برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری[1] کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد[2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

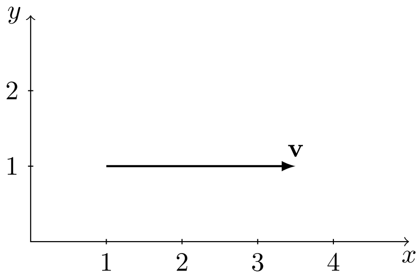
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[3] کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔ قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع سمتیہ کی مثالیں ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، . . . یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، . . . سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightarrow{F}$ لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

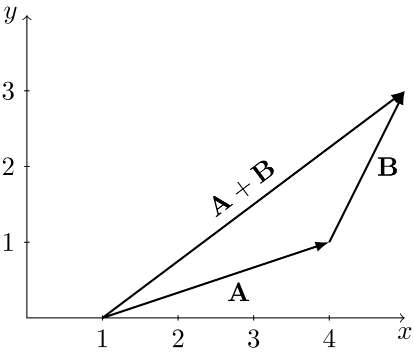
شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

---

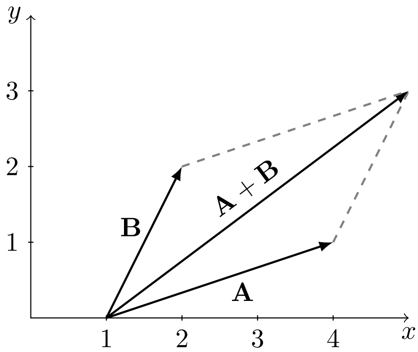
[1] scalar
[2] Cartesian coordinates
[3] vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

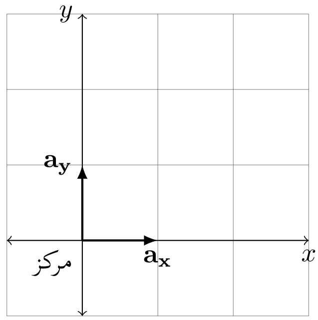
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{1.1}$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

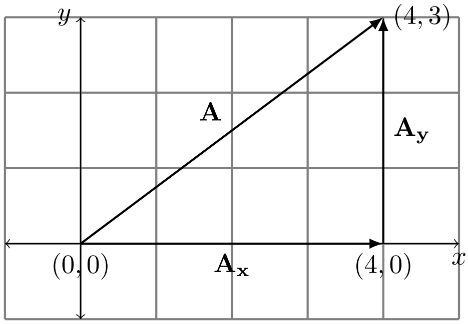
سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ کو $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے بر عکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ا) اکائی سمتیہ



(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 0$ ہو۔

ہم سمتی میدان کے متغیرات کو آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر ہم سمتی میدان کی بات نہ کر رہے ہوں تب ہم مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لے سکتے ہیں۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

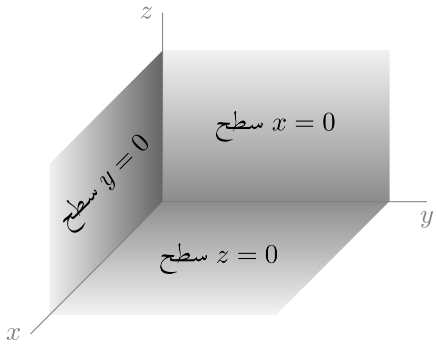
1.3 کارتیسی محدد

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

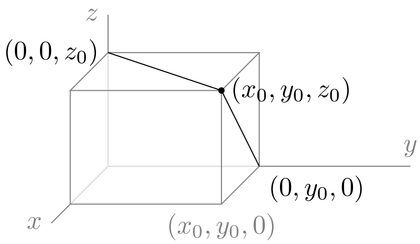
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y=0$ سطح اور $x=0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0,y_0,z_0) لکھا جا سکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,0,0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,y_0,0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0,0,0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0,y_0,0)$ اور z محدد پر عمود $(0,0,z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0,y_0,z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z=0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x=0$ ہو جائے تو نقطہ $(0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0,y_0,z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x=0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z=0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0,y_0,0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x=x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x=x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x=x_0,\quad y\le|\mp\infty|,\quad z\le|\mp\infty|$$

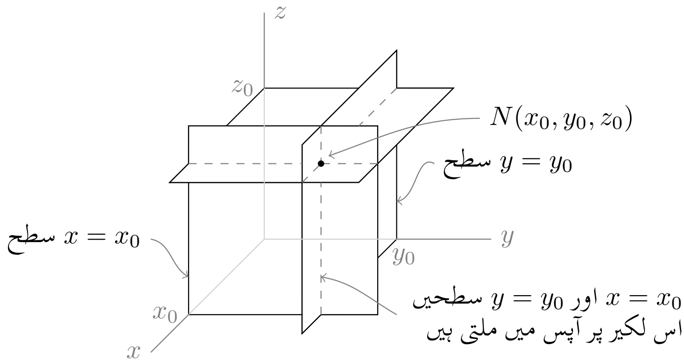
لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y=y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z\le|\mp\infty|$$

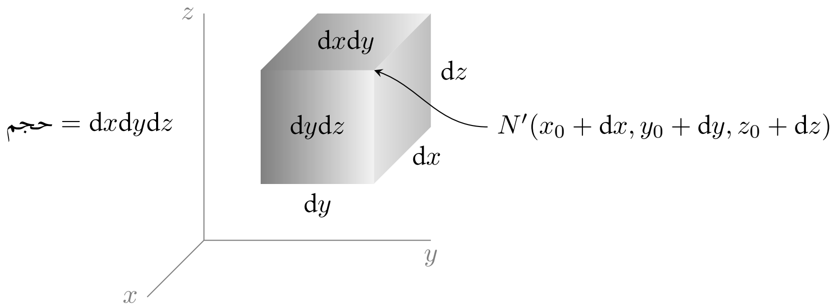
لکھی جا سکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z=z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0,y_0,z_0)$ پر آپس کو چھوئینگے۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

---

[8] coordinates
[9] three dimensional
[10] coplanar



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ ہے۔

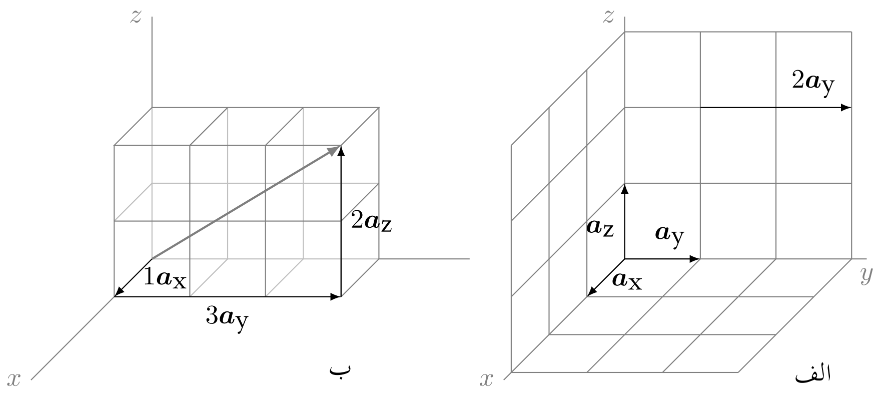
کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.3}$$

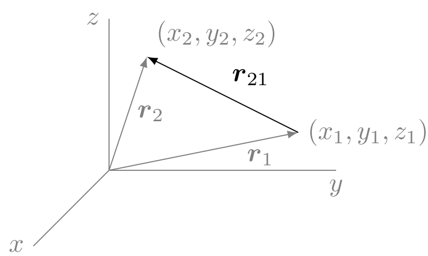
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



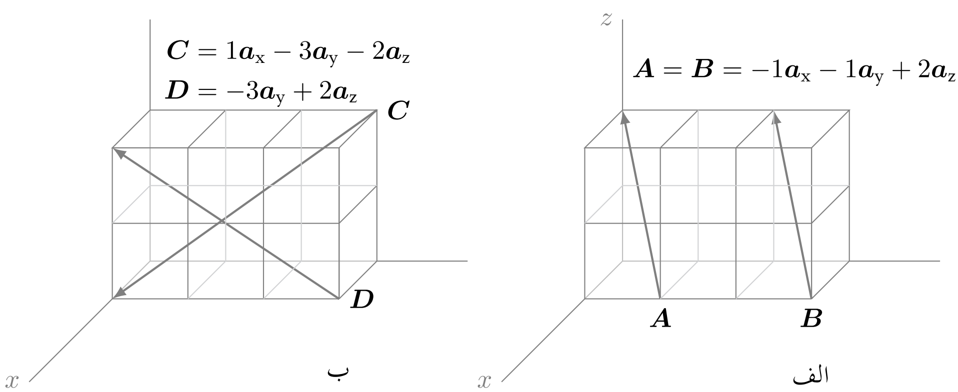
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



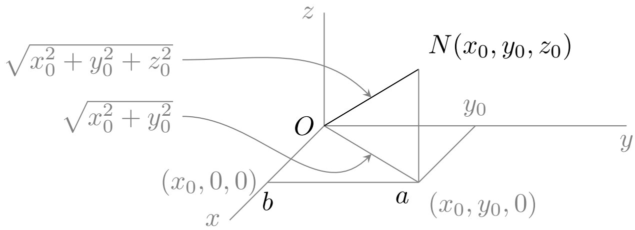
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی دُم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

