# Klasifikasi States

Untuk mempelajari perilaku dari suatu rantai Markov, kita perlu membuat klasifikasi dari ruang keadaan (ruang *state*) rantai Markov tersebut.

# Keadaan *Accessible* (dapat dicapai)

Pandang suatu rantai Markov, $\{X(n),\ n = 0, 1, 2, ...\}$

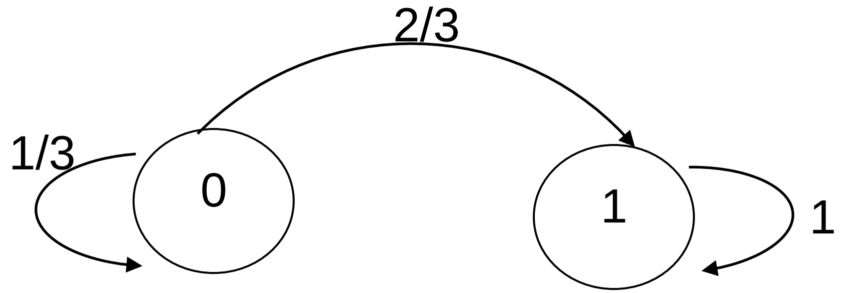
Keadaan $j$ dikatakan ***accessible*** (**dapat dicapai**) dari keadaan $i$ , dinotasikan dengan $i \rightarrow j$ ,

jika terdapat bilangan bulat $n \geq 0$ sehingga $p_{ij}^{n} > 0$.

Sudah tentu setiap keadaan dapat dicapai oleh dirinya sendiri, sehingga $i \rightarrow i$ , karena $p_{ii}^{0} = 1$.

Contoh:

Jika $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$




maka kita katakan keadaan 1 dapat dicapai dari 0

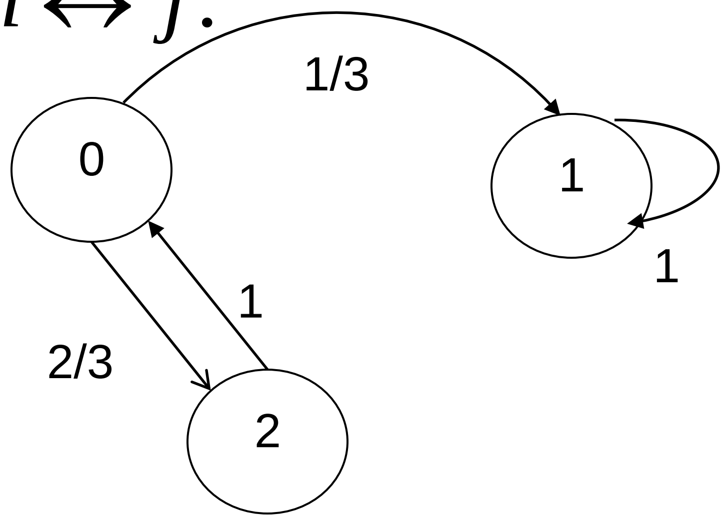
$(0 \rightarrow 1)$ karena $p_{01}^{1} = 2/3 > 0.$

tapi tidak sebaliknya, keadaan 0 tidak dapat dicapai dari 1.

Jika $i \to j$ dan $j \to i$, yaitu terdapat bilangan bulat $m \geq 0$ dan $n \geq 0$ sehingga $p_{ij}^{m} > 0$ dan $p_{ji}^{n} > 0$, maka keadaan $i$ dan $j$ dikatakan **saling berkomunikasi,** dinotasikan $i \leftrightarrow j$.

Contoh:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$




Dalam hal ini, $0 \leftrightarrow 2$

$2 \to 1$ (karena $2 \to 0, 0 \to 1$)

1 dan 2 tidak saling berkomunikasi.

