1 برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس[3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر کہتے ہیں۔ یوں

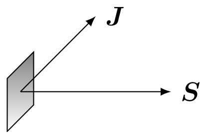
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

---

[1] continuity equation
[2] boundary conditions
[3] images
[4] dielectric
[5] polarization



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو[6] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

1021

1022 مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو
1023 اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

1024 حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

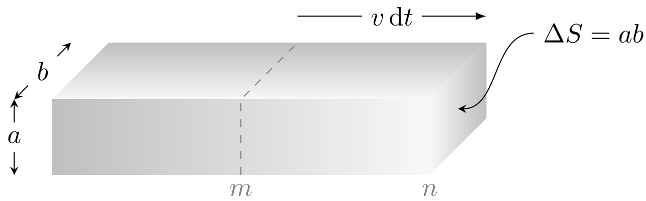
1025 حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں
1026 ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

1027

1028 اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{S}$ کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں چارج $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں

[6] current density



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{J}$ کثافت اتصالی رو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کر انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ چارج ہے۔ اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m^3}$ ہے میں حجمی کثافت چارج $3\,\mathrm{C/m^3}$ ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج $1\,\mathrm{C/m^3}$ رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

[7] convection current density

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ چارج خارج ہوتا ہے۔اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

1041

1042 اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

1043 لکھا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل چارج ہے۔

1044 مساوات 5.6 استمراری مساوات[8] کی تکمل شکل ہے۔آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 83 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h$$

اگر حجم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

1045 لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial t}$$

1046 لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[8] continuity equation

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔نہایت چھوٹی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

1047 حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

1048 پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی
1049 رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

1050 5.3 موصل

1051 غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا
1052 ہے۔موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت
1053 کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔$\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[9] کہتے ہیں۔رفتار بہاو کا دارومدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

1054 لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[10] کہتے ہیں۔حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔چونکہ $\boldsymbol{v}_d$ کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$
1055 کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہٰذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

---
[9] drift velocity
[10] mobility

مساوات 5.9 کو صفحہ 117 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e \mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ρ_e منفی مقدار ہے۔یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 5.11 میں $\boldsymbol{J}$ کو کثافت ایصالی برقی رو یا[11] ہے جبکہ σ کو موصلیت کا مستقل[12] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[13] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 483 پر جدول 16.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[14] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940 \, \mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5 \, \mathrm{g}$ ہیں۔اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[15] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940 \, \mathrm{kg}$ ہیں لہٰذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہٰذا $0.1 \, \mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \, \mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

ہو گی۔ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

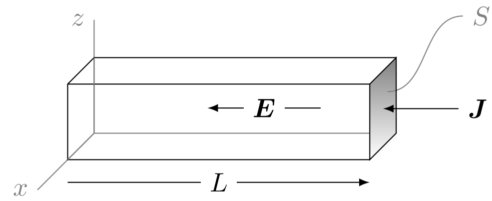
$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27 \, \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.004\,27 \, \frac{\mathrm{m^2 S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27 \, \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V s}}$ لکھا گیا ہے۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

---

[11] conduction current density
[12] conductivity
[13] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز ادارے کی بنیاد رکھی۔
[14] copper
[15] mole



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔اس رفتار[16] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً $300\,\mathrm{K}$ پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔امید ہی سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار[17] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔سلاخ کو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = -J\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائے جاتے ہیں۔یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = -\int_0^L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^L E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \int_0^L E\,\mathrm{d}y = E\int_0^L \mathrm{d}y = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھتے ہیں۔یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔برقی رو

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = JS$$

---

[16] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

[17] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R = \frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V = IR \tag{5.15}$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[18] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[19] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int\limits_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int\limits_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} = \frac{-\int\limits_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int\limits_S \sigma \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہٰذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61\,\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

---

[18] resistance
[19] ohm

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔(ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔(پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$، $3.82\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$ اور $2.55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 78 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3}$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہٰذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل[20] رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 16.1 اور جدول 16.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07\,\mu\text{s}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جا سکتا ہے۔اس لحاظ چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جا سکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

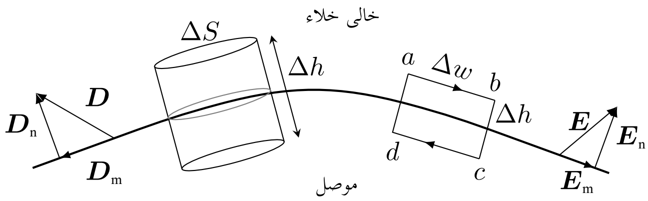
موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون[21] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \tag{5.17}$$

[20] time constant
[21] electrostatic



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر چارج سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کو $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔ آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت حاصل کریں۔ ہم $\boldsymbol{E}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ حاصل کریں گے۔ پہلے $\boldsymbol{E}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔ صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔ اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 0$ ہے۔ c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w + \left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

