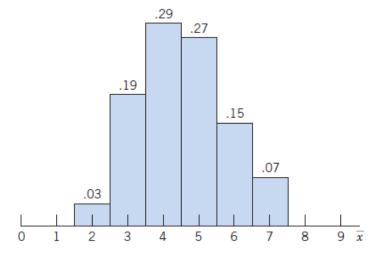


Figure 3 Relative frequency histogram of the \bar{x} values recorded in Table 5.

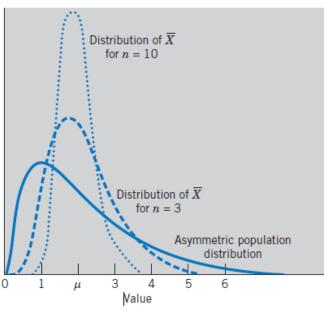
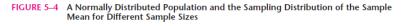
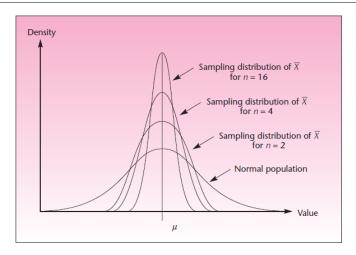


Figure 4 Distributions of \overline{X} for n = 3 and n = 10 in sampling from an asymmetric population.





Apakah distribusi populasi kontinu, diskrit, simetris, atau asimetris, central limit theorem (teorema limit pusat) menyatakan bahwa selama variansi populasi terbatas (finite), distribusi mean sampel hampir normal jika ukuran sampel besar.

Contoh 7:

Lebih Banyak Perhitungan Probabilitas untuk \overline{X} , Jumlah Item yang Dikembalikan

Toko ritel mengalami pengembalian terberat mereka pada tanggal 26 Desember dan 27 Desember setiap tahun. Sebuah sampel kecil dari jumlah item yang dikembalikan diberikan dalam Contoh 3, Bab 2, tetapi ukuran sampel yang jauh lebih besar diperlukan untuk mendekati distribusi probabilitas. Misalkan frekuensi relatif, ditentukan dari sampel berukuran 300, menunjukkan distribusi probabilitas pada Tabel.

Banyak item yang dikembalikan (x)	Probabilitas
I	0,25
2	0,28
3	0,20
4	0,17
5	0,08
6	0,02

Distribusi jumlah hadiah yang dikembalikan ini memiliki mean 2,61 dan standar deviasi 1,34. Asumsikan distribusi probabilitas pada Tabel masih berlaku untuk tahun ini.

- (a) Jika tahun ini, sampel acak berukuran 45 dipilih, berapa peluang bahwa rata-rata sampel akan lebih besar dari 2,9 item?
- (b) Temukan batas atas b sedemikian rupa sehingga jumlah total barang yang dikembalikan oleh 45 pelanggan akan lebih sedikit b dengan probabilitas 0,95.



a

Mean = 2.61
Standard deviation =
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.34}{\sqrt{45}} = .200$$

$$Z = \frac{\overline{X} - 2.61}{.200} = \frac{2.9 - 2.61}{.200} = 1.45$$

$$P[\overline{X} > 2.9] = P[Z > 1.45]$$

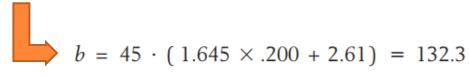
= 1 - $P[Z \le 1.45]$
= 1 - .9265 = .0735

Peluang bahwa rata-rata sampel akan lebih besar dari 2,9 item adalah 0,0735.

b
$$(X_1 + X_2 + \dots + X_{45} \le b)$$

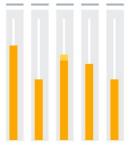
 $\bar{X} \le b/45$

$$.95 = P[Z \le 1.645] = P\left[\frac{\overline{X} - 2.61}{.200} \le \frac{b/45 - 2.61}{.200}\right]$$



Dalam konteks masalah ini, totalnya harus bilangan bulat sehingga, secara konservatif, kita dapat mengambil 133 sebagai batasnya.

