

# MAS223

## Rantai Markov 1/2 (Week 2)

---

Tim Dosen

Program Studi Teknologi Sains Data

Faculty of Advanced Technology and Multidiscipline

Universitas Airlangga

# Manfaat Rantai Markov



- ❑ **Secara teoritis** sangat kaya dan dapat disajikan secara sederhana
- ❑ **Sistem kehidupan sehari-hari** dapat dimodelkan dalam bentuk Rantai Markov



Sistem Diskrit



Sistem  
Kontinu

# Syarat-Syarat Rantai Markov

---



Syarat-syarat Rantai Markov dapat diaplikasikan dalam evaluasi keandalan sistem

- ☐ **Lack of memory** kondisi sistem dimasa mendatang tidak dipengaruhi oleh kondisi sebelumnya
- ☐ **Stasioner atau homogen** perilaku sistem selalu sama sepanjang waktu atau peluang transisi sistem dari satu kondisi ke kondisi lainnya akan selalu sama sepanjang waktu
- ☐ **Teridentifikasi** kondisi yang dimungkinkan terjadi pada sistem harus dapat diidentifikasi dengan jelas

# Definisi

Misalkan  $S$  menyatakan himpunan **state**, dan  $n = 0, 1, 2, \dots$  dan  $X_n$  menyatakan **state** sistem pada waktu  $n$  dan merupakan variabel random yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas. Suatu sistem mempunyai sifat Rantai Markov jika memenuhi syarat:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$



**Probabilitas Transisi**

# Probabilitas Transisi

Probabilitas transisi suatu proses Rantai Markov dinyatakan sebagai:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Kondisi  $X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  tidak mempunyai pengaruh terhadap keadaan tersebut, yang mempengaruhi probabilitas  $X_{n+1} = x_{n+1}$  hanya  $X_n = x_n$ . Jadi keadaan (**state**) sebelumnya tidak berpengaruh terhadap keadaan besok ( $X_{n+1} = x_{n+1}$ ) yang mempengaruhi hanya keadaan sekarang ( $X_n = x_n$ )

$$P_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i], \forall i, j$$

dengan

$$P_{ij} \geq 0, \sum_j P_{ij} = 1, \forall i$$

# Probabilitas Transisi

---

**Note:** Jika  $P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i], \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$  maka probabilitas transisinya bersifat **stasioner (homogen)**

# Fungsi Transisi & Distribusi Awal

Misalkan  $X_n, n \geq 0$  suatu Rantai Markov dengan **state space**  $S$ . Fungsi  $P(x, y), x, y \in S$  yang didefinisikan sebagai

$$P(x, y) = P(X_1 = y | X_0 = x), \quad x, y \in S$$

dinamakan **Fungsi Transisi** untuk rantai tersebut

Berdasarkan definisi diatas maka diperoleh sifat-sifat:

1.  $P(x, y) \geq 0, x, y \in S$ , karena  $P(X_1 = y | X_0 = x)$  merupakan suatu probabilitas untuk  $x, y \in S$
2.  $\sum_{y \in S} P(x, y) = 1$  untuk setiap  $x \in S$

# Fungsi Transisi & Distribusi Awal

$$\begin{aligned} 2. \quad \sum_{y \in S} P(x, y) &= \sum_{y \in S} P(X_1 = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in S} \frac{P(X_1 = y | X_0 = x)}{P(X_0 = x)} = 1 \end{aligned}$$

Karena Rantai Markov mempunyai probabilitas stasioner, yaitu  $P(X_{n+1} = y | X_n = x)$  tidak bergantung pada nilai  $n$ , maka  $P(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(X_1 = y | X_0 = x) = P(x, y)$  untuk  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Berdasarkan sifat Markov, diperoleh:

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(x, y)$$



# Fungsi Transisi & Distribusi Awal

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(x, y)$$

Dengan kata lain:

Suatu Rantai Markov **state**  $X$  pada waktu ke- $n$ , maka probabilitas pada waktu ke- $n + 1$  (waktu berikutnya) di **state**  $y$  sama dengan  $P(x, y)$ , tidak bergantung pada bagaimana rantai itu sampai di  $X$

