

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
141	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
144	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
153	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
155	6.1 مسئلہ یکنائی	
156	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
157	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
158	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
164	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
167	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
174	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

181	7	ساکن مقناطیسی میدان
181	7.1	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون
185	7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون
189	7.3	گردش
196	7.3.1	نلکی محدد میں گردش
202	7.3.2	عمومی محدد میں گردش کی مساوات
203	7.3.3	کروی محدد میں گردش کی مساوات
204	7.4	مسئلہ سٹوکس
208	7.5	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ
214	7.6	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ
219	7.7	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول
220	7.7.1	سمتی مقناطیسی دباؤ
221	7.7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون
225	8	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ
225	8.1	متحرک چارج پر قوت
226	8.2	تفرقی چارج پر قوت
228	8.3	برقی رو گزارنے تفرقی تاروں کے مابین قوت
230	8.4	قوت اور مروڑ
235	8.5	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے
236	8.6	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل
238	8.7	مقناطیسی سرحدی شرائط
240	8.8	مقناطیسی دور
242	8.9	مقناطیسی مخفی توانائی
243	8.10	خود امالہ اور مشترکہ امالہ
247	8.11	مشترکہ امالہ
249	9	وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات
249	9.1	فیراڈے کا قانون
255	9.2	انتقالی برقی رو
257	10	سوالات

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رول یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رول گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$F = QE \quad (8.1)$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت E کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت E کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$F = Qv \times B \quad (8.2)$$

قوت پیدا کرتا ہے۔ یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ اسی طرح قوت چارج کے رفتار v ، کثافت مقناطیسی میدان B اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ قوت کی سمت v اور B دونوں کے عمودی یعنی $v \times B$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔ اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$(8.3) \quad \mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 اور زم مساوات قوت²¹ کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $3C$ اور رفتار $\mathbf{v} = 2a_x - 3a_y + a_z$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\mathbf{E} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ، (ب) $\mathbf{B} = -2a_x - 3a_y + 6a_z$ ، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: 78.7 N ، 71.3 N ، 18.49 N

8.2 تفرقی چارج پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج dQ پر تفرقی قوت $d\mathbf{F}$ عمل کرے گی۔

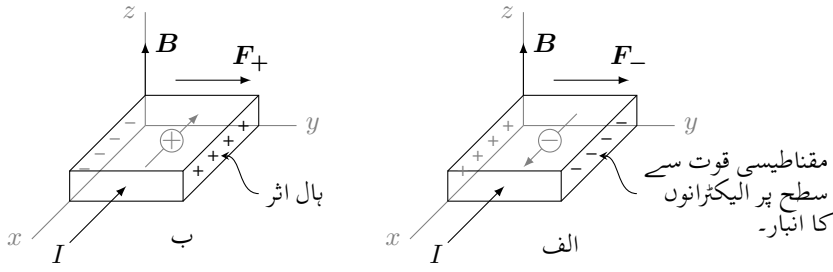
$$(8.4) \quad d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔ مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت اور منفی چارج کے مابین کو لو موب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

¹ یہ مساوات ہینڈرک لورنٹز کے نام ہے۔
Lorentz force equation²



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جاسکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دوالٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباؤ پایا جاتا ہے جسے ہال اثر³ کے نام⁴ سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی I کی سمت $-a_x$ ہے لہذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی a_x سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیابی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار a_z سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت a_y سمت میں قوت F_- عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ⁵ ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت E اور یوں برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباؤ⁶ پایا جائے گا۔ تار کا بائیں طرف ہال برقی دباؤ کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول⁷ کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-a_x$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباؤ کا مثبت سر اتار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً ایک سمٹی روپیما، مقناطیسی بہاؤ پیمائ⁸ وغیرہ۔

سمتی رفتار v سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو J

(8.5)

$$J = \rho_h v$$

کو جنم دیتا ہے۔ اس مساوات کو صفحہ 117 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم dh میں تھوڑے سے چارج کو

(8.6)

$$dQ = \rho_h dh$$

Hall effect³

⁴ ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔

uncovered⁵

Hall voltage⁶

free holes⁷

magnetic flux meter⁸

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 8.4 کو

$$dF = \rho_h dhv \times B$$

یا

$$(8.7) \quad dF = J \times B dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم مساوات 7.5 میں دیکھ چکے ہیں کہ $J dh$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جاسکتا ہے جسے

$$J dh = K dS = I dL$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 8.7 کو

$$(8.8) \quad dF = K \times B dS$$

یا

$$(8.9) \quad dF = I dL \times B$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے مکمل سے انہیں یوں

$$(8.10) \quad F = \int_h J \times B dh$$

$$(8.11) \quad F = \int_S K \times B dS$$

$$(8.12) \quad F = \oint I dL \times B$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو مکمل سے

$$(8.13) \quad F = IL \times B$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$(8.14) \quad F = ILB \sin \alpha$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔ مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔ دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

