

تمرین سوم: جریان در شبکه

سوالات تشریحی (تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۱۰/۱۳)

۱- n کارمند می‌خواهند برای m روز از یک خودرو به صورت مشترک برای رفت و آمد به محل کار استفاده نمایند. هر یک از این افراد برنامه‌ی خود را از قبل مشخص کرده است. به عنوان مثال با فرض ۴ کارمند و ۵ روز داریم:

	روز اول	روز دوم	روز سوم	روز چهارم	روز پنجم
کارمند اول					
کارمند دوم					
کارمند سوم					
کارمند چهارم					

هر روز شخصی مسئولیت رانندگی را بر عهده دارد. هدف تخصیص مسئولیت رانندگی به صورت عادلانه می‌باشد. در این تخصیص لازم است وظایف به صورت مساوی در میان افراد تقسیم گردد. بنابراین در روزی که k نفر درخواست استفاده از خودرو را دارند هر راننده مسئول سهمی برابر با $1/k$ ام است. از این سهم‌ها برای محاسبه‌ی سهم رانندگی هر شخص نظیر کارمند i استفاده شده که با O_i نمایش داده خواهد شد. به عبارت دیگر شخص i نباید بیش از $|O_i|$ بار در هر m روز رانندگی نماید. به عنوان مثال براساس زمانبندی بالا برای کارمند اول داریم $O_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

الف- با فرض مثال بالا مسئله را با استفاده از مفهوم شبکه مدل نمایید. برای این منظور کافی است با تعریف نودها و یال‌های مناسب گراف متناظر با شبکه‌ی موردبحث خود را رسم نمایید.

ب- نشان دهید اگر جریانی با شدت ۵ در این شبکه وجود داشته باشد یک برنامه‌ریزی عادلانه وجود خواهد داشت.

ج- نشان دهید همواره جریانی با شدت ۵ قابل ارسال در این شبکه است.

۲- جدول زیر سود ناشی از تخصیص چهار نفر به سه شغل را نشان می‌دهد. تخصیص بهینه را با استفاده از الگوریتم مجارستانی بیابید. جواب بهینه‌ی مسئله دارای چه حالت خاصی است؟

	شغل A	شغل B	شغل C
فرد ۱	۵	۱۰	۱۰
فرد ۲	۲۰	۳۰	۲۰
فرد ۳	۵	۸	۱۲
فرد ۴	۶	۷	۱۳

۳- جدول حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید.

عرضه	مقصد ۴	مقصد ۳	مقصد ۲	مقصد ۱	
۱۸	۱۳	۱۳	۸	۹	مبدا ۱
۲۴	۱۴	۱۲	۱۰	۱۰	مبدا ۲
۱۸	۱۲	۱۱	۱۰	۸	مبدا ۳
۵		۳۵	۱۴	۶	تقاضا

الف - نشان دهید که جواب ارائه شده‌ی فوق بهینه می‌باشد. ارزش خانه‌های خالی را مشخص نمایید.

ب - دوگان مدل برنامه‌ریزی خطی مطابق با جدول حمل و نقل فوق را بسازید.

ج - جواب بهینه‌ی دوگان چیست؟

د - دامنه‌ی C_{21} را به گونه‌ای تعیین نمایید که جدول فوق همچنان بهینه باقی بماند.

ه - دامنه‌ی C_{33} را به گونه‌ای تعیین نمایید که جدول فوق همچنان بهینه باقی بماند.

