برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ . . . 1

1.2 سمتی الجبرا . . . 2

1.3 کارتیسی محدد . . . 3

1.4 اکائی سمتیات . . . 5

1.5 میدانی سمتیہ . . . 9

1.6 سمتی رقبہ . . . 9

1.7 غیر سمتی ضرب . . . 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . 14

1.9 گول نلکی محدد . . . 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . 25

1.10 کروی محدد . . . 27

2 کولومب کا قانون 37

2.1 قوت کشش یا دفع . . . 37

2.2 برقی میدان کی شدت . . . 41

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . 44

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . 49

2.5 چارج بردار حجم . . . 53

2.6 مزید مثال . . . 54

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط . . . 61

2.8 سوالات . . . 63

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 65

3.1 ساکن چارج . . . 65
3.2 فیراڈے کا تجربہ . . . 65
3.3 گاؤس کا قانون . . . 66
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال . . . 68
3.4.1 نقطہ چارج . . . 68
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح . . . 70
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . 70
3.5 ہم محوری تار . . . 71
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . 73
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . 73
3.8 پھیلاو . . . 76
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات . . . 78
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات . . . 80
3.11 مسئلہ پھیلاو . . . 82

4 توانائی اور برقی دباو 85

4.1 توانائی اور کام . . . 85
4.2 لکیری تکملہ . . . 86
4.3 برقی دباو . . . 91
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو . . . 92
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو . . . 93
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو . . . 94
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو . . . 94
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان . . . 98
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان . . . 102
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان . . . 103
4.6 جفت قطب . . . 104
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط . . . 106
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . 109

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 115
5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو . . . 115
5.2 استمراری مساوات . . . 117
5.3 موصل . . . 119
5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط . . . 124
5.5 عکس کی ترکیب . . . 127
5.6 نیم موصل . . . 130
5.7 ذو برق . . . 131
5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط . . . 136
5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط . . . 140
5.10 کپیسٹر . . . 140
5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر . . . 142
5.10.2 ہم محوری کپیسٹر . . . 143
5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر . . . 143
5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر . . . 145
5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس . . . 146

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 155
6.1 مسئلہ یکتائی . . . 157
6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے . . . 158
6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات . . . 159
6.4 لاپلاس مساوات کے حل . . . 160
6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال . . . 166
6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل . . . 169
6.7 عددی دہرانے کا طریقہ . . . 176

7 ساکن مقناطیسی میدان 183

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون . . . 183

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 187

7.3 گردش . . . 192

7.3.1 نلکی محدد میں گردش . . . 199

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات . . . 204

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات . . . 206

7.4 مسئلہ سٹوکس . . . 207

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو . . . 210

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو . . . 217

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول . . . 222

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو . . . 222

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 224

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 229

8.1 متحرک چارج پر قوت . . . 229

8.2 تفرقی چارج پر قوت . . . 230

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت . . . 233

8.4 قوت اور مروڑ . . . 234

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے . . . 239

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل . . . 240

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط . . . 243

8.8 مقناطیسی دور . . . 244

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی . . . 247

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ . . . 248

8.11 مشترکہ امالہ . . . 252

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 255

9.1 فیراڈے کا قانون 255

9.2 انتقالی برقی رو 261

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 265

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 266

9.5 تاخیری دباو 268

10 مستوی امواج 273

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 273

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 274

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 281

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 283

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 285

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 288

10.4 موصل میں امواج 292

10.5 انعکاس مستوی موج 298

10.6 شرح ساکن موج 304

11 ترسیلی تار 311

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 311

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 315

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 316

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 319

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 320

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 321

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 326

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 333

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 334

12 تقطیب موج 339

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 339

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 342

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 345

13.1 ترچھی آمد 345

13.2 ترسیم بائی گن 356

14 مویج اور گھمکیا 359

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 359

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 360

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج 366

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 375

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\mathrm{TM}mn$ موج 382

14.5 کھوکھلی نالی مویج 386

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 393

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 395

14.8 سطحی موج 397

14.9 ذو برق تختی مویج 402

14.10 شیش ریشہ 405

14.11 پردہ بصارت 408

14.12 گھمکی خلاء 410

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 413

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 421
15.1 تعارف 421
15.2 تاخیری دباو 421
15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا 422
15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 430
15.5 ٹھوس زاویہ 433
15.6 موثر رقبہ، سمتیت اور افزائش 435
15.7 قطاری ترتیب 441
15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 442
15.7.2 ضرب نقش 443
15.7.3 ثنائی قطار 443
15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 445
15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 447
15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 448