$P(x, y)$  disebut probabilitas transisi satu Langkah (*one step transition probability*) dari Rantai Markov tersebut

# Fungsi Transisi & Distribusi Awal

---

Fungsi  $\pi_0(x)$ ,  $x \in S$  didefinisikan sebagai

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x), x \in S$$

disebut **Distribusi Awal** untuk rantai tersebut

Berdasarkan definisi diatas diperoleh sifat-sifat:

1.  $\pi_0(x) \geq 0, x \in S$
2.  $\sum_{x \in S} \pi_0(x) = 1$

**Distribusi bersama**  $X_0, X_1, \dots, X_n$  dapat diperoleh dengan **fungsi transisi** dan **distribusi awal**

# Fungsi Transisi & Distribusi Awal

## Contoh 1:

$$\begin{aligned} 1. \quad P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) &= P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdot P(X_0 = x_0) \\ &= P(x_0, x_1) \cdot \pi_0(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= P(X_2 = x_2 | X_0 = x_0, X_1 = x_1) \cdot P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) \\ &= P(x_1, x_2) \cdot P(x_0, x_1) \cdot \pi_0(x_0) \end{aligned}$$

Dengan induksi diperoleh

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(x_{n-1}, x_n) \cdot P(x_{n-2}, x_{n-1}) \dots P(x_0, x_1) \cdot \pi_0(x_0)$$

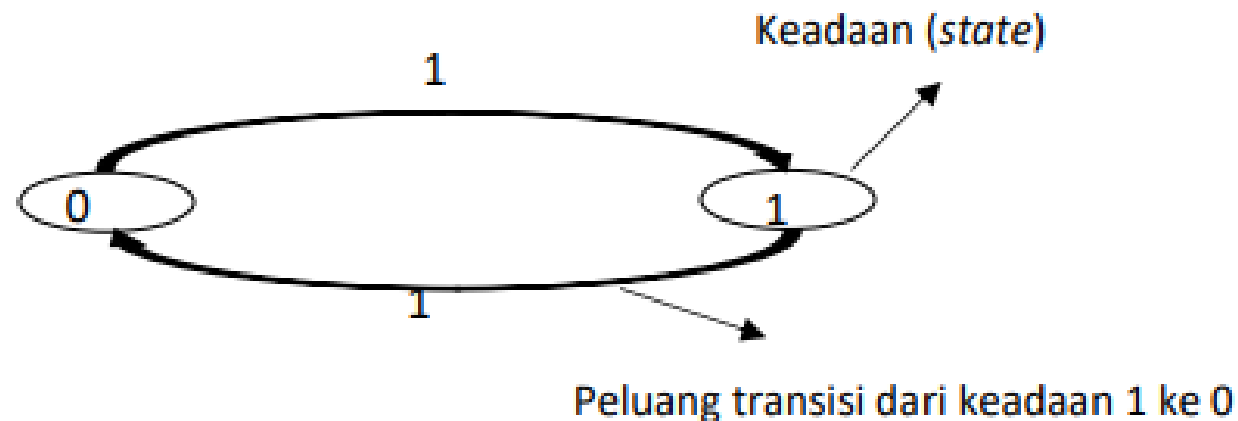
# Matriks Transisi

Sebuah matriks  $\mathbf{P} = [p_{ij}]$  disebut dengan probabilitas transisi matriks, dimana  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{j=1} p_{ij} = 1$ ,  $(i, j = 0, 1, 2, 3, \dots)$

## Contoh 2:

Mengingat Rantai Markov dua keadaan yaitu 0 dan 1, dengan matriks probabilitas transisi

