

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیاں	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیاں	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیاں کا کارتیسی اکائی سمتیاں کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیاں کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
191	گردش	7.3
198	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
204	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
205	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
206	مسئلہ سٹوکس	7.4
210	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
216	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
221	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
223	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
227	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
227	متحرک چارج پر قوت	8.1
228	تفرقی چارج پر قوت	8.2
231	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
232	قوت اور مروڑ	8.4
237	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
238	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
241	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
242	مقناطیسی دور	8.8
245	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
246	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
250	مشترکہ امالہ	8.11

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل دو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل دو برقی میں امواج
286	10.3	پوٹیننگ سمتیہ
289	10.4	موصل میں امواج
295	10.5	انعکاس مستوی موج
301	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
329	12	سوالات

مستوی امواج

لا محدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی اموج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی تعدد کا دار و مدار چارج یا رو (یادونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω زاویائی تعدد³ پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی⁴ کہلاتی ہے۔ سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے λ ⁵ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس⁶، شعاعی انحراف⁷ اور انکسار امواج⁸ کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے

electromagnetic¹
frequency²
angular frequency³
light⁴
time period⁵
reflection⁶
refraction⁷
diffraction⁸

ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 263 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(10.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(10.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(10.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(10.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

جہاں $D = \epsilon E$ اور $B = \mu H$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات \mathbf{E} اور \mathbf{H} کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو \mathbf{J} صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہوگی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہوگی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ ہے کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار ہے $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیت⁹ کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہذا پہلے دوری سمتیت پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نمائندگی کی عمومی شکل

$$(10.5) \quad E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

ہے جہاں

$$(10.6) \quad \omega = 2\pi f$$

زاویائی تعدد¹⁰ اور ϕ زاویائی فاصلہ¹¹ ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x, y, z اور ω کا تابع تفاعل¹² ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز¹³ ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

⁹ phasor
¹⁰ angular frequency
¹¹ phase angle
¹² dependent function
¹³ Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل¹⁴ کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد¹⁵ ہے۔ آزاد متغیرہ $\psi + \omega t$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جاسکتا ہے جو حقیقی¹⁶ اور خیالی¹⁷ اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل¹⁸ ہے۔ یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t + \psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد¹⁹ ہے۔ ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہوگا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

Euler's identity¹⁴
imaginary number¹⁵
real¹⁶
imaginary¹⁷
complex function¹⁸
complex frequency¹⁹

ہو تب اسی کی دورى سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔ اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دورى سمتیہ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

کو دورى سمتیہ کی صورت میں

$$(10.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دورى سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(10.8) \quad \nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$(10.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$(10.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$(10.11) \quad \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \gamma^2 \mathbf{E}_s$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(10.12) \quad \gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)}$$

حرکی مستقل²⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ $j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$(10.13) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(10.14) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتیہ پلم ہولٹز مساوات^{22 21} کہلاتی ہے۔ کارتیسی محدود میں بھی سمتیہ پلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔ کارتیسی محدود میں اس کی x مساوات

$$(10.15) \quad \nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs}$$

²⁰propagation constant
²¹vector Helmholtz equation

²²ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

یعنی

$$(10.16) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں ناٹو x اور ناٹو y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$(10.17) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$(10.18) \quad E_{xs} = Ae^{-\gamma z}$$

اور

$$(10.19) \quad E_{xs} = Be^{\gamma z}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha + j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \left[Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$(10.20) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مستوی موج²³ کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

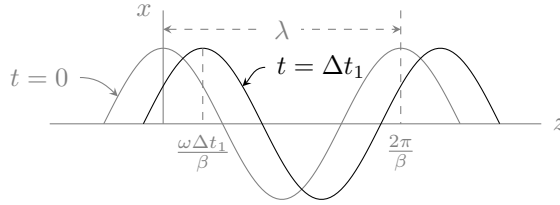
$$(10.21) \quad E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

حاصل ہوتی۔

مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$(10.22) \quad \mathbf{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

لکھی جاسکتی ہے جو صرف \mathbf{a}_x جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے متحرک موج²⁴ پر اب غور کریں۔



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدود کے متوازی ہے۔ اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہذا α تقبیلی مستقل²⁵ کہلاتا ہے۔ تقبیلی مستقل کو نیپر²⁶ فی میٹر $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ میں ناپا²⁷ جاتا ہے۔ یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد²⁸ مقدار نیپر Np میں ہوگی۔ موج کے مساوات میں βz - زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈین²⁹ میں ناپا جاتا ہے لہذا β زاویائی مستقل²⁹ کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈین فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدود کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج³⁰ پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.23)$$

ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.24)$$

لکھا جاسکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \quad (10.25)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \quad (10.26)$$

²⁵attenuation constant

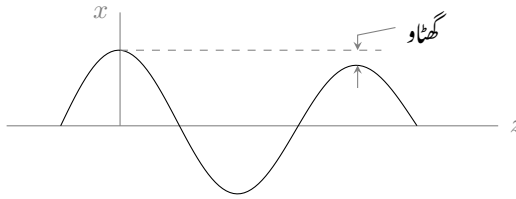
²⁶neper

²⁷تقبیلی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔

²⁸dimensionless

²⁹phase constant

³⁰wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$(10.27) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$(10.28) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہوگی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{dz}{dt}$ کو کہتے ہیں لہذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