# **Teorema 1**
(sifat komunikasi kelas rantai Markov)

**Komunikasi** adalah suatu relasi ekivalen, artinya

(i) $i \leftrightarrow i$

(ii) $i \leftrightarrow j$ maka $j \leftrightarrow i$

(iii) $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$ maka $i \leftrightarrow k$

Berdasarkan relasi komunikasi, semua keadaan dalam rantai Markov dapat diklasifikasikan ke dalam **kelas-kelas komunikasi yang terpisah** (*disjoint*) dan **lengkap** (*exhaustive).*

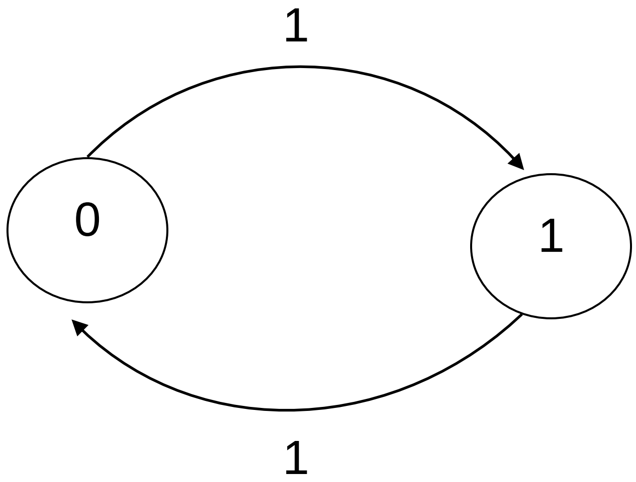
## Contoh:

1. Tentukan kelas komunikasi dari matriks peluang transisi berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Jawab :

- Diagram transisinya untuk $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$




- Kelas komunikasi : $\{0,1\}$

  karena $0 \leftrightarrow 1$

2. Jika diberikan matriks peluang transisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

- Diagram transisinya:

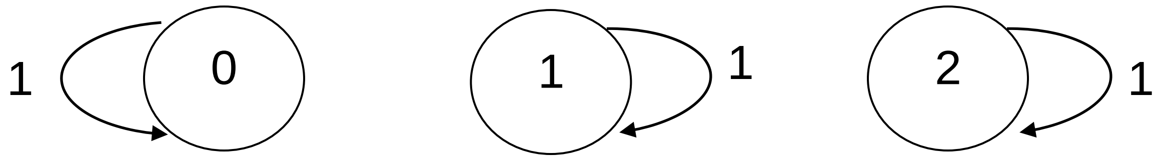

- Kelas komunikasinya:{0} dan {1}.

3. Jika diberikan matriks peluang transisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

- Diagram transisinya:



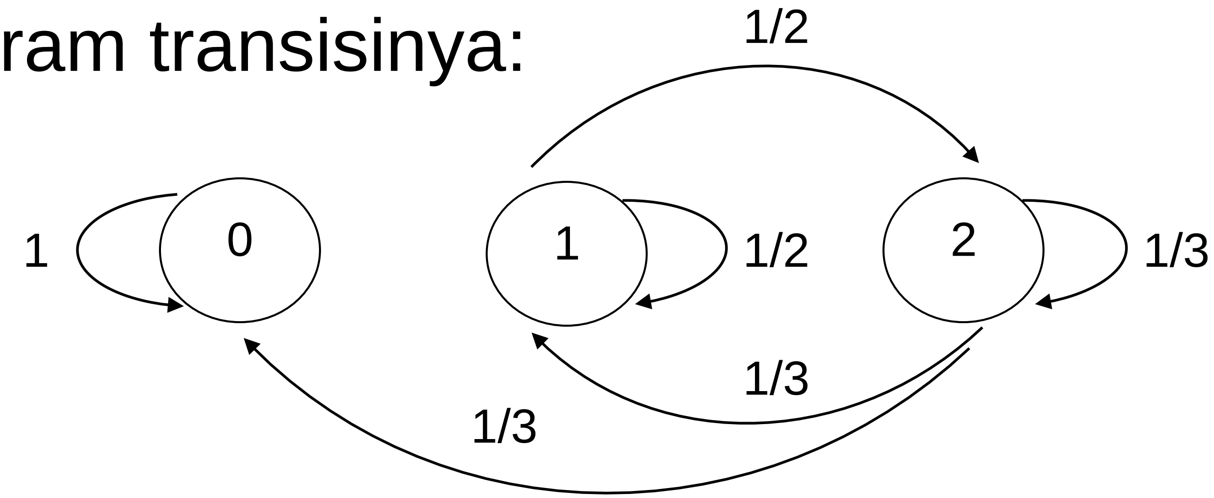

- Kelas komunikasinya:{0} , {1}, dan {2}.