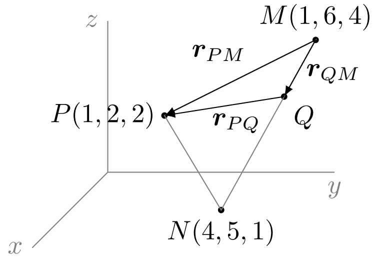
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔ شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جانب تین قدم اور آخر کار $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جایا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5,2,-1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (5-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (1-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہے۔M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $\left|\boldsymbol{r}_{QM}\right| = \frac{1}{3}\left|\boldsymbol{r}_{NM}\right|$ کے برابر ہے۔یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

ہو گا۔M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\\ &= -4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM}\\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\\ &= -1\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\end{aligned}$$

ہو گا۔Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\text{y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 4\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 12\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

1.5 میدانی سمتیہ

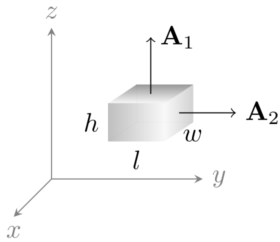
لکھنا ہے

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔

[13] vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos \theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔ بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

---

[14] scalar product
[15] dot product
[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $j = i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cdot(B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔

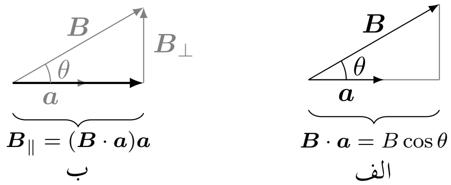
حل: مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ حاصل کئے گئے۔ $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2+1^2+3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\boldsymbol{r}_{NM}\cdot\boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

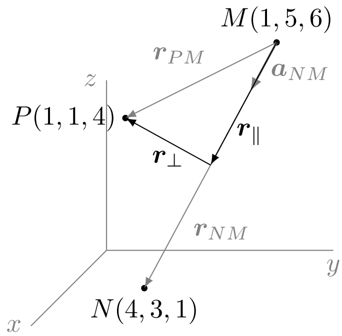
کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_\|$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_\|$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_\|\boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_\perp$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$\begin{aligned}
r_\| &= \boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM} = (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right)\\
&= \frac{0+8+10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}}
\end{aligned}$$

[17] $B_\|$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$$

ہے۔$\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})\\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{19}\end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{r}_{\perp} = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) \cdot \left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_Q = (1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18] displacement vector

حل:نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں للٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_\text{z} \cdot [x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10} = z_0\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے للٰذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z_0\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

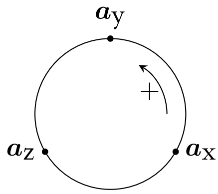
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta_{AB} \boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0=0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\
&\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=0 &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=0 &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گا۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\times(B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\
&=A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
&\quad+A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
&\quad+A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہوں تب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 14\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 0$$

لکھ کر

$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

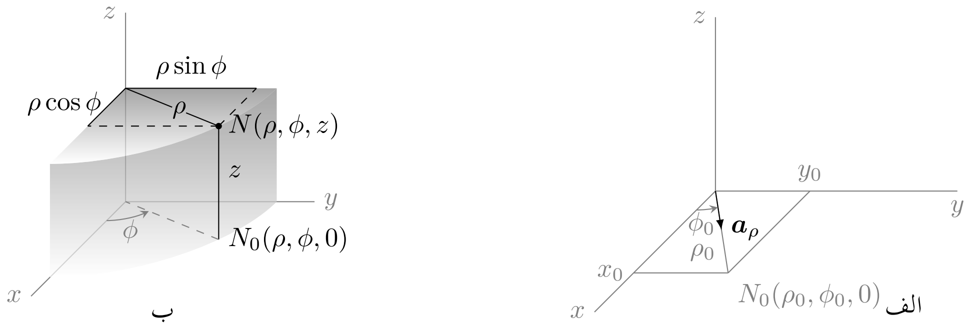
$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مخفف 27، -15 اور 18 ہوتے ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $\boldsymbol{A}=1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B}=5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B\times\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\times(\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\times\boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z=0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0,y_0,0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0,\phi_0,0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔اگر $z=0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho}=\rho_0\boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi=\phi_0, \quad z=0) \tag{1.20}$$

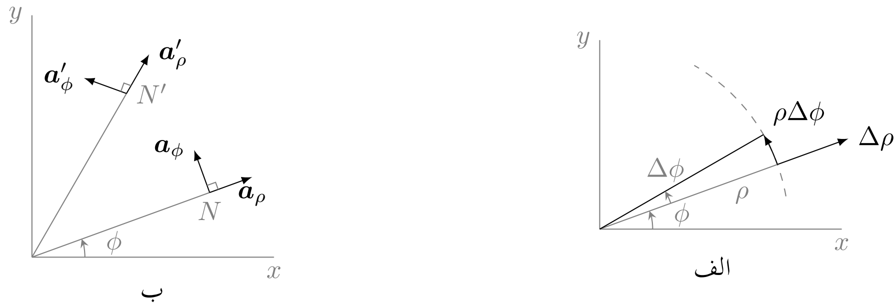
لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ,ϕ,z) سے کارتیسی متغیرات (x,y,z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\phi\\ y&=\rho\sin\phi\\ z&=z \end{aligned} \tag{1.21}$$

---

[22] cylindrical coordinate system



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.22}$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

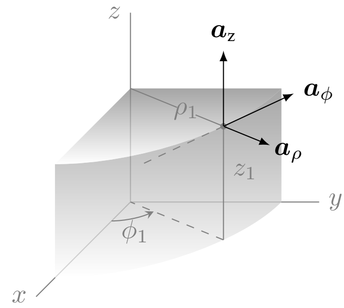
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1.23}$$

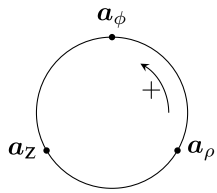
لکھا جا سکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \tag{1.24}$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لٰہذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

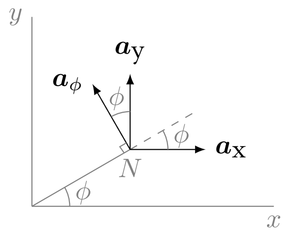
$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

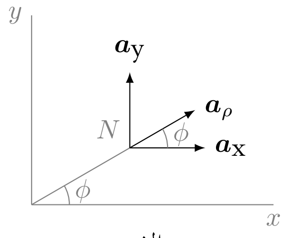
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_{\rho}$، $\boldsymbol{a}'_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے۔



ب



الف

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

	$\boldsymbol{a}_{\text{x}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$
$\boldsymbol{a}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\boldsymbol{a}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$	0	0	1

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\phi$، $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

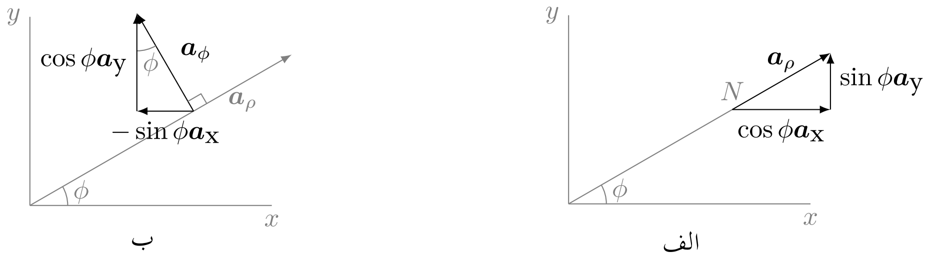
$$\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\rho &= \cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\text{y}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{y}} \end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{y}} \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{y}} \end{aligned} \tag{1.34}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_\phi$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\text{X}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\text{y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\ &= A_\rho\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_x \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_y \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\rho \\
\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

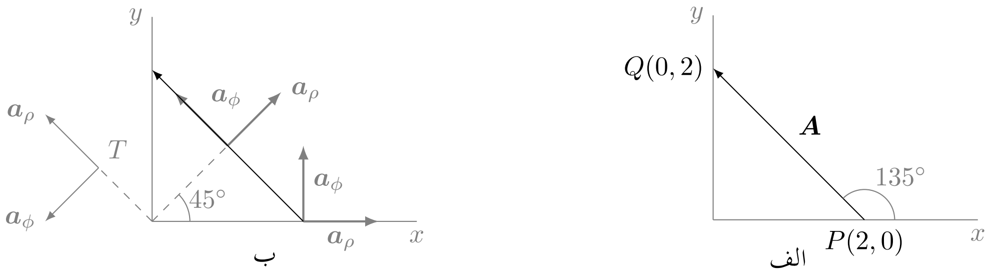
$$\begin{aligned}
A_x &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi \\
A_y &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi \\
A_z &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0
\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

مشق 1.5: a_x، a_y اور a_z کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ A دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_\text{x} + 2\boldsymbol{a}_\text{y} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_\text{x}+2\boldsymbol{a}_\text{y})\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{x}+2\boldsymbol{a}_\text{y})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{x}+2\boldsymbol{a}_\text{y}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi\\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{x}+2\boldsymbol{a}_\text{y}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi
\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi+\sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi+\cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi+\sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi+\cos\phi)^2}\\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi+\sin^2\phi-2\cos\phi\sin\phi)+4(\cos^2\phi+\sin^2\phi+2\cos\phi\sin\phi)}\\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}\\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi = 0^\circ$، $\phi = 45^\circ$ اور $\phi = 135^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi = 0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ + \sin 0^\circ)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 0^\circ + \cos 0^\circ)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= -2\boldsymbol{a}_\rho + 2\boldsymbol{a}_\phi\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 0^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi = 0^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi = 45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

