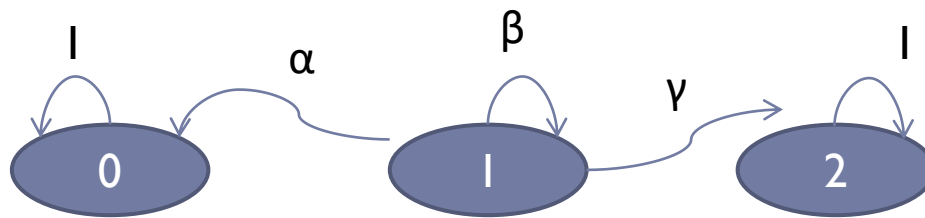


First Step Analysis and Markovian Property

Proses Stokastik - TSD FTMM

- ▶ Perhatikan rantai markov berikut ini



- ▶ Dengan matriks peluang transisi:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- ▶ Pada suatu periode n ketika pertama kali X_n di 0 atau 2:
 - ▶ Rantai tersebut tetap berada di 0 atau 2 selamanya
 - ▶ *Trapped/Absorbed*

First Step Analysis

- ▶ Digunakan untuk menganalisis:
 - ▶ Berapa lama secara rata-rata proses/rantai markov akan mencapai state-state tersebut?
 - ▶ Pada contoh: state 0 atau 2.
 - ▶ Berapa lama rantai akan terserap (*absorbed/trapped*)
 - ▶ Pada contoh: state 0 dan 2 adalah *absorbing states*.
- ▶ Time to absorption:

$$T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \text{ atau } X_n = 2\}$$



-
- ▶ Analisis pada *time to absorption* ke state 0
 - ▶ Digunakan definisi-definisi berikut:

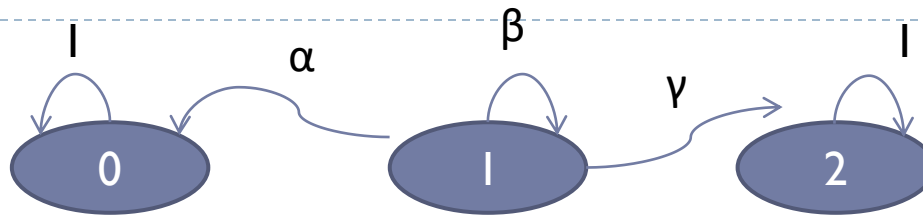
$$u = \Pr\{X_T = 0 | X_0 = 1\}$$

Peluang pada periode T rantai terjebak/terserap di 0, dengan syarat proses berawal di state 1



- ▶ Nilai harapan dari *time to absorption*

$$v = E[T | X_0 = 1]$$

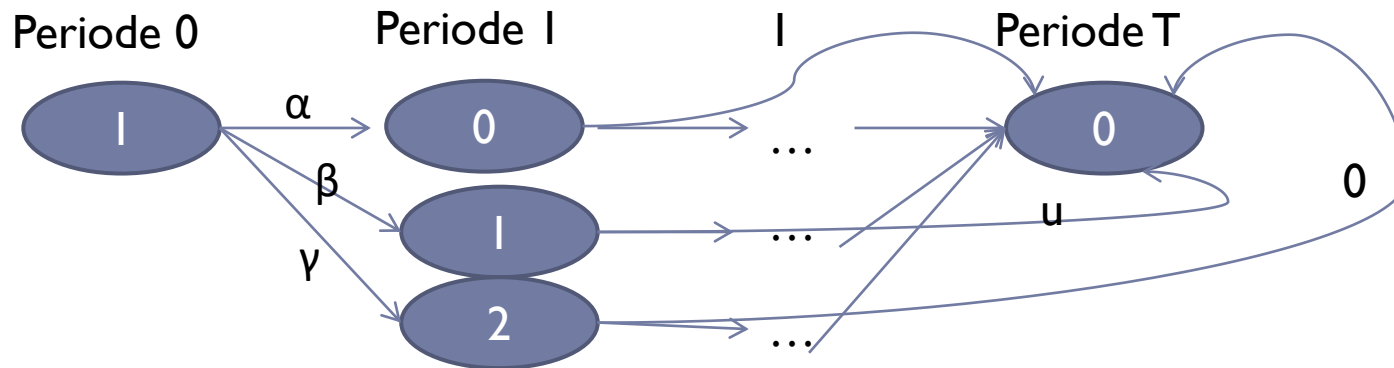


- Dari rantai markov tsb, berapapun langkah transisi, ketika rantai terserap pada state 0 pada periode T , berlaku:

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 0\} = 1$$

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 1\} = u \quad \text{Definisi}$$