LATIHAN



5. Misalkan banyaknya komputer berbeda yang digunakan oleh mahasiswa minggu lalu memiliki distribusi

Nilai	Probabilitas
0	0,3
1	0,4
2	0,3

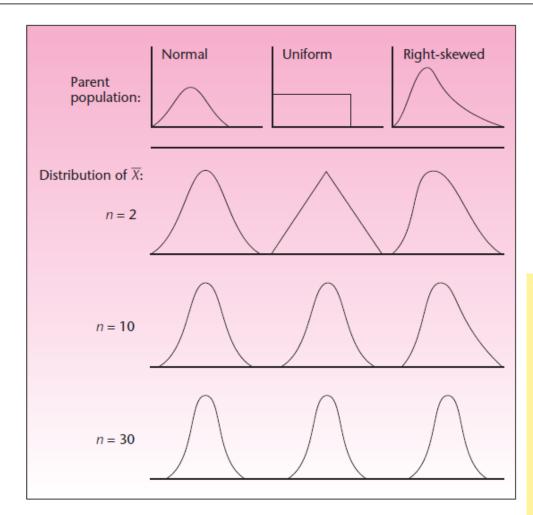


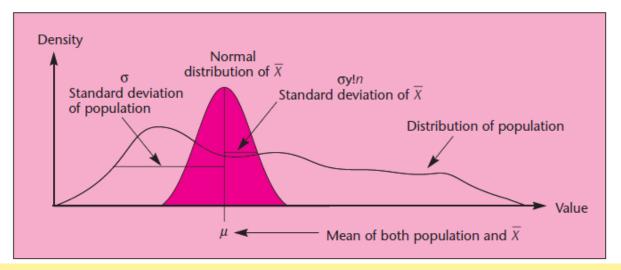
(a) Tentukan elemen yang hilang dalam tabel untuk distribusi sampling dari $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$

\bar{x}	Probabilitas
0	
0,5	
I	0,34
1,5	0,24
2	

- (b) Dapatkan nilai yang diekspektasi dari \bar{X}
- (c) Jika ukuran sampel ditingkatkan menjadi 36, hitung mean dan variansi dari $ar{X}$

IGURE 5–7 A (Nonnormal) Population Distribution and the Normal Sampling Distribution of the Sample Mean When a Large Sample Is Used





Memperjelas perbedaan antara distribusi populasi dan distribusi sampling, serta menekankan tiga aspek dari teorema limit pusat:

- 1. Jika ukuran sampel cukup besar, distribusi pengambilan sampelnya normal.
- 2. Nilai yang diharapkan dari \bar{X} adalah μ .
- 3. Deviasi standar dari \bar{X} adalah σ/\sqrt{n} . sehingga:

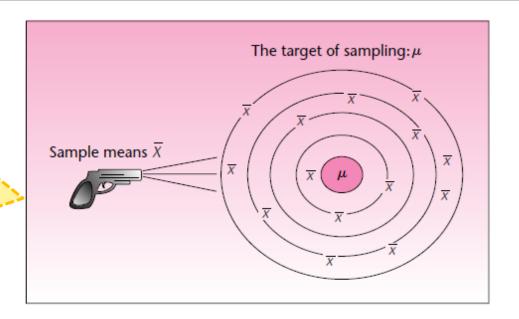
bertambahnya ukuran sampel, variasi dari \bar{X} sekitar nilai mean μ menurun. Dengan kata lain, saat kita membeli lebih banyak informasi (mengambil sampel yang lebih besar), ketidakpastian (diukur dengan deviasi standar) tentang parameter yang diestimasi menurun.

Estimator dan Sifatnya

Beberapa sifat penting dari penduga/ estimator statistik yang baik:

- I. ketidakberpihakan (unbiasedness),
- 2. efisiensi (efficiency),
- 3. konsistensi (consistency), dan FIGURE 5–10 The Sample Mean $\bar{\chi}$ as an Unbiased Estimator of the Population Mean μ
- 4. kecukupan (sufficiency).

Estimator dikatakan **tidak bias** jika nilai yang diharapkan sama dengan parameter populasi yang diestimasi.



► Oleh :Tim Dosen Pengantar Statistika UNAIR

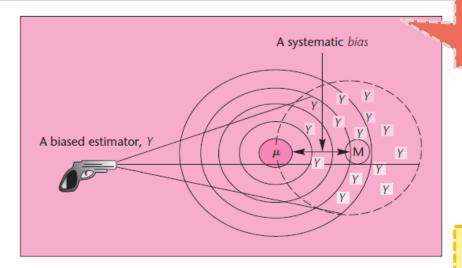
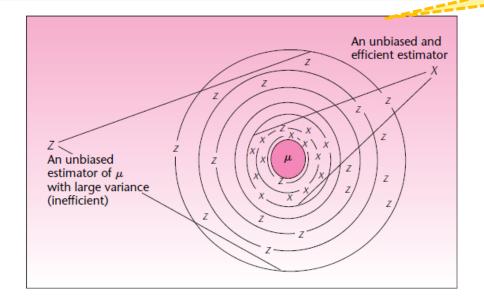


FIGURE 5–12 Two Unbiased Estimators of μ , Where the Estimator X is Efficient Relative to the Estimator Z



Setiap penyimpangan sistematis penduga yang menjauh dari parameter yang diamati disebut **bias**.

Estimator **efisien** jika memiliki variansi yang relatif kecil (dan deviasi standar).

2

Bestimator dikatakan konsisten jika probabilitasnya untuk mendekati parameter yang diestimasi meningkat seiring dengan peningkatan ukuran sampel.

Sebuah estimator dikatakan **cukup** jika memuat semua informasi dalam data tentang parameter yang diestimasi.

TERIMA KASIH