سے رفتار

$$(10.29) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہذا $\alpha = 0.001 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کی صورت میں 1 km کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $\frac{e^{-1}}{e^0} = 0.368$ گنا رہ گئی ہوگی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج E_s سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

یا

$$\mathbf{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (10.30)$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (10.31)$$

لکھی³¹ گئی³² ہے۔ اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \quad (10.32)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \quad (10.33)$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباؤ $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جاسکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R ، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_Z} = |Z| \angle \theta_Z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہوگا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہوگا۔ مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہوگا۔ اس دور میں برقی رد دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \psi - \theta_Z)$$

³¹ یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔
³² η eta

لکھا جاسکتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباؤ کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η ، قدرتی رکاوٹ³³ کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$(10.34) \quad H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$(10.35) \quad \eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج³⁴ کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 0$ ہیں لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (10.36)$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم 9×10^9 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{36\pi 10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377 \Omega \quad (10.37)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہوگی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \\ H_y = \frac{E_0}{120\pi} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور ناوقت اور ناہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار³⁵ ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہذا مساوات 10.12 سے ثابت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$(10.38) \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R \mu_0 \epsilon_R \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔ چونکہ ذو برق میں $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہوگی۔ خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$(10.39) \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$(10.40) \quad E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$(10.41) \quad H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

ہیں۔

مثال 10.1: پانی کے لئے $\epsilon_R = 78.4$ ، $\mu_R = 1$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29 \text{ cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1 \text{ m}$ ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58 \Omega$$

ہیں۔ امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.62 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور 162.1Ω ، $272.6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 23 cm ، $1.29 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برقی میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برقی پر بات کرنا ضروری ہے لہذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 286 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\frac{S}{m} = 36.7$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.8} \\ &= 3035/70.67^\circ \\ &= 1005 + j2864 \quad m^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تقلیلی مستقل

$$\alpha = 1005 \frac{Np}{m}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار³⁶ پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \frac{rad}{m}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682 \frac{rad}{m}$ حاصل ہوتا ہے لہذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

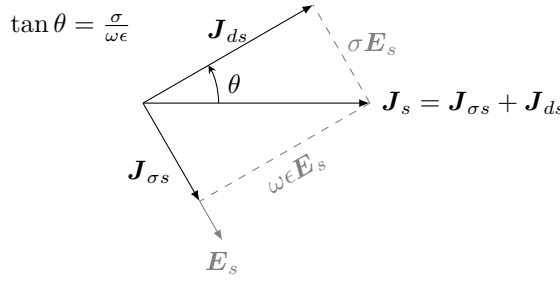
$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52/19.33^\circ = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{vs} + \mathbf{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت \mathbf{J}_s دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تھکون۔

رو سے 90° آگے رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کردی محدود کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (10.42)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اس تھکون کو طاقت کے ضیاع کا تھکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجٹ³⁷ یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذوبرق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذوبرق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذوبرق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی³⁸

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(-j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (10.43)$$

اور

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad (10.44)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.45)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right] \quad (10.46)$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) \quad (10.47)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل 20 GHz تعدد پر $1 = \mu_R$ ، $\epsilon_R = 41$ اور $\frac{S}{m} = 36.7$ σ ہیں لہذا مساوات 10.43 سے

$$\alpha = 1080 \frac{Np}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005 \frac{Np}{m}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.44 سے

$$\beta = 2897 \frac{rad}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864 \frac{rad}{m}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.45 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682 \frac{rad}{m}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.46 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

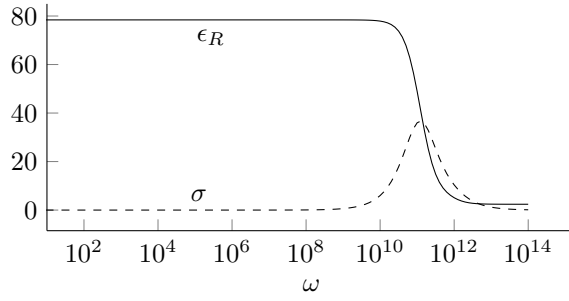
حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.47 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $0.1 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محد تعدد کا لاگ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10 \frac{Grad}{S}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7 \frac{S}{m}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10 \frac{\mu S}{m}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تقلیلی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642 ، $1.13 \times 10^{-3} \frac{Np}{m}$ اور $3.51 \times 10^{-4} \frac{rad}{m}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کا تقلیلی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031 \frac{Np}{m}$ ، $6.9 m$ ، $0.095 \frac{Np}{m}$ ، $2.3 m$

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ³⁹ درکار ہوگا لہذا پہلے اسے⁴⁰ حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

³⁹Poynting theorem

⁴⁰جان پیٹری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

E کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$E \cdot \nabla \times H = E \cdot J + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ با آسانی کار تیبسی محدود میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (E \times H) = -E \cdot \nabla \times H + H \cdot \nabla \times E$$

کے ذریعہ

$$H \cdot \nabla \times E - \nabla \cdot (E \times H) = E \cdot J + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \cdot (E \times H) = E \cdot J + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \cdot (E \times H) = E \cdot J + \epsilon E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\epsilon E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھ جا سکتے ہیں لہذا

$$-\nabla \cdot (E \times H) = E \cdot J + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (E \times H) dh = \int_h E \cdot J dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