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 2\} = 0$$



Transisi satu langkah berawal di state 1

Transisi beberapa langkah dan berakhir di state 0 (terserap/absorbed)

$$\begin{aligned}
 u &= \Pr\{X_T = 0 \mid X_0 = 1\} \\
 &= \sum_{k=0}^2 \Pr\{X_1 = k \mid X_0 = 1\} \Pr\{X_T = 0 \mid X_1 = k\} \\
 &= \alpha(1) + \beta(u) + \gamma(0)
 \end{aligned}$$

Peluang pada periode T rantai terjebak/terserap di 0, dengan syarat proses berawal di state 1

$$u = \alpha(1) + \beta(u) + \gamma(0)$$

$$u = \alpha + \beta u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

Dengan sifat:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \beta = \alpha + \gamma$$

Jika terserap di state 2,
peluangnya:

$$\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$$



Time to absorption

$$T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \text{ atau } X_n = 2\} \quad v = E[T | X_0 = 1]$$

- ▶ Paling sedikit satu langkah
- ▶ Ketika $X_i = 0$ atau 2
 - ▶ Tidak ada transisi lanjutan (1 langkah) dengan peluang masing-masing α dan γ
- ▶ Ketika $X_i = 1$ masih dibutuhkan rata-rata v langkah lagi menuju 0 atau 2 dengan peluang β

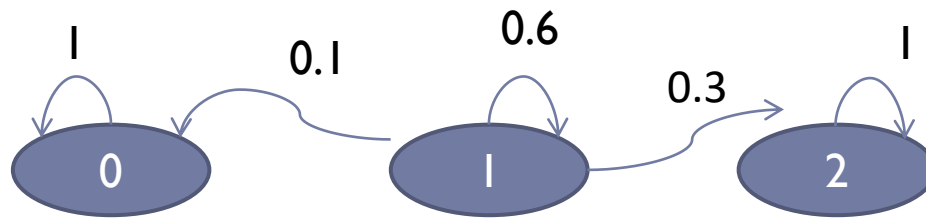
$$v = 1 + \alpha(0) + \beta(v) + \gamma(0)$$

$$v = 1 + \beta(v) \quad v = \frac{1}{1 - \beta}$$



Contoh:

- ▶ Perhatikan rantai markov berikut ini



- ▶ Dengan matriks peluang transisi:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dengan syarat proses berawal di state 1, tentukan peluang bahwa rantai Markov tsb berakhir di state 0!

► Adalah:

$$u = \Pr\{X_T = 0 \mid X_0 = 1\}$$

Peluang pada periode T rantai terjebak/terserap di 0, dengan syarat proses berawal di state 1.

Berdasarkan first step analysis:

$$u = \alpha(1) + \beta(u) + \gamma(0) = 0.1(1) + 0.6(u) + 0.3(0)$$

$$u = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} = \frac{0.1}{0.1 + 0.3} = 0.25$$



► Tentukan rata-rata *time to absorption*!

Dengan definisi T langkah minimum untuk sampai ke absorbing state, 0 atau 2:

$$T = \min \{n \geq 0; X_n = 0 \text{ atau } X_n = 2\}$$

Rata-rata dari T adalah rata-rata time to absorption:

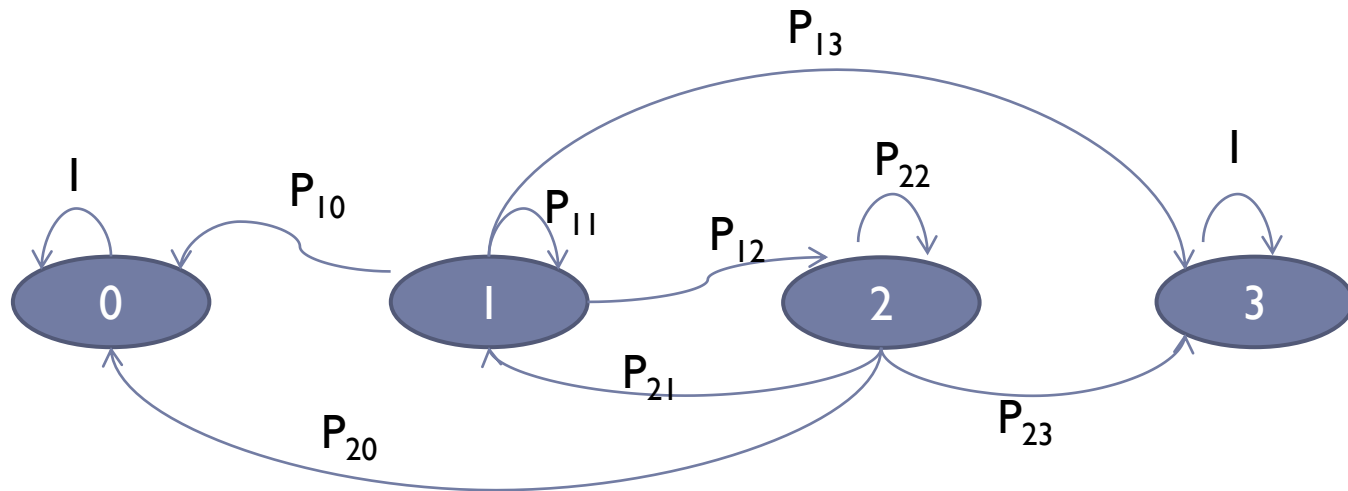
$$v = E[T | X_0 = 1]$$
$$v = \frac{1}{1 - 0.6} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Dibutuhkan rata-rata 2.5 langkah untuk terserap di state 0 atau 2