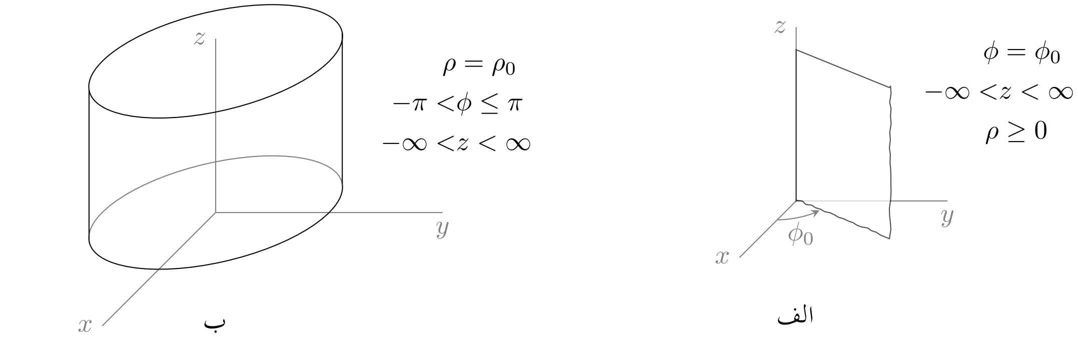
آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned}$$

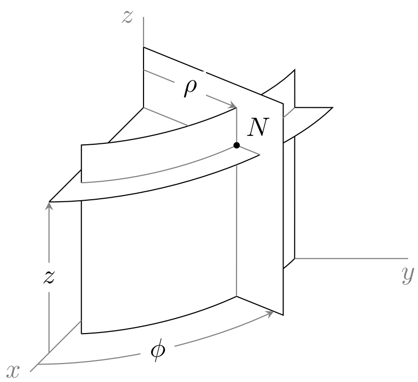
حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

شکل 1.24-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن



شکل 1.24: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.25: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

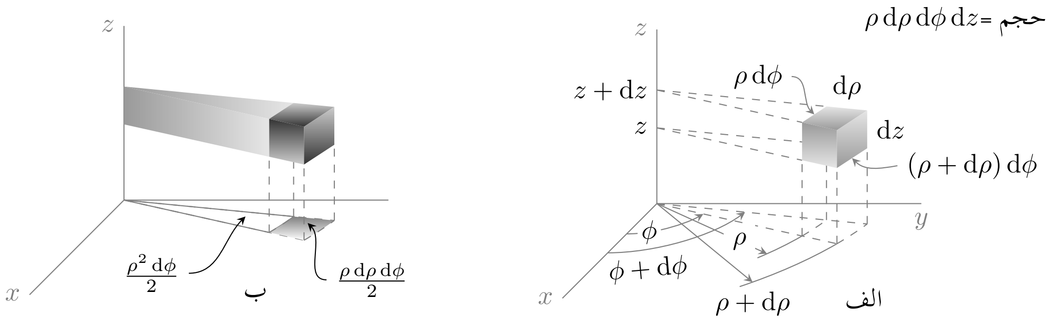
ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔ یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[23] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔ نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.25 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_z$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جیسے شکل 1.26-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_z$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + \mathrm{d}\rho)\,\mathrm{d}\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.26-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + \mathrm{d}\rho$

[23] حقیقت میں منفی حد -180° کو نہیں چھوتا۔ اگر منفی حد -180° کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.26: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ $\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔ یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔ یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho}$ ہو گی۔ $\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[24] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.26 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔ یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.26-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

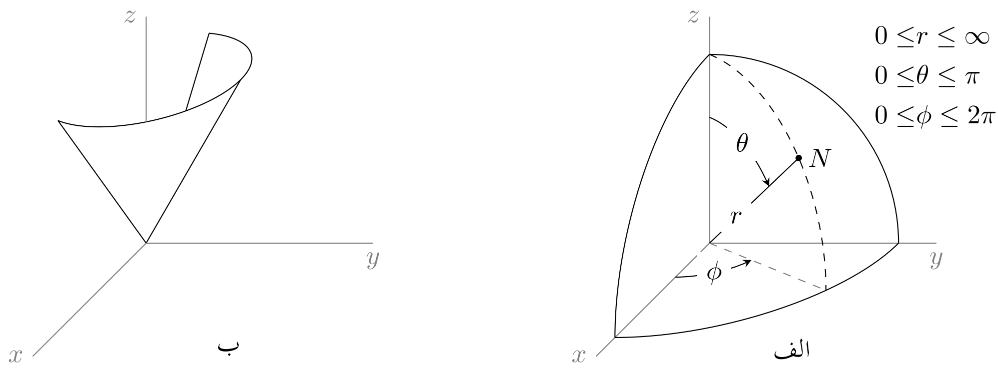
$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.42}$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

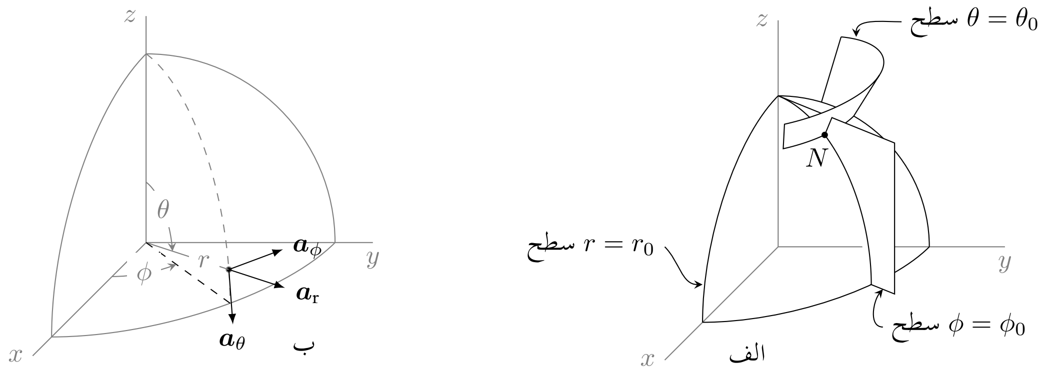
1.10 کروی محدد

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[24] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.27: الف کروی محدد کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



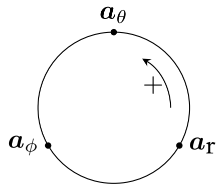
شکل 1.28: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.27-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $0 \le r$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.27-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[25] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[26] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.27-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.27-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[27] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.28-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین

longitude[25]
latitude[26]
cone[27]



شکل 1.29: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکھٹے ملتی ہیں۔

شکل 1.28-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.28-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.29 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi, \quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 1, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1 \tag{1.44}$$

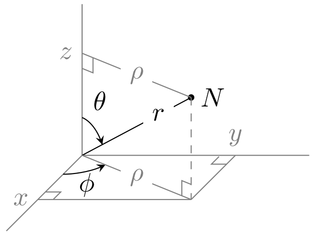
اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 0, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 0 \tag{1.45}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔اسے شکل 1.30 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r\sin\theta$ کے برابر ہے۔اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔$\rho = r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.46}$$



شکل 1.30: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔

شکل 1.31: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.46 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1.47}$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.46 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.46 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.50}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48، مساوات 1.49 اور مساوات 1.50 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.28-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.31-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = A_\rho \boldsymbol{a}_\rho + A_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.31-الف میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\theta \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.53}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.52 کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.54 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.28-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.31-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.28-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.31-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta = B_\rho\boldsymbol{a}_\rho - B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \cos\theta \\
B_z &= \sin\theta
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.56}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.57}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.56 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.58}$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_ϕ	a_ρ	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	a_r
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	a_θ
0	1	0	a_ϕ

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	a_r
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	a_θ
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	a_ϕ

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات a_θ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_θ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_\theta = A = A_x a_X + A_y a_Y + A_z a_Z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_X \cdot a_\theta$ جبکہ $A_y = a_Y \cdot a_\theta$ اور $A_z = a_Z \cdot a_\theta$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.58 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$a_\theta = \cos\theta\cos\phi a_X + \cos\theta\sin\phi a_Y - \sin\theta a_Z \tag{1.59}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا a_ϕ اور نلکی محدد کا a_ϕ یکساں ہیں۔ اسے کارتیسی نظام میں

$$a_\phi = -\sin\phi a_X + \cos\phi a_Y \tag{1.60}$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا a_X، a_Y اور a_Z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_\phi \cdot a_X &= -\sin\phi \\ a_\phi \cdot a_Y &= \cos\phi \\ a_\phi \cdot a_Z &= 0 \end{aligned} \tag{1.61}$$

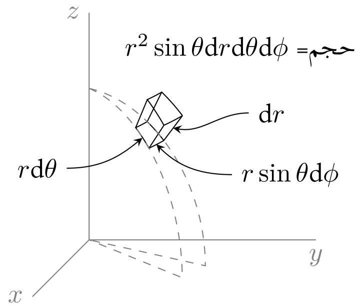
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.53 اور مساوات 1.57 کے نتائج کے ساتھ a_ϕ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.54 اور مساوات 1.58 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.28 میں $N(r,\theta,\phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.32 میں دکھایا گیا ہے۔ a_r سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔ a_θ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہو بہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}$ کے برابر ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[28] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے a_ϕ اطراف کی

[28] کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.32: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r = r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔اس مکعب کا حجم $r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.32 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r, \theta, \phi)$ کونے سے $N'(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \phi + \mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r \,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r \sin\theta \,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.62}$$

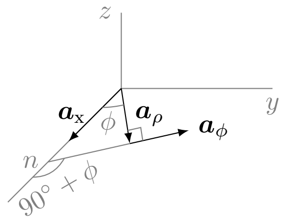
لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔شکل 1.32 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔اس کے برعکس $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا $-r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi = \phi_0 + \mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