4. Jika diberikan matriks peluang transisi

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Maka

- Diagram transisinya:

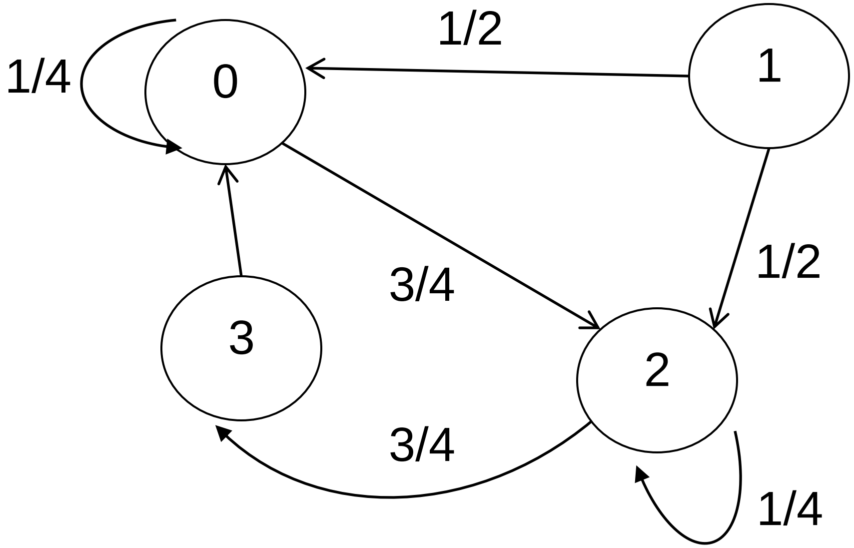



- Kelas komunikasinya:{0} , {1,2}.

5.
$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

- Diagram transisinya:




- Kelas komunikasinya:{0,2,3} , {1}.

# Keadaan *Irreducible*

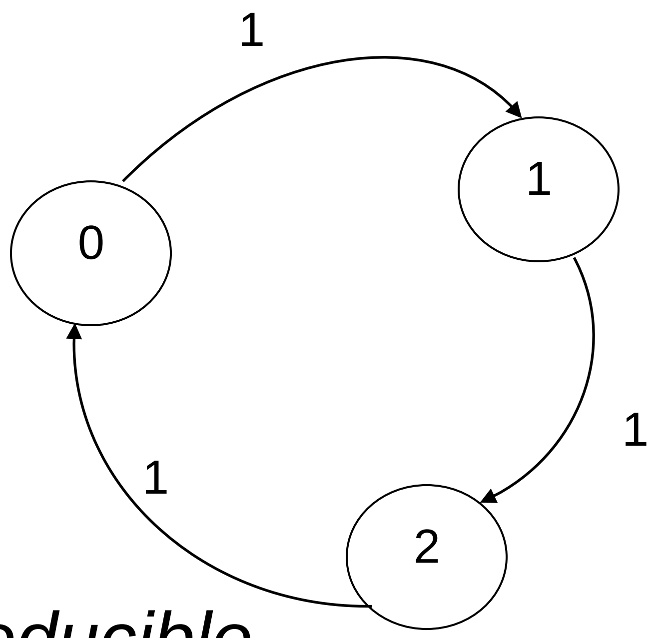
Jika suatu rantai Markov hanya mempunyai **satu kelas komunikasi**, maka rantai Markov disebut ***Irreducible .***

Dalam hal ini  semua keadaan saling berkomunikasi.

## Contoh:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diagram transisi




0 → 1 → 2 → 0

Kelas komunikasi : {0,1,2}.

