

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
192	گردش	7.3
199	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
204	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
206	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
207	مسئلہ سٹوکس	7.4
210	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
217	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
222	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
224	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
229	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
229	متحرک چارج پر قوت	8.1
230	تفرقی چارج پر قوت	8.2
233	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
234	قوت اور مروڑ	8.4
239	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
240	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
243	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
244	مقناطیسی دور	8.8
247	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
248	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
252	مشترکہ امالہ	8.11

255	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
255	9.1	فیراڈے کا قانون
261	9.2	انتقالی برقی رو
265	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
266	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل
268	9.5	تاخیری دباؤ
273	10	مستوی امواج
273	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
274	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
281	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
283	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
285	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
288	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
292	10.4	موصل میں امواج
298	10.5	انعکاس مستوی موج
304	10.6	شرح ساکن موج
311	11	ترسیلی تار
311	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
315	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
316	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
319	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
320	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
321	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
326	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
333	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
334	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

339	12 تقطیب موج
339	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
342	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئٹنگ سمتیہ
345	13 ترجہی آمد، انعکاس، انحراف اور انعکاس
345	13.1 ترجہی آمد
356	13.2 ترسیم بائی گن
359	14 موج اور گھمکیا
359	14.1 برقی دور، ترسیمی تار اور موج کا موازنہ
360	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
366	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
375	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
382	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
386	14.5 کھوکھلی نالی موج
393	14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
395	14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
397	14.8 سطحی موج
402	14.9 ذو برق تختی موج
405	14.10 شیش ریشہ
408	14.11 پردہ بصارت
410	14.12 گھمکی خلاء
413	14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل
421	15 اینٹینا اور شعاعی اخراج
421	15.1 تعارف
421	15.2 تاخیری دباو
422	15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا
430	15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
433	15.5 ٹھوس زاویہ
434	15.6 موثر رقبہ، سمتیت اور افزائش
437	16 سوالات

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 15.1 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہوگا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$(15.1) \quad I = I_0 \cos \omega t$$

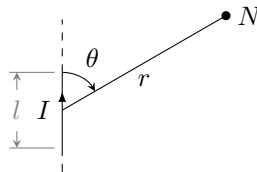
کی بجائے

$$(15.2) \quad [I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو پیکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

retarded current¹



شکل 15.1: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (15.3)$$

لکھا جاسکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (15.4)$$

ہے۔ اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[J] = J_0 e^{j\omega(t-r/c)} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (15.5)$$

ہوگی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباؤ

$$[A] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[J]}{r} dh = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.6)$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح تاخیری جمعی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \quad (15.7)$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباؤ

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} dh \quad (15.8)$$

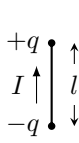
لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور تو سین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروئی محدود کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

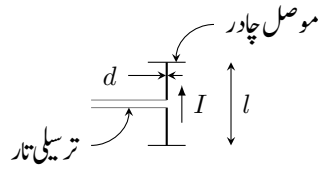
مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب² کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہوگی۔ لا محدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب³ کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے لہذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 15.2-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کر دار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن تریسلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ یہ فرض کرتے



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

شکل 15.2: جفت قطب

ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجربے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.2-ب کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہوگا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (15.9)$$

ہے۔

آئیں لا محدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدود کے مرکز اور لمبائی کو z محدود پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r, E_θ اور E_ϕ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (15.10)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (15.11)$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباؤ

\mathbf{A} نقطہ N پر سمتی دباؤ

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباؤ V اور سمتی دباؤ \mathbf{A} معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباؤ قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\mathbf{A}] \quad (15.12)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\mathbf{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\mathbf{A}] \quad (15.13)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباؤ

$$[\mathbf{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.14)$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.15)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباؤ $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباؤ $[A]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان H صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان E ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباؤ ہی استعمال کئے جائیں گے لہذا انہیں چکرو تو سین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکرو تو سین کے دباؤ کو تاخیری دباؤ ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباؤ کا صرف a_z جزو

$$(15.16) \quad \mathbf{A} = \frac{a_z \mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \ll l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \ll l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباؤ میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$(15.17) \quad \mathbf{A} = \frac{a_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدود میں یوں