پر مسئلہ پھیلاؤ کے اطلاق سے

$$(10.48) \quad -\oint_S (E \times H) \cdot dS = \int_h E \cdot J dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہوگی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہوگا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا مکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لحاظی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{S}$$

ہوگا جہاں حجم گھیرتی سطح پر مکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ پونٹنگ سمتیہ⁴¹ \mathcal{P} پکارا جاتا ہے

(10.49)

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

جس سے مراد لحاظی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{W}{m^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پونٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر مکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا مکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر \mathcal{P} کی سمت اس نقطے پر لحاظی طاقت کے بہاؤ کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ \mathcal{P} برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہذا طاقت کی بہاؤ بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہوگی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت \mathbf{E} اور \mathbf{H} کے عمودی ہوتی ہے لہذا \mathcal{P} کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذوبرق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لحاظی کثافت سطحی بہاؤ طاقت

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z = \mathcal{P} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا مکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

کرتے ہوئے

(10.50)

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{W}{m^2}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاؤ دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت موثر E استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضروری نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z, \text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad W$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$(10.51) \quad \mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لیا گیا ہے۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 3.2، 3.45، 4.15 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $z = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاؤ $z = 0$ اور $z = 5 \text{ m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 14.31 W، 23.7 W، 12.48 W، 24.7 W، 26.4 W، 27.1 W

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایضالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہوگی۔ نائیکروم⁴² ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$-j = 1/\underline{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1/\underline{-90^\circ}} = 1/\underline{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہذا

$$\gamma = j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$(10.52) \quad \gamma = (j+1) \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.53) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جاسکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$(10.54) \quad E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $z < 0$ کا z ذو برق اور $z > 0$ کا z موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.54 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$(10.55) \quad E_x = E_0 \cos \omega t \quad (z = 0)$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.55 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.54 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(10.56) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$(10.57) \quad J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.54 اور مساوات 10.57 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد⁴³ کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (10.58)$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد⁴⁴ کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \quad (10.59)$$

ہوگا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف % 1.8 رہ جائے گا۔

تانے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہے لہذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے 9.35 mm $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35 \text{ mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنارہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.135 = 0.368^2$ گنما کم ہوگی۔ خرد امواج⁴⁵ کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد $0.661 \mu m$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہوگا چونکہ کثافت روتار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہوگی لہذا اس سے بہتر ہوگا کہ زیادہ رداس کی نکلی نماتار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661 \mu m$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.59 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$(10.60) \quad v = \omega \delta$$

ملتا ہے۔

تانے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8 \text{ cm}$ اور $v = 2.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000 \text{ km}$ اور رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہوگی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہوگی۔ مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی وجہ سے

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$(10.61) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 10.55 کو گہرائی جلد کی صورت

$$(10.62) \quad E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$(10.63) \quad H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

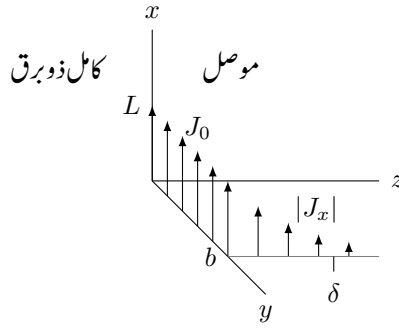
مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پونینٹنگ مساوات

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنارہ گئی ہے۔



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پونٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned} P_{L, \text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathcal{P}_{\text{اوسط}}|_{z=0} dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^L \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{\sigma \delta b L E_0^2}{4} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$(10.64) \quad P_{L, \text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمیل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمیل حل کرتے ہیں۔

$$I = \int_0^\infty \int_0^b I_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} dy dz$$

$$= \frac{J_0 b \delta}{1+j}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

ہوگی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $J \cdot E$ کے برابر ہے لہذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma} (J'_x)^2 b L \delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

ہوگا۔ مربع کو سائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 b L \delta}{4\sigma} \quad (10.65)$$

لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 10.64 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لا محدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رد اس r کے ٹھوس نکلی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جاسکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رد اس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہوگی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نکلی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہذا مزاحمت R

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \quad (10.66)$$

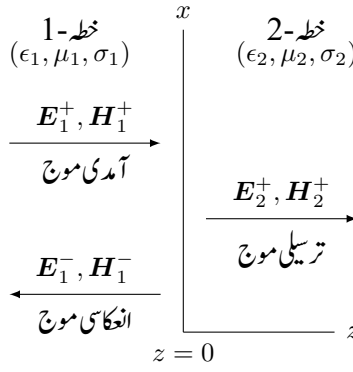
ایک ملی میٹر رد اس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{تانبے}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88 \text{ m}\Omega$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61 \mu\text{m}$ ہوگی لہذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15 \Omega$$

ہوگی۔



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2 \cos 10000t$ ایمپیر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7 \frac{S}{m}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رومزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رومزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: 2.49 W اور 1.25Ω ، $62 \mu\text{m}$ ، $3.09 \text{ m}\Omega$

10.5 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹنے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج ترسیلی تاروں⁴⁶ اور رہبر موج⁴⁷ کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشٹ + جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشٹ - سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad (10.67)$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \quad (10.68)$$