First Step Analysis untuk Rantai Markov dengan 4 state

- ▶ Perhatikan rantai markov berikut ini



- ▶ Dengan matriks peluang transisi:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

-
- ▶ Pada suatu periode n ketika pertama kali X_n di 0 atau 3:
 - ▶ Rantai tersebut tetap berada di 0 atau 3 selamanya
 - ▶ *Trapped/Absorbed*
 - ▶ Dengan definisi dari *Time to absorption*:

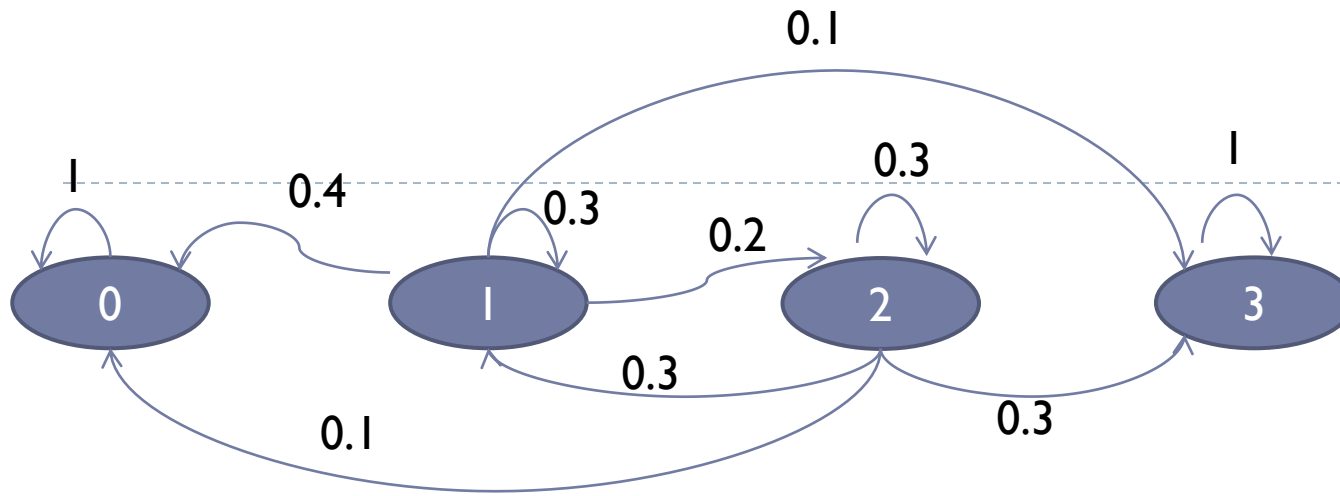
$$T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \text{ atau } X_n = 3\}$$

- ▶ Analisis pada *time to absorption* ke state 0
- ▶ Digunakan definisi-definisi berikut:

$$u_1 = \Pr\{X_T = 0 | X_0 = 1\} \quad u_2 = \Pr\{X_T = 0 | X_0 = 2\}$$

- ▶ Nilai harapan dari *time to absorption* $v_1 = E[T | X_0 = 1]$





$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Dari rantai markov tsb, berapapun langkah transisi, ketika rantai terserap pada state 0 pada periode T , berlaku:

