

RANTAI MARKOV WAKTU KONTINU

DR. M. FARIZ FADILLAH MARDIANTO, S.SI., M.SI



STOKASTIK

Pendahuluan

- ▶ Pada bab ini, kita akan belajar mengenai rantai markov waktu kontinu yang analog dengan rantai markov diskrit yang telah dibahas sebelumnya. Rantai markov waktu kontinu juga memiliki sifat Markov, yaitu diberikan keadaan sekarang, maka keadaan pada masa yang akan datang saling bebas dengan keadaan pada masa lampau.

Proses Poisson

Salah satu contoh dari rantai markov waktu kontinu telah kita temui sebelumnya, yaitu proses Poisson. Misalkan banyaknya kedatangan sampai waktu t (yaitu N_t) adalah keadaan dari suatu proses pada waktu t , maka proses Poisson merupakan rantai Markov waktu kontinu dengan keadaan-keadaan $0, 1, 2, \dots$ di mana keadaan selalu bertambah dari keadaan n ke keadaan $n + 1$, $n \geq 0$. Proses demikian dikenal dengan istilah **proses kelahiran murni** karena ketika sebuah transisi terjadi, maka keadaan akan selalu bertambah satu.

Proses Eksponensial

Lebih jauh lagi, model Eksponensial yang dapat berpindah hanya dari keadaan n baik ke keadaan $n - 1$ maupun ke keadaan $n + 1$ dalam satu kali transisi dinamakan **model kelahiran-kematian**. Untuk model tersebut, transisi dari keadaan n ke keadaan $n + 1$ dianggap sebagai proses kelahiran, sedangkan transisi dari keadaan n ke keadaan $n - 1$ dianggap sebagai proses kematian.

Model kelahiran dan kematian secara luas banyak diaplikasikan pada studi tentang **manajemen resiko** dan studi tentang sistem antrian misalnya keadaan yang ada merepresentasikan banyaknya resiko yang telah ditangani dari suatu sistem regulasi

Rantai Markov Waktu Kontinu

Misalkan suatu proses stokastik waktu kontinu $\{X_t, t \geq 0\}$ bernilai bilangan bulat tak negatif. Sesuai analogi dengan definisi rantai Markov waktu diskrit, suatu proses $\{X_t, t \geq 0\}$ adalah rantai Markov waktu kontinu (RMWK) jika untuk semua $s, t \geq 0$ dan bilangan bulat tak negatif $i, j, x_u, 0 \leq u < s$

$$\begin{aligned} P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x_u, 0 \leq u < s) \\ = P(X_{t+s} = j | X_s = i) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, sebuah RMWK adalah suatu proses stokastik yang memiliki sifat Markov yaitu peluang bersyarat dari keadaan X_{t+s} diberikan keadaan sekarang X_s dan keadaan pada masa lampau $X_u, 0 \leq u < s$, hanya bergantung pada keadaan pada masa sekarang dan saling bebas dengan keadaan pada masa lampau.

Rantai Markov Waktu Kontinu

Sebagai tambahan, jika

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

saling bebas dari s , maka RMWK dikatakan memiliki **peluang transisi homogen** atau **stasioner**.

Semua rantai Markov pada materi ini akan diasumsikan memiliki peluang transisi stasioner.

Rantai Markov Waktu Kontinu

Misalkan sebuah RMWK masuk ke keadaan i pada suatu waktu, misalkan, waktu 0, dan misalkan proses tersebut tidak meninggalkan keadaan i (tidak terjadi transisi) selama 10 menit ke depan. Berapa peluang bahwa proses tidak akan meninggalkan keadaan i selama 5 menit selanjutnya? Karena proses berada di keadaan i pada waktu 10, maka berdasarkan sifat Markov, peluang bahwa proses akan tetap berada di keadaan i selama interval $[10, 15]$ merupakan peluang (tak bersyarat) bahwa proses tetap berada di keadaan i selama minimal 5 menit. Misalkan T_i menyatakan lamanya waktu proses berada di keadaan i sebelum berpindah ke keadaan lain, maka

$$P(T_i > 15 | T_i > 10) = P(T_i > 5)$$

atau secara umum,

$$P(T_i > s + t | T_i > s) = P(T_i > t)$$

untuk semua $s, t \geq 0$. Dengan demikian, peubah acak T_i bersifat *memoryless* dan berdistribusi eksponensial.

Rantai Markov Waktu Kontinu

Perhatikan proses Markov (stasioner) dengan ruang parameter kontinu (parameternya biasanya adalah waktu). Transisi dari satu keadaan ke keadaan lain dapat terjadi dalam waktu yang singkat.

- Berdasarkan sifat Markov, waktu yang dihabiskan dalam sebuah sistem diberikan sebarang keadaan bersifat *memoryless*; distribusi dari waktu yang tersisa bergantung semata-mata hanya pada keadaan namun tidak pada lamanya waktu yang telah dihabiskan di keadaan tersebut.