16 سوالات 451

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 15.1 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{15.1}$$

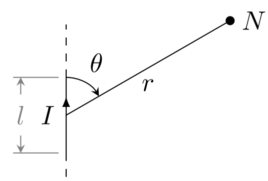
کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \tag{15.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

[1] retarded current



شکل 15.1: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t-\beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c=\frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t-\beta x)=\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{15.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I]=I_0e^{j\omega(t-r/c)}=I_0e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}]=\boldsymbol{J}_0e^{j\omega(t-r/c)}=\boldsymbol{J}_0e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}]=\frac{\mu}{4\pi}\int_h\frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\,\mathrm{d}h=\frac{\mu}{4\pi}\int_h\frac{\boldsymbol{J}_0e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h]=\rho_0e^{j\omega(t-r/c)} \tag{15.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V]=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_h\frac{[\rho_h]}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔لا محدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 15.2-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ ہے۔جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔یہ فرض کرتے

[2] short dipole
[3] infinitesimal

الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 15.2: جفت قطب

ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.2-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{15.9}$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15.10}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{15.11}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{15.12}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{15.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.14}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.15}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{15.16}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{15.17}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\cos\theta\\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0
\end{aligned} \tag{15.18}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\left(\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{15.19}$$

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{15.20}$$

ہو گا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$q = \int I \,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{15.21}$$

کے برابر ہے جہاں

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{j(\omega t - \beta s)} \\ q &= q_0 e^{j(\omega t - \beta s)} \end{aligned}$$

ہیں۔مساوات 15.21 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.20 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{15.22}$$

شکل کو دیکھ کر

$$\begin{aligned} s_1 &= r - \frac{l}{2}\cos\theta \\ s_2 &= r + \frac{l}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r + \frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r - \frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{15.23}$$

ملتا ہے۔چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔مسئلہ ڈی مویور[4] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[&\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ &- \left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{15.24}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ $\lambda \gg l$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} &= \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l \\ \sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} &\approx \frac{\beta l\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.24 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{15.25}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

---

[4] de Moivre's theorem $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد $(\omega = 2\pi f)$، اکائی $\mathrm{rad/s}$۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$، اکائی $\mathrm{rad/m}$

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، $8.854\,\mathrm{pF/m}$

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \gg l$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.19 سمتی دباو اور مساوات 15.25 مقداری دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r} + \frac{c\sin\theta}{j\omega r^2}\right)\boldsymbol{a}_{\theta}\right]
\end{aligned} \tag{15.26}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.13 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta \\
E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{15.27}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.12 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\
+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned} \tag{15.28}$$

میں مساوات 15.18 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان}\\
H_r &= 0\\
H_\theta &= 0
\end{aligned} \tag{15.29}
$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}\\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr} = j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان}
\end{aligned} \tag{15.30}
$$

ہوں گے۔ مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$
\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega \tag{15.31}
$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0°$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90°$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندرسہ[5] شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$
\begin{aligned}
\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \frac{1}{cr^2}\\
\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right|
\end{aligned}
$$

یا

$$
r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.32}
$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$
\left|j\frac{\omega}{cr}\right| \gg \frac{1}{r^2}
$$

یا

$$
r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.33}
$$

[5] doughnut

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad \text{(دور میدان)} \tag{15.34}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cr^2} &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\left|\frac{j\omega}{c^2 r}\right| &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\frac{1}{cr^2} &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\left|\frac{j\omega}{cr}\right| &\ll \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{15.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_\text{r} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\text{r} + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta\right] e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})} \tag{15.36}$$