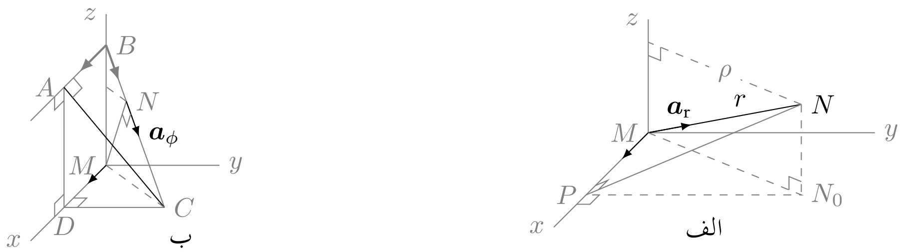
مشق 1.6: شکل 1.32 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$، $r \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$، $(r + \mathrm{d}r) \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$ اور $(r + \mathrm{d}r) \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.8: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = (1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔



شکل 1.33: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.34: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.33 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90° - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $a_x \cdot a_\rho = \cos\phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90° - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90° + \phi$ ہے۔ یوں $a_x \cdot a_\phi = \cos(90° + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح a_y اور a_ϕ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $a_y \cdot a_\phi = \cos\phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ a_z ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.9: مثال 1.8 کے طرز پر a_r کا a_x، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.34-الف میں نقطہ $N(r,\theta,\phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x,y,z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں a_x اور a_r بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $a_x \cdot a_r = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے a_x سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x,y,z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x,y,0)$ اور $P(x,0,0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $r = \overline{MN}$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $x = \overline{MP}$ اور زاویہ $\underline{/NPM} = 90°$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی a_x اور a_r کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $a_y \cdot a_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $a_z \cdot a_r = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$
\begin{aligned}
a_r \cdot a_x &= \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi \\
a_r \cdot a_y &= \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi \\
a_r \cdot a_z &= \frac{z}{r} = \cos\theta
\end{aligned}
$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.10: مثال 1.8 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.34-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = \cos \underline{/ABC}$ کے برابر ہے۔اس شکل میں $\underline{/DMC} = \phi$ اور $\underline{/BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{/MNB}$ نوے درجے کا ہے۔یوں $\underline{/NBM} = 90° - \theta$ ہو گا۔شکل سے واضح ہے کہ $\underline{/NBM} = \underline{/CBM}$ ہیں۔اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{/BMC} = 90°$ جبکہ $\underline{/CBM} = 90° - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{/MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$۔یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos\underline{/ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\text{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.34-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔کولومب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے چارج کو نقطہ چارج[4] کہا جاتا ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی

---

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant
[4] point charge

جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[6][5] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل[7] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔اس فاصلے پر ایک کلا گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

---

permittivity[5]
electric constant[6]
permeability[7]

حل:

$$F=\frac{6.674\times10^{-11}\times5.959\times10^{24}\times1}{42\,000\,000\times42\,000\,000}=0.225\,\mathrm{N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل:

$$F=9\times10^{9}\frac{1\times1}{1\times1}=9\times10^{9}\,\mathrm{N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

$$\boldsymbol{R_{21}}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$\boldsymbol{a_{21}}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}}=\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

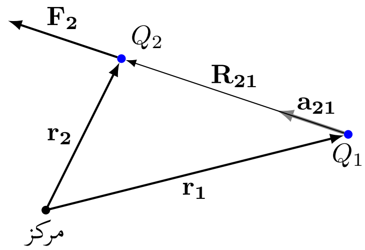
چارج Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 2.10 کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1}=-\boldsymbol{F_2}&=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}\end{aligned} \tag{2.11}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21}=R_{12}=R$ لکھا گیا ہے اور $\boldsymbol{a_{12}}=-\boldsymbol{a_{21}}$ کے برابر ہے۔دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_\text{X} + (5-2)\boldsymbol{a}_\text{y} + (9-4)\boldsymbol{a}_\text{z} \\
&= -2\boldsymbol{a}_\text{X} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{2^2+3^2+5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}} &= \frac{-2\boldsymbol{a}_\text{X} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_\text{X} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324\boldsymbol{a}_\text{X} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}\right) \\
&= -0.237 \left(-0.324\boldsymbol{a}_\text{X} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}\right)\,\text{N}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{2.12}$$

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش [8] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان [9] پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدن کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p [10] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت [11] m_p پر بھی منحصر ہے۔مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \tag{2.15}$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج [12] q_p پر قوت $\mathbf{F}$ ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا

---

[8] gravity
[9] gravitational field
[10] m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[11] test mass
[12] test charge

مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\boldsymbol{F}$ کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت[13] یا صرف برقی میدان پکارا اور $\boldsymbol{E}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots \tag{2.17}$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر $\boldsymbol{E}$ ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

چارج کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ مساوات 2.10 سے یوں لکھی جا سکتی ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.18}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x', y', z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

جہاں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y'\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'} = (x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

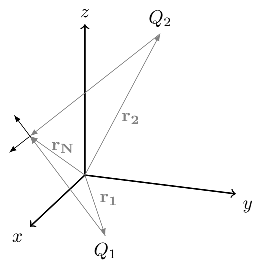
مثال 2.6: نقطہ $N_1(4, 1, 1)$ پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1, 4, 2)$ پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2, 2, 5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

---

[13] electric field intensity



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} \\
&= \sqrt{21} = 4.583 \\
\boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\text{X}}+1\boldsymbol{a}_{\text{y}}+4\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{21}} \\
&= -0.436\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= 9\times10^9\,\frac{100\times10^{-6}}{21}\left(-0.436\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \\
&= -18\,686\boldsymbol{a}_{\text{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\text{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$

ہوتا ہے۔اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_{\text{X}}+(2-4)\boldsymbol{a}_{\text{y}}+(5-2)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
&= 1\boldsymbol{a}_{\text{X}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

اور

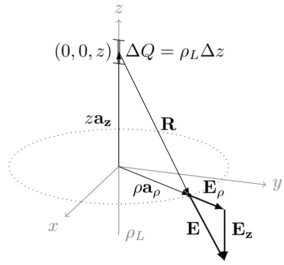
$$
\begin{aligned}
R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\
\boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_{\text{X}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{14}} \\
&= 0.267\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9\times10^9\,\frac{50\times10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\text{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\text{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 \\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\text{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\text{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)+\left(8582\boldsymbol{a}_{\text{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\text{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\text{X}}-7853\boldsymbol{a}_{\text{y}}+63\,193\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

مساوات 2.16 کو

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان $\mathbf{E}$ کے موجودگی میں چارج q پر قوت $\mathbf{F}$ دیتا ہے۔

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت[14] ρ_L[15] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی $\mathrm{C/m}$ ہے۔لکیری چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.21}$$

ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0,0,z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0,0,z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.22}$$

---

[14] line charge density

[15] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود چارج سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.23}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر چارجوں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.23 درست ثابت ہوتا ہے۔اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta\boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔محدد کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}
\end{aligned}$$

مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z\left(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\rho_L\left(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}z \tag{2.24}$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.25}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

مساوات 2.23 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$\begin{aligned}
-\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\
\alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

اور اختتامی حد

$$\begin{aligned}
\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\
\alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔مزید

$$\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

لکھا جائے گا۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned} \tag{2.27}$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.26 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan\alpha \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\alpha \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\alpha \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos\alpha \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 2.23 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 سے مساوات 2.25 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho \tag{2.29}$$

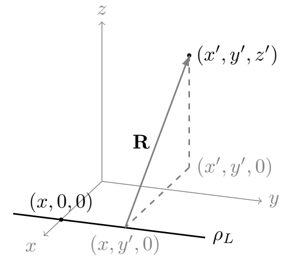
جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس تناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 2.18 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس تناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.29 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.29 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} \boldsymbol{a}_R \tag{2.30}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ (x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x'-x)^2+z^2}$ ہے جبکہ

$$\boldsymbol{R} = (x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}$$

ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

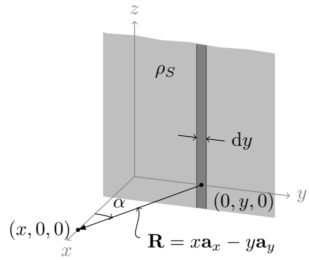
ہو گا۔

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,0,6)$ اور نقطہ $N_2(0,8,6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E} = 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1 = 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2 = 18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$



شکل 2.5: یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z=0$ پر لامحدود $x-y$ سطح دکھائی گئی ہے۔تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت[16] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.31}$$

ہے۔چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ چارج نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y$ چارج پایا جائے گا۔لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S\,\mathrm{d}y \tag{2.32}$$

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x,0,0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.33}$$

[16] surface charge density

کے برابر ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2+y^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چارج بردار لکیر سے $(x,0,0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.30 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2+y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2+y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$
\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.37}
$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.36 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 2.36 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$
\begin{aligned}
y &= x\tan\alpha \\
\mathrm{d}y &= x\sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

کا استعمال کرتے ہیں۔شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \frac{\rho_S x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x\sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}
\end{aligned}
$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0}\,\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.36 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \left. \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \right|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 2.37 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.39 اور مساوات 2.40 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_N \tag{2.41}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر[17] سمجھا جا سکتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل $\mathbf{E}$ دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

- $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^+_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & x &> 0 \\ \boldsymbol{E}^+_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & x &< 0 \end{aligned}$$