1114 کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔ اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{مماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2,-3,5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 210\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 350\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 99\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر E_m، E_n اور ρ_S حاصل کریں۔

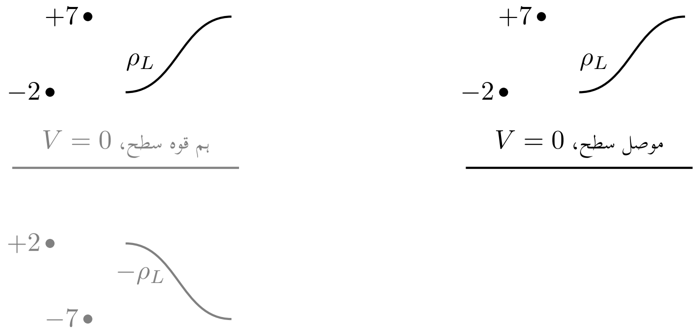
جوابات: 0، $420\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $3.71\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 107 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ چارج $Q+$ پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $\frac{d}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت چارج



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

کے نیچے منفی چارج $-Q$ رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس[22] کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لا محدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔لہٰذا لا محدود برقی زمین یا لا محدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔یاد رہے کہ کسی بھی لا محدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔عموماً مسئلے میں لا محدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لا محدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لا محدود موصل سطح $z=3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5\,\mu\text{C}$ کا عکس $-5\,\mu\text{C}$ لا محدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN}=-3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP}=-3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}+5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے۔یوں $5\,\mu\text{C}$ نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

[22] image

پیدا کرے گا۔اسی طرح $-5\,\mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{-} = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}-3\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}-3\boldsymbol{a}_{\text{Y}}+5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کل میدان

$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}} = \boldsymbol{E}_{+} + \boldsymbol{E}_{-} = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13\times10^{-9}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S = -14.3\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_{+}$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی $\boldsymbol{E}_{\text{کل}}$ ہو جاتی ہے۔در حقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

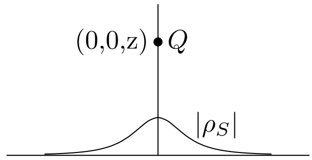
مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل:اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{+} &= \frac{Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \boldsymbol{E}_{-} &= \frac{-Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$\boldsymbol{D} = \frac{-2Qz\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{5.21}$$

1157 پایا جائے گا۔شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

1158

1159 مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جا سکتا ہے۔یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

1160 5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سلیکان اور جرمینیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ[23] سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔نیم موصل دوری جدول[24] کے چوتھے جماعت[25] سے تعلق رکھتے ہیں۔دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں انہیں عطا کنندہ[26] عناصر کہتے ہیں۔نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں المونیم کو قبول کنندہ[27] عنصر کہا جاتا ہے۔ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول[28] کہا جاتا ہے۔نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جا سکتی ہے۔اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کے رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

---

doping[23]
periodic table[24]
group[25]
donor[26]
acceptor[27]
hole[28]

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر خالص سلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہے۔جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ اور $0.17\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہیں۔خالص سلیکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

5.7 ذو برق

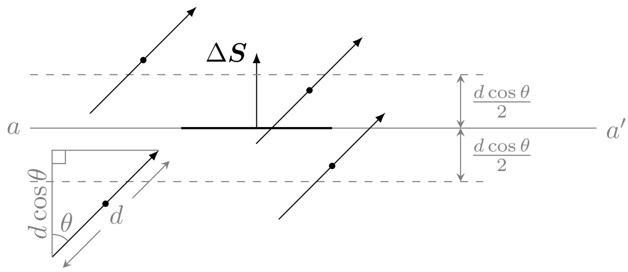
اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ایسے اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جا سکتی ہے۔آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے للہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ایسے مالیکیول کو قطبی[29] مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ایسے اشیاء کو غیر قطبی[30] کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا

---

[29] polar
[30] non polar



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ہے۔مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کی حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے ذو برقی[31] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج[32] کہتے ہیں۔اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 105 میں دئے مساوات 4.68

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔تقطیب[33] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔Δv کو کم سے کم[34] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P} = 0$ ہو گا۔ذو برق کے اندر تصوراتی سطح ΔS لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر

[31] dielectric
[32] bound charge
[33] polarization
[34] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔اسی طرح aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta \boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صفحہ 67 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0\boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے چارج $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

1197 حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} Q &= \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \\ Q_m &= \int_h \rho_m \,\mathrm{d}h \\ Q_{\text{کل}} &= \int_h \rho_{\text{کل}} \,\mathrm{d}h \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{P} &= -\rho_m \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho_{\text{کل}} \end{aligned}$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں با آسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جا سکے اسے آسان محور[35] یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔۔ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں سمتی[36] اشیاء کہلاتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال[37] کی خاصیت رکھتے ہیں۔ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ایسے اشیاء غیر سمتی[38] اشیاء کہلاتے ہیں۔انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.36}$$