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$(15.18) \quad \begin{aligned} A_r &= \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \\ A_\phi &= \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0 \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$(15.19) \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہذا مقداری دباؤ

$$(15.20) \quad V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

ہو گا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$(15.21) \quad q = \int I dt = \frac{I}{j\omega}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 15.21 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.20 میں پر کرتے ہیں۔

$$(15.22) \quad V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$s_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرتے

$$(15.23) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2} \cos \theta) e^{j\frac{\beta l}{2} \cos \theta} - (r - \frac{l}{2} \cos \theta) e^{-j\frac{\beta l}{2} \cos \theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right]$$

ماتا ہے۔ چکور توسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موپور⁴ کے استعمال سے

$$(15.24) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} + j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} - j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) \right]$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہذا

$$\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} = \cos \frac{\pi l \cos \theta}{\lambda} \approx 1$$

$$\sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \approx \frac{\beta l \cos \theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.24 میں پر کرنے سے

$$(15.25) \quad V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا جیٹ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

⁴ $(e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha)$ de Moivre's theorem

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s ۔ جہاں ہر ٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \ll l$ اور $l \ll r$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.19 سمتی دباؤ اور مساوات 15.25 مقداری دباؤ دیتے ہیں۔ کروی محدود میں مقداری دباؤ کی ڈھلوان

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ (15.26) \quad &= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[- \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2c \cos \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_r - \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{c \sin \theta}{j\omega r^2} \right) \mathbf{a}_\theta \right] \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $E = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.13 کی مدد سے

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi$$

لکھ جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \\ (15.27) \quad E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \quad \text{عمومی میدان} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.12 سے حاصل ہوگی۔ کروی محدود میں سمتی دباؤ کی گردش

$$\begin{aligned} (15.28) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

میں مساوات 15.18 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$(15.29) \quad \begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) && \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $B = \mu_0 H$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r, E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہوگا لہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$(15.30) \quad \begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{j\omega}{c^2 r} = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} && \text{دور میدان} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$(15.31) \quad \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin \theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندر سے شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \end{aligned}$$

یا

$$(15.32) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j \frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$(15.33) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا جسے

$$(15.34) \quad r \gg \frac{1}{\beta} \quad (\text{دور میدان})$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $\frac{c}{\omega} \ll r \ll \frac{1}{\beta}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

ہوں گے لہذا قریبی میدان

$$(15.35) \quad \begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان} \end{aligned}$$

لکھ جاسکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$(15.36) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$$

ہوگا۔ مساوات 15.36 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور پر $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوائنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.30 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \mathbf{a}_r = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \quad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوائنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.35 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2} [(E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta) \times H_\phi^* \mathbf{a}_\phi]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r \right] \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	0	$\frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$	$\frac{jI_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2}$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.27 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.29 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$E_r = \frac{q_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right)$$

$$E_\theta = \frac{q_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$$

لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \rightarrow 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$E_r = \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} \quad \text{نیم ساکن میدان}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (15.37)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میدان کو نیم ساکن میدان⁶ کہا جاتا ہے۔ یہ صفحہ 105 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔ اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 184 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔ چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔ بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.30 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان⁷ کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \ll \lambda$ اور $l \ll \lambda$ کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف A سے حاصل کیا جاسکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباؤ V کا کوئی کردار نہیں۔ یوں مساوات 15.13 اور مساوات 15.18 سے

$$(15.38) \quad E_{\theta} = -j\omega A_{\theta} = -j\omega \left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \right) = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_{ϕ} کو مساوات 15.12 سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$(15.39) \quad H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{Z_0} = j \frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.30 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$(15.40) \quad E_{\theta} = j \frac{60\pi}{\lambda} I_0 \frac{l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

زاویہ شکل فاصلہ لمبائی رو مقدار

لکھا جاسکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin \theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t - \beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوینٹنگ سمتیہ

$$(15.41) \quad \mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی سطحی تکمیل

$$(15.42) \quad P = \int_S \mathcal{P}_{\text{وسط}} \cdot d\mathbf{s} \quad (W)$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سینٹ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمیل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمیل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہوگا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جاسکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیثہ ہے۔ یوں

$$(15.43) \quad R = \frac{2P}{I_0^2} \quad (\Omega)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت⁸ کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہذا شعاعی اخراج

$$(15.44) \quad P = \frac{1}{2} \int_S [E_\theta H_\phi^*]_{\text{حقیقی}} ds$$

سے حاصل ہوگی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہذا

$$(15.45) \quad P = \frac{1}{2} \int_S [H_\phi H_\phi^* Z_0]_{\text{حقیقی}} ds = \frac{Z_0}{2} \int_S |H_\phi|^2 ds$$