- $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^-_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & x &> x_1 \\ \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & x &< x_1 \end{aligned}$$

---

[17] capacitor

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x<0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\text{X}}
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں $\frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ برقی میدان پایا جاتا ہے۔یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y = 2$ پر $2\,\text{nC/m}^2$، دوسری سطح $y = 5$ پر $4\,\text{nC/m}^2$ اور تیسری سطح $y = 10$ پر $-6\,\text{nC/m}^2$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\text{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور 0

2.5 چارج بردار حجم

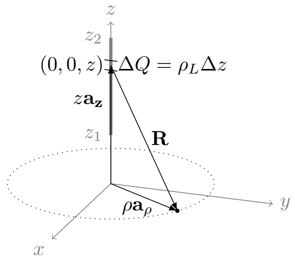
ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

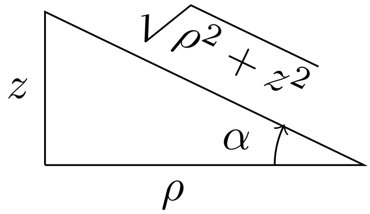
$$
\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.43}
$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$
Q = \iiint_{\text{h}} \rho_h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{2.44}
$$



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت



(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{2.45}$$

حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.19 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_h'\Delta h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

اس مساوات میں نقطہ r' پر چارج کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathrm{h}}\frac{\rho_h'\,\mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{2.46}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔ $\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور چارج کی کثافت ρ_h' لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\\
&= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}
$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho\tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \arctan\frac{z_2}{\rho}\\
\alpha_1 &= \arctan\frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)
$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

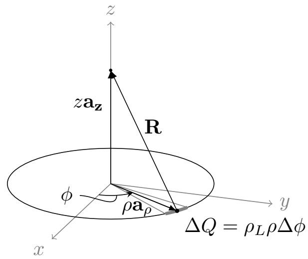
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{E}_\rho$ اور $\boldsymbol{E}_z$ کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)+\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.47}
$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔یوں چارج ΔQ مقام $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ پر درکار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ΔQ سے

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{z\boldsymbol{a}_\text{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_\text{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_\text{Z}$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a}_\text{Z}$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \, \mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{2.48}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\text{Z}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.49}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_\text{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{Y}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi \boldsymbol{a}_\text{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{Y}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi \boldsymbol{a}_\text{X} - \cos\phi \boldsymbol{a}_\text{Y}\right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ چارج نقطہ $(0,0,z)$ سے $\sqrt{\rho^2+z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho,0,0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$
\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \boldsymbol{a}_R
$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_\text{Z}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$
\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \boldsymbol{a}_\text{Z}
$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاو

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائکل فیراڈے[1] کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے۔ چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر $-Q$ چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ بہتری در

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جا سکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاو[2] کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاو کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \tag{3.1}$$

برقی بہاو کی اکائی کولومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاو کی سمت الٹی ہو گی اور یہ چارج میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاو خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاو فی اکائی رقبے کو برقی بہاو کی کثافت[3] D کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.2}$$

[1] Michael Faraday
[2] electric flux
[3] electric flux density

سمتیہ برقی بہاو کی کثافت پائی جائے گی۔ صفحہ 40 پر مساوات 2.18 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \text{خالی خلاء} \tag{3.3}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کروی محدد کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر برقی بہاو کی کثافت حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{3.4}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_R$ چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم جس میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام $\mathbf{r}'$ پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام $\mathbf{r}$ پر

$$\Delta \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

برقی بہاو کی کثافت پیدا کرے گا۔ حجم کے تمام چارجوں سے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_h \frac{\rho'_h \,\mathrm{d}h'}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{3.5}$$

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 51 پر مساوات 2.46 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں $\mathbf{D}$ اور $\mathbf{E}$ کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاؤس کا قانون

فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے گاؤس کا قانون[4] کہتے ہیں۔

> کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

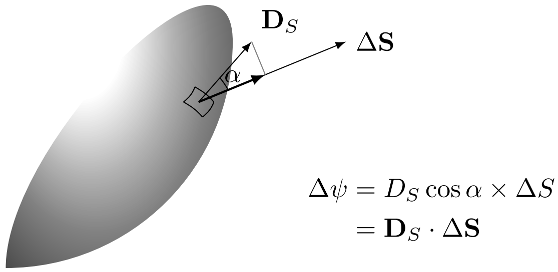
جناب گاؤس[5] نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ آئیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں برقی بہاو کی کثافت اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کے کثافت کی قیمت $D_S \cos\alpha$ ہو گی لہٰذا

$$\Delta\psi = D_S \cos\alpha \Delta S$$

---

[4] Gauss's law
[5] Carl Friedrich Gauss



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاو D_S لکھتے ہوئے زیر نوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاو تکملہ سے حاصل ہو گی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔یوں

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = Q \tag{3.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ[6] کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح[7] کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.7}$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.8}$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاو اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جا سکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{3.9}$$

closed integral[6]
gaussian surface[7]

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q = \int_L \rho_L \, \mathrm{d}L \tag{3.10}$$

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + \cdots \tag{3.11}$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ آئیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جا سکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدد[8] کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہو گی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدد کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر $\mathbf{D}$ تبدیل نہیں ہو گا۔

کروی محدد استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

لکھی جا سکتی ہے۔ اسی کی سمتی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

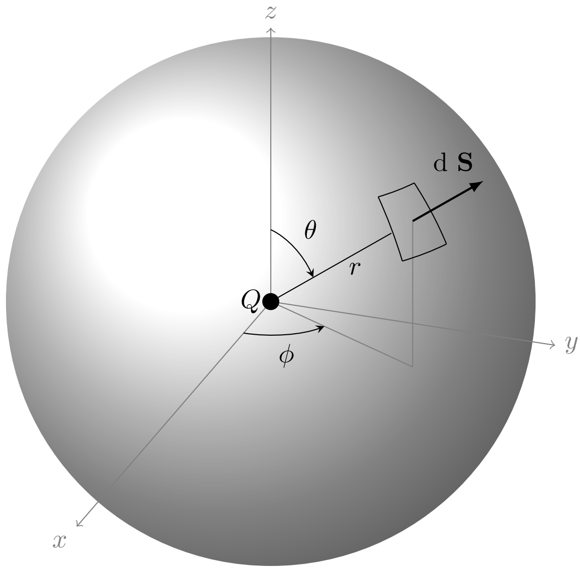
ہو گی۔ اس سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت D_S اور سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی لہٰذا سمتی کثافتِ برقی بہاو

$$\boldsymbol{D}_S = D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھی جائے گی۔ یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاو

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi &= \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= (D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \cdot \left(r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \right) \\
&= D_S r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

[8] spherical coordinates



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

ہو گی۔اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos\theta \Big|_0^\pi \,\mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi r^2 D_S
\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہٰذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہٰذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.12}$$

اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا صفحہ 40 پر مساوات 2.18 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔لامحدود لکیر کو نلکی محدد کی z محدد تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔یوں یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کثافتِ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاؤس کے قانون کی مدد سے کثافتِ برقی بہاو حاصل کریں۔

چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافتِ چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی نلکی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے[9] بند تصور کریں۔چونکہ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہے لہٰذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافتِ برقی بہاو D_ρ ہے لہٰذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاو ہو گا جو گاؤس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.14}$$

سے

$$\boldsymbol{E}_S = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho$$

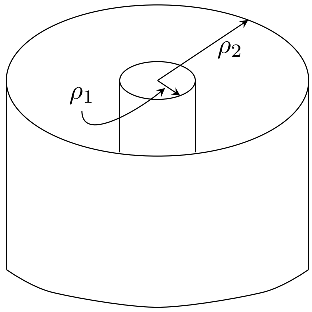
حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 45 پر مساوات 2.29 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح محور سے r_1 فاصلے پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نلکی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ایسی تار جسے ہم محوری تار[10] کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج

[9] آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نلکی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔
[10] coaxial cable



شکل 3.3: ہم محوری تار

ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہو گی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہٰذا L لمبائی کی ایسی نلکی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.15}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\rho L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.16}$$

پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔یوں اندرونی تار کی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.17}$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.18}$$

پایا جائے گا۔بیرونی تار کے باہر فرضی نلکی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہٰذا ہم محوری تار کے باہر

$$\boldsymbol{D}_{\text{تار کے باہر}} = 0 \tag{3.19}$$

ہو گا۔مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہٰذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار[11] بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندروری تار کا رداس $1\,\text{mm}$ جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس $5\,\text{mm}$ ہے۔$3\,\text{mm}$ رداس پر کثافتِ برقی بہاو $5\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}-$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

[11] shielded

حل:تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5\times10^{-6}=\frac{\rho_L}{2\pi\times0.003}$$

سے $\rho_L=-94.26\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1}=\frac{-0.09426\times10^{-9}}{2\pi\times0.001\times1}=-15\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2}=\frac{94.26\times10^{-9}}{2\pi\times0.005\times1}=3\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہو گی۔

شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔سامنے سطح پر $D\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ جبکہ پیچھے سطح پر $-D\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو $S\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ اور $-S\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہٰذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔یوں حجم سے برقی بہاو صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\psi_{\text{سامنے}}=D\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot S\boldsymbol{a}_{\text{X}}=SD$$
$$\psi_{\text{پیچھے}}=(-D\boldsymbol{a}_{\text{X}})\cdot(-S\boldsymbol{a}_{\text{X}})=SD$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔اگر چارج بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ چارج پایا جائے گا۔یوں

$$\psi_{\text{سامنے}}+\psi_{\text{پیچھے}}=2DS=\rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D=\frac{\rho_S}{2}$$