---

[35] easy axis
[36] anisotropic
[37] ferroelectric
[38] isotropic

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

یا

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_R \epsilon_0 \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{5.37}$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ان کا تعلق

$$\chi_e = \epsilon_R - 1 \tag{5.39}$$

ہے۔

χ_e برقی اثر پذیری[39]، ϵ_R جزوی برقی مستقل[40] جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[41] کہلاتے ہیں۔اس کتاب کے آخر میں صفحہ 484 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 16.2 میں دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں[42] خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned}
D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\
D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\
D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z
\end{aligned} \tag{5.40}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل[43] کہا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔غیر سمتی اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔غیر سمتی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک غیر سمتی ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔برقی میدان $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = 4\sqrt{3}\epsilon_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{D} = 9\epsilon_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$

---

[39] electric susceptibility
[40] relative electric constant, relative permittivity
[41] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[42] non homogeneous
[43] tensor

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی غیر سمتی ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں $E = 5\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذو برق میں 6×10^{20} مالیکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26}\,\mathrm{C\,m}$ ہے۔

جوابات: $1.156\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$، $1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $7.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط[44] شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \to 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں

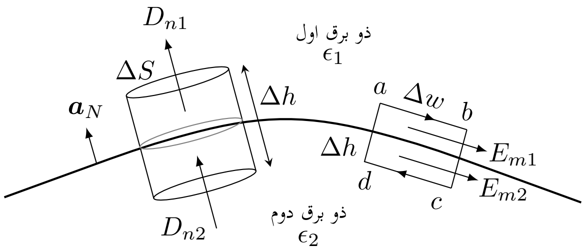
$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{5.41}$$

---

[44] boundary conditions



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{5.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.43}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{D}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\boldsymbol{D}_2\right) = 0 \tag{5.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ[45] ہوتا ہے۔اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاو جوڑ دار[46] ہوتا ہے۔یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاو میں سیڑھی نما[47] تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاؤس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{5.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{n1}\Delta S$$

[45] continuous
[46] discontinuous
[47] step

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور بیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ $\boldsymbol{D}_{n2}$ اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D_{n2}\Delta S$$

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے نلکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{5.46}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{5.47}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\epsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \epsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \rho_S \tag{5.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید چارج کا حساب رکھا جاتا ہے۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برق کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔ انجنیئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.49}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

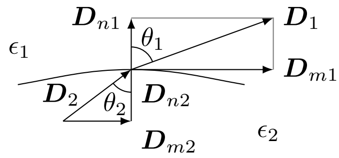
$$\epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} \tag{5.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائی جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار[48] ہے۔ اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$\begin{aligned}
D_{m1} &= D_1 \sin\theta_1 \\
D_{n1} &= D_1 \cos\theta_1 \\
D_{m2} &= D_2 \sin\theta_2 \\
D_{n2} &= D_2 \cos\theta_2
\end{aligned}$$

[48] discontinuous



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos\theta_1}{D_2 \cos\theta_2} = 1$$
$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔انہیں

$$\begin{aligned} D_1 \cos\theta_1 &= D_2 \cos\theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{5.51}$$

لکھ سکتے ہیں۔ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2}$$

جس سے

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ ہوتا ہے لہٰذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہٰذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2\theta_1 &= D_2^2 \cos^2\theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin\theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2\theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \tag{5.53}$$

ملتا ہے۔چونکہ $E=\frac{D}{\epsilon}$ ہے لٰہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned}E_2=\frac{D_2}{\epsilon_2}&=\frac{D_1}{\epsilon_2}\sqrt{\cos^2\theta_1+\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2\sin^2\theta_1}\\&=\frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2}\sqrt{\cos^2\theta_1+\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2\sin^2\theta_1}\end{aligned}$$

یعنی

$$E_2=E_1\sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1} \tag{5.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1=\theta_2=0$ ہوں جس صورت میں $D_2=D_1$ ہوتا ہے۔اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1=\theta_2=90$ ہوں جس صورت میں $E_2=E_1$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برق کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھی۔موصل میں $\boldsymbol{E}=0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برق میں $E_m=0$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $0=\frac{E_m}{\epsilon}=D_m$ ہو گا۔

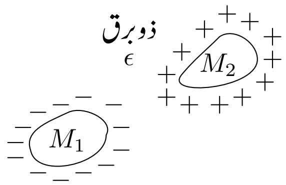
اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S\Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاو $D_n\Delta S$ پیدا کرے گا۔یوں $D_n=\rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n=\frac{D_n}{\epsilon}=\frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned}D_m&=E_m=0\\D_n&=\epsilon E_n=\rho_S\end{aligned} \tag{5.55}$$

5.10 کپیسٹر

شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لٰہذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔



شکل 5.10: کپیسٹنس کی تعریف۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاو کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاو کا دخول ہو گا۔یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی۔$\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہٰذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

کپیسٹنس[49] C کی تعریف

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{5.56}$$

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباو V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو تکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں صفحہ 67 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 91 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کپیسٹنس کی عمومی مساوات

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{-\int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}} \tag{5.57}$$

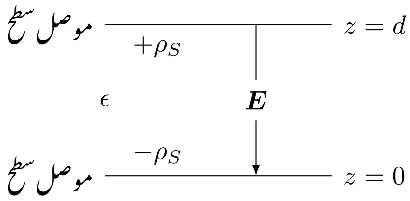
لکھی جا سکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاو بھی دگنی ہو جائے گی۔یوں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباو بھی دگنا ہو گا۔اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباو ایک بار پھر وہی کپیسٹنس دے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کپیسٹنس کی قیمت کا دارومدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کپیسٹنس کی اکائی فیراڈ[50] ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ[51] کے برابر ہے۔ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور کپیسٹنس کو مائیکرو فیراڈ µF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

---

[49] capacitance
[50] Farad
[51] یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔



شکل 5.11: متوازی چادر کپیسٹر۔

1258 ### 5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ نچلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔ اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔ دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 52 پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔ یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\rho_S}{\epsilon}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

1259 ہو گی۔ میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔ مثبت سطح سے خارج برقی بہاو کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے
1260 جبکہ منفی چادر پر برقی بہاو داخل ہوتا ہے لہٰذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہو گا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = -\int_0^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\epsilon} \cdot \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon}\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباو ہو گا۔ لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہو گا۔ حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہو گا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{5.58}$$

1261 ہو گی۔ کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے[52] کو ہم نے نظرانداز کیا ہے۔ کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا
1262 کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے
1263 ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جا سکتی ہے۔

1264 بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ ابرق کپیسٹر[53] انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے
1265 دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا[54] کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

---

[52] fringing
[53] mica capacitor
[54] deposit

1266 مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار
1267 کیا گیا۔اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 16.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1\,\mathrm{pF}$$

1268 حاصل ہوتا ہے۔

1269

1270 5.10.2 ہم محوری کپیسٹر

صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباو دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔اس طرح اتنی تار کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{5.59}$$

1271 ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

1272 5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_A < r_B$ ہے۔اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r_B < r$ پر میدان صفر ہو گا۔دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدد کے مرکز پر نقطہ چارج $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباو صفحہ 93 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان سطحوں کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \tag{5.60}$$

1273 ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔ اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \qquad \text{کرہ کی کپیسٹنس} \tag{5.61}$$

1274 حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔ یہ مساوات رداس R کرہ کی کپیسٹنس دیتا ہے۔ یاد رہے کہ اس کپیسٹر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

1275

1276 مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔ بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔ خالی خلاء میں موصل بلور کی کپیسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5\times 10^{-2}}{9\times 10^{9}} = 0.55\,\mathrm{pF}$$

1277

---

r_A رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چڑھانے سے $\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی بدولت

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r > r_1) \end{cases}$$

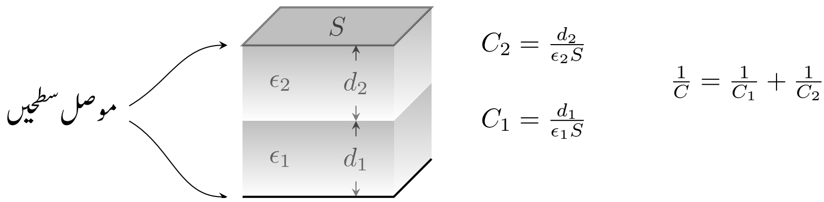
ہو گا۔ برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباو

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned}$$

ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.62}$$

1278 حاصل ہوتی ہے۔



شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

1279 ## 5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہو گا۔یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q = \rho_S S$ ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

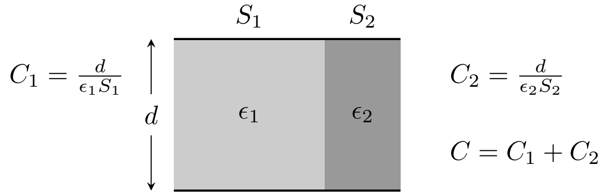
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.63}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned} \tag{5.64}$$

1280 کے برابر ہیں۔یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔

1281 آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جا سکتے ہیں۔انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور
1282 کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$C=C_1+C_2 \tag{5.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہٰذا نچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E=\frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقہ مستقل کے ذو برق میں $D_1=\epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2=\epsilon_2 E$ ہوں گے۔D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1=D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2=D_2$ ہو گا۔یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q=\rho_1 S_1+\rho_2 S_2=\epsilon_1\frac{V_0}{d}S_1+\epsilon_2\frac{V_0}{d}S_2$$