بھی ہوگی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج⁴⁸ کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہذا اس کے حرکت کو عمودی آمد⁴⁹ کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج⁵⁰ کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad (10.69)$$

$$H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \quad (10.70)$$

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدود کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدود کے متوازی ہیں لہذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 264 پر مساوات 9.43 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.45 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کشاف رونہیں پائی جاتی۔ یوں $K_{\perp} = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$H_{m1} = H_{m2} \quad (K_{\perp} = 0)$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.67 اور مساوات 10.69 برابر ہوں گے۔ یوں $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہوگا لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.68 اور مساوات 10.70 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x20}^+}{\eta_2} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہوگا لہذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترتا جاسکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹنے والے امواج

$$E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z} \quad (10.71)$$

$$H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \quad (10.72)$$

بھی پائے جائیں جنہیں انعکاسی امواج⁵¹ کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہذا مسئلہ پونٹنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہو گا تاکہ $E_1^- \times H_1^-$ کی سمت $-a_z$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$(10.73) \quad E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یا

$$(10.74) \quad \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 کو E_{x10}^- کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.73 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس⁵² Γ پکارا اور Γ سے ظاہر⁵³ کیا جاتا ہے۔

$$(10.75) \quad \Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

⁵¹ reflected wave
⁵² reflection coefficient
⁵³ Γ یونانی حروف تہجی گیمّا ہے۔

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \quad (10.76)$$

اسی طرح مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 سے E_{x10}^- ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (10.77)$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل⁵⁴ کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات 10.75 اور مساوات 10.77 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \quad (10.78)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔ یوں مساوات 10.77 سے

$$E_{x20}^+ = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جاسکتا۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.75 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

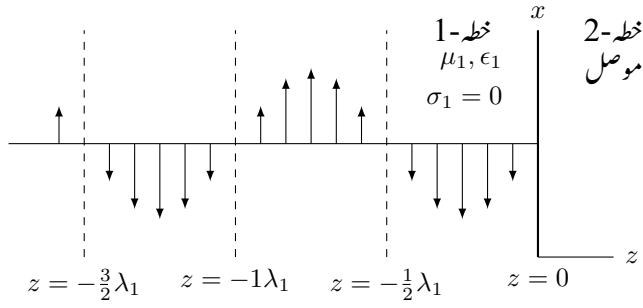
$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی موج کا خطہ بالکل آمدی موج کے خطے کے برابر ہے لیکن ان میں 180° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔ اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -j2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$(10.79) \quad E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔ حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.79 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.79 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔ مساوات 10.79 کو ساکن موج⁵⁵ کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیظ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E_{xs1}^+ = \eta_1 H_{ys1}^+$ اور $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہوتے ہیں لہذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

یا

$$(10.80) \quad H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$

ہوگا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں 90° کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برقی کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 50 \Omega \\ \eta_2 &= 377 \Omega \\ E_{x10}^+ &= 10 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

ہیں۔ یوں

$$\Gamma = \frac{377 - 50}{377 + 50} = 0.7658$$

ہے لہذا

$$E_{x10}^- = 0.7658 \times 10 = 7.658 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ہوگا۔ پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned} H_{y10}^+ &= \frac{10}{50} = 0.2 \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ H_{y10}^- &= -\frac{7.658}{50} = -0.153 \frac{\text{A}}{\text{m}} \end{aligned}$$

ہیں۔ آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.51 سے

$$P_{1, \text{اوسط}}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^+)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

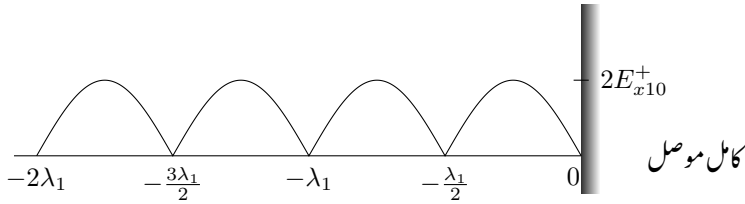
جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1, \text{اوسط}}^- = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^-)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 0.5864 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہے۔ ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $\eta_1 = 50 \Omega$ استعمال کئے گئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$(10.81) \quad \frac{(E_{x10}^-)^2}{2\eta_0} = |\Gamma|^2 \frac{(E_{x10}^+)^2}{2\eta_0}$$

کے برابر ہے۔



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{x10}^+ = 17.658 \frac{V}{m}$$

$$H_{y20}^+ = \frac{17.658}{377} = 0.04684 \frac{A}{m}$$

ہیں لہذا

$$P_{2, \text{اوسط}}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x20}^+)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z} \cos \theta_{\eta 2} = 0.4135 \frac{W}{m^2}$$

ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1, \text{اوسط}}^+ = P_{1, \text{اوسط}}^- + P_{2, \text{اوسط}}^+$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ ہا آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار⁵⁶ سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جاسکتا ہے۔ مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر⁵⁷ رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔ چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin \beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔ اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

مثال 10.2: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہذا $E_{xs1}^- = -E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیث آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیثے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو شرح ساکن موج⁵⁸ کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^+ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^- &= \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^- = |\Gamma| E_{x10}^+ e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$(10.82) \quad E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^+$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ لہذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔ اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں +1 حاصل ہوتی ہے۔ یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp \pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi, \dots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح مساوات 10.82 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^+$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی +1

