

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
187	7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
191	7.3 گردش	
198	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
204	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
205	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
206	7.4 مسئلہ سٹوکس	
210	7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	
216	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
221	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
222	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
223	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
227	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
227	8.1 متحرک چارج پر قوت	
228	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
231	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
232	8.4 قوت اور مروڑ	
237	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
238	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
241	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
242	8.8 مقناطیسی دور	
245	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
246	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
250	8.11 مشترکہ امالہ	

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
290	10.4	موصل میں امواج
296	10.5	انعکاس مستوی موج
302	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
331	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
332	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

337	12 تقطیب موج
337	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
340	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوٹنٹنگ سمتیہ
343	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
343	13.1 ترچھی آمد
354	13.2 ترسیم ہائی گن
357	14 موج اور گھمکیا
357	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ
358	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
364	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
373	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
380	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
384	14.5 کھوکھلی نالی موج
391	14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
393	14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
395	14.8 سطحی موج
400	14.9 ذو برق تختی موج
403	14.10 شیش ریشہ
406	14.11 پردہ بصارت
408	14.12 گھمکی خلاء
411	14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل
419	15 اینٹینا اور شعاعی اخراج
419	15.1 تعارف
419	15.2 تاخیری دباو
420	15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا
429	16 سوالات

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 15.1 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہوگا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$(15.1) \quad I = I_0 \cos \omega t$$

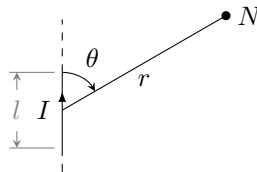
کی بجائے

$$(15.2) \quad [I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو پیکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

retarded current¹



شکل 15.1: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (15.3)$$

لکھا جاسکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (15.4)$$

ہے۔ اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[J] = J_0 e^{j\omega(t-r/c)} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \quad (15.5)$$

ہوگی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباؤ

$$[A] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[J]}{r} dh = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.6)$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح تاخیری جمعی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \quad (15.7)$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباؤ

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} dh \quad (15.8)$$

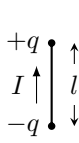
لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور تو سین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروئی محدود کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

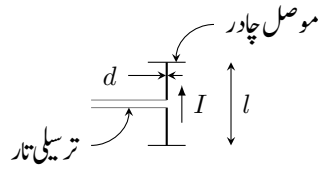
مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب² کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہوگی۔ لا محدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب³ کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے لہذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 15.2-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کر دار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن تریسلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ یہ فرض کرتے



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

شکل 15.2: جفت قطب

ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجربے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.2-ب کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہوگا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (15.9)$$

ہے۔

آئیں لا محدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدود کے مرکز اور لمبائی کو z محدود پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r, E_θ اور E_ϕ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (15.10)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (15.11)$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباؤ

\mathbf{A} نقطہ N پر سمتی دباؤ

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباؤ V اور سمتی دباؤ \mathbf{A} معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباؤ قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\mathbf{A}] \quad (15.12)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\mathbf{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\mathbf{A}] \quad (15.13)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباؤ

$$[\mathbf{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.14)$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh \quad (15.15)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباؤ $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباؤ $[A]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان H صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان E ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباؤ ہی استعمال کئے جائیں گے لہذا انہیں چکورو تسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکورو تسین کے دباؤ کو تاخیری دباؤ ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباؤ کا صرف a_z جزو

$$(15.16) \quad A = \frac{a_z \mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l ، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \ll l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \ll l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباؤ میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$(15.17) \quad A = \frac{a_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدود میں یوں

$$A = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$(15.18) \quad \begin{aligned} A_r &= a_r \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_r \cdot a_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= a_\theta \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_\theta \cdot a_z = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \\ A_\phi &= a_\phi \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_\phi \cdot a_z = 0 \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$(15.19) \quad A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos \theta a_r - \sin \theta a_\theta)$$

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہذا مقداری دباؤ

$$(15.20) \quad V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

ہوگا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$(15.21) \quad q = \int I dt = \frac{I}{j\omega}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 15.21 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.20 میں پر کرتے ہیں۔

$$(15.22) \quad V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$s_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرتے

$$(15.23) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2} \cos \theta) e^{j\frac{\beta l}{2} \cos \theta} - (r - \frac{l}{2} \cos \theta) e^{-j\frac{\beta l}{2} \cos \theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right]$$

ماتا ہے۔ چکور توسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موپور⁴ کے استعمال سے

$$(15.24) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} + j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} - j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) \right]$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہذا

$$\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} = \cos \frac{\pi l \cos \theta}{\lambda} \approx 1$$

$$\sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \approx \frac{\beta l \cos \theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.24 میں پر کرنے سے

$$(15.25) \quad V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا جیٹ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A،

l جفت قطب کی لمبائی، m،

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s، جہاں ہر ٹHz میں تعدد f ہے

⁴ ($e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$) de Moivre's theorem

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، 3×10^8 m/s

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \ll l$ اور $r \ll l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.19 سمتی دباؤ اور مساوات 15.25 مقداری دباؤ دیتے ہیں۔ کروی محدود میں مقداری دباؤ کی ڈھلوان

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ (15.26) \quad &= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[- \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2c \cos \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_r - \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{c \sin \theta}{j\omega r^2} \right) \mathbf{a}_\theta \right] \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $E = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.13 کی مدد سے

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi$$

لکھے جاسکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \\ (15.27) \quad E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \quad \text{عمومی میدان} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقتناطیسی میدان مساوات 15.12 سے حاصل ہوگی۔ کروی محدود میں سمتی دباؤ کی گردش

$$\begin{aligned} (15.28) \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

میں مساوات 15.18 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$(15.29) \quad \begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) && \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r, E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہوگا لہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$(15.30) \quad \begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{j\omega}{c^2 r} = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} && \text{دور میدان} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$(15.31) \quad \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin \theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندر سے شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \end{aligned}$$

یا

$$(15.32) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j \frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$(15.33) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا جسے

$$(15.34) \quad r \gg \frac{1}{\beta} \quad (\text{دور میدان})$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $\frac{c}{\omega} \ll r \ll \frac{1}{\beta}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

ہوں گے لہذا قریبی میدان

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان} \end{aligned} \quad (15.35)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$(15.36) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$$

ہوگا۔ مساوات 15.36 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈین کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

پونٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.30 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = E_\theta H_\phi^* \mathbf{a}_r = \frac{30 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \quad \text{دور میدان}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پونٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.35 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = (E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta) \times H_\phi^* \mathbf{a}_\phi = \left[-\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r \right] \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.27 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.29 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ E_\theta &= \frac{q_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \end{aligned}$$

تعدد کو صفر کے قریب تر $0 \rightarrow \omega$ کرنے سے ان مساوات کو

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta e^{-j\beta r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{q_0 l \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلیم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