ہو گا۔ مساوات 15.36 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں $45°$ کا زاویہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.30 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2}\sin^2\theta \boldsymbol{a}_\text{r} \qquad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90°$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.35 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[(E_r\boldsymbol{a}_\text{r} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\text{r}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	0	$\frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	$\frac{j60\pi I_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	$\frac{jI_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.27 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.29 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$
\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{15.37}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[6] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 105 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 184 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.30 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[7] کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \gg l$ اور $\lambda \gg l$، کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

[6] quasi stationary fields
[7] radiation fields

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباو V کا کوئی کردار نہیں۔ یوں مساوات 15.13 اور مساوات 15.18 سے

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 15.12 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j\frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.39}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.30 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j\underbrace{60\pi}_{\text{مقدار}}\;\underbrace{I_0}_{\text{رو}}\;\underbrace{\frac{l}{\lambda}}_{\text{لمبائی}}\;\underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{فاصلہ}}\;\underbrace{\sin\theta}_{\text{شکل}}\;\underbrace{e^{j(\omega t-\beta r)}}_{\text{زاویہ}} \tag{15.40}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{15.41}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \mathscr{P}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{15.42}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔ یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{15.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[8] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[E_\theta H_\phi^* \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{15.44}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0 \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s = \frac{Z_0}{2} \int_S \left| H_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.45}$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0} \int_S \left| E_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.46}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $\mathrm{d}s = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.16 سے مساوات 15.17 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

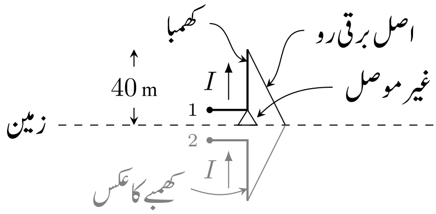
حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.30 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \tag{15.47}$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 15.45 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta I l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

[8] radiation resistance



شکل 15.3: کھمبا اینٹینا

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 15.45 یا مساوات 15.46 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{15.48}$$

ہو گی۔مساوات 15.43 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{15.49}$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 \, \mathrm{d}s \tag{15.50}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔اس کھمبے کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.49 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2\times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{15.51}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیائی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیائی}} \tag{15.52}$$

ہو گی۔مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیائی}} = 0.63\,\Omega$ ہوتا تب اینٹینا کی کارکزاری[9] k

$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیائی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{15.53}$$

پچاس فی صد ہو گی۔اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارکزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اگر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا تکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔سطحی تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

15.5 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[10] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

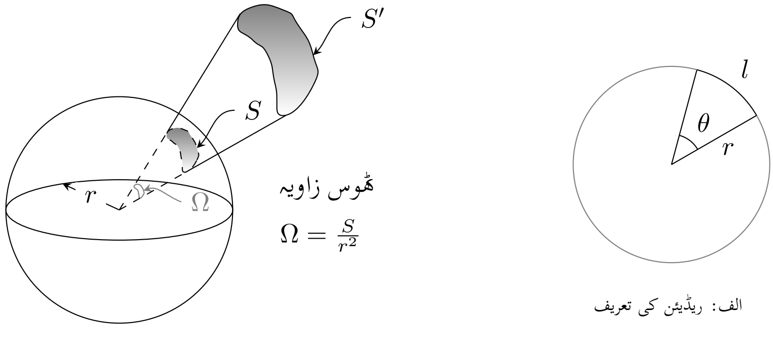
شکل 15.4-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad (\text{rad}) \tag{15.54}$$

زاویے θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[11] (rad) ہے۔یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی

---

[9] efficiency
[10] solid angle
[11] radian



الف: ریڈیئن کی تعریف

ب: سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 15.4: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

ہے۔اگرچہ مساوات 15.54 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جارہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \text{(sr)} \tag{15.55}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[12] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جارہی ہے۔

شکل 15.4-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{15.56}$$

کے برابر ہو گا۔اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 15.4-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح شکل 15.4-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.4-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔اس کے برعکس شکل 15.4-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\text{sr} = 1\,\text{rad}^2 \tag{15.57}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{15.58}$$