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} - \pi \right), \left(\frac{\phi}{2} + \pi \right), \left(\frac{\phi}{2} - 2\pi \right), \dots$$

پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.83) \quad -\beta_1 z_{\text{بندتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$(10.84) \quad |E_{xs1}|_{\text{بندتر}} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔ اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right), \dots$$

پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.85) \quad -\beta_1 z_{\text{کمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$(10.86) \quad |E_{xs1}|_{\text{کمتر}} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔ موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔ کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $0 = \beta_1 z$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔ اگر $\eta_1 < \eta_2$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $0 = \beta_1 z$ پر برقی دباؤ کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔ اس کے برعکس اگر $\eta_1 > \eta_2$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہوگی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $\frac{V}{m}$ 10 اور 1 GHz تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\sigma_1 = 0$ اور $\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 3$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\sigma_1 = 0$ اور $\mu_{R1} = 1, \epsilon_{R1} = 6$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہوگی، یہاں $\lambda_1 = 17.32 \text{ cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25 \text{ cm}$ ہیں۔ قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66 \Omega$ اور $\eta_2 = 153.91 \Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_2 < \eta_1$ ہے لہذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی $z < 0$ ، میں سرحد سے دور ہر 8.66 cm فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات 10.86 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $8.3 \frac{V}{m}$ = $|E_{xs1}|$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7 \frac{V}{m}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، ... سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج⁵⁹ کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.87) \quad s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ رہتا ہے لہذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

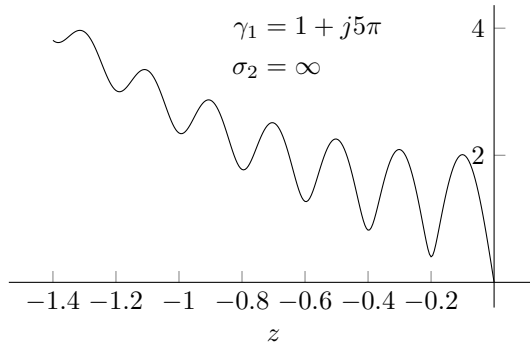
$$(10.88) \quad s \geq 1$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گا۔ پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے جیسے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $\eta_2 = \eta_1$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہوگا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتیٰ کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہوگی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکت مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^+ = 1 \frac{V}{m}$ ہے۔ چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2 \text{ m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً گنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تقابلی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل تر سلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہوگی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہوگا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

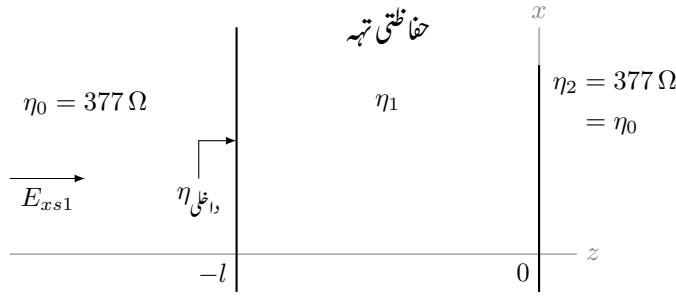
آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\mp \eta_1$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{x10}^+$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے اور داخلی η سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta_{\text{داخلی}} = \left. \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}} \right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور پولر مماثل⁶⁰ استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_{da,gl} = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$(10.89) \quad \eta_{da,gl} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{da,gl}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی⁶¹ کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں

$$(10.90) \quad \eta_{da,gl} = j\eta_1 \tan \beta_1 l \quad (\eta_2 = 0)$$

ہو گا لہذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.89 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔ یہ تہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔ شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہ ہے۔ یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ 377Ω ہوتی ہے۔ ذو برق کی بنی حفاظتی تہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔ حفاظتی تہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ ایسا تب ہو گا جب $\eta_{da,gl} = \eta_2$ ہو یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

⁶⁰ $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$
matched⁶¹

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $\eta_1 < 377$ ہے لہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جاسکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\lambda_1}{\beta_1} = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1 \text{ cm}$$

رکھنی ہوگی۔

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ \approx 167.6 \Omega$$

ہوگی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہوگا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\left(\frac{E_{x10}^-}{2\eta_0}\right)^2}{\left(\frac{E_{x10}^+}{2\eta_0}\right)^2} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78 \%$$

ہوگی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\sigma_1 = 0$ اور $\mu_{R1} = 1$ ، $\epsilon_{R1} = 5$ ہیں۔ سرحد کے دوسری جانب مستقل $\sigma_2 = 0$ اور $\mu_{R2} = 10$ ، $\epsilon_{R2} = 2$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6 \text{ cm}$ پر، غلی η حاصل کریں۔

جوابات: 5، 1 اور -61.8° / 86.9°

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمیٹر)¹ اور اینٹینا² یا پھر ڈیم میں نسب جزیئر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباؤ اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیلی تجربے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