و - به هر C_{ij} مقدار ثابت ۵ را اضافه کنید. آیا جدول فوق همچنان بهینه است؟

ز - اگر هر C_{ij} را در ۵ ضرب کنید آیا جدول فوق همچنان بهینه است؟

۴- فرض کنید T مجموعه‌ای از تیم‌های فوتبال باشد. می‌خواهیم براساس بازی‌های صورت گرفته تاکنون و بازی‌هایی که در پیش است مشخص نماییم تیمی حذف می‌شود یا نه. به ازای هر تیم $i \in T$ تعداد پیروزی‌های تیم i (w_i)، تعداد بازی‌های باقی‌مانده برای بازی توسط این تیم (g_i) و تعداد بازی‌های باقی‌مانده‌ی این تیم در مقابل تیم j (g_{ij}) مشخص شده باشد. یک تیم برنده خواهد بود اگر از تیم‌های دیگر بازی‌های بیشتری را برنده شده باشد. همچنین یک تیم حذف خواهد شد اگر صرف نظر از نتیجه‌ی بازی‌های باقی‌مانده نتواند اول شود. به عنوان مثال در جدول زیر تیم چهارم حذف می‌شود چرا که این تیم فصل را حداکثر با ۹۱ امتیاز به اتمام خواهد رساند حال آنکه تیم ۱ در حال حاضر ۹۳ امتیاز کسب کرده است. همچنین تیم ۲ نیز حذف خواهد شد چرا که درست است این تیم شانس دستیابی به ۹۳ امتیاز تا پایان فصل را دارد اما کافی است تا تیم ۱ در یک بازی دیگر برنده شود و به امتیاز ۹۴ برسد یا تیم ۳ شش برد دیگر بدست آورد تا این شرایط تغییر کند.

	بردها	بازی‌های باقی‌مانده			
		بازی در مقابل			
		تیم ۱	تیم ۲	تیم ۳	تیم ۴
تیم ۱	۹۳	-	۱	۶	۱
تیم ۲	۸۹	۱	-	۰	۳
تیم ۳	۸۸	۶	۰	-	۱
تیم ۴	۸۶	۱	۳	۱	-

فرض کنید به ازای هر $R \subseteq T, S \subseteq T$ داریم:

$$w(R) = \sum_{i \in R} w_i$$

$$g(R, S) = \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} g_{ij}$$

$$a(R) = \frac{w(R) + g(R, R)}{|R|}.$$

توجه کنید که منظور از $g(R, R)$ همان $g(R)$ است. به عبارت دیگر فرض کنید برای محاسبه‌ی آن هر بازی دو بار شمارش نخواهد شد.

الف- نشان دهید تیمی در R وجود دارد که حداقل در $a(R)$ بازی برنده خواهد شد.

ب- با تعریف یک متغیر تصمیم‌گیری مناسب نشان دهید با برقراری چه محدودیت‌هایی تیم k حذف نخواهد شد.

ج- می‌دانیم $k \in T, R \subseteq T - \{k\}, a(R) > w_k + g_k$ چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم max flow در خصوص حذف یا عدم حذف تیم k تصمیم‌گیری کرد. شبکه‌ی متناظر با تحلیل خود را رسم نمایید.

د- نشان دهید اگر در این شبکه جریانی با مقدار زیر وجود داشته باشد تیم k حذف نخواهد شد.

$$g(T - \{k\}) = \sum_{i, j \in T - \{k\}, i < j} g_{ij}$$

۵- ماتریس D یک ماتریس p در q بوده که شامل تعدادی عدد حقیقی می‌باشد (d_{ij}). مجموع عناصر در سطر i را α_i و مجموع عناصر در ستون j را β_j در نظر بگیرید. هر عدد حقیقی می‌تواند به صورت $[d_{ij}]$ یا $[d_{ji}]$ رند شود. اینکه از چه شیوه‌ای استفاده شود کاملاً بستگی به خود ما دارد. هدف رند کردن مقادیر موجود در ماتریس و مجموع سطر و ستون‌ها است به طوریکه مجموع عناصر رند شده در هر سطر/ستون با مجموع رند شده برابر باشد. چگونه می‌توان با استفاده از حل مسئله‌ی max flow با فرض یک شبکه مناسب شیوه‌ای برای رند کردن عناصر ماتریس D یافت. ایده‌ی خود را ابتدا با فرض ماتریس زیر، سپس به صورت کلی توضیح دهید.