8.3 برقی رو گزارتے تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا dL_1 دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا dL_2 دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان H_2 میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ یہاں تفرقی مقناطیسی میدان dH_2 سے dL_2 پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $d(dF_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$d(dF_2) = I_2 dL_2 \times dB_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $dB_2 = \mu_0 dH_2$ کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(8.15) \quad d(dF_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2} dL_2 \times (dL_1 \times a_{R21})$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر مکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل مکمل لیتے ہوئے میدان H_2 استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان dH_2 استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1, 2, 3)$ پر $I_1 dL_1 = 2a_y A m$ جبکہ نقطہ $(-1, 3, 2)$ پر $I_2 dL_2 = -4a_z A m$ پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $R_{21} = -2a_x + a_y - a_z$ ہے لہذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned} d(dF_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (-4a_z) \times \left[(2a_y) \times (-2a_x + a_y + 2a_z) \right] \\ &= -108.86 a_y nN \end{aligned}$$

ہوگا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned} d(dF_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (2a_y) \times \left[(-4a_z) \times (2a_x - a_y - 2a_z) \right] \\ &= 54.4 a_z nN \end{aligned}$$

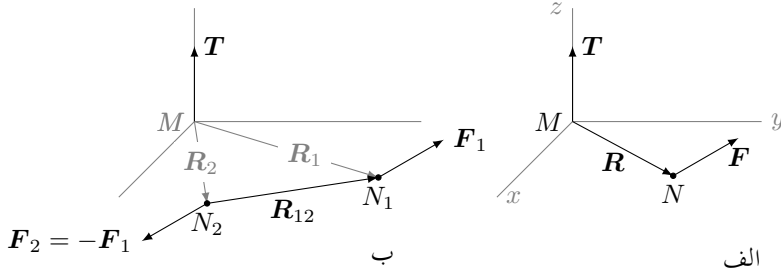
قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $R_{12} = -R_{21}$ استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نہ ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی مکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} (8.16) \quad F_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[dL_2 \times \oint \frac{dL_1 \times a_{R21}}{R_{21}^2} \right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{a_{R21} \times dL_1}{R_{21}^2} \right] \times dL_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی مکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی مکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزرتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں B کو مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$F = -B \times \oint dL$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔ کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری مکمل $\oint dL = 0$ ہوتا ہے لہذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔ البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ⁹ یعنی قوت کا معیار اثر¹⁰ عموماً صفر نہیں ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی جھول¹¹ کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت F عمل کر رہا ہے۔ ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ R قوت کا بازو¹² کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر T

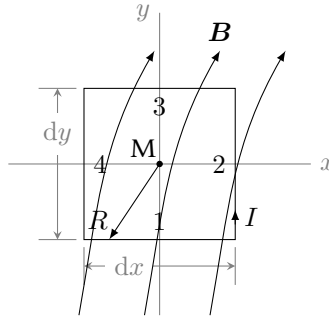
$$T = R \times F \quad (8.17)$$

کے برابر ہے۔ مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔ چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T &= R_1 \times F_1 + R_2 \times F_2 \\ &= (R_1 - R_2) \times F_1 \\ &= R_{12} \times F_1 \end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $F_2 = -F_1$ پر کیا گیا ہے۔ اس مساوات میں قوتوں کے محور کا R_{12} پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔ اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جاسکتا ہے۔



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی دو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی دو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ میں مروڑ حاصل کریں۔ تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف dx اور dy ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔ اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

(8.18) $B_0 = B_{x0} a_x + B_{y0} a_y + B_{z0} a_z$ کے برابر ہے۔ یوں وسط سے $-\frac{dy}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلس سے

$$B_1 = B_0 - \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$B_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_x + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$dF_1 = I dx a_x \times B_1$$

یا

$$\begin{aligned} dF_1 &= I dx a_x \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_x + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z \right] \\ &= I dx \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$ لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

ہوگا۔

اسی طرح وسط سے $\frac{dy}{2}$ + جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مگنٹران تسلسل سے