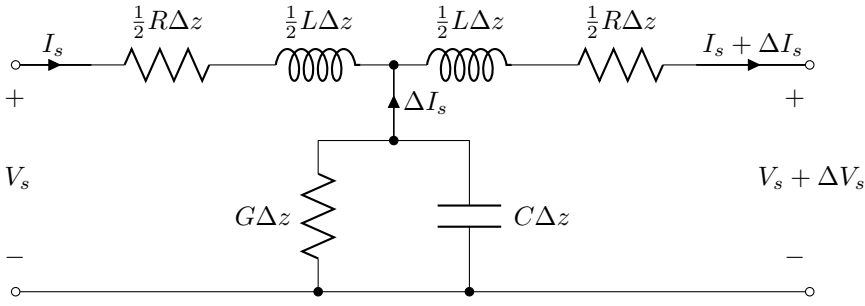
11.1 ترسیلی تار کے مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ, μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل C, L, R اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت a_z جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$ ، امالہ $L\Delta z$ ، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباؤ

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R ، L ، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔ یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔ پولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} \right] \text{ حقیقی}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباؤ کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) (I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = - (R + j\omega L) I_s - \frac{1}{2} (R + j\omega L) \Delta I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہوگا۔ یوں $\Delta z \rightarrow 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اسے

$$(11.1) \quad \frac{dV_s}{dz} = - (R + j\omega L) I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباؤ

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s \right] (G\Delta z + j\omega C\Delta z)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = - (G + j\omega C) V_s + \frac{1}{2} (R + j\omega L) (G + j\omega C) I_s \Delta z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta z \rightarrow 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور یوں

$$(11.2) \quad \frac{dI_s}{dz} = - (G + j\omega C) V_s$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

میں $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$ اور $\mathbf{H}_s = H_{ys}\mathbf{a}_y$ پر کرنے سے

$$(11.3) \quad \frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

سے

$$(11.4) \quad \frac{dH_{ys}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_{xs}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ C ، σ کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لا محدود یکساں مستوی امواج اور لا محدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$(11.5) \quad V_s = V_0e^{-\gamma z}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباؤ کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا جیٹہ V_0 ہے۔ حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$(11.6) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

ہو جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$(11.7) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہو گا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$(11.8) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$(11.9) \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$(11.10) \quad I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$(11.11) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔ اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہوگی۔ ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$(11.12) \quad \Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

ہوگی۔ انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$(11.13) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta = \eta_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔ اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$(11.14) \quad Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l}$$

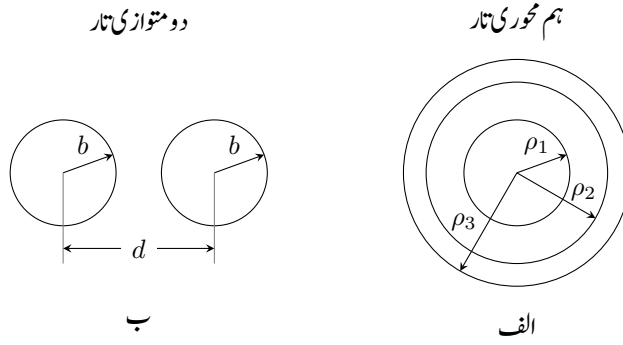
لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو $\omega = 5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر کام کرتی ہے کے مستقل $R = 0.15 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $L = 0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $C = 8 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $G = 80 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس کے α ، β ، λ اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $2.236 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 2.81 m اور $2.23 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9 / -0.029^\circ \Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔ سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ, μ اور σ ہیں۔ صفحہ 143 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1\text{ m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (11.15)$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 247 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.16)$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاؤ پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \quad (11.17)$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right) \quad (11.18)$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رو یکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظر انداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہوگی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔ یوں

اندرونی تار کے بیرونی باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو a_z سمت میں ہے اور چونکہ $J_s = \sigma_c E_s$ ہوتا ہے لہذا تار کی سطح پر E_s کا مماس جزو بھی a_x سمت میں ہوگا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \quad (11.19)$$

ہوگی۔ اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہوگی۔ اگرچہ ہم نکلی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\rho_1 \ll \delta$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں صفحہ 292 پر مساوات 10.61 سے

$$\left| \rho_1 \frac{E_{zs}}{H_{ys}} \right| = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباؤ ہے لہذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \quad (11.20)$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہوگی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہوگی۔ صفحہ 291 پر مساوات 10.58 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1) \quad (11.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.22)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.23)$$

ہوگا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.24)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جاسکتا ہے۔ بے پناہی³ تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے⁴ استعمال ہوتے ہیں۔ یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$(11.25) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی ایک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔ اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباؤ صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔ تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 120 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔ اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نکلی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔ یوں

$$(11.26) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھاتے ہیں۔ ایک تار سے دوسرے تار تک E کی لکیری تکمل سے برقی دباؤ V حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 125 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاؤ کے برابر ہوتی ہے، یعنی $\rho_S = D$ ۔ یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S dS = \epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔ یوں

$$(11.27) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V}$$

ہوگا۔ اب موصل کے سطح پر عمودی E جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو عمودی $E = \sigma J$ لکھی جاسکتی ہے لہذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

ہوگی۔ یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$(11.28) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V}$$

ہوگی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$(11.29) \quad G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$