Jadi {0,1,2} rantai Markov *Irreducible*.

# Keadaan Periodisitas

- Keadaan $i$ dikatakan **memiliki periode $d(i)$** jika $d(i)$ merupakan FPB (faktor persekutuan terbesar) dari seluruh $n$ = 1,2,… dimana $p_{ii}^{n} > 0$.

$$d(i) = FPB\left\{ n \geq 1 \mid p_{ii}^{n} > 0 \right\}$$

- Jika $d(i)$ = 1, maka keadaan $i$ disebut **aperiodik**.
- Jika $d(i)$ > 1, maka keadaan $i$ disebut **periodik**.

# Teorema 2

Jika $i \leftrightarrow j$ maka $d(i) = d(j)$.

## Bukti:

Asumsikan terdapat bilangan bulat $m \geq 0$ dan $n \geq 0$ sehingga $p_{ij}^{m} > 0$ dan $p_{ji}^{n} > 0$.

Jika $p_{ii}^{s} > 0$ maka

$$p_{jj}^{m+n} \geq p_{ji}^{n} p_{ij}^{m} > 0$$

$$p_{jj}^{n+s+m} \geq p_{ji}^{n} p_{ii}^{s} p_{ij}^{m} > 0$$

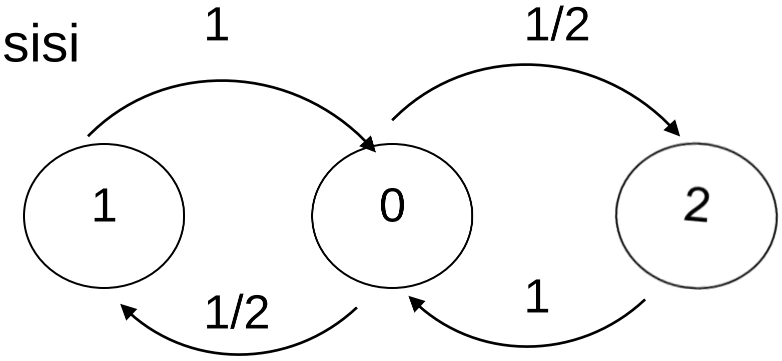
Dari definisi periode, $d(j)$ membagi kedua $n+m$ dan $n+s+m$ dan juga $(n+m)-(n+s+m)=s$ dengan $p_{ii}^{s} > 0$.

Artinya, $d(j)$ membagi $d(i)$, dan berlaku sebaliknya, $d(i)$ membagi $d(j)$. Jadi $d(i)=d(j)$.

# Contoh:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diagram transisi




Tentukan periodisitas dari setiap keadaan.

Jawab:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- keadaan 0:

$$n \geq 1,\ p_{00}^{n} > 0.$$

$$\left.\begin{aligned} n = 2 &\rightarrow p_{00}^{2} = 1 > 0 \\ n = 4 &\rightarrow p_{00}^{4} = 1 > 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d(0) &= FPB\left\{ n \geq 1 \mid p_{00}^{n} > 0 \right\} \\ &= FPB\left\{ 2, 4, \ldots \right\} \end{aligned}$$

$d(0) = 2.$ state 0 periodik.

- keadaan 1: periodik $(d(1) > 1)$.

$$n \geq 1,\ p_{11}^{n} > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 2 \rightarrow p_{00}^{2} = 1/2 \\ n = 4 \rightarrow p_{11}^{4} = 1/2 \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} d(1) &= FPB\left\{n \geq 1 \mid p_{11}^{n} > 0\right\} \\ &= FPB\left\{2, 4, ...\right\} \end{aligned}$$

$$d(1) = 2.$$

- keadaan 2: periodik $(d(2) > 1)$.

$$n \geq 1,\ p_{22}^{n} > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 2 \rightarrow p_{22}^{2} = 1/2 \\ n = 4 \rightarrow p_{22}^{4} = 1/2 \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} d(2) &= FPB\left\{n \geq 1 \mid p_{22}^{n} > 0\right\} \\ &= FPB\left\{2, 4, ...\right\} \end{aligned}$$

$$d(2) = 2.$$

- Sesuai teorema 2, $0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow 0 \leftrightarrow 2.$

  Sehingga, $d(0) = d(1) = d(2).$

# Keadaan *Recurrent* dan *Transient*

Didefinisikan

$$f_{ij}^{n} = P\left\{ X(n) = j \middle| X(0) = i \right\}$$

yaitu peluang dimana keadaan $j$ dicapai dari keadaan $i$ pertama kali setelah $n$ langkah.