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\mathbf{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$d\mathbf{F}_3 = -I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &= I dx \left[- \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$ لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 \\ &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[- \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

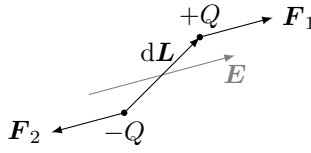
ہوگا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -IB_{y0} dx dy \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوٹے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = IB_{x0} dx dy \mathbf{a}_y$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$dT = I dx dy (B_{x0} a_y - B_{y0} a_x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$dT = I dx dy (a_z \times B_0)$$

یا

$$(8.19) \quad dT = I dS \times B$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے dS کو گھیرتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہا B لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر dm^{13} کی تعریف ہے جس کی اکائی $A m^2$ ہے۔ یوں

$$(8.20) \quad dm = I dS$$

اور

$$(8.21) \quad dT = dm \times B$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ dS مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہوگی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔ مثبت چارج پر قوت $F_1 = QE$ اور منفی چارج پر قوت $F_2 = -QE$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned} dT &= dL \times QE \\ &= dp \times E \end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $dp = Q dL$ برقی جفت قطب ہے۔ مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔ بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان E کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_1 &= I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -I dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = I dx dy B_{x0} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان نتائج سے کل مروڑ

$$d\mathbf{T} = I dx dy (B_{x0} \mathbf{a}_y - B_{y0} \mathbf{a}_x)$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

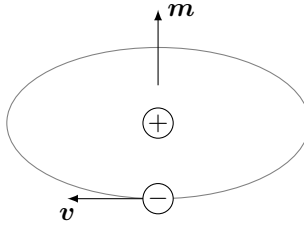
$$(8.22) \quad \mathbf{T} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{یکساں مقناطیسی میدان}$$

سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔ اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جاسکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔



شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔



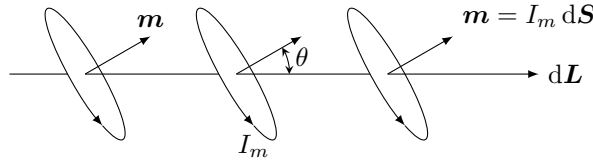
شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو I_m ¹⁴ کہلائی جاتی ہے۔ اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جاسکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب m کو جنم دیتی ہے۔ الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو v کے الٹ سمت میں ہوگی۔ ایٹمی مسائل صرف کو انٹیم میکینکس¹⁵ سے ہی سمجھے جاسکتے ہیں۔ یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نکل¹⁶ اور کوبالٹ¹⁷ ایسے عناصر ہیں جن کا m قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔ یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء¹⁸ کہلاتے ہیں۔ ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ ایسے ہم صف¹⁹ خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ ان خطوں کو مقناطیسی خطے²⁰ کہتے ہیں۔ مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔ کسی بھی قدرتی مقناطیسی شے میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ ہاں بیرونی مقناطیسی میدان B_0 لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو B_0 کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔ یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔ بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔ یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔ یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال²¹ کہلاتا ہے۔

bound current¹⁴
quantum mechanics¹⁵
nickel¹⁶
cobalt¹⁷
ferromagnetic¹⁸
aligned¹⁹
magnetic domain²⁰
hysteresis²¹



شکل 8.7: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔ اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثران کا سمتی مجموعہ

$$(8.23) \quad m_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} m_i$$

ہو گا۔ انفرادی m مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔ اجتماعی مقناطیسی معیار اثران کی اکائی حجم

$$(8.24) \quad M = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} m_i$$

کو مقناطیسیت²² پکارا اور M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقناطیسیت کی اکائی بالکل H کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{A}{m}$ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 132 پر دئے مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو قطبیت کی تعریف بیان کرتی ہے۔ مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی قطبیت پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

شکل 8.7 میں بند راہ کا کچھ حصہ dL دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔ چھوٹے رقبے dS کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $m = I_m dS$ کو جنم دیتی ہے۔ بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر dL کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔ یوں چھوٹے حجم $dS \cos \theta dL$ یعنی $dS \cdot dL$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n dS \cdot dL$ ہو گی۔ انہیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اگر بند راہ پر a_L جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔ بیرونی میدان B لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n dS \cdot dL$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$(8.25) \quad dI_m = n I_m dS \cdot dL = M \cdot dL$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔ پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$(8.26) \quad I_m = \oint M \cdot dL$$

ہو گا۔

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ یوں B اور H کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان B میں جفت قطب پر قوت اور مروڑ پر رہا