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



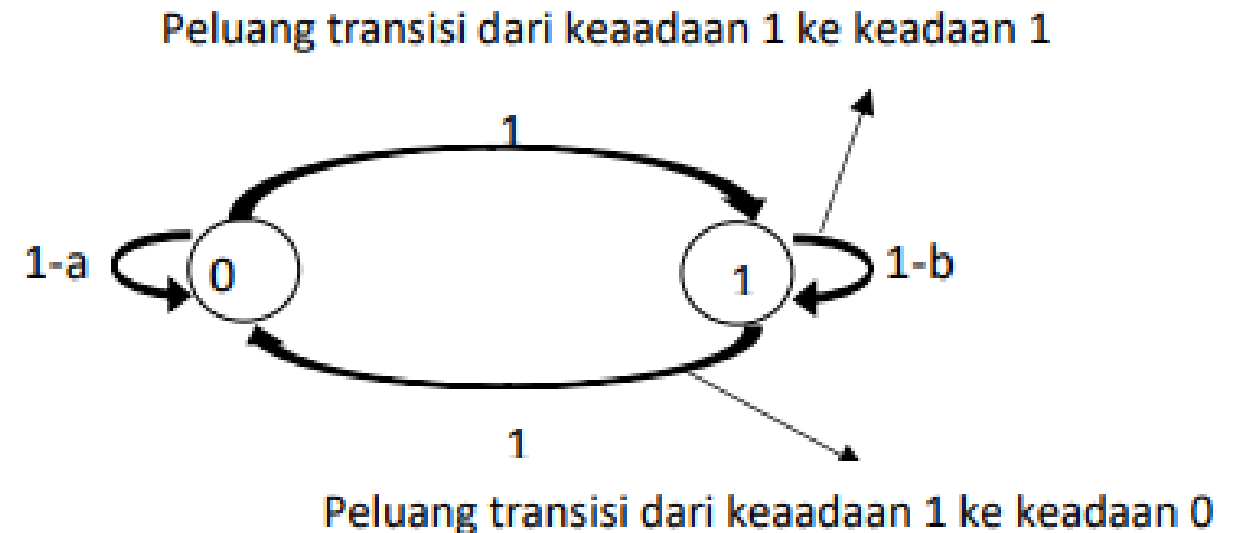
# Matriks Transisi

**Contoh 3:** 
$$P = \begin{matrix} 0 & \\ 1 & \end{matrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

dimana  $0 \leq a \leq 1$  dan  $|1-a-b| < 1$



kasus khusus  $a = b = 1$   
kembali ke **Contoh 2**



# Matriks Transisi

---

**Contoh 4:** Sebuah mesin pada waktu mulai dipakai (sembarang hari) adalah rusak atau baik. Seandainya mesin tersebut rusak pada awal hari ke- $n$ , probabilitas bahwa selama hari tersebut dapat diperbaiki dan pada awal hari berikutnya (hari ke- $n + 1$ ) baik sama dengan  $p$ . Seandainya mesin pada awal hari ke- $n$  baik, probabilitasnya mesin rusak pada awal hari ke- $n + 1$  adalah  $q$ . Diketahui pula bahwa  $\pi_0(0)$  menyatakan probabilitas mesin rusak pada awal hari ke-nol, yaitu mesin datang dari pabrik sebelum dipakai, probabilitasnya rusak adalah  $\pi_0(0)$ . Dengan demikian, probabilitas mesin dalam keadaan baik pada awal hari ke-nol adalah  $\pi_0(1) = 1 - \pi_0(0)$ .

# Matriks Transisi

---

Misalkan **state** 0 menyatakan mesin rusak dan **state** 1 menyatakan mesin baik,  $X_n$  menyatakan variabel random yang menunjukkan keadaan mesin pada hari ke- $n$ . Jadi dalam contoh ini diperoleh

$$S = \{0,1\}, n = 0,1,2,3, \dots$$

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = p$$

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = q$$

$$P(X_0 = 0) = \pi_0(0)$$

Karena disini  $S$  hanya memiliki 2 **state** yaitu 0 dan 1 maka

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1 - p$$

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1 - q$$

# Matriks Transisi

---

Karena disini  $S$  hanya memiliki 2 **state** yaitu 0 dan 1 maka

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1 - p$$

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1 - q$$

- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$  menyatakan jika diketahui pada hari ke- $n$  mesin rusak, probabilitas pada hari berikutnya (hari ke- $n + 1$ ) masih tetap rusak adalah  $1 - p$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$  menyatakan jika diketahui pada hari ke- $n$  mesin baik, probabilitas pada hari berikutnya (hari ke- $n + 1$ ) masih tetap baik adalah  $1 - 1$