سے کپیسٹنس

$$C=\frac{Q}{V_0}=\frac{\epsilon_1 S_1}{d}+\frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$C=C_1+C_2 \tag{5.66}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1&=\frac{\epsilon_1 S_1}{d}\\ C_2&=\frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned} \tag{5.67}$$

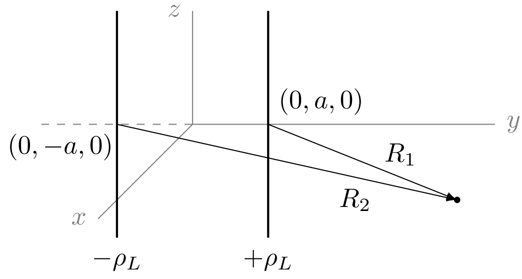
1283 کے برابر ہیں۔

1284 5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

1285 شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ہم قوہ تار کی طرح
1286 دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو $(0,a,0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت $+\rho_L$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0,-a,0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت $-\rho_L$ پایا جاتا ہے۔z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو صفحہ 94 پر مساوات 4.16

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1}$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1} - \ln\frac{R_{20}}{R_2}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کرلے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہو گا لہٰذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\boldsymbol{R}_1 = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y-a)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$
$$\boldsymbol{R}_2 = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y+a)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

میں لکھتے ہوئے

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\sqrt{\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.68}$$

یا

$$e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.69}$$

1287 لکھا جا سکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباو مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں

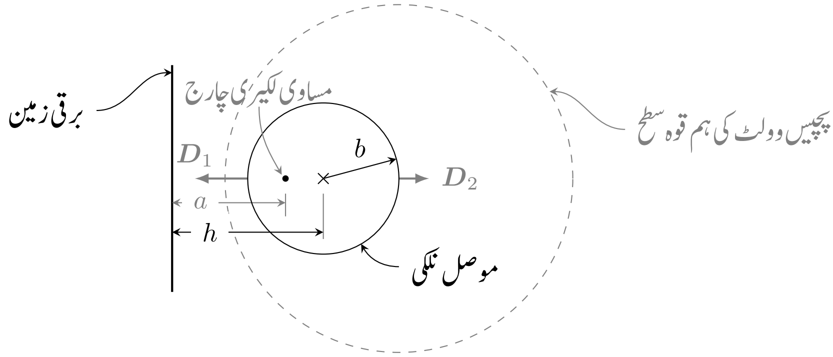
$$K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}} \tag{5.70}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay\frac{K_1+1}{K_1-1} = -a^2$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب $a^2 \frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$x^2 + \left[y - a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2 \tag{5.71}$$

لکھا جا سکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $[0, \frac{a(K_1+1)}{K_1-1}]$ پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نلکی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.71 میں

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1} \\ h &= a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right) \end{aligned} \tag{5.72}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$x^2 + (y-h)^2 = b^2 \tag{5.73}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گیں جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہو گا۔ ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباو $V_2, V_3, \cdots$ کے لئے $K_2, K_3, \cdots$ حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباو کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نلکی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے a، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{h^2 - b^2} \\ K_1 &= \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.74}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے

$$V_1=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$$

1294 حاصل ہوتا ہے۔چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نلکی V_1 وولٹ پر ہے لہٰذا ان کے درمیان V_1 برقی دباو ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے L لمبائی پر کل چارج $Q=\rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نلکی پر یہی $Q=\rho_L L$ چارج ہو گا۔یوں L لمبائی کے موصل نلکی اور زمین کے درمیان

$$C=\frac{Q}{V_1}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1}\frac{h}{b}} \tag{5.75}$$

1295 کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $h\gg b$ ہو گا لہٰذا مساوات 5.75

$$C=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{2h}{b}}\quad h\gg b \tag{5.76}$$

1296 صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت
1297 تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔

1298 کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔آئیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

1299

1300 مثال 5.10: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباو
1301 ہے۔

- 1302 نلکی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- 1303 ایک میٹر لمبائی کے لئے نلکی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔
- 1304 پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- 1305 زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو بہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- 1306 نلکی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

1307 حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h=10$ جبکہ $b=5$ ہیں لہٰذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{10^2-5^2} = 8.66\,\mathrm{m} \\
K_1 &= \left(\frac{10+\sqrt{10^2-5^2}}{5}\right)^2 = 13.92
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$
\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9\times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}
$$

1308 حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.75 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$
C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11\times 10^{-9}\times 1}{50} = 4.22\,\mathrm{nF}
$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$
K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9\times 10^9\times 2.11\times 10^{-9}}} = 3.73
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2\times 8.66\times\sqrt{3.73}}{3.73-1} = 12.25\,\mathrm{m} \\
h &= 8.66\times\left(\frac{3.73+1}{3.73-1}\right) = 15\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