ہے۔ آئیں B کو ہی بنیادی متغیر تصور کرتے ہوئے H کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ایمپیر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$(8.27) \quad \oint \frac{B}{\mu_0} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{کل}}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$(8.28) \quad I_{\text{کل}} = I + I_m$$

کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$(8.29) \quad I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) \cdot d\mathbf{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تو سین میں بندھے کو H کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$(8.30) \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

جسے یوں

$$(8.31) \quad B = \mu_0 (H + M)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ خالی خلاء میں M صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $B = \mu_0 H$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 8.29 میں H کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$(8.32) \quad I = \oint H \cdot d\mathbf{L}$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$I_m = \oint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_{\text{کل}} = \oint_S \mathbf{J}_{\text{کل}} \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھے جاسکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.26، مساوات 8.32 اور مساوات 8.27 کے گردش

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_{\text{کل}}$$

$$(8.33) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.32 اور مساوات 8.33 سے غرض رہے گا۔ یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.31 کثافت مقناطیسی بہاؤ B ، مقناطیسی میدان کی شدت H اور مقناطیسیت M کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔ خطی²³ اور غیر سمتی خاصیت²⁴ کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$(8.34) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری²⁵ کہا جاتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 (H + \chi_m H) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) H \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل²⁶ پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(8.35) \quad \mu_R = 1 + \chi_m$$

یوں

$$B = \mu_0 \mu_R H$$

یا

$$(8.36) \quad B = \mu H$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$(8.37) \quad \mu = \mu_0 \mu_R$$

مقناطیسی مستقل²⁷ پکارا جاتا ہے۔ جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بائوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ ایسے اشیاء مساوات 8.34 پر پورا اترتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت²⁸ کے اشیاء میں H کا ہر کارتیسی جزو B کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق تناوی شکل

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \end{aligned} \quad (8.38)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات صفحہ 135 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔ یوں سمتی خاصیت کے اشیاء میں $B = \mu H$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔ مساوات $B = \mu_0 (H + M)$ اب بھی درست ہے اگرچہ B ، H اور M عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔ حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔ انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ بالکل انہیں کی طرح شکل 8.8 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے ٹکڑے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاؤس کے قانون

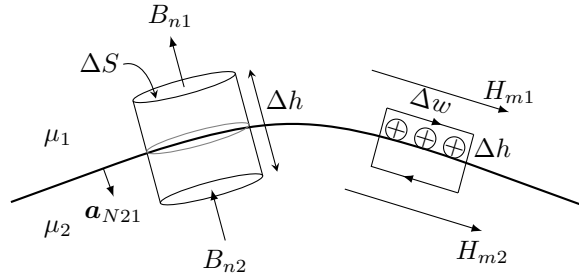
$$\oint_S B \cdot dS = 0$$

²⁵magnetic susceptibility

²⁶relative magnetic constant, relative permeability

²⁷magnetic constant, permeability

²⁸anisotropic



شکل 8.8: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$(8.39) \quad B_{n2} = B_{n1}$$

یا

$$(8.40) \quad H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں عمودی B سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی H سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔

سرحد پر عمودی M کا تعلق سرحد پر عمودی H کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔ خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$(8.41) \quad M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} M_{n1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K\Delta w$$

یعنی

$$(8.42) \quad H_{m1} - H_{m2} = K$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحد پر سطحی کثافت برقی رو K کی موجودگی تصور کی گئی ہے۔ مستطیل راہ سے گھیرے سطح کے عمودی اس کثافت برقی رو کا جزو K ہے۔ سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$(8.43) \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{N21} = \mathbf{K}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_{N21} سرحد پر خطہ 1 سے خطہ 2 جانب عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی B کے لئے یوں

$$(8.44) \quad \frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی M کے لئے

$$(8.45) \quad M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔ دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔ کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔ برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔ میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$(8.46) \quad E = -\nabla V$$

