

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ . . . . .	1.1
2	سمتی الجبرا . . . . .	1.2
3	کارتیسی محدود . . . . .	1.3
5	اکائی سمتیات . . . . .	1.4
9	میدانی سمتیہ . . . . .	1.5
9	سمتی رقبہ . . . . .	1.6
10	غیر سمتی ضرب . . . . .	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . . .	1.8
17	گول نلکی محدود . . . . .	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . . .	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . . .	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . . .	
27	1.10 کروی محدود . . . . .	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع . . . . .	
41	2.2 برقی میدان کی شدت . . . . .	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . . .	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .	
53	2.5 چارج بردار حجم . . . . .	
54	2.6 مزید مثال . . . . .	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط . . . . .	
63	2.8 سوالات . . . . .	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج . . . . .
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ . . . . .
66	3.3	گاؤس کا قانون . . . . .
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال . . . . .
68	3.4.1	نقطہ چارج . . . . .
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح . . . . .
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . . .
71	3.5	ہم محوری تار . . . . .
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . . .
76	3.8	پھیلاؤ . . . . .
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات . . . . .
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات . . . . .
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ . . . . .
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام . . . . .
86	4.2	لکیری تکملہ . . . . .
91	4.3	برقی دباؤ . . . . .
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ . . . . .
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ . . . . .
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ . . . . .
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ . . . . .
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان . . . . .
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان . . . . .
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان . . . . .
104	4.6	جفت قطب . . . . .
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط . . . . .
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . . .

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
187	7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
191	7.3 گردش	
198	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
204	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
205	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
206	7.4 مسئلہ سٹوکس	
210	7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	
216	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
221	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
222	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
223	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
227	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
227	8.1 متحرک چارج پر قوت	
228	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
231	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
232	8.4 قوت اور مروڑ	
237	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
238	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
241	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
242	8.8 مقناطیسی دور	
245	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
246	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
250	8.11 مشترکہ امالہ	

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
290	10.4	موصل میں امواج
296	10.5	انعکاس مستوی موج
302	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
331	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
332	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

337	12 تقطیب موج
337	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب . . . . .
340	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئٹنگ سمتیہ . . . . .
343	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
343	13.1 ترچھی آمد . . . . .
354	13.2 ترسیم ہائی گن . . . . .
357	14 موج اور گھمکیا
357	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ . . . . .
358	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج . . . . .
364	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج . . . . .
373	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور . . . . .
379	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی $TM_{mn}$ موج . . . . .
381	15 سوالات



## باب 11

### ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمیٹر)<sup>1</sup> اور لینڈینا<sup>2</sup> یا پھر ڈیم میں نسب جزیر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباؤ اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیلی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہوگا۔

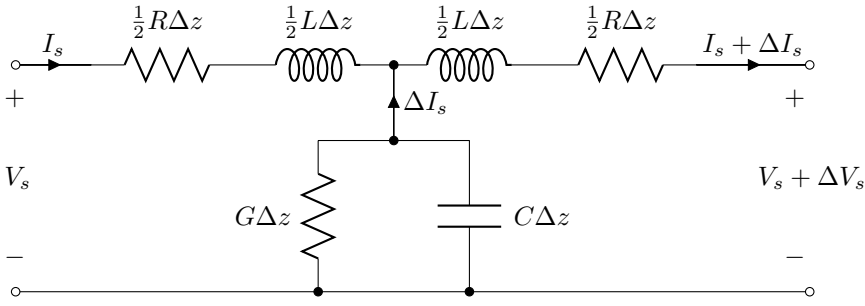
#### 11.1 ترسیلی تار کے مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت  $\sigma_c$  رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل  $\mu, \epsilon$  (عموماً  $\mu_0$ ) اور  $\sigma$  ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل  $C, L, R$  اور  $G$  حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت  $a_z$  جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی  $\Delta z$  کی مزاحمت  $R\Delta z$ ، امالہ  $L\Delta z$ ، کپیسٹنس  $C\Delta z$  اور ایصالیت  $G\Delta z$  ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباؤ

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات  $R$ ،  $L$ ،  $C$  اور  $G$  تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔ یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔ یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[ V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} \right] \text{ حقیقی}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $e^{j\omega t}$  اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ  $V_s$  لکھتے ہوئے زیر نوشت میں  $s$  یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباؤ کے قانون سے

$$V_s = \left( \frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s + \left( \frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) (I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = - (R + j\omega L) I_s - \frac{1}{2} (R + j\omega L) \Delta I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $\Delta z$  کو صفر کے قریب کر لیا جائے تب  $\Delta I_s$  بھی صفر کے قریب تر ہوگا۔ یوں  $0 \rightarrow \Delta z$  کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اسے

$$(11.1) \quad \frac{dV_s}{dz} = - (R + j\omega L) I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباؤ

$$V_s - \left( \frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[ V_s - \left( \frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s \right] (G\Delta z + j\omega C\Delta z)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = - (G + j\omega C) V_s + \frac{1}{2} (R + j\omega L) (G + j\omega C) I_s \Delta z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $\Delta z \rightarrow 0$  کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور یوں

$$(11.2) \quad \frac{dI_s}{dz} = - (G + j\omega C) V_s$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

میں  $\mathbf{H}_