[12] steradian

لکھا جا سکتا ہے۔یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.59}$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.6 موثر رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پیش کیا گیا ہے۔کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}|H|^2 \,\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{1}{2Z_0}|E|^2 \,\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{15.60}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2 \mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}|H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0}|E|^2 r^2 \qquad (\mathrm{W/sr}) \tag{15.61}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta,\phi)$ اخراجی شدت[13] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 15.55 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو قابل پذیر[14] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r^2 \mathscr{P}_{\text{بلند تر}} = P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.62}$$

بے بُعد[15] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی قابل پذیر نقش طاقت[16] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{15.63}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{15.64}$$

ہو گا۔اس میں مساوات 15.55 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathscr{P} r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

---

[13] radiation intensity
[14] normalized
[15] dimensionless
[16] normalized power pattern

یعنی

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.65}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ [17] کہتے ہیں۔

اخراجی شعاع کے مرکزی گوشے [18] پر تکمل

$$\Omega_M = \iint\limits_{\text{مرکزی گوشہ}} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.66}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ [19] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں صغیر گوشے [20] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m = \Omega_A - \Omega_M \tag{15.67}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی [21] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت [22] ہے۔اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.68}$$

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔یوں

$$\begin{aligned} D = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} &= \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint\limits_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 15.65 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.69}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

---

[17] beam solid angle
[18] main lobe
[19] major lobe solid angle
[20] minor lobe
[21] isotropic
[22] directivity

مثال 15.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi)=1$ اور $\Omega_A=1$ ہوں گے۔ یوں

$$D=\frac{4\pi}{\Omega_A}=1 \tag{15.70}$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 15.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi)=\frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}=\sin^2\theta \tag{15.71}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 15.65 سے

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{8\pi}{3} \tag{15.72}$$

اور یوں مساوات سے

$$D=\frac{4\pi}{\Omega}=\frac{3}{2} \tag{15.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کار گزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کار گزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش[23] پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

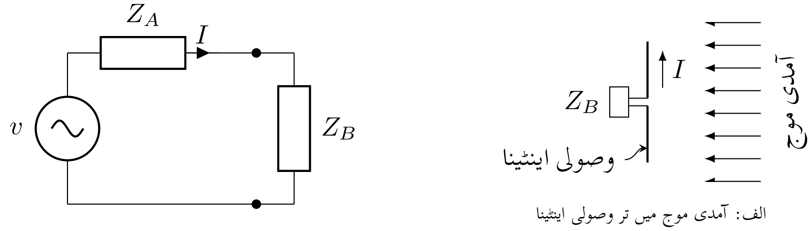
$$\text{افزائش}=G=\frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{15.74}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0=\frac{P_m'}{P_0} \tag{15.75}$$

ہو گا جہاں

[23] gain



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

شکل 15.5: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 15.53 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{15.76}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\,\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لامحدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 \le D &\le \infty \\ 0 \le G &\le \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$

اخراجی اینٹینا[24] شعاعی اخراج کرتی ہے۔ اس کے برعکس وصولی اینٹینا[25] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{15.77}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[26] کہا جاتا ہے۔ یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{15.78}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

[24] transmitting antenna
[25] receiving antenna
[26] antenna aperture

A اینٹینا کا فرضی رقبہ، m^2

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 15.5-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن[27] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔ یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$|I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2} \tag{15.79}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2\right]} \tag{15.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔ اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{15.81}$$

$$X_B = -X_A \tag{15.82}$$

[27] Thevenin equivalent circuit

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{موثر}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P}R_r} \tag{15.83}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا موثر رقبہ[28] $S_{\text{موثر}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا موثر رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 15.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا موثر رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.83 سے ظاہر ہے کہ موثر رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{15.84}$$

برقی دباو پیدا ہو گی۔آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{15.85}$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔مساوات 15.49 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{15.86}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان تمام کو مساوات 15.83 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{موثر}} = \frac{E^2 l^2}{4\frac{E^2}{Z_0}80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{15.87}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ موثر رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}} + R_{\text{اخراجی}}$ ہو گی۔یوں کامل جفت قطب کا موثر رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا موثر رقبہ $S_{\text{موثر}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔موثر رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{موثر}} \tag{15.88}$$