ہے۔ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$(8.47) \quad H = -\nabla V_m$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔ منبع برقی دباؤ کو محرک برقی دباؤ پکارا جاتا ہے۔ اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباؤ کو محرک مقناطیسی دباؤ پکارا جائے گا۔ متحرک مقناطیسی دباؤ کی اکائی ایمپیر ہے۔ حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباؤ استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیر۔ چکر²⁹ لی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباؤ کے فرق کو

$$(8.48) \quad V_{AB} = - \int_B^A E \cdot dL$$

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباؤ کے فرق کو

$$(8.49) \quad V_{mAB} = - \int_B^A H \cdot dL$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 216 پر مساوات 7.79 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے حصول کے دوران مندرجہ بالا مکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔ اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$(8.50) \quad J = \sigma E$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔ یہ مساوات کثافت برقی رواور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔ مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$(8.51) \quad B = \mu H$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاواور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی روبذریعہ سطحی مکمل

$$(8.52) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کل مقناطیسی بہاواور بھی ایسے ہی مکمل سے حاصل ہوگا لہذا

$$(8.53) \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جائے گا۔ یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباواور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارااور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(8.54) \quad V = IR$$

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباواور مقناطیسی بہاواور کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے \mathcal{R} سے ظاہر کیا جائے گا لہذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$(8.55) \quad V_m = \Phi \mathcal{R}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیر۔چکرن فی ویر (A · t/Wb) ہے۔

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$(8.56) \quad R = \frac{d}{\sigma S}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$(8.57) \quad \mathcal{R} = \frac{d}{\mu S}$$

ہوگی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جاسکے۔

مثال 8.2: ایک سلاخ جس کی لمبائی 15 cm اور رداس 1 mm ہے کی موصلیت $\frac{S}{m}$ 1200 ہے پر 220 V برقی دباواور لگا دی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی روا حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت برقی روا بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8 \Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5 \text{ A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہوگا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$$

مثال 8.3: ایک سلاخ کی لمبائی 15 cm اور رداس 2 cm ہے کی جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔ اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں 0.5 A برقی رو ہو مقناطیسی دباؤ لاگو کرتا ہے۔ سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاؤ بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94988 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاؤ

$$\Phi = \frac{V_m}{\mathcal{R}} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53 \text{ mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاؤ ہوگی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42 \text{ T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ چارج پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولومب کا قانون اخذ کیا۔ اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔ یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔ اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{مخفی}} = \frac{1}{2} \int_h \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dh \quad (8.58)$$

ہے جہاں D اور E کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جاسکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی، یعنی، ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔ حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔ جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباؤ پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوینٹنگ سمتیہ³⁰ سے حاصل کی جائے گی۔ یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صفر پیش کرتے ہیں

$$(8.59) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h B \cdot H \, dh$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ اس میں $B = \mu H$ پر کرنے سے

$$(8.60) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \mu H^2 \, dh$$

اور

$$(8.61) \quad W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \frac{B^2}{\mu} \, dh$$

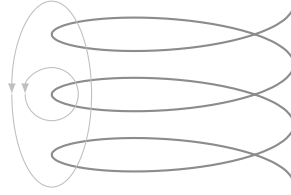
بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے ناممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2} B \cdot H$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مرلے میٹر J/m^3 میں ناپا جائے گا۔

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، کپیسٹر اور امالہ کردار ادا کرتے ہیں۔ مزاحمت اور کپیسٹر پر ہم بات کر چکے ہیں۔ برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دار و مدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔ اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر چارج کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباؤ کی شرح کو کپیسٹنس کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ کپیسٹر کے قیمت کا دار و مدار کپیسٹر کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔ یوں مزاحمت اور کپیسٹر کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔ اس حصے میں ہم امالہ L پر غور کریں گے۔ نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دار و مدار امالہ کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاؤ³¹ کا ذکر ضروری ہے۔ تصور کریں کہ N چکر لالچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتا ہے۔ تصور کریں کہ Φ تمام N چکر سے گزرتی ہے۔ یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاؤ ہر چکر سے گزرتی ہے۔ یوں پہلے چکر سے Φ بہاؤ گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاؤ گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاؤ گزرتی ہے۔ ارتباط بہاؤ سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاؤ کا مجموعہ۔



شکل 8.9: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ مختلف ہو سکتی ہے۔

ارتباط بہاؤ اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔ اگر ارتباط بہاؤ اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ³² کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔ اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاؤ دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ³³ کہتے ہیں۔ اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔ اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$(8.62) \quad L = \frac{N\Phi}{I}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاؤ تمام چکر سے گزرتی ہے۔ امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔ خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاؤ اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتا۔ ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔ صفحہ 186 پر مساوات 7.12