$f_{ij}^{0} = 0$ (dalam 0 langkah, keadaan $j$ tidak tercapai dari $i$)

$f_{ij}^{1} = p_{ij}$ (dalam 1 langkah ,keadaan $j$ dapat dicapai dari $i$)

Definisikan, $$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n} = f_{ij}^{1} + f_{ij}^{2} + \ldots \Rightarrow f_{ij} \neq f_{ij}^{1}$$

# Definisi 1

Jika $f_{ii} = 1$ $\Longrightarrow$ keadaan $i$ disebut ***recurrent***.

Jika $f_{ii} < 1$ $\Longrightarrow$ keadaan $i$ disebut ***transient***.

Ingat!, $f_{ii} =$ keadaan $i$ dicapai dari keadaan $i$ (kembali dikunjungi)

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{1} + f_{ii}^{2} + \ldots$$

1,2,…=langkah (bukan pangkat)

# Teorema 3

## (syarat perlu dan cukup keadaan *recurrent* dan *transient*)

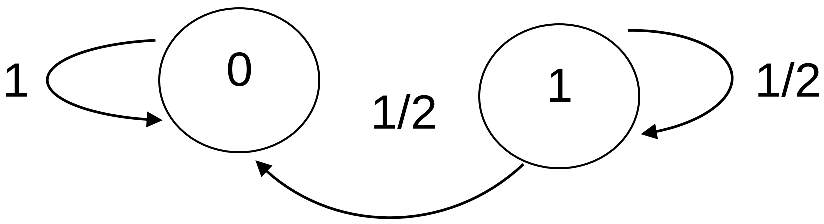
- Keadaan $i$ *recurrent* jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$

- Keadaan $i$ *transient* jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$

# Contoh

Matriks peluang transisi suatu rantai Markov,

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$




Tentukan setiap keadaan apakah *recurrent* atau *transient*.

Jawab:

•Jika gunakan teorema 3,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}.\mathbf{P} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2.\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{n} = p_{00}^{1} + p_{00}^{2} + p_{00}^{3} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty.$$

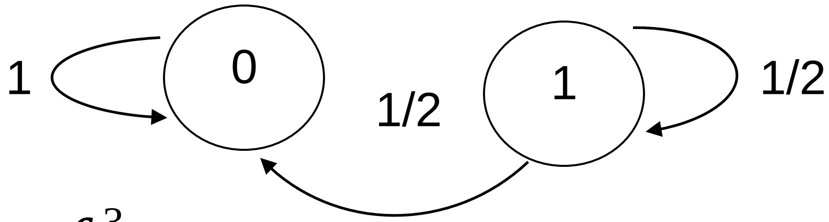
→ state 0 *recurrent*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{n} = p_{11}^{1} + p_{11}^{2} + p_{11}^{3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 < \infty$$

→ state 1 *transient*.

- Jika dengan definisi 1,




$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = f_{00}^{1} + f_{00}^{2} + f_{00}^{3} + \ldots$$

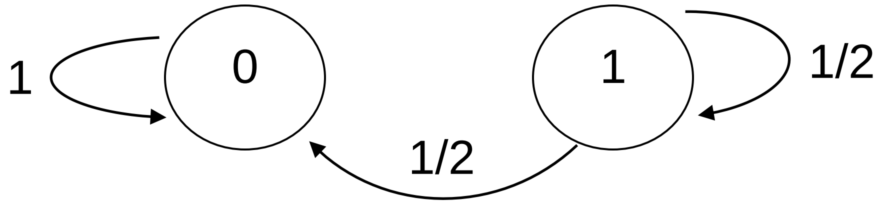
$$f_{00}^{1} = p_{00} = 1 \, , \; f_{00}^{2} = p_{01} p_{10} = 0(1/2) = 0$$

$$f_{00}^{3} = p_{01}^{2} p_{10} = p_{01} p_{11} p_{10} = 0(1/2)(1/2) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{n} = 0 \, , n \geq 2$$