Matriks Generator

Sebuah proses Markov X_t ditentukan oleh **matriks generator** atau **matriks laju transisi**.

$$q_{i,j} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i)}{\Delta t}, \quad i \neq j$$

- Peluang per satuan waktu bahwa sistem melakukan transisi dari keadaan i ke keadaan j
- laju transisi atau intensitas transisi

Total laju transisi keadaan i adalah

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}, \quad \text{umur suatu keadaan} \sim \text{Eksp}(q_i)$$

Berikut ini adalah laju di mana peluang keadaan i berkurang. Definisikan

$$q_{i,i} = -q_i$$

Matriks Laju Transisi

Matriks laju transisi dituliskan sebagai berikut

$$Q = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & \cdots \\ q_{1,0} & -q_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Jumlah tiap baris adalah nol.

Laju Transisi dan Peluang Transisi

Kaitan antara laju transisi dengan peluang transisi adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(X_{t+\Delta t} = j | X_{t+\Delta t} \neq i, X_t = i) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = j, X_{t+\Delta t} \neq i | X_t = i)}{P(X_{t+\Delta t} \neq i | X_t = i)} \\ &= \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{\sum_j q_{i,j}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam bentuk matriks peluang transisi, maka

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{q_{0,1}}{\sum_{j \neq i} q_{i,j}} & \frac{q_{0,2}}{\sum_{j \neq i} q_{i,j}} & \cdots \\ \frac{q_{1,0}}{\sum_{j \neq i} q_{i,j}} & 0 & \frac{q_{1,2}}{\sum_{j \neq i} q_{i,j}} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Total jumlah per baris adalah satu.

Peluang Keadaan

Vektor peluang keadaan $\pi_i(t) = P(X_t = i)$ sekarang adalah fungsi yang bergantung waktu, yaitu

$$\frac{d}{dt}\pi(t) = \pi(t) \cdot Q$$

dengan $\pi(t) = (\pi_0(t) \ \pi_1(t) \ \pi_2(t) \ \cdots)$

Berdasarkan sistem persamaan diferensial, misalkan $\pi(t) = Ce^{Qt}$, maka

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi(t) &= \frac{d}{dt}(Ce^{Qt}) \\ &= QCe^{Qt} \\ &= Q\pi(t)\end{aligned}$$

Misalkan nilai awal $C = \pi(0)$, maka solusi formal untuk vektor peluang keadaan yang bergantung waktu adalah

$$\pi(t) = \pi(0)e^{Qt}$$

Global Balance Conditions

Solusi stasioner $\pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$ tidak tergantung waktu, dengan demikian

$$\pi \cdot Q = 0$$

Kondisi kesetimbangan tersebut memperlihatkan kesetimbangan antara peluang kejadian masuk dan kejadian keluar dari i .

$$\pi \cdot Q = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots) \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots \\ q_{1,0} & -q_1 & q_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

$$-q_0\pi_0 + q_{1,0}\pi_1 + q_{2,0}\pi_2 + \dots = 0$$

$$q_{0,1}\pi_0 - q_1\pi_1 + q_{2,1}\pi_2 + \dots = 0$$

$$\vdots$$

Jika bagian yang negatif dipindah ruas ke kanan, maka

$$q_{1,0}\pi_1 + q_{2,0}\pi_2 + \dots = q_0\pi_0$$

$$q_{0,1}\pi_0 + q_{2,1}\pi_2 + \dots = q_1\pi_1$$

Global Balance Conditions

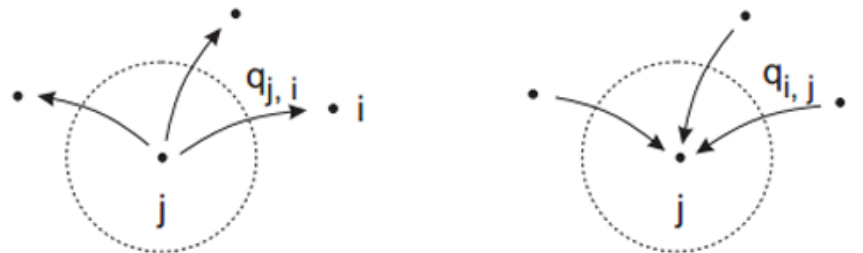
Secara umum, kita peroleh persamaan kesetimbangan tersebut yaitu
Untuk baris ke- j

$$q_j \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{i,j}$$

$$\sum_{i \neq j} q_{j,i} \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{i,j}$$

atau dengan kata lain

$$\sum_{i \neq j} \pi_j q_{j,i} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{i,j}$$