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاؤ

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S B_\phi dS \\ &= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I d\rho dz}{2\pi\rho} \\ &= \frac{\mu_0 I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ مقناطیسی بہاؤ دونوں تاروں کے درمیان خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہذا مکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جاسکتی ہے۔ یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$(8.63) \quad L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گی۔ یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاؤ پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاؤ پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔ یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاؤ حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاؤ لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاؤ} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاؤ B

$$B = \nabla \times A$$

پیدا ہوتی ہے جہاں A سمتی مقناطیسی دہاؤ ہے جسے

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dL}{R}$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاؤ Φ کو مکمل

$$\Phi = \int_S B \cdot dS$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس مکمل میں B پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times A) \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ بائیوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint A \cdot dL$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں بند مکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔ اس مساوات میں A پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{dL}{R} \right) \cdot dL$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$(8.64) \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{dL}{R} \right) \cdot dL$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہاں مکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دار و مدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی مکمل لیا گیا۔ ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرہ مشکل³⁴ سے بنتی ہے۔ سطحی مکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جاسکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بائیوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاؤ حاصل ہوگی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

³⁴ آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاؤ پایا جاتا ہے۔ تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاؤ کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاؤ زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔ جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظر انداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.4: لا محدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کے تار کو z محور پر تصور کرتے ہیں۔ تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi \rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I \rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I \rho}{2\pi \rho_1^2}$ ہوگی۔ رداس ρ پر $d\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$d\Phi = B_\phi z_0 d\rho = \mu H_\phi z_0 d\rho$$

بہاؤ گزرے گی۔ اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاؤ صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہذا یہ تفرقی بہاؤ صرف

$$\frac{\rho^2}{\rho_1^2} d\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \mu H_\phi z_0 d\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi \rho_1^4} \rho^3 d\rho$$

دیتی ہے۔ اگر تفرقی بہاؤ تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔ یوں مکمل سے اندرونی ارتباط بہاؤ

$$\text{ارتباط بہاؤ} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi \rho_1^4} \rho^3 d\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$(8.65) \quad L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یا $\frac{\mu}{8\pi}$ ہینری فی میٹر حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 187 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$I_{\text{گھیر}} = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi \rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)$$

$$d\Phi = \mu H_\phi z_0 d\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ تفرقی بہاؤ ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہذا تفرقی ارتباط بہاؤ

$$\text{تفرقی ارتباط بہاؤ} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right)^2 d\rho$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$(8.66) \quad L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.65 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔ یوں کم تعدد پر مساوات 8.63، مساوات 8.65 اور مساوات 8.66 کا مجموعہ ہم محوری تار کا امالہ فی میٹر تار ہو گا۔ جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یوں بلند تعدد پر مساوات 8.63 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$(8.67) \quad W = \frac{LI^2}{2}$$

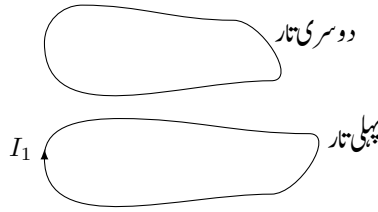
سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.59، مساوات 8.60 یا مساوات 8.61 سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(8.68) \quad \begin{aligned} L &= \frac{2W}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_h \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dh \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \mu H^2 dh \\ &= \frac{1}{I^2} \int_h \frac{B^2}{\mu} dh \end{aligned}$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.2 میں لاکھود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.3 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

شکل 8.10 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔ انہیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاؤ کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین مشترکہ امالہ حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاؤ کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{dL_1}{R} \right) \cdot dL_2$$



شکل 8.10: مشترکہ امالہ۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں اندرونی مکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری مکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاؤ کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$(8.69) \quad M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1}$$

ہے جس سے

$$(8.70) \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{dL_1}{R} \right) \cdot dL_2$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رولی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاؤ حاصل کی جاتی تب

$$(8.71) \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{dL_2}{R} \right) \cdot dL_1$$

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دو درجی مکمل میں اندرونی مکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی مکمل پہلی راہ پر ہے۔ مکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا مکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر مکمل لیا جائے تو مکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.70 ملتا ہے لہذا

$$(8.72) \quad M_{21} = M_{12}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوال 8.1: صفحہ 187 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } \frac{\mu}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)} \left[\rho_2^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \frac{\rho_3^4 - \rho_2^4}{4} - \rho_2^2 (\rho_3^2 - \rho_2^2) \right]$$

سوال 8.2: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.3: صفحہ 246 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔ اسی کو دوبارہ مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: بیرونی تار میں } H = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \text{ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔}$$

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدان یعنی میدانوں پر غور کیا گیا۔ یہاں سے آگے اس کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