مجموع هر سطر				D
۱۷/۲	۷/۳	۶/۸	۳/۱	
۱۲/۷	۰/۷	۲/۴	۹/۶	
۱۱/۳	۶/۵	۱/۲	۳/۶	
	۱۴/۵	۱۰/۴	۱۶/۳	مجموع هر ستون

سوالات عملی (تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰)

در این بخش هدف آشنایی شما با نرم‌افزار متن باز *Google OR-Tools* می‌باشد (<https://developers.google.com/optimization>). برای هر سوال نمونه‌هایی در اختیار شما قرار داده شده است. نمونه‌های مربوط به سوال ۱ در پوشه ۱ و نمونه‌های مربوط به سوال ۲ در پوشه ۲ قرار دارد. ساختار نمونه‌ها و آنچه برنامه‌ی شما به عنوان خروجی باید نمایش دهد در هر سوال به صورت جداگانه مشخص گردیده است. پس از آشنایی اولیه با OR-Tools از آن برای حل این دو مسئله با فرض نمونه‌های در دسترس استفاده نمایید و در قالب یک گزارش حداکثر ده صفحه‌ای ضمن تعیین نتایج حاصل برای هر نمونه توضیحاتی در خصوص شیوه‌ی مدلسازی مسئله ارائه نمایید. توجه داشته باشید هر دو مسئله باید با توجه به مفهوم جریان در شبکه مورد بررسی قرار گیرند. ارسال کد پیاده‌سازی شده علاوه بر گزارش الزامی است.

۱- یک شرکت هواپیمایی دارای تعدادی پرسنل بوده که در مجموعه‌ای از پروازهای ارائه شده توسط این شرکت کار می‌کنند. پروازها در شهرها و زمان‌های متفاوتی انجام می‌شوند بنابراین تنها برخی از کارکنان می‌توانند در پرواز به خصوصی کار کنند. اینکه هر فرد توانایی کارکردن در چه پروازی دارد داده شده است. هدف نسبت دادن پرسنل به بیشترین پرواز ممکن می‌باشد. در خط ابتدایی هر فایل دو عدد n و m عنوان شده که به ترتیب تعداد پروازها و تعداد پرسنل می‌باشد. در n خط بعد m مقدار باینری قرار دارد. عدد یک در ستون j خط i نشان می‌دهد کارمند شماره j می‌تواند در پرواز i کار کند در غیر اینصورت عدد مربوطه صفر خواهد بود. در خروجی باید n عدد برای هر پرواز مشخص گردد. اگر به پروازی کارمندی نسبت داده نشود عدد ۱- در خروجی نمایش داده خواهد شد. به عنوان مثال:

Input:

3 4

1 1 0 1

0 1 0 0

0 0 0 0

Output: 1 2 -1

در این پاسخ به پرواز اول کارمند ۱ و به پرواز ۲ کارمند ۲ نسبت داده خواهد شد حال آنکه کارمندی برای پرواز ۳ در نظر گرفته نشده است.

۲- فرض کنید می‌خواهیم در قالب تعدادی نمودار قیمت n سهام مختلف در k برهه‌ی زمانی در یک سال نمایش داده شود. نمودار مربوط به قیمت یک سهام از رسم خط بین نقاط $(0, price_0), (1, price_1), \dots, (k-1, price_{k-1})$ ایجاد می‌گردد. به منظور حفظ خوانایی

هدف رسم نمودارها به گونه‌ای است که هیچ نموداری نمودار دیگر را قطع نکند. با فرض قیمت n سهام در k برهه‌ی زمانی حداقل تعداد نمودارهایی که برای نمایش قیمت تمامی سهام‌ها نیاز است چه قدر می‌باشد؟ در خط اول فایل‌های ورودی به ترتیب مقدار n و k تعیین گشته است. در هر یک از n خط بعد k عدد مشخص شده است. سطر i شامل قیمت سهام i در k برهه‌ی زمانی در سال می‌باشد. در خروجی باید حداقل تعداد نمودارها برای نمایش قیمت‌ها و تصویر آنها نمایش داده شود. به عنوان مثال:

Input:

3 3
5 5 5
4 4 6
4 5 4

Output: 3