1309 حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے
1310 نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- 1311 برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- 1312 کسی بھی جگہ $\boldsymbol{E}$ کو مساوات 5.68

$$
V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(x^2+(y+a)^2) - \ln(x^2+(y-a)^2)\right]
$$

کے ڈھلوان $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس سے

$$
\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = -\epsilon_0\nabla V = -\epsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)
$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2x}{x^2+(y-a)^2}\right] \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right]
\end{aligned}
$$

1313 کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر $\boldsymbol{D}$ عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے للذا ہم موصل نلکی پر برقی زمین کے قریبی جانب $\boldsymbol{D}_1$ اور اس سے دور جانب $\boldsymbol{D}_2$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے نلکی کا قریبی فاصلہ $h-b=5\,\mathrm{m}$ ہے۔یوں $x=0$ اور $y=5$ ہو گا جس سے

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(5+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(5-8.66)^2}\right]=0\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(5+8.66)}{0^2+(5+8.66)^2}-\frac{2(5-8.66)}{0^2+(5-8.66)^2}\right]=\frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$
\boldsymbol{D}_1=-\frac{0.693\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}
$$

ہو گا۔زمین سے دور نلکی پر $x=0$ اور $y=h+b=10+5=15\,\mathrm{m}$ ہیں جس سے

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=0\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(15+8.66)}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2(15-8.66)}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=-\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

یا

$$
\boldsymbol{D}_2=\frac{0.231\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}
$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاو کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔یوں موصل نلکی پر

$$
\begin{aligned}
\rho_{S\,\text{قریبی}} &= \frac{0.693\rho_L}{4\pi}\\
\rho_{S\,\text{دور}} &= \frac{0.231\rho_L}{4\pi}
\end{aligned}
$$

1314 پایا جائے گا۔یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج
1315 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب ہے۔دونوں جانب اخراج ہی ہے للذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

1316

1317 اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نلکی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر
1318 $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہو۔ نلکی سے پیدا ہم قوہ سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

1319

1320 مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

1321

سوالات

سوال 5.1: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times26}$

سوال 5.2: لامحدود موصل زمینی سطح $z=0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-112\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times884}$

سوال 5.3: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z=0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 5.4: مشق 5.3 میں $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر سلیکان اور جرمینیم کے مستقل دیئے گئے ہیں۔ اگر سلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سلیکان کی موصلیت کیا ہو گی۔ سلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دیئے خالص سلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 5.5: صفحہ 129 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 5.6: صفحہ 120 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 5.7: مساوات 5.75 میں $\cosh^{-1}\frac{h}{b} = \ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔

سوال 5.8: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$

1349 # باب 6

1350 # پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

1351 حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

1352 ہو گا۔

[1] homogeneous
[2] Poisson equation

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جا سکتیں ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پائی جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظرانداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

1369 6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔صفحہ 111 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int\limits_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \int\limits_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h + \int\limits_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int\limits_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \oint\limits_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int\limits_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h = 0$$

1370 حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہے ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

1371 کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$V_1 = V_2 \tag{6.9}$$

1372 ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

1373 مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا
1374 اتریں گے لہٰذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی
1375 $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

1376 مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو
1377 مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

1378 6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

1379 بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

[5] linear

1380 6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 102 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

1381 لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \qquad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

1382 حاصل کی جا سکتی ہے۔

1383

1384 مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

1385

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔درحقیقت ایسا نہیں ہے۔کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔A اور B دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$
$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A=\frac{V_1-V_2}{x_1-x_2}$$
$$B=\frac{V_2x_1-V_1x_2}{x_1-x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V=\left(\frac{V_1-V_2}{x_1-x_2}\right)x+\frac{V_2x_1-V_1x_2}{x_1-x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x=0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V=\frac{V_0x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C=\frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کے سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ اور $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S=D_n\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S=D_n$ ہو گا۔مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر چارج بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔
- کپیسٹنس $C=\frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V=\frac{V_0x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

اور

$$\boldsymbol{D} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}\bigg|_{x=d} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

کے برابر ہے۔چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔یوں

$$\rho_S = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 142 پر مساوات 5.58 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V=A\ln\rho+B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho=b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho=a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

1422 حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین
1423 کہتے آ رہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n=D\bigg|_{\rho=a}=\frac{\epsilon V_0}{a\ln\frac{b}{a}}$$
$$Q=\frac{\epsilon V_0 2\pi aL}{a\ln\frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

1424 حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 143 پر مساوات 5.59 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.22}$$

1425 لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

1426

1427

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چھڑاتے ہیں۔یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \qquad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے

$$\boldsymbol{E} = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

1428 حاصل ہوتا ہے۔ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

[6] undefined

مثال 6.4: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔اگر $r \neq 0$ اور $\sin\theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔اس کے پہلی بار تکمل سے