[28] effective aperture

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P=\frac{E_r^2}{Z}r^2\Omega_A \tag{15.89}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر ایک نتیجہ حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r=\frac{E_m A_{\text{موثر}}}{r\lambda}$ ہے۔اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2=A_{\text{موثر}}\Omega_A \qquad (\mathrm{m}^2) \tag{15.90}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$A_{\text{موثر}}$ اینٹینا کا موثر رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا موثر رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں موثر رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب موثر رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.69 میں مساوات 15.90 پر کرنے سے

$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}A_{\text{موثر}} \tag{15.91}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned} D&=\frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}}\\ D&=\frac{4\pi}{\Omega}\\ D&=\frac{4\pi}{\lambda^2}A_{\text{موثر}} \end{aligned} \tag{15.92}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے موثر رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

15.7 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[29] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{15.93}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \tag{15.94}$$

ہے۔ان مساوات میں

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1\left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right) = 2E_1\cos\frac{\psi}{2} \tag{15.95}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}}\right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{15.96}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1\cos\frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1\cos\frac{\psi}{2}\angle\frac{\psi}{2} \tag{15.97}$$

حاصل ہوتا۔میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

[29] reciprocity

15.7.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 15.95 (یا مساوات 15.97) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[30] جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[31] کہا جائے گا۔یوں

$$E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2} \tag{15.98}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 15.98 ضرب نقش[32] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

15.7.3 ثنائی قطار

مساوات 15.97 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.99}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی صغیر گوشہ نہیں پایا جاتا۔اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.100}$$

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1 : 2 : 1)$ نسبت سے ہے۔اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1 : 3 : 3 : 1)$ نسبت سے ہے۔اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.101}$$

ہے۔اس نقش میں بھی صغیر گوشہ نہیں پایا جاتا۔اسی طرح بڑھتے ہوئے، صغیر گوشے سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[33] کے ثنائی سر[34] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[35] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.102}$$

---

[30] primary pattern
[31] array pattern
[32] pattern multiplication
[33] binomial series
[34] binomial coefficient
[35] Pascal triangle

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی صغیر گوشہ نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 15.5: مساوات 15.100 کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 15.96 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi} \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \underline{/\psi}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کا حیطہ $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 15.6: مساوات 15.102 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{15.103}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{15.104}$$

کے سر کی نسبت $1:2:1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{15.105}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2\frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$E=E_0\left(1+e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{15.106}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0=\frac{1}{2}$ اور $\psi=\pi\cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E=\cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔یوں

$$\psi=\beta d\cos\theta+\delta \tag{15.108}$$

ہو گا۔قطار کا دور میدان

$$E=E_0\left(1+e^{j\psi}+e^{j2\psi}+e^{j3\psi}+\cdots+e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{15.109}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi=\beta d\cos\theta+\delta$

ہیں۔

اس میں $x=e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 15.109 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$Ee^{j\psi}=E_0\left(e^{j\psi}+e^{j2\psi}+e^{j3\psi}+\cdots+e^{jn\psi}\right) \tag{15.110}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 15.109 سے مساوات 15.110 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E=E_0\frac{1-e^{jn\psi}}{1-e^{j\psi}}=E_0\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\,\underline{/(n-1)\tfrac{\lambda}{2}} \tag{15.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E=E_0\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{15.112}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi\to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi=0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E=\frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[36] ہے لٰہذا ہمیں ال ہوس پٹل[37] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y=\frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x\to a$ پر $y=\frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y=\frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi\to 0$ پر

$$\begin{aligned}E&=E_0\left.\frac{\frac{\partial\sin\frac{n\psi}{2}}{\partial\psi}}{\frac{\partial\sin\frac{\psi}{2}}{\partial\psi}}\right|_{\psi\to 0}\\&=E_0\left.\frac{\frac{n}{2}\cos\frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}}\right|_{\psi\to 0}\end{aligned}$$

یعنی

$$E=nE_0 \tag{15.113}$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi=0$ یعنی

$$\beta d\cos\theta+\delta=0 \tag{15.114}$$

ہو جس سے

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}}=\cos^{-1}\left(-\frac{\delta}{\beta d}\right) \tag{15.115}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 15.112 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2}=\mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$\frac{n}{2}\left(\beta d\cos\theta+\delta\right)=\mp k\pi \tag{15.116}$$