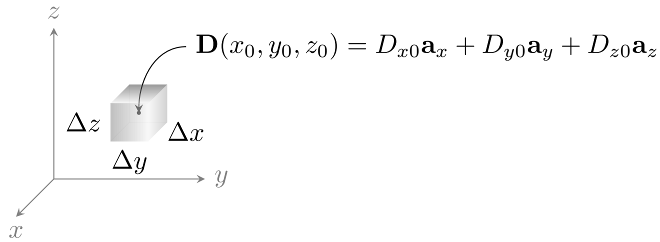
حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}=\frac{\rho_S}{2}\boldsymbol{a}_N \tag{3.20}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{3.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.41 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدد پر نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx، Δy اور Δz ہیں۔اس چھوٹی ڈبیہ پر گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.22}$$

کا اطلاق کرتے ہیں۔ڈبیہ کے چھ اطراف ہیں۔یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}
\int_{\text{سامنے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta\boldsymbol{S}_{\text{سامنے}} \\
&\doteq \Big(D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Big)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&\doteq D_{x,\text{سامنے}} \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں $\boldsymbol{D}$ کی قیمت ڈبیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ٹیلر تسلسل[12] کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ڈبیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\boldsymbol{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کی قیمت سے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
D_{x,\text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!}\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\Delta x}{2}\right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \cdots \\
&\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}
\end{aligned}$$

---

[12] Taylor series

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x، y اور z ہیں لہٰذا تسلسل میں جزوی تفرق[13] کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہٰذا پچھلی سطح $-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned}
\int_{\text{پیچھے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{پیچھے}} \\
&\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)_{\text{پیچھے}} \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\right) \\
&\doteq -D_{x,\text{پیچھے}} \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x,\text{پیچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{پیچھے}} \doteq -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned}
\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} &\doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z \\
&\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.23}$$

---

[13] partial differential

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta h \tag{3.24}$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\boldsymbol{D} = 2x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{C/m^2}$ ہو تب کارتیسی محدد کے مرکز پر $10^{-9}\,\mathrm{m^3}$ کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاو

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h \tag{3.25}$$

اور

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.26}$$

مساوات 3.25 میکس ویل کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو[14] بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف جبکہ اس کا بایاں بازو پھیلاو حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدد میں پھیلاو کی مساوات} \tag{3.27}$$

---

[14] divergence

سے سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو حاصل کیا جاتا ہے۔

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کا $\oint_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی جگہ $\boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint\limits_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.28}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ پانی کا بہاو، ایٹموں کی رفتار یا سلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم $\boldsymbol{K}$ کو سمتی بہاو کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات $\boldsymbol{K}$ کا پھیلاو بیان کرتا ہے۔ پھیلاو کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاو کے پھیلاو سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاو فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاو کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاو فی چھوٹی حجم کو پھیلاو کہتے ہیں۔ پھیلاو کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاو کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نا ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں دھوبے نقطے پر بھی پانی کے رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں دھوبا ہے اس وقت تک یہاں پھیلاو صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاو پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاو صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلا پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاو پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پنکچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلنی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاو پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاو سے مراد نقطے سے انخلا جبکہ منفی پھیلاو سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے $+$، ضرب کے لئے $\times$ اور تکملہ کے لئے $\int$ استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیبلا[15] کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ تصور کریں کہ

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{3.29}$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{3.30}$$

[15] nabla, del

جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{K} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right) \cdot \left(K_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + K_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + K_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right) \\
&= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

لیا جاتا ہے۔یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.32}
$$

کے برابر ہے۔پھیلاو کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \qquad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات} \tag{3.33}
$$

میکس ویل کی پہلی مساوات در حقیقت گاؤس کے قانون کی تفرق[16] شکل ہے۔اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل[17] شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 87 پر دیا گیا ہے۔

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔اس حصے میں نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی جائے گی۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\Delta_{S_{\text{سامنے}}} &= -\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\Delta_{S_{\text{پیچھے}}} &= +\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_{\rho} \\
\Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_{\rho} \\
\Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_{\text{z}} \\
\Delta_{S_{\text{نیچے}}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_{\text{z}}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔نلکی محدد میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔اس فرق کی بنا پر نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات قدر مختلف حاصل ہو گی۔چھوٹی حجم کے وسط میں

$$
\boldsymbol{D} = D_{\rho 0}\boldsymbol{a}_{\rho} + D_{\phi 0}\boldsymbol{a}_{\phi} + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{z}} \tag{3.34}
$$

---

[16] differential
[17] integral

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} &= \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} &= \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{بائیں}} &= \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{دائیں}} &= \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{اوپر}} &= \left(D_{z 0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{z}} \\
\boldsymbol{D}_{\text{نیچے}} &= \left(D_{z 0} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{z}}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\int\limits_{\text{سامنے}} + \int\limits_{\text{پیچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0,\phi_0,z_0)$ پر

$$\left.\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\right|_N = \left. D_\rho + \rho\frac{\Delta D_\rho}{\Delta \rho}\right|_N = D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔اسی طرح

$$\int\limits_{\text{اوپر}} + \int\limits_{\text{نیچے}} = \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint\limits_S \boldsymbol{D}_S\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.35}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نلکی محدد میں پھیلاو دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہرگز حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔ اس کے باوجود نلکی محدد میں بھی پھیلاو کے عمل کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ سے ہی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.36}$$

لیا جاتا ہے۔

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات

کارتیسی محدد میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاو کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نلکی محدد میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاو کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاو کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی عمومی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جو تمام محدد کے لئے کارآمد ہے۔

کارتیسی محدد کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نلکی محدد کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدد کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدد[18] استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور تین عمودی اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ عمومی محدد کسی بھی محدد کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارتیسی محدد کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہو گا۔

شکل میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدد کے تین اطراف

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_1 &= k_1\,\mathrm{d}u\\
\mathrm{d}L_2 &= k_2\,\mathrm{d}v\\
\mathrm{d}L_3 &= k_3\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

ہیں۔ کارتیسی محدد میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $\mathrm{d}L_1 = \mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا۔ نلکی محدد میں

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1\\
k_2 &= \rho\\
k_3 &= 1
\end{aligned} \tag{3.37}$$

جبکہ کروی محدد میں

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1\\
k_2 &= r\\
k_3 &= r\sin\theta
\end{aligned} \tag{3.38}$$

[18] generalized coordinates

کے برابر ہیں۔اسی طرح تین سمتی رقبے

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_u\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_v\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\boldsymbol{a}_w
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاو حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر $\boldsymbol{D}$ کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاو حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاو سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاو حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاو

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3D_{v0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2D_{w0}
\end{aligned}
$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_u)\,\mathrm{d}u && \text{سامنے}\\
-&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_u)\,\mathrm{d}u && \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
&k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}wD_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w && \text{سامنے}\\
&-k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}wD_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w && \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاو کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$
\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h&=\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\\
&=k_1k_2k_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$
\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]=\lim_{\mathrm{d}h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}h}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف ہے۔یوں پھیلاو کی عمومی مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] \tag{3.39}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.39 سے نلکی اور کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.37 کے استعمال سے نلکی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z)\right]\\&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(D_z)\qquad\text{نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.38 کے استعمال سے کروی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta D_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta D_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(rD_\phi)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)\qquad\text{کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاو

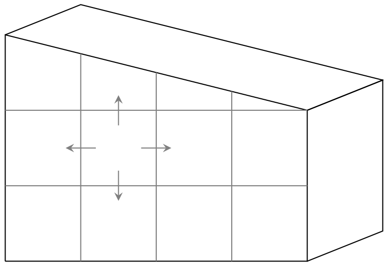
صفحہ 63 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_h$$

لکھتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}h \tag{3.42}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاو[19] بیان کرتا ہے۔اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔مسئلہ پھیلاو کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاو کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔ فاصلہ رک

مسئلہ پھیلاو کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے باآسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاو قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاو ثابت ہوتی ہے لہٰذا دونوں کا مجموعی بہاو حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاو رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاو کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاو کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاو سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے $\boldsymbol{D}$ سے پھیلاو کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہوتا ہے۔ کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لامحدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لامحدود ہی ہو گی۔

---

divergence theorem[19]

باب 4

توانائی اور برقی دباو

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ $\mathrm{d}L$ طے کرنے سے

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}L$$

کام کیا جاتا ہے۔اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام [1] کہتے ہیں۔شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= F\cos\alpha\,\mathrm{d}L \\ &= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $F\cos\alpha\,\mathrm{d}L$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا گیا ہے۔

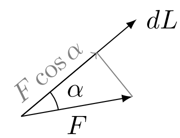
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\boldsymbol{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ پایا جاتا ہے [2] جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{F}_G = -mg\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ لکھا جا سکتا ہے۔کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_{\text{لاگو}}\cdot\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = mg\Delta h$$

[1] work
[2] $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہو گی۔کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے مخففی توانائی[3] کہتے ہیں۔اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخففی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{F}_G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔اختیار کردہ راستے کا مخففی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخففی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان[4] کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔برقی میدان $\mathbf{E}$ میں چارج q پر قوت $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ عمل کرتا ہے۔چارج کو فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$\mathrm{d}W = -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.1}$$