لکھا جاسکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 3.49 \text{ mm}$ اور $\frac{S}{m} = 3.82 \times 10^7$ ہیں کے ذوق برق کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\frac{S}{m} = 10$ ہیں۔ اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ ترسیلی تار کے α ، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1 \frac{nF}{m}$ ، $0.25 \frac{\mu H}{m}$ ، $1.29 \frac{nH}{m}$ ، $0.014 \frac{Np}{m}$ اور $15.1 \frac{rad}{m}$ $50/0.055^\circ \Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔ تار کا رداس b ، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔ تاروں کے گرد ذوق برق کے مستقل ϵ ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 149 پر مساوات 5.75 کی نصف ہوگی۔ اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔ یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$(11.30) \quad C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

ہوگی۔ اگر $d \ll b$ ہو تب مساوات 5.76 سے

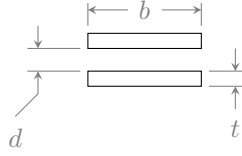
$$C = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

لکھی جاسکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$(11.31) \quad L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \right) \quad (\delta \ll b)$$

ہے۔ تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزرتی ہے۔ اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہذا فی میٹر مزاحمت

$$(11.32) \quad R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c}$$

ہوگی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔ مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$(11.33) \quad G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کیپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$(11.34) \quad Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار⁵ دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔ موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذو برق کے مستقل μ ، ϵ اور σ ہیں۔

اگر $d \gg b$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کیپیسٹنس

$$(11.35) \quad C = \frac{\epsilon b}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d}$$

ہوگی۔ یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$(11.36) \quad L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu \epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b}$$

ہوگی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں کل امالہ

$$(11.37) \quad L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t)$$

ہوگی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہوگی۔ یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b \delta}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$(11.38) \quad R = \frac{2}{\sigma_c b \delta} \quad (\delta \ll t)$$

ہوگی۔

مساوات 11.29 سے

$$(11.39) \quad G = \frac{\sigma b}{d}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$(11.40) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d}{b}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

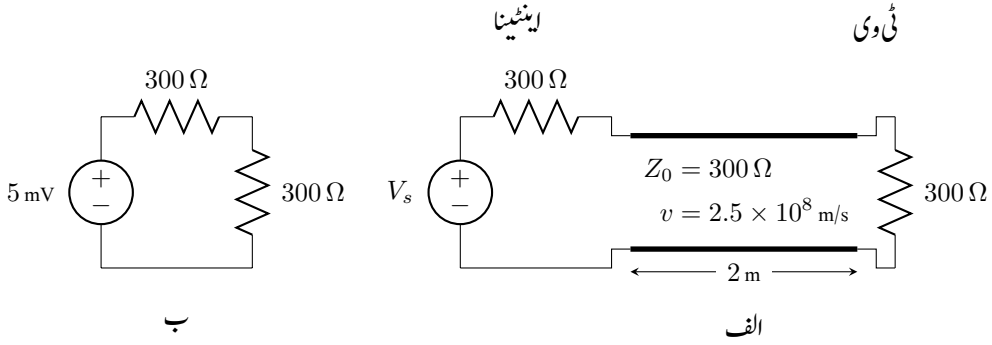
مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ ان میں طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ ہم محوری تار کا $\rho_1 = 0.5 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 2.8 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b = 0.5 \text{ mm}$ ، $d = 9 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 5$ ہیں۔ سطح کے $d = 0.2 \text{ mm}$ ، $b = 5 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 2.2$ ہیں۔

جوابات: $0.816, 50.6 \text{ cm}$ ، $-0.215, 33.5 \text{ cm}$ ، $0.26, 42.6 \text{ cm}$

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔ یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ 300Ω ہے۔ ایسی تار ٹی وی کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھون⁷ مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباؤ V_s اور اس کے



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

ساتھ سلسلہ وار جڑی 300Ω کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت 300Ω ہے۔ ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ ٹی وی اسٹیشن سے خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5 \text{ m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہیں۔ ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \text{ rad}$$

یا 288° ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت 300Ω ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی 300Ω ہے لہذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5 \text{ mV}$$

پیدا کرے گا۔ اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہذا منع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا 2.5 mV کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچنے کا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈین پیچھے ہو گا۔ یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{ب}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔ داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{ب}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔ چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{ب}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41 \text{ nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباؤ اور برقی رو کے موثر⁸ قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔ دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی 300Ω ہے۔ یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل 150Ω کا بار پایا جاتا ہے۔ اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$(11.41) \quad \Gamma = \frac{1}{3} \angle \pi$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب 300Ω کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7 \angle -23.79^\circ = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

ہوگی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔ کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s, داخلی} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013 / 15.017^\circ \mu A$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{داخلی} = \frac{1}{2} (6.3013 \times 10^{-6})^2 \times 466.39 = 9.2593 \text{ nW}$$

طاقت فراہم کی جارہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہذا 150Ω کے بار کو 9.2593 nW حاصل ہوگا جو گزشتہ جواب یعنی 10.41 nW سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہوگا لہذا ہر ٹی وی کو صرف 4.6297 nW طاقت مہیا ہوگا۔ چونکہ ایک ٹی وی 300Ω مزاحمت رکھتا ہے لہذا ٹی وی پر پیدا برقی دباؤ

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{|V_{s, بار}|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$|V_{s, بار}| = 1.66667 \text{ mV}$$

ہوگا۔ یہ قیمت 2.5 mV سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباؤ کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباؤ موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.83