یا

$$(15.46) \quad P = \frac{1}{2Z_0} \int_S |E_\phi|^2 ds$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوت $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.16 سے مساوات 15.17 حاصل ہونے کی بجائے

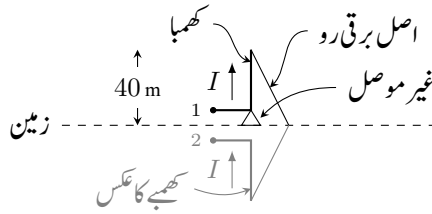
$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_z \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i dz \\ &= \frac{\alpha_z \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

حاصل ہوگا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.30 سے مقناطیسی میدان کا حیثہ

$$(15.47) \quad H_\phi = \frac{I \beta l}{4\pi r} \sin \theta$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیثے کو مساوات 15.45 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{I \beta l}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$



شکل 15.3: کھمبا اینٹینا

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 15.45 یا مساوات 15.46 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (15.48)$$

ہوگی۔ مساوات 15.43 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \quad (\Omega) \quad (15.49)$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 ds = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 ds \quad (15.50)$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{300000} = 1000 \text{ m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہوگا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہوگی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہوگی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 2×40 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.49 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000} \right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0} \right)^2 = 1.2633 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھبے کے سر 1 اور عکسی کھبے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R = \frac{0.63165}{2} = 0.63 \Omega \quad (15.51)$$

ہوگی۔

اگر مخلوط پوزٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا مکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہوگا۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح مکمل کی صورت اور مقام کا مکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دار و مدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح مکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

15.5 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ⁹ درکار ہو گا لہذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 15.4-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

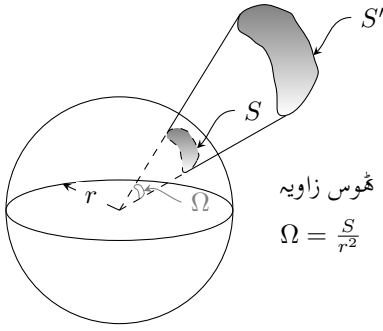
$$\theta = \frac{l}{r} \quad (\text{rad}) \quad (15.52)$$

زاویہ θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈین¹⁰ (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈین (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈین کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔ اگرچہ مساوات 15.52 کے تحت θ دراصل بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

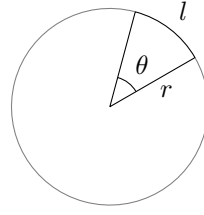
$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\text{sr}) \quad (15.53)$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈین یعنی سٹریڈین¹¹ (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری کرہ 4π سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔



ٹھوس زاویہ
 $\Omega = \frac{S}{r^2}$

ب: سٹریڈین کی تعریف



الف: ریڈین کی تعریف

شکل 15.4: ریڈین اور سٹریڈین کی تعریف

شکل 15.4-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدود مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک بڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (15.54)$$

کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 15.4-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 15.4-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.4-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 15.4-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈین یا ریڈین کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈین کو ہی ایک سٹریڈین کہتے ہیں۔

$$1 \text{ sr} = 1 \text{ rad}^2 \quad (15.55)$$

کروی محدود میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_{\theta} \int_{\phi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (15.56)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_{\theta} \int_{\phi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{sr}) \quad (15.57)$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.6 موثر رقبہ، سمیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_{θ} اور H_{ϕ} پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہذا پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 \mathbf{a}_r = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \mathbf{a}_r \quad (15.58)$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔ یوں پوینٹنگ سمتیہ کو r^2 سے ضرب دینے سے

$$(15.59) \quad P(\theta, \phi) = r^2 \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 r^2$$

ایسی مقدار $P(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔ $P(\theta, \phi)$ اخراجی شدت¹² کہلاتی ہے۔ اخراجی شدت کو بمطابق معمول¹³ بنانے کی خاطر $P(\theta, \phi)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت بلند تر $P(\theta, \phi)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(15.60) \quad P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}} \quad \text{بے بُعد}$$

حاصل ہوتا ہے جسے اینٹینا کی حسب معمول نقش طاقت¹⁴ پکارا جاتا ہے اور جو بے بُعد¹⁵ مقدار ہے۔

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