کام[5] کیا جاتا ہے۔کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.2}$$

توانائی درکار ہو گی۔

4.2 لکیری تکملہ

کار ہے۔

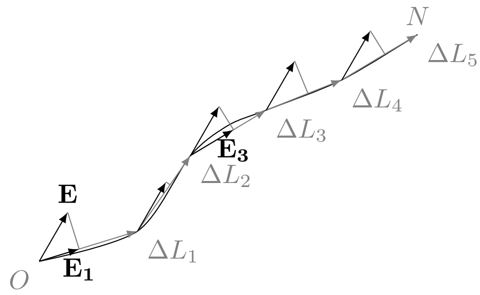
مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔شکل 4.2 میں یکساں[6] اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان $\boldsymbol{E}$ میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta\boldsymbol{L}_1$، $\Delta\boldsymbol{L}_2$، ... میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔یوں $\Delta\boldsymbol{L}_1$ کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1$ توانائی درکار ہو گی۔یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_2 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_3 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_4 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_5 \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot (\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5) \end{aligned} \tag{4.3}$$

---

potential energy[3]
conservative field[4]
work[5]
uniform[6]



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

لکھی جا سکتی ہے۔ قوسین میں بند $\Delta \boldsymbol{L}_1 + \Delta \boldsymbol{L}_2 + \Delta \boldsymbol{L}_3 + \Delta \boldsymbol{L}_4 + \Delta \boldsymbol{L}_5$ در حقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$W = -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \tag{4.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو تکمل کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$W = \int_O^N -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.5}$$

چونکہ q اور $\boldsymbol{E}$ کی قیمتیں مستقل ہیں لہٰذا انہیں تکمل کے باہر لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \int_O^N \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{L}_{ON}$ پر ہے جہاں $\boldsymbol{L}_{ON}$ نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

میں $N_1(1,0,2)$ سے $N_2(0,1,2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1\,\mathrm{C}$ کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان[7]

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

[7] slope

شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

ہے لٰہذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں لکیر کی مساوات

$$y = -x + 1 \tag{4.7}$$

ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.8}$$

لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} \left[(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right] \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= -0.1 \int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1 \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمل x کے ساتھ ہے لٰہذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یوں پہلا تکمل

$$\begin{aligned}
-0.1 \int_1^0 [y+z]\,\mathrm{d}x &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2]\,\mathrm{d}x \\
&= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x\right)\Big|_1^0 \\
&= 0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔دوسرا تکمل y کے ساتھ ہے لٰہذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لٰہذا

$$\begin{aligned}
-0.1 \int_0^1 [x+z]\,\mathrm{d}y &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2]\,\mathrm{d}y \\
&= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y\right)\Big|_0^1 \\
&= -0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

ہو گا۔تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لٰہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1,0,2)$ سے $(0,1,2)$ تک $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میدان میں $0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z=2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2+y^2=1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z$$

میں پہلی تکمل میں $z=2$ اور $y=\sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔ یاد رہے کہ ربع اول[8] میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned}
-0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0 (\sqrt{1-x^2}+2)\,\mathrm{d}x\\
&= -0.1\left.\left(\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+2x\right)\right|_1^0\\
&= -0.025\pi - 0.2
\end{aligned}$$

جاول، دوسرے تکمل میں $z=2$ ہی رہے گا جبکہ $x=\mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x=\sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned}
-0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1 (\sqrt{1-y^2}+2)\,\mathrm{d}y\\
&= -0.1\left.\left(\frac{\sin^{-1}y}{2}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2}+2x\right)\right|_0^1\\
&= 0.025\pi + 0.2
\end{aligned}$$

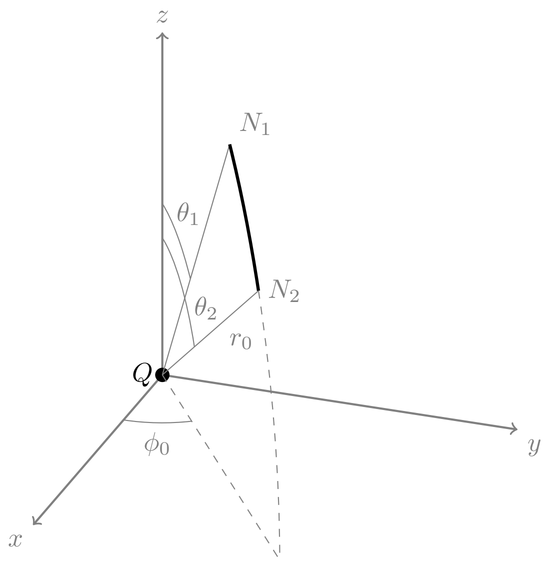
جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں للہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گا۔

---

[8] first quadrant



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1,0,2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $-0.1328\,\mathrm{J}$، $-0.1328\,\mathrm{J}$

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{4.9}$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ یعنی $\boldsymbol{E}$ کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہٰذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔ آئیں تکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi=\phi_0$ اور $r=r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.42 اور مساوات 1.62 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{L}&=\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{L}&=\mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_{\rho}+\rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{L}&=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}\end{aligned} \tag{4.10}$$

کارتیسی، نلکی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا فاصلہ دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned}W&=-q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\ &=-q\int_{r_0,\theta_1,\phi_0}^{r_0,\theta_2,\phi_0}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi})\\ &=-q\int_{r_0}^{r_0}\frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\\ &=0\end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{r_1,\theta_1,\phi_1}^{r_2,\theta_2,\phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot (\mathrm{d}r \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\theta} + r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)
\end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہٰذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 3x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + x^3z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2x^3yz\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں محدد کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

- دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔
- ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔ $-1200\,\mathrm{J}$، $-1200\,\mathrm{J}$

4.3 برقی دباو

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو برقی دباو[9] کہتے ہیں۔ برقی دباو کے اکائی $\mathrm{J/C}$ کو وولٹ[10] کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہٰذا برقی دباو بھی مقداری ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباو یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.11}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباو V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

---

voltage[9]
volt[10]

برقی دباو دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔کسی نقطے کی حتمی برقی دباو معنی نہیں رکھتی۔ برقی دباو بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ[11]، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباو کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباو کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ایسے نقطے کو برقی زمین[12]، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے۔عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباو، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباو مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباو ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کی برقی دباو کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے در پیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباو حاصل کی جائے گی۔

ہم محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباو حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباو V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباو V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباو

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{4.12}$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

4.4 نقطہ چارج کی برقی دباو

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر اوسط برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ ہو گا۔یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

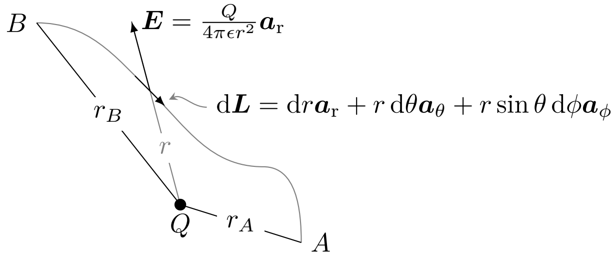
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right)\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi\right)\\
&= -\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = -\int_{r_B}^{r_A}\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left.\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباو $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

[11] reference point
[12] electrical ground



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباو۔

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{4.13}$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نا کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباو مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $0 = \frac{1}{\infty}$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \tag{4.14}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباو کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہٰذا برقی دباو لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہٰذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.15}$$

جو کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباو V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

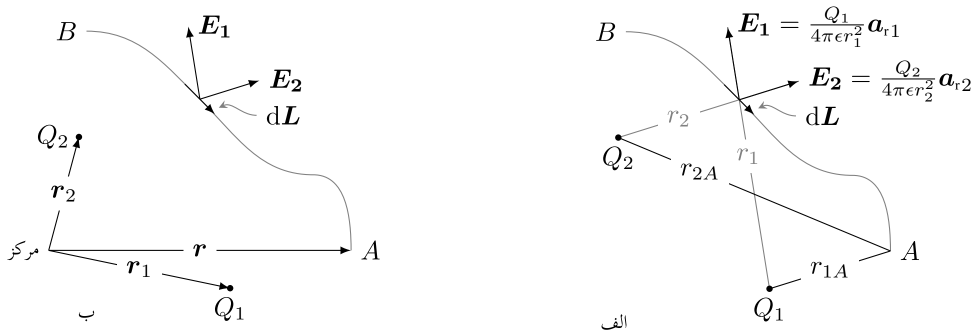
برقی دباو مقداری ہے لہٰذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباو تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح[13] کہتے ہیں۔مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہو گی۔ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.5 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو

شکل 4.6-الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔Q_1 کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔اسی

[13] equipotential surface



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباو۔

طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}a_{r2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدد کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان E_1 اور E_2 دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $E = E_1 + E_2$ ہو گا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی $\mathrm{d}L$ پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1 \boldsymbol{a}_{r1} + r_1\,\mathrm{d}\theta_1 \boldsymbol{a}_{\theta 1} + r_1 \sin\theta_1\,\mathrm{d}\phi_1 \boldsymbol{a}_{\phi_1} \tag{4.16}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2 \boldsymbol{a}_{r2} + r_2\,\mathrm{d}\theta_2 \boldsymbol{a}_{\theta 2} + r_2 \sin\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2 \boldsymbol{a}_{\phi_2} \tag{4.17}$$