Proses Kelahiran-Kematian

Perhatikan sebuah sistem di mana keadaan di setiap waktu direpresentasikan oleh banyaknya orang yang berada dalam sistem tersebut. Misalkan setiap kali ada i orang dalam sistem, maka

- kedatangan baru masuk ke dalam sistem dengan laju eksponensial sebesar λ_i
- orang meninggalkan sistem dengan laju eksponensial sebesar μ_i

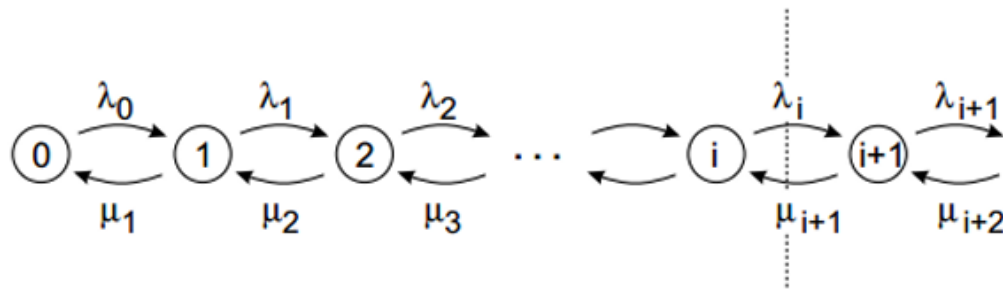
Dengan kata lain, setiap kali ada i orang di dalam sistem, maka waktu sampai kedatangan berikutnya berdistribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\lambda_i}$ dan saling bebas dengan waktu sampai keberangkatan berikutnya di mana keberangkatan tersebut berdistribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\mu_i}$. Sistem seperti ini disebut proses kelahiran-kematian. Parameter $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ dan $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ secara berturut-turut adalah laju kedatangan (kelahiran) dan laju keberangkatan (kematian).

Proses Kelahiran-Kematian

Dengan demikian, sebuah proses kelahiran-kematian merupakan RMWK dengan keadaan $\{0, 1, \dots\}$ di mana transisi dari keadaan i hanya bisa berpindah ke keadaan $j = i + 1$ atau $j = i - 1$.

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{jika } j = i + 1 \\ \mu_i & \text{jika } j = i - 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Atau jika digambarkan



Proses Kelahiran-Kematian

Matriks untuk Q adalah

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan hubungan di atas, maka diperoleh matriks P sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu_3}{\lambda_3 + \mu_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Proses Kelahiran-Kematian

Dengan demikian, diperoleh hubungan antara laju transisi dengan peluang transisinya secara umum adalah:

$$P_{01} = 1$$

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, i > 0$$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, i > 0$$

Peluang Keseimbangan Proses Kelahiran-Kematian

Untuk menyelesaikan kasus di atas, kita akan menggunakan *global balance condition* pada keadaan-keadaan $0, 1, \dots, k$. Berdasarkan keseimbangan proses masuk dan keluar, maka

$$\lambda_k \pi_k = \mu_{k+1} \pi_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Selanjutnya kita peroleh bentuk rekursif

$$\pi_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \pi_k$$

Berdasarkan persamaan rekursif di atas, kita bisa menuliskan semua peluang keadaan dalam bentuk π_0 yaitu

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \dots \mu_1} \pi_0 = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_0$$

Peluang Kesetimbangan Proses Kelahiran-Kematian

Ingat!

Peluang keadaan memiliki sifat $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$. Dengan menggunakan sifat tersebut, kita peroleh

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k &= \pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_0 \\ 1 &= \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] \\ \pi_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}\end{aligned}$$

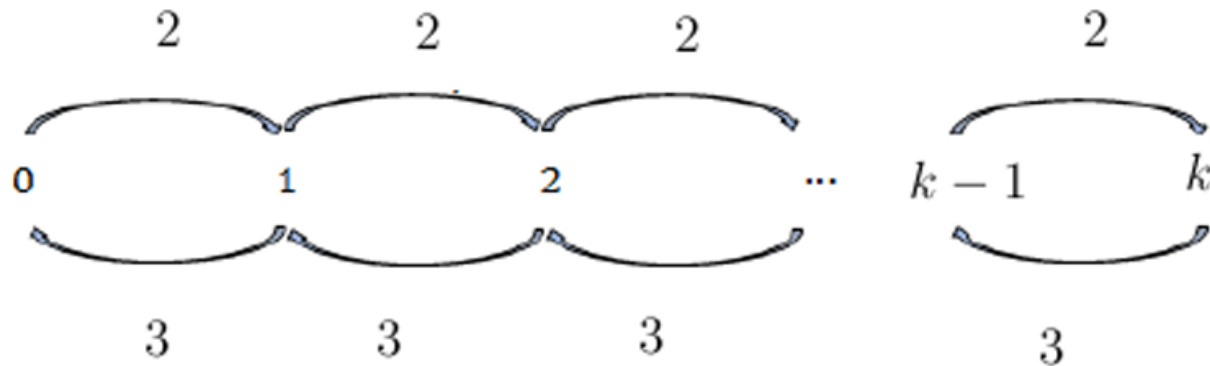
Setelah memperoleh nilai π_0 , maka kita juga bisa mendapatkan nilai dari π_k .