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = 1.$$ → *state* 0 *recurrent*




$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{n} = f_{11}^{1} + f_{11}^{2} + f_{11}^{3} + \ldots$$

$$f_{11}^{1} = p_{11} = 1/2 \ , \quad f_{11}^{2} = p_{10} p_{01} = (1/2).0 = 0$$

$$f_{11}^{3} = p_{10}^{2} p_{01} = p_{10} p_{00} p_{01} = (1/2)(1).0 = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{11}^{n} = 0 \ , n \geq 2$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{n} = 1/2 + 0 + 0 + \ldots = 1/2 < 1.$$ → *State* 1 *transient.*

# Teorema 4

Jika keadaan $i$ *recurrent* dan $i \leftrightarrow j$ maka keadaan $j$ *recurrent* .

**Bukti :**

Asumsikan terdapat bilangan bulat $m \geq 0 \,\text{dan}\, n \geq 0$ sedemikian sehingga $p_{ji}^{m} > 0 \,\text{dan}\, p_{ij}^{n} > 0$.

Maka untuk sebarang $s \geq 0$, $\quad p_{jj}^{m+s+n} \geq p_{ji}^{m} p_{ii}^{s} p_{ij}^{n}$

Jika dijumlahkan atas s, diperoleh

$$\sum_{s} p_{jj}^{m+s+n} \geq p_{ji}^{m} p_{ij}^{n} \sum_{s} p_{ii}^{s} = \infty$$

yang menyatakan bahwa $j$ *recurrent*. (terbukti)

# Akibat:

Suatu rantai Markov yang *irreducible* memiliki ruang keadaan yang *recurrent* atau *transient.*

# Keadaan *Absorbing*

Keadaan $i$ dikatakan ***Absorbing*** (menyerap) jika $p_{ii} = 1$.

(sekali $i$ dicapai, tidak pernah keluar lagi)

Disebut juga sebagai rantai Markov terserap (*absorbing Markov chain*) jika paling sedikit terdapat satu keadaan terserap.

# Contoh

Matriks peluang transisi suatu rantai Markov,

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Keadaan 0 dikatakan ***absorbing***, karena $p_{00} = 1.$
- Periodisitas keadaan 0 :

$$n \geq 1,\ p_{00}^{n} > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \to p_{00}^{1} = 1 \\ n = 2 \to p_{00}^{2} = 1 \\ n = 3 \to p_{00}^{3} = 1 \\ n = 4 \to p_{00}^{4} = 1 \end{array}\right\}$$

$$d(0) = FPB\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$d(0) = 1.$$

(keadaan 0 **aperiodik**).

Teorema berikut menunjukkan rantai Markov dapat membentuk beberapa kelas *recurrent* dan suatu himpunan keadaan *transient*.