لکھا جائے گا۔ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&- \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.16 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1$ ملتا ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.17 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2$ ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$\mathrm{d}W = -\frac{qQ_1\,\mathrm{d}r_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2\,\mathrm{d}r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}
W = \int_B^A \mathrm{d}W &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{1B}}^{r_{1A}}\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{2B}}^{r_{2A}}\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2^2}\\
&= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}}\right)
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباو

$$V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}}\right) \tag{4.18}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.18 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے۔ مساوات 4.18 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباو کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباو حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباو علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_1$ جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_2$ اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.18 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{4.19}$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.19

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{Q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j^n \frac{Q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|} \end{aligned} \tag{4.20}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(\boldsymbol{r})$ میں $\boldsymbol{r}$ سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔ پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.20 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_1)\Delta h_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_2)\Delta h_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_n)\Delta h_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \tag{4.21}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام $\boldsymbol{r}_j$ پر کثافت کو $\rho_h(\boldsymbol{r}_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمل حاصل ہوتا ہے۔

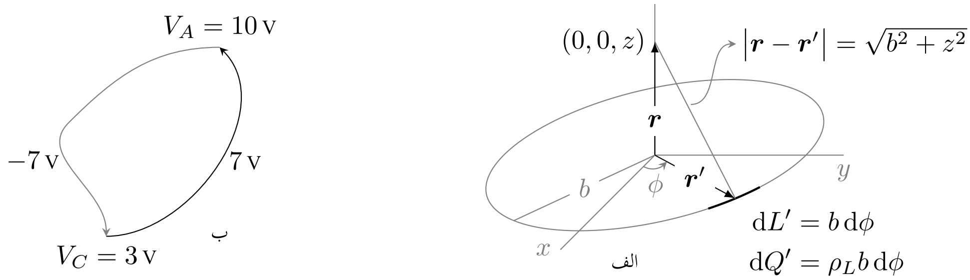
$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}h'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.22}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔ مقام $\boldsymbol{r'}$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}h'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.22 نقطہ $\boldsymbol{r}$ پر برقی دباو دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ $\boldsymbol{r}$ تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(\boldsymbol{r})$ برابر توانائی درکار ہو گی۔

اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_S یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_S(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.23}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}L'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.24}$$



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے Z محدد پر پیدا برقی دباو۔ (ب)بند دائرے کی برقی دباو صفر ہے۔

لکھتے۔ان مساوات میں $\mathrm{d}h'$، $\mathrm{d}S'$ اور $\mathrm{d}L'$ غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباو حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ $N(0,0,z)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کا رداس $\boldsymbol{r}$ اور نلکی محدد کا رداس $\boldsymbol{\rho}$ برابر ہوتے ہیں۔گول دائرے پہ $\boldsymbol{r}'$ کے مقام پر چھوٹی لکیر $\mathrm{d}L' = b\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔برقی دباو $\boldsymbol{r}$ پر درکار ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}| = \sqrt{b^2+z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 4.24 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0,0,z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$$

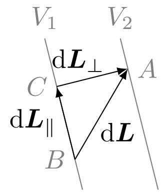
برقی دباو پایا جائے گا۔گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0,0,0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباو پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباو یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$
$$V_C = -\int_{\infty}^{C} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباو میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباو میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہو گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباو میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = -\int_{C}^{A} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} - \int_{A}^{C} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$



شکل 4.8: برقی دباو کی ڈھلان برقی میدان ہے۔

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔بند دائرے کے تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \tag{4.25}$$

جہاں تکمل کے نشان پر گول دائرہ بند تکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.25 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان[14] کے لئے درست ہے۔اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان[15] کہتے ہیں۔ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان[16] ہے۔یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخففی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخففی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہو گی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی مخففی توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.6 برقی دباو کی ڈھلان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباو پایا جاتا ہے۔ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباو میں $-\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ تبدیلی رونما ہو گی جہاں برقی میدان کو $\boldsymbol{E}$ لکھا گیا ہے۔

$$\mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.26}$$

چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لٰہذا ہم B سے C اور پھر A بھی جا سکتے تھے۔B سے C تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ لکھتے ہوئے

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E} \cdot \left(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp\right) \tag{4.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\boldsymbol{E}$ کو ہم قوہ سطحہ کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.28}$$

---

[14] static electric field
[15] conservative field
[16] یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولولہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔

جس سے

$$\mathrm{d}V = -(\boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) = -E_\parallel \,\mathrm{d}L_\parallel - E_\perp \,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.29}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel = E_\parallel \,\mathrm{d}L_\parallel$ لکھا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp = 0$ ہے۔اس مساوات کا پہلا جزو $-E_\parallel \,\mathrm{d}L_\parallel$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباو دیتا ہے۔ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباو پایا جاتا ہے لٰہذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباو نہیں پایا جاتا یعنی $-E_\parallel \,\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر ہے۔اب چونکہ $\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر نہیں ہے لٰہذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0 \tag{4.30}$$

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.31}$$

یوں

$$\mathrm{d}V = -E_\perp \,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{E}_\perp$ کی جگہ $\boldsymbol{E}$ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = -E \,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.33}$$

اس مساوات سے

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_\perp} \tag{4.34}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_\perp} \tag{4.35}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباو کو حتمی برقی دباو تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لٰہذا اسے $V(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباو کے آزاد متغیرات x، y اور z ہیں۔کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی برقی دباو کو

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + E_y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{4.37}$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{4.38}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}z \tag{4.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}y = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -E_x\,\mathrm{d}x$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہو گی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔ یوں

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.40}$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوات 4.37 میں پُر کرتے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \tag{4.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad \text{کارتیسی محدد میں ڈھلان کی مساوات} \tag{4.42}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{4.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباو کی ڈھلان[17] پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.42 کا بایاں ہاتھ ڈھلان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلان کا عمل برقی دباو اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 67 پر مساوات 3.32 پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری[18] حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاو کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{4.44}$$

4.6.1 نلکی محدد میں ڈھلان

نلکی محدد میں برقی دباو کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباو $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.36، مساوات 4.37 اور مساوات 4.38 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

[17] gradient

[18] طلباء و طالبات عموماً ڈھلان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاو کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے گریز کریں۔

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{E}=E_\rho\boldsymbol{a}_\rho+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi+E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.46}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho+\rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.47}$$

جہاں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صفحہ 26 پر مساوات 1.42 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z=-\left(E_\rho\,\mathrm{d}\rho+E_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi+E_z\,\mathrm{d}z\right) \tag{4.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}\phi=0$ اور $\mathrm{d}z=0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ اور $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho=-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho=-\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi=-\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi$$
$$E_z\,\mathrm{d}z=-\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_\rho&=-\frac{\partial V}{\partial \rho}\\E_\phi&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\\E_z&=-\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned} \tag{4.49}$$

انہیں مساوات 4.46 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right) \tag{4.50}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.43 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدد میں ڈھلان کی مساوات

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \qquad \text{نلکی محدد میں ڈھلان کی مساوات} \tag{4.51}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.42 اور مساوات 4.51 کا موازنہ کریں۔ کارتیسی محدد کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.6.2 کروی محدد میں ڈھلان

صفحہ 32 پر مساوات 1.62 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔ کروی محدد میں کسی بھی نقطے کے برقی دباو کو $V(r,\theta\phi)$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح $\boldsymbol{E}$ کو تین عمودی حصوں میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.36، مساوات 4.37 اور مساوات 4.38 کو کروی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{4.52}$$

$$\boldsymbol{E}=E_r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+E_\theta\boldsymbol{a}_\theta+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.53}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.54}$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi=-\left(E_r\,\mathrm{d}r+E_\theta r\,\mathrm{d}\theta+E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\right) \tag{4.55}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r$ اور $-E_r\,\mathrm{d}r$ تبدیل ہوں گے۔یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r = -E_r\,\mathrm{d}r$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta&=-E_\theta r\,\mathrm{d}\theta\\ \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi&=-E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r&=-\frac{\partial V}{\partial r}\\ E_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\\ E_\phi&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.53 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\right) \tag{4.56}$$

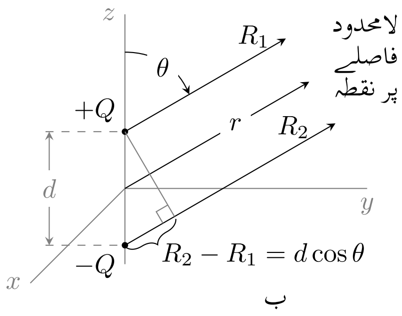
لکھا جا سکتا ہے جس سے کروی محدد میں ڈھلان کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \qquad \text{کروی محدد میں ڈھلان کی مساوات} \tag{4.57}$$

مشق 4.3: صفحہ 69 پر حصہ 3.10 میں پھیلاو کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ لئے گئے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla=\frac{1}{K_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{a}_u+\frac{1}{K_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{a}_v+\frac{1}{K_3}\frac{\partial}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \qquad \text{ڈھلان کی عمومی مساوات}$$



شکل 4.9: جفت قطب

مثال 4.4: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباو دیتا ہے۔ مساوات 4.56 کے استعمال سے کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہٰذا مساوات 4.56 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔ اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.7 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محدد کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدد پر ایک جانب $Q+$ اور دوسری جانب $Q-$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔ یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ ایسی جوڑی چارجوں کو جفت قطب[19] کہا جاتا ہے۔ ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباو کی قیمتیں درکار ہیں۔ کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔ دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔

شکل 4.9-ب میں دور نقطے کو لامحدود فاصلے پر تصور کرتے ہوئے صورت حال دوبارہ دکھائی گئی ہے۔ ایسا کرنے سے مسئلہ حل کرنا نہایت آسان ہو جاتا ہے۔

---

[19] dipole