Basic Limit Theorem

TSD FTMM

Limiting Probability

Untuk suatu rantai Markov, semua keadaan *recurrent* diklasifikasikan menjadi **keadaan positif (*non-null*) *recurrent*** atau ***null recurrent*** dengan memperhatikan $\mu_j < \infty$ atau $\mu_j = \infty$, dengan

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n . f_{jj}^{n}$$

menyatakan **rata-rata waktu *recurrent*** (*mean recurrent time*) untuk keadaan j.

Teorema

- Jika keadaan j *recurrent* dan *aperiodic*, maka

$$p_{jj}^{n} \to \frac{1}{\mu_j}, \text{ untuk } n \to \infty.$$

- Jika keadaan j *recurrent* dan periodik dengan periode $d(j)$, maka

$$p_{jj}^{nd(j)} \to \frac{d(j)}{\mu_j}, \text{ untuk } n \to \infty.$$

Kita interpretasikan bahwa $\frac{1}{\mu_j} = 0, \text{ jika } \mu_j = \infty$

(artinya keadaan j *null recurrent*).

Corollary (Akibat)

Jika keadaan j *transient*, maka

$$p_{jj}^{n} \rightarrow 0, \text{ untuk } n \rightarrow \infty.$$

Definisi 5

Misalkan **P** matriks peluang transisi (m *state*) dari rantai Markov Homogen.

Jika $\exists\, \pi \ni \pi = \pi P$ dan $\sum_{j=0}^{m} \pi_j = 1$

Maka $\pi = \left[\pi_0, \pi_1, ..., \pi_m\right]$

disebut **distribusi stasioner** untuk rantai Markov Homogen.

Teorema 8

- Jika suatu rantai Markov *Irreducible, positive recurrrent dan aperiodic* (Rantai Markov Ergodik) maka terdapat limit peluang,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0 \quad (i, j = 0,1,2,\ldots)$$

yang bebas dari keadaan awal i, dengan $\{\pi_j\ , j = 0,1,2,\ldots\}$ tunggal dan merupakan solusi positif dari

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij} \quad \text{dan} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1, \ \ j = 0,1,2,\ldots$$

$\{\pi_j\}$ ini dinamakan **distribusi stasioner dari rantai Markov**.

Ilustrasi

Misal rantai Markov dengan 3 ruang keadaan, {0,1,2}.

Cara menentukan distribusi stasioner $[\pi_0, \pi_1, \pi_2]$:

Selesaikan

$$(i) \quad [\pi_0, \pi_1, \pi_2] = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Atau

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= p_{00}\pi_0 + p_{10}\pi_1 + p_{20}\pi_2 && \text{(i)} \\ \pi_1 &= p_{01}\pi_0 + p_{11}\pi_1 + p_{21}\pi_2 && \text{(ii)} \\ \pi_2 &= p_{02}\pi_0 + p_{12}\pi_1 + p_{22}\pi_2 && \text{(iii)} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 && \text{(iv)} \end{aligned}\right\} \text{Selesaikan secara simultan}$$

Contoh

Misal kondisi cuaca (hujan atau tidak hujan) bergantung pada cuaca hari ini (hujan atau tidak hujan).

1. Misalkan , jika hari ini hujan maka besok akan hujan dengan peluang α dan jika hari ini tidak hujan, maka besok akan hujan dengan peluang β.
   a. Tentukan peluang empat hari ke depan akan hujan jika hari ini hujan.
   b. Dalam jangka panjang, berapakah proporsi waktu (distribusi stasioner) untuk proses setiap keadaan.

Jawab:

Misalkan keadaan 0 = keadaan hujan.
keadaan 1 = keadaan tidak hujan.

Maka matriks peluang transisi untuk masalah tersebut adalah:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Jika $\alpha = 0.7 \text{ dan } \beta = 0.3, \quad \Rightarrow P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

a. $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.513 & 0.487 \\ 0.487 & 0.513 \end{bmatrix}$$

Jadi, jika hari ini hujan, maka peluang empat hari ke depan akan hujan adalah 0.513 atau 51%.

b. Distribusi stasioner : $\pi = \pi P \text{ dan } \pi_0 + \pi_1 = 1$

Dari matriks peluang transisi $P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ diperoleh

$$\pi_0 = 0.7\pi_0 + 0.3\pi_1 \qquad \ldots \text{ (i)}$$

$$\pi_1 = 0.3\pi_0 + 0.7\pi_1 \qquad \ldots \text{ (ii)}$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1 \qquad \ldots \text{ (iii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh, $0.3\pi_0 = 0.3\pi_1$

$$\pi_0 = \pi_1$$

Substitusikan ke (iii), diperoleh

$$\pi_1 + \pi_1 = 1 \rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2} \quad .$$

$$\rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2} \quad .$$

Jadi, distribusi stasioner: $\pi = \left[\pi_0, \pi_1\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

Artinya untuk jangka panjang, peluang hujan 50% dan tidak hujan 50%.

2. Tentukan distribusi stasioner dari rantai Markov dengan matriks peluang transisi :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab : $\pi = \pi P \, \text{dan} \, \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_0 = \pi_1 + \pi_2$ … (i)

$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0$ … (ii)

$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_0$ … (iii)

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ … (iv)

Substitusi (i) ke (iv) :

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$2\pi_0 = 1 \quad \to \pi_0 = \frac{1}{2}$$

$$\to \pi_1 = \frac{1}{4} \quad , \pi_2 = \frac{1}{4}$$

Sehingga distribusi stasioner :

$$\left[\pi_0, \pi_1, \pi_2\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Artinya untuk jangka panjang, keadaan 0 ≈ 50%, keadaan 1 ≈ 25%, dan keadaan 2 ≈ 25%.

Soal Latihan:

1. Diketahui peluang transisi suatu rantai Markov,

$$a.\ \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad c.\ \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b.\ \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad d.\ P_4 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan distribusi stasioner untuk setiap rantai Markov tersebut.