دونے اصول پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ قانون فیراڈے¹ کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(9.1) \quad \text{محرك برقي دباو} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی بند راہ سے گزرتی مقناطیس بہاؤ میں تبدیلی اس راہ پر برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباؤ روایتی طور پر محرک برقی دباؤ² پکاری جاتی ہے۔ محرک برقی دباؤ کی قیمت وقت کے ساتھ بند راہ سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کے تبدیلی کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباؤ کی اکائی وولٹ V ہے۔ ضروری نہیں کہ بند راہ موصل مادے کی ہی ہو، یہ فرضی بند لکیر بھی ہو سکتی ہے۔

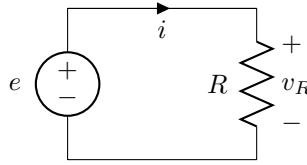
محرک برقی دباؤ مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو، بند راہ میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی جس کی سمت، راہ میں پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ کے سمت، کی الٹ ہوتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے کہ بند راہ میں محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو ایسا مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتی ہے جو پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ کے الٹ سمت رکھتی ہے۔ اس اصول کو لینز⁴ کا اصول کہا جاتا ہے۔

کسی بھی بند راہ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

Faraday's law¹
electromotive force, emf²

³ محرک برقی دباؤ کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباؤ کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔
⁴ یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔

Lenz's law⁵



شکل 9.1: محرک برقی دباؤ اور برقی دباؤ کی پہچان۔

- وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی کثافت مقناطیسی بہاؤ جو ساکن بند راہ سے گزرتی ہو۔
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند راہ کا آپس میں اضافی حرکت۔
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند راہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاؤ گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$(9.2) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 9.1 میں محرک برقی دباؤ کو e سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر محرک برقی دباؤ کو مزاحمت R کے ساتھ منسلک کیا جائے تو برقی دور میں i برقی رو گزرے گی۔ مزاحمت پر برقی دباؤ کو v_R سے ظاہر کیا گیا ہے۔ مزاحمت کے نچلے سرے کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مزاحمت کے اوپر والے سرے پر برقی دباؤ v_R ہے۔ مزاحمت میں برقی رو کی سمت برقی دباؤ v_R کے مثبت سرے سے اس کے منفی سرے کی جانب ہے۔ اوہم کے قانون کے تحت $v_R = iR$ ہو گا۔ اب ذرا اس دور میں منبع طاقت کی طرف نظر ڈالتے ہیں۔ یہاں برقی رو کی سمت e کے منفی سرے سے مثبت سرے کی جانب ہے۔ برقی دباؤ اور محرک برقی دباؤ میں یہی بنیادی فرق ہے۔ جہاں کہیں پر بھی برقی رو، مثبت سے منفی برقی رو کی جانب ہوتی ہے، محرک برقی دباؤ میں اس کے بالکل الٹ ہوتا ہے۔

برقی دباؤ کی تعریف $v = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ مندرجہ بالا حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے محرک برقی دباؤ کی تعریف یوں لکھی جائے گی۔

$$(9.3) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

محرک برقی دباؤ بند راہ پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 97 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر \mathbf{E} کا لکیری مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر \mathbf{E} کا لکیری مکمل اس راہ پر پیدا محرک برقی دباؤ دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$(9.4) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاؤ \mathbf{B} کا سطحی مکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند راہ کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں راہ پر چلنی کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا راہ سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہو گا۔ مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباؤ سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند راہ میں محرک برقی دباؤ پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے راہ کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباؤ پر غور کریں۔

ساکن راہ کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر B ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جایا جاسکتا ہے یعنی

$$(9.5) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح S ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند راہ ہو۔ یوں ہم دونوں جانب مختلف سطیوں لے سکتے ہیں جب تک دونوں سطیوں کے سرحد یہی بند راہ ہو۔ اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب مکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی سطح dS کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یعنی

$$(9.6) \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی مکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$(9.7) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

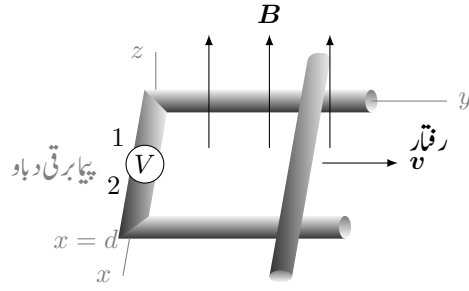
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ ملکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$(9.8) \quad \mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \quad (\rho < \rho_2)$$