[36] indeterminate
[37] L Hospital's rule

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left[\left(\mp\frac{2k\pi}{n} - \delta\right)\frac{\lambda}{2\pi d}\right] \tag{15.117}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 15.112 کو مساوات 15.113 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{15.118}$$

حاصل ہوتا ہے۔

15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d\cos\theta = -\delta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90°$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ[38] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{15.119}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{15.120}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 15.120 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

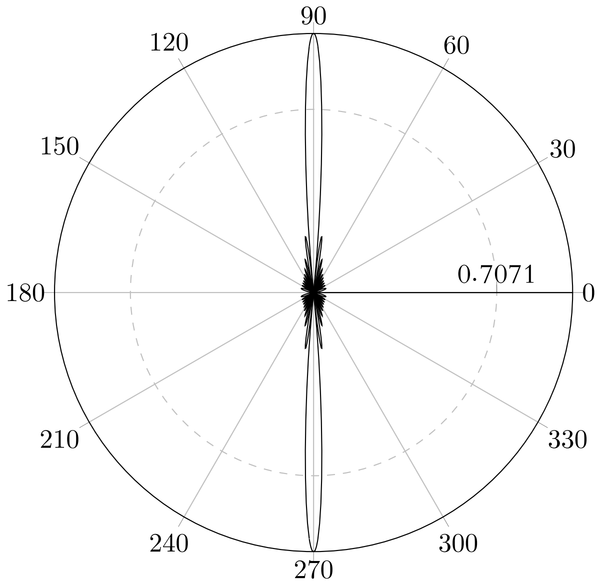
$$\text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6°}{L/\lambda} \tag{15.121}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقتی چوڑائی[39]، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار[40] کے نصف طاقتی چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی[41] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$\text{نصف طاقتی چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3°}{L/\lambda} \tag{15.122}$$

---

[38] complementary angle
[39] half power beam width, HPBW
[40] broadside array
[41] beam width between first nulls, BWFN



شکل 15.6: چوڑائی جانب اخراجی قطار

ہو گی۔

شکل 15.6 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقتی چوڑائی $5.1°$ ہے۔

15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 15.114

$$\beta d\cos\theta+\delta=0 \tag{15.123}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta=0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta=-\beta d \tag{15.124}$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 15.116 کے تحت

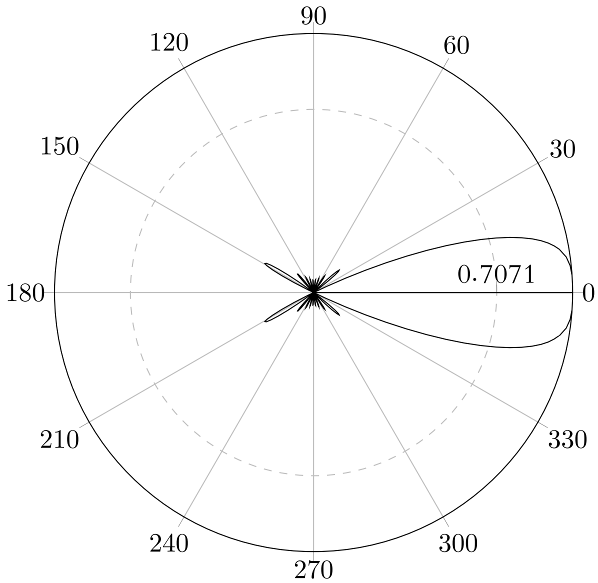
$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0-1\right)=\mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0-1=\mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔اس سے

$$\frac{\theta_0}{2}=\sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{15.125}$$



شکل 15.7: لمبائی جانب اخراجی قطار

لکھا جا سکتا ہے۔لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{15.126}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں $L \approx= nd$ لکھا گیا ہے۔پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{15.127}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 15.7 میں دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔اس کی پہلی صفر چوڑائی 52° جبکہ نصف طاقتی چوڑائی 34° ہے۔

جیسے مثال میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 15.69 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{15.128}$$

دیتا ہے۔

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $0.00177°$

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $6.46°$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم اکسائڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائڈ
	16	جرمینیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ربڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$