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = \frac{A \, \mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V = A \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} + B = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\frac{\pi}{2} < \theta_0$ ہے تب ہمیں

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا چارج کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی نا کہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کیا جا سکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سیلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سیلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سیلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n

---

[7] silicon
[8] diode

قسم کا ہے۔مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ ازخود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔آئیں اس چارج کثافت کے لئے پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tag{6.33}$$

[9] free holes
[10] free electrons
[11] diffusion

کے برابر ہے۔دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x\to+\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں کل مثبت چارج

$$Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \, \mathrm{d}x = 2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

سے

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

[12] cross sectional area

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{6.38}$$

صورت اختیار کرے گا۔تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ایسا ہی ایک سادہ حل $V=x+y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V=G(x)+H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ہم $V=x+y$ کو $V=V_1+V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}V_1&=X_1(x)Y_1(y)=1x\\V_2&=X_2(x)Y_2(y)=1y\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y)=1$ اور $X_2(x)=1$ کے برابر ہیں۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x+y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V=x+y$ جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V=G(x)+H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔اگر $V=XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)+X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔m^2 کو علیحدگی مستقل[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}&=m^2\\\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}&=-m^2\end{aligned}$$

---

separation constant[13]

یا

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) = 0 \\
\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) = 0
\end{aligned} \tag{6.41}
$$

1470 کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C \cos my + D \sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right) \left(C \cos my + D \sin my\right) \tag{6.44}$$

1471 لکھا جائے گا۔

1472 آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے
1473 جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

[14] power series

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=0+0+2\times 1a_2+3\times 2a_3x^1+4\times 3a_4x^2+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2\times 1a_2+3\times 2a_3x^1+4\times 3a_4x^2+\cdots=m^2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)$$

جہاں ہم m^2X کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned}
2\times 1a_2&=m^2a_0\\
3\times 2a_3&=m^2a_1\\
4\times 3a_4&=m^2a_2
\end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=m^2a_n$$

ہوں۔جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{m^2}{2\times 1}a_0\\
a_4&=\frac{m^2}{4\times 3}a_2=\left(\frac{m^2}{4\times 3}\right)\left(\frac{m^2}{2\times 1}a_0\right)=\frac{m^4}{m!}a_0\\
a_6&=\frac{m^6}{6!}a_0
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n=\frac{m^n}{n!}a_0 \qquad (\text{جفت } n)$$

لکھا جا سکتا ہے۔طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$\begin{aligned}
a_3&=\frac{m^2}{3\times 2}a_1=\frac{m^3}{3!}\frac{a_1}{m}\\
a_5&=\frac{m^5}{5!}\frac{a_1}{m}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n=\frac{m^n}{n!}\frac{a_1}{m} \qquad (\text{طاق } n)$$

لکھی جا سکتی ہے۔انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X=a_0\sum_{0,\text{جفت}}^{\infty}\frac{m^n}{n!}x^n+\frac{a_1}{m}\sum_{1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{m^n}{n!}x^n$$

---

[15] coefficient

یا

$$X = a_0 \sum_{0,\text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0,\text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \cdots$$

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \cdots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

1474 لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

1475 بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$Y = C \cos my + D \sin my \tag{6.47}$$

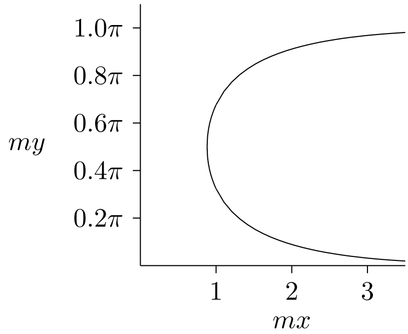
لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx)\,(C \cos my + D \sin my) \tag{6.48}$$

یا

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right)\,(C \cos my + D \sin my) \tag{6.49}$$

1476 حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)$$

ہے لہٰذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y = 0$، $y = \frac{\pi}{m}$، $\frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

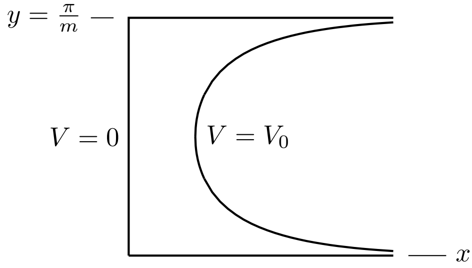
یا

$$my = \sin^{-1}\frac{1}{\sinh mx}$$

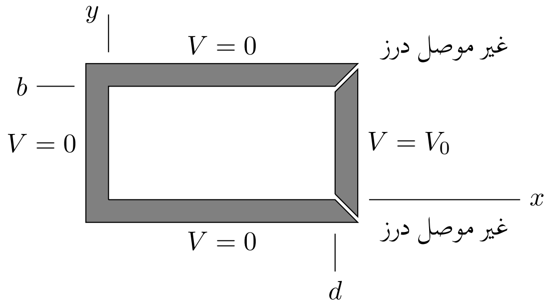
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔یہ سطحیں z سمت میں لا محدود لمبائی رکھتی ہیں۔سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔$x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔انس درز کے اثر کو نظرانداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right) \\
0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔$y = 0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= B\sinh mx\,(C\cos 0 + D\sin 0) \\
0 &= BC\sinh mx
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔اب چونکہ $A = 0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD\sinh mx\sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔ 1491