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

دیتا ہے۔ اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلند تر}} &= \frac{1}{-0.8\pi} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \\ &= -1.25 \left(\frac{1}{2} + n \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.875 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو -3.125 m بلند تر z حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے 0.625 m بلند تر z حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محد پر پائی جاتی ہے لہذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہذا ان کے مقامات

$$z_{\text{نمبر}} = 0 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.25 \text{ m}$$

ہوں گے۔ آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباؤ کا نشیب پایا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_0 < Z_L$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر 1.66 mV ہے لہذا دباؤ کی کمترین قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباؤ کی چوٹی اس کے دگنا یعنی 3.32 mV حاصل ہوتی ہے۔ ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ

$$V_{s, \text{داخلی}} = I_{s, \text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left(6.3013 \times 10^{-6} / 15.017^\circ \right) (509.7 / -23.79^\circ) = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔ آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباؤ یوں

$$V_{s, \text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباؤ اور بار پر برقی دباؤ کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔ اگرچہ ہم دونوں برقی دباؤ کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔ مساوات 10.82 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right) V_0^+$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباؤ معلوم ہے لہذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s, \text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l} \right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s, \text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 / -8.77^\circ}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3} e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 / -72^\circ$$

اور یوں بار یعنی $z = 0$ پر برقی دباؤ حاصل کی جاسکتی ہے

$$V_{s, \text{بار}} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 / -72^\circ = 0.001666 / -288^\circ$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباؤ کی حتمی قیمت برابر ہیں۔ تار کے داخلی سرے پر دباؤ کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباؤ کا زاویہ 72° ہے۔ یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی 279.23° ہے۔ انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کمپیسٹر $Z_L = -j300 \Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔ کمپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 / -90^\circ$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیثہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔ شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$

ہوگا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

ہوگی جو خیالی عدد ہے لہذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جاسکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیبی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ ان میں سمتھ نقشہ⁹ زیادہ اہم ہے۔ اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔ اس نقشے میں بار بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں z کار تیمی محدود کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

اور

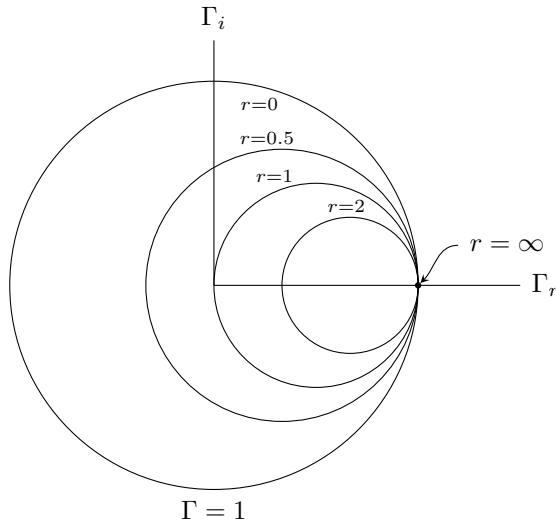
$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (11.42)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$



شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(11.43) \quad r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$(11.44) \quad x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

لکھ جاسکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

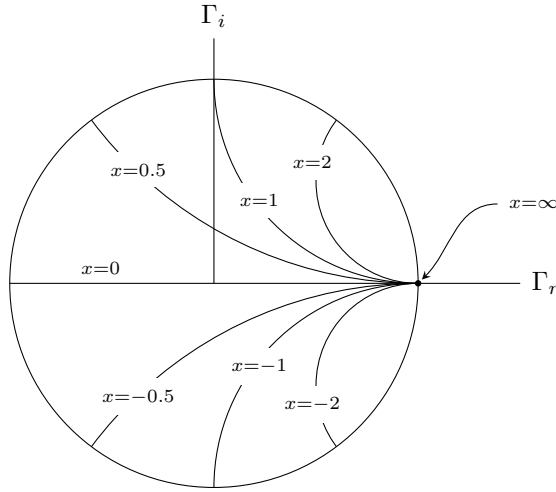
$$(11.45) \quad \left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

$$(11.46) \quad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر $r = 0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے $(0, 0)$ پر ہے۔ خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح $r = \infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر $(1, 0)$ ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma = 1$ تک محدود ہے۔ اب $r = \infty$ سے مراد $Z_L - \infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma = 1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال $r = 1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5, 0)$ ہے۔ شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ $r = 0.5$ اور $r = 2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مرکز $(1, \frac{1}{x})$ ہیں۔ لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z = \infty$ اور $\Gamma = 1 + j0$ ہوں گے۔ مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1, 0)$ ہے لہذا یہ $\Gamma = 1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔ اگر $x = 1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1, 1)$ ہوں گے۔ جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma| = 1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = -1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔ شکل میں $x = 0.5$ ، $x = -0.5$ ، $x = 2$ اور $x = -2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں $x = 0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدود پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔ یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔ اگر نقشے پر درکار r اور x (یا x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔ جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔ نقشے کے مرکز $(0, 0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدود یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔ اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔ یوں محدود کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدود کے مرکز $(0, 0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جاسکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔ آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔ اب مثال کے طور پر $Z_0 = 50 \Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50 \Omega$ کا بار $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔ شرح انعکاس تقریباً $0.62/83^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جاسکتا ہے۔ آپس دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

کو برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{Z_{\text{دغلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جاسکتی ہے جس میں $l = -z$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}} \quad (11.47)$$

باب 12

سوالات

جدول 12.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 12.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 12.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 12.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