کثافت مقناطیسی بہاؤ پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 داس کی گول راہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے راہ پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباؤ} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -k B_0 e^{kt} \pi \rho_1^2$$



شکل 9.2: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$(9.9) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0e^{kt}\rho a_\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف a_z جزو پایا جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہوگا لہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0e^{kt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تک مکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

$$(9.10) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0e^{kt}\rho a_\phi$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی مکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس راہ پر a_ϕ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو a_z کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند راہ حرکت کر رہی ہو۔ شکل 9.2 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباؤ ناپنے کی آلہ، یعنی پیمائشی دباؤ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند راہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیمائشی دباؤ نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاؤ B بند راہ کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت B کی صورت میں B کی سمت ہی بند راہ سے گھیری گئی سطح کی سمت ہوگی اور بند راہ کی سمت گھڑی کے الٹ ہوگی۔ یوں راہ کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdv$$

ہوگا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$$

محرك برقی دباؤ e پیدا کرے گا۔

اب محرك برقی دباؤ $E \cdot dL$ کو کہتے ہیں لہذا مندرجہ بالا جواب راہ پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری مکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.2 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر مکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔ پیا برقی دباؤ کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہذا مکمل کی قیمت پیا برقی دباؤ پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہوگا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیا برقی دباؤ کی لمبائی کو dL لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $E \cdot dL = -Bdv$ ہونا ہوگا۔ چونکہ $dL = dLa_x$ کے برابر ہے لہذا E کی سمت a_x کے الٹ ہوگی۔ یوں پیا برقی دباؤ پر E کی سمت پیا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیا پر برقی دباؤ کا مثبت سراپیا کا دوسرا سرا ہے۔

پیا کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو a_z کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباؤ تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$F = Qv \times B$$

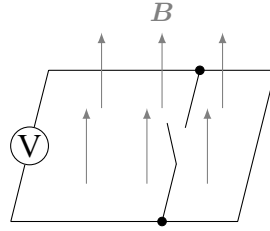
یا حرکی شدت $E_{حرکی}$

$$(9.11) \quad E_{حرکی} = \frac{F}{Q} = v \times B$$

عمل کرتی ہے۔ حرکی شدت a_x سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرك سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر a_x کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-a_x$ ۔ جانب برقی میدان کی شدت E پیدا کرے گا۔ الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ E اور $E_{حرکی}$ برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکی برقی دباؤ

$$(9.12) \quad \oint E_{حرکی} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرك برقی دباؤ}$$



شکل 9.3: محرک برقی دباؤ یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند راہ سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

سے حاصل ہوگی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند راہ کے ساکن حصوں پر مکمل کی قیمت صفر ہوگی لہذا محرک برقی دباؤ صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہوگی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے مکمل سے

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_d^0 vB dx = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ B از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہذا یہی کل محرک برقی دباؤ ہوگا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند راہ میں محرک برقی دباؤ حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت E حرکی کے استعمال سے محرک برقی دباؤ یوں

$$(9.13) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint E \cdot dL = \oint E_{\text{حرکی}} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباؤ کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباؤ

$$(9.14) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint E \cdot dL = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS + \oint (v \times B) \cdot dL$$

سے حاصل ہوگی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباؤ} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ہی ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند راہ کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند راہ میں مقناطیسی بہاؤ کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباؤ یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند راہ کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہوگا۔

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $B = 0.5a_z$ ٹسلا، رفتار $100ya_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباؤ V_{21} ،
- پیمائشی دباؤ کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $10 \mu A$, $100 V$, $4.017 \frac{m}{s}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$(9.15) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباؤ۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباؤ کا بند لکیری مکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(9.16) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاؤ ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کا بائیں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دائیں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$(9.17) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.16 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.16 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.16 میں نا معلوم جزو G کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.16 یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

لکھی جائے گی۔ آئیں دوبارہ اس کی پھیلاؤ حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔ اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot D$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot G = \frac{\partial (\nabla \cdot D)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

یعنی

$$G = \frac{\partial D}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

$$(9.18) \quad \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔

مساوات 9.18 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\partial D}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو انتقالی رو⁸ کا نام دیا اور J_d سے ظاہر کیا یعنی

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J + J_d \\ J_d &= \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned}$$

باب 10

سوالات

جدول 10.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 10.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عمیر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	تقطیر شدہ پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 10.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 10.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