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 \qquad (0 < y < b) \\ V &= -V_0 \qquad (b < y < 2b) \end{aligned}$$

---

[16] Fourier series

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y + \int_b^{2b}(-V_0)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\right]$$

سے

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \\ c_n &= 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh\frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$V = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\sinh\frac{n\pi d}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل:ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

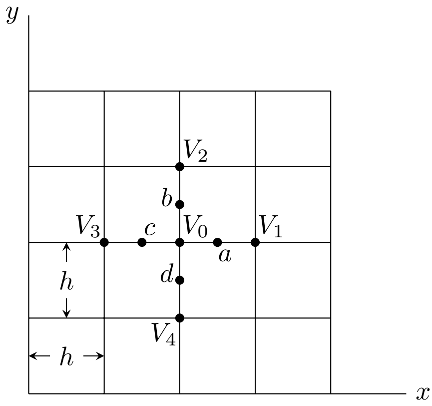
$$\begin{aligned} V &= \frac{4\times 90}{\pi}\left(\frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sinh\frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\frac{\sinh\frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi}\sin\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4\times 90}{\pi}(0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

[17] numerical iteration



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

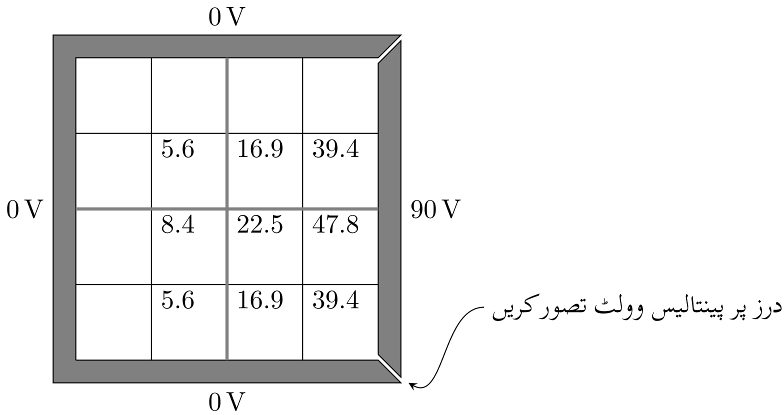
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

بھی لکھ سکتے ہیں۔ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\doteq\frac{V_1+V_2+V_3+V_4-4V_0}{h^2}=0$$

سے

$$V_0\doteq\frac{V_1+V_2+V_3+V_4}{4} \tag{6.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

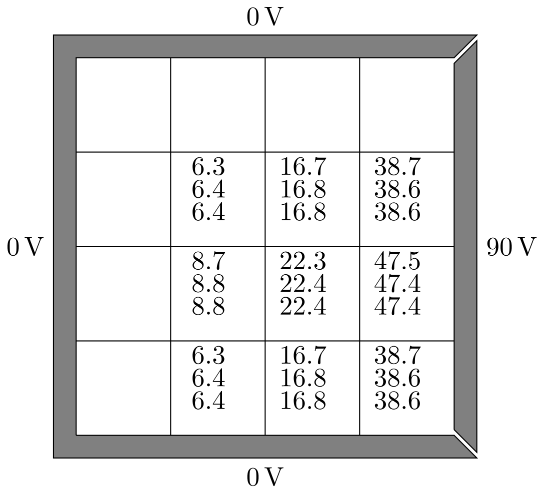
عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کی جاتی ہے حتٰی کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V=\frac{45+45+0+0}{4}=22.5\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔



شکل 6.6: چار بار دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔یہی اصل جواب ہیں۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V = \frac{22.5 + 0 + 0 + 0}{4} = 5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\frac{90 + 39.4 + 22.5 + 39.4}{4} &= 47.8\,\mathrm{V}\\
\frac{39.4 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} &= 16.9\,\mathrm{V}\\
\frac{22.5 + 5.6 + 0 + 5.6}{4} &= 8.4\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب $39.4\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{90+0+16.9+47.8}{4}=38.7\,\mathrm{V}$$

ہو جائے گی۔اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔یوں $47.8\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{90+38.7+22.5+38.7}{4}=47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔یہاں اوپر $16.9\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو $22.4\,\mathrm{V}$ حاصل ہوا ہے۔مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے $22.5\,\mathrm{V}$ حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جا سکے۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چننے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

سوالات

سوال 6.1: صفحہ 159 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 6.2: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 6.3: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 6.4: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 6.5: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 6.6: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 6.7: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 6.8: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V