Contoh 1

Misalkan suatu proses kelahiran dan kematian memiliki konstan *birth rate* $\lambda = 2$ dan konstan *death rate* $\mu = 3$. Tentukan nilai π_0 dan π_k pada model tersebut dengan menggunakan analisis persamaan kesetimbangan!

Solusi:

Perhatikan proses berikut



Contoh 1

Dengan menggunakan persamaan kesetimbangan diperoleh

$$2\pi_0 = 3\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0$$

$$2\pi_1 = 3\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \pi_0$$

\vdots

$$2\pi_{k-1} = 3\pi_k \Rightarrow \pi_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \pi_0$$

Contoh 1

Selanjutnya, gunakan sifat $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \pi_0$$

$$1 = \pi_0 + \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \right]$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

Substitusikan nilai π_0 ke dalam persamaan π_k sehingga diperoleh

$$\pi_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \pi_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Contoh 2

(Model Perbaikan Sebuah Mesin) Di dalam sebuah toko terdapat M mesin dan seorang tukang. Misalkan lamanya waktu untuk masing-masing mesin bekerja sebelum akhirnya rusak berdistribusi Eksponensial dengan rate λ dan lamanya waktu mesin tersebut diperbaiki oleh tukang berdistribusi Eksponensial dengan rate μ . Berapa peluang bahwa sebanyak n mesin akan tidak digunakan? Berapa rata-rata banyaknya mesin yang tidak digunakan? (Petunjuk: Gunakan persamaan kesetimbangan untuk menyelesaikan masalah tersebut, keadaannya menyatakan banyaknya mesin yang rusak).

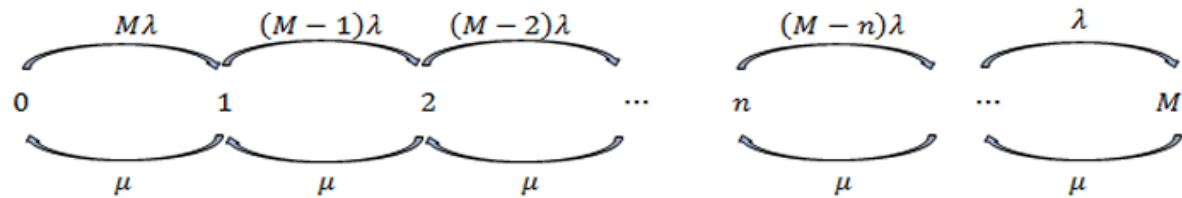
Contoh 2

Solusi:

Misalkan sistem berada di keadaan n jika sebanyak n mesin tidak digunakan, maka proses tersebut merupakan proses *birth and death* dengan parameter:

$$\begin{aligned}\mu_n &= \mu & n \geq 1 \\ \lambda_n &= \begin{cases} (M - n)\lambda & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}\end{aligned}$$

Proses tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh 2

Dengan menggunakan persamaan kesetimbangan maka,

$$M\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{M\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$(M-1)\lambda\pi_1 = \mu\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{(M-1)\lambda}{\mu}\pi_1 = \frac{(M-1)M\lambda^2}{\mu^2}\pi_0$$

$$(M-2)\lambda\pi_2 = \mu\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{(M-2)\lambda}{\mu}\pi_2 = \frac{(M-2)(M-1)M\lambda^3}{\mu^3}\pi_0$$

\vdots

$$(M-n)\lambda\pi_n = \mu\pi_{n+1}$$

Secara umum diperoleh π_n yaitu

$$\begin{aligned}\pi_n &= \frac{(M-n+1)(M-n+2)\dots(M-1)M\lambda^n}{\mu^n}\pi_0 \\ &= \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0\end{aligned}$$

Contoh 2

Selanjutnya gunakan sifat $\sum_{n=0}^M \pi_n = 1$ sehingga diperoleh:

$$\sum_{n=0}^M \pi_n = \sum_{n=0}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$$

$$1 = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Contoh 2

Substitusikan nilai π_0 ke dalam persamaan π_n dan diperoleh peluang bahwa sebanyak n mesin tidak digunakan yaitu

$$\pi_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \frac{\frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 + \sum_{n=1}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Selanjutnya, rata-rata banyaknya mesin yang tidak digunakan adalah

$$\sum_{n=0}^M n\pi_n = \frac{\sum_{n=0}^M n \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 + \sum_{n=1}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Terima Kasih