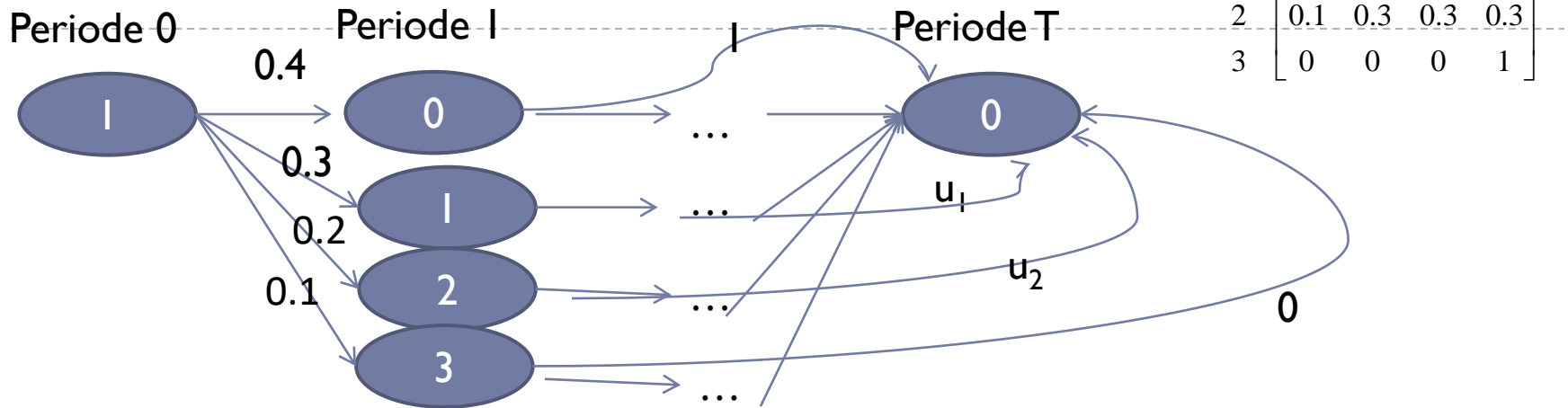
$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 0\} = 1$$

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 1\} = u_1 \quad \text{Definisi}$$

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 2\} = u_2 \quad \text{Definisi}$$

$$\Pr\{X_T = 0 | X_1 = 3\} = 0$$

Berawal dari state 1 berakhir di 0



Transisi satu langkah berawal di state 1

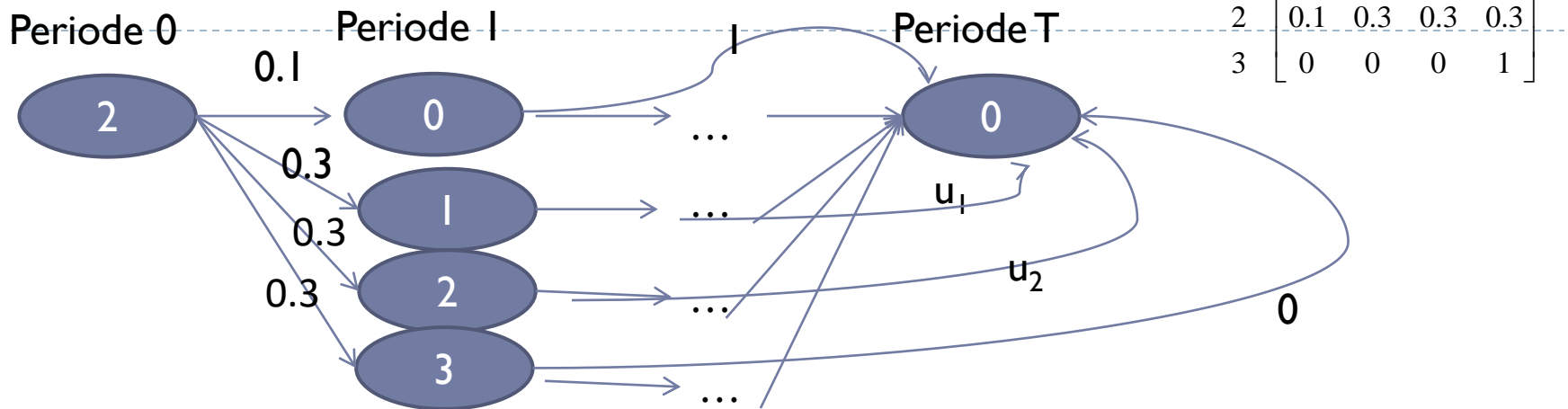
Transisi beberapa langkah dan berakhir di state 0 (terserap/absorbed)

$$u_1 = \Pr\{X_T = 0 | X_0 = 1\} = \sum_{k=0}^3 \Pr\{X_1 = k | X_0 = 1\} \Pr\{X_T = 0 | X_1 = k\}$$

$$= 0.4(1) + 0.3(u_1) + 0.2(u_2) + 0.1(0)$$

$$u_1 = 0.4 + 0.3u_1 + 0.2u_2 \Leftrightarrow 0.7u_1 = 0.4 + 0.2u_2$$

Berawal dari state 2, berakhir di 0



Transisi satu langkah berawal di state 2

Transisi beberapa langkah dan berakhir di state 0 (terserap/absorbed)

$$u_2 = \Pr\{X_T = 0 | X_0 = 2\} = \sum_{k=0}^3 \Pr\{X_1 = k | X_0 = 2\} \Pr\{X_T = 0 | X_1 = k\}$$

$$= 0.1(1) + 0.3(u_1) + 0.3(u_2) + 0.3(0)$$

$$u_2 = 0.1 + 0.3u_1 + 0.3u_2 \Leftrightarrow 0.7u_2 = 0.1 + 0.3u_1$$