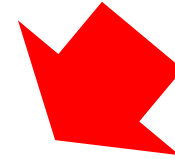
# Matriks Transisi

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1 - p$$

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - q$$

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = p$$

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = q$$



$$P = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

# Rantai Ehrenfest

---

Diberikan dua buah kotak (kotak I dan kotak II dan  $d$  bola dengan nomor  $1, 2, \dots, d$ . Awalnya sebagian bola diletakkan pada kotak I dan sisanya di kotak II. Tersedia lotery dengan nomor  $1, 2, \dots, d$ . Mula-mula diambil selembarnya lotery secara random, dilihat nomor berapa yang terambil, dipindah dari kotaknya dan dimasukkan ke kotak lain. Proses ini dilakukan tak hingga kali. Pengambilan lotery secara random dan dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya. Jika  $X_n, n \geq 0$  menyatakan banyaknya bola pada kotak I setelah trial ke- $n$ , maka  $X_n$  merupakan rantai Markov dengan ruang state  $S = \{0, 1, 2, \dots, d\}$ , tentukan fungsi transisi dari rantai tersebut!

# Rantai Ehrenfest

---

Misalkan ada  $x$  bola pada kotak I pada waktu ke- $n$ , maka terdapat  $(d - x)$  bola pada kotak II. Pada waktu ke- $(n + 1)$  akan mengambil sebuah bola dari kotak I, tergantung pada lotery yang terambil. Jadi probabilitas untuk mengambil bola pada kotak I adalah  $x/d$  dan bola dipindahkan ke dalam kotak II. Ini berarti bahwa banyaknya bola di kotak I pada waktu ke- $(n + 1)$  sama dengan  $(x - 1)$ , atau :  $P(x_{n+1} = x - 1 | x_n = x) = P(x, x - 1) = x/d$

Dengan cara yang sama akan didapat  $P(x_{n+1} = x + 1 | x_n = x) = P(x, x + 1) = (d - x)/d$  dan  $P(x_{n+1} = y | x_n = x) = P(x, y) = 0$  untuk  $y \neq x - 1$  atau  $y \neq x + 1$ , sehingga diperoleh fungsi transisi :

# Rantai Ehrenfest

---

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{d}, & \text{untuk } y = x - 1 \\ \frac{d - x}{d}, & \text{untuk } y = x + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P = \begin{matrix} x & y \end{matrix} \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{x(x-1)} \\ p_{(x+1)x} & p_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{d} \\ \frac{d-x}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

# Rantai Penjudi

Misalkan seorang penjudi, setiap kali main dia pasang 1 dolar. Probabilitas dia akan menang adalah  $p$ , dan probabilitas dia kalah adalah  $q$ ,  $q = 1 - p$ . Menang berarti dia dapat satu dolar, kalah berarti kehilangan 1 dolar. Modal penjudi bisa mencapai 0 (habis) dan akan tetap sama dengan 0 (seterusnya). Misalkan  $X_n$ ,  $n \geq 0$  menyatakan modal penjudi pada waktu ke- $n$ , maka fungsi transisinya adalah :

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} = x - 1 | x_n = x) &= P(x, x - 1) = q \\ P(x_{n+1} = x + 1 | x_n = x) &= P(x, x + 1) = p \end{aligned}$$

$x_{n+1} = x - 1$ , maksudnya saat penjudi kalah maka terjadi pengurangan modal sebesar 1 dolar

$x_{n+1} = x + 1$ , maksudnya saat penjudi menang maka terjadi penambahan modal sebesar 1 dolar

# Rantai Ehrenfest

---

$$P(x, y) = \begin{cases} q, & \text{untuk } y = x - 1 \\ p, & \text{untuk } y = x + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P = \begin{matrix} x & \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{x(x-1)} \end{bmatrix} \\ y & \begin{bmatrix} p_{(x+1)x} & p_{yy} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{bmatrix}$$

A word cloud featuring the phrase "Thank You" in numerous languages. The words are arranged in a cross-like pattern, with "THANK YOU" being the largest and most prominent. Other languages include Spanish (GRACIAS, ARIGATO), Arabic (SHUKRIA, BOLZIN), Hindi (DANKSCHEEN), and many others. The words are in different sizes and orientations, creating a dynamic and multicultural visual.