## Teorema 5

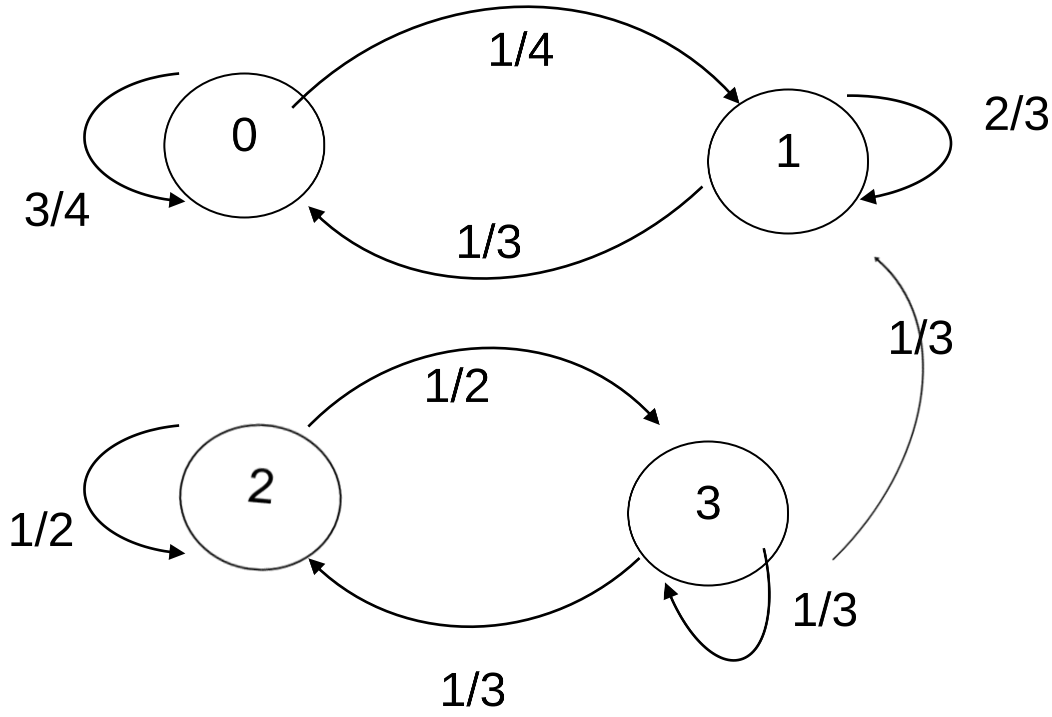
Dari suatu rantai Markov , semua keadaan dapat diklasifikasikan menjadi beberapa kelas *recurrent* $C_1, C_2, ...$ dan sisanya merupakan keadaan *transient*.

# Contoh

Tunjukkan rantai Markov dengan peluang transisi berikut memiliki suatu kelas *recurrent* dan sebuah himpunan keadaan *transient*.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

- Diagram transisinya:




- Rantai Markov ini mempunyai kelas *recurrent* {0,1} dan himpunan *state transient* {2,3}.

# Contoh :

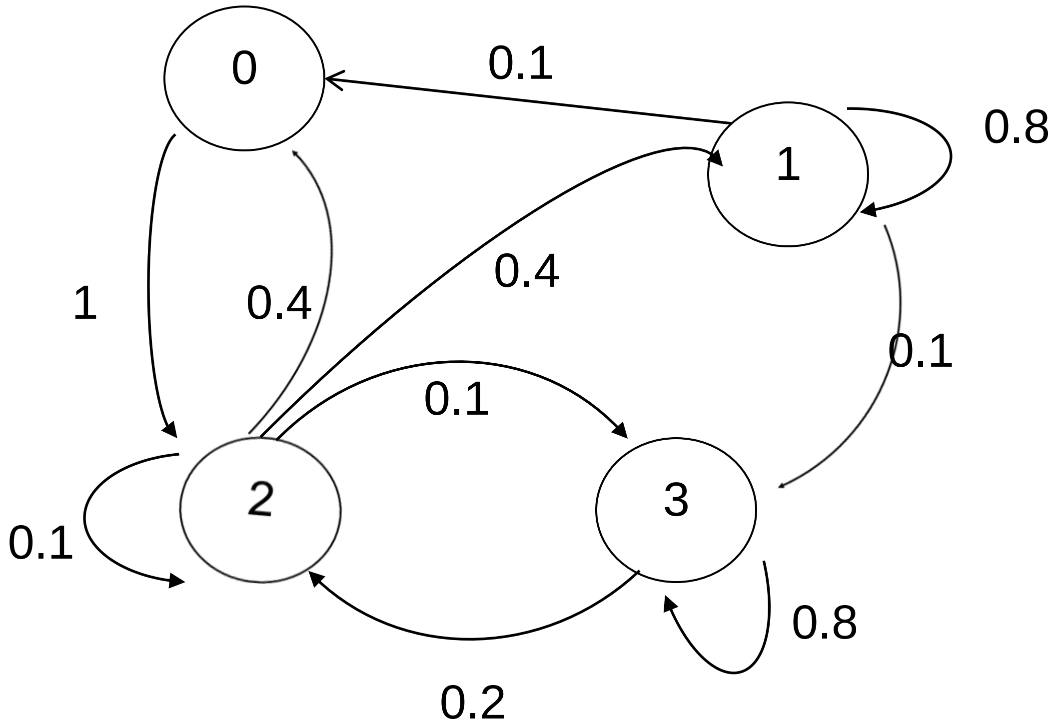
Diketahui peluang transisi suatu rantai Markov,

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

a. Tunjukkan bahwa rantai Markov tsb *irreducible*.

b. Tentukan periodisitas setiap keadaan.

- Diagram transisinya:




a.

- $0 \leftrightarrow 1,$ karena $p_{01}^{2} = p_{02}\, p_{21} = (0.1)(0.4) > 0$

  dan $p_{10} = 0.1 > 0.$

- $0 \leftrightarrow 2$, karena $p_{02} = 1 > 0 \, dan \; p_{20} = 0.4 > 0.$
- $0 \leftrightarrow 3$, karena $p_{03}^{2} = p_{02}\,p_{23} = (1)(0.1) > 0$

  dan $p_{30}^{2} = p_{32}\,p_{20} = (0.2)(0.4) > 0.$
- $1 \leftrightarrow 2$, karena $p_{12}^{2} = p_{10}\,p_{02} = (0.1)(1) > 0$

  dan $p_{21} = 0.4 > 0.$
- $1 \leftrightarrow 3$, karena $p_{13} = 0.1 > 0$ dan

  $p_{31}^{2} = p_{32}\,p_{21} = (0.2)(0.4) > 0.$
- $2 \leftrightarrow 3$, karena $p_{23} = 0.1 > 0$ dan $p_{32} = 0.2 > 0.$

Jadi kelas komunikasinya: {0,1,2,3}
→ rantai Markov *irreducible*.

b. periodisitas:

- keadaan 0, $n \geq 1,\ p_{00}^{n} > 0.$

$$n = 2,\ p_{00}^{2} = p_{02}p_{20} = 1(0.4) > 0$$

$$n = 3,\ p_{00}^{3} = p_{02}p_{22}p_{20} + p_{02}p_{21}p_{10} = 1(0.1)(0.4) + 1(0.4)(0.1) > 0$$

$$n = 4,\ p_{00}^{4} = p_{02}p_{23}p_{32}p_{20} + p_{02}p_{22}p_{21}p_{10} + p_{02}p_{21}p_{11}p_{10}$$

$$= 1(0.1)(0.2)(0.4) + 1(0.1)(0.4)(0.1) + 1(0.4)(0.8)(0.1) > 0$$

$$d(0) = FPB\{2, 3, 4, ...\} = 1$$

Keadaan 0 **aperiodik**.

Karena $0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3 \Rightarrow 3 \leftrightarrow 0$

Maka dengan teorema 2, $d(1) = d(2) = d(3) = d(0)$

Sehingga keadaan **1,2,3 aperiodik**.

# Soal Latihan:

1. Diketahui peluang transisi suatu rantai Markov,

$$a.\ \ \mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b.\ \ \mathbf{P}_2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c.\ \ \mathbf{P}_3 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tentukan klasifikasi semua keadaan (*state*), yaitu kelas ekivalen, keadaan *recurrent*, dan *transient*.

2. Diketahui peluang transisi suatu rantai Markov,

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan klasifikasi semua keadaan (*state*), yaitu kelas ekivalen, keadaan *recurrent*, dan *transient*.

3. Diketahui peluang transisi suatu rantai Markov,

$$a.\ \mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b.\ P_2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c.\ \mathbf{P}_3 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Tunjukkan bahwa rantai Markov tersebut *irreducible*

(ii) Tentukan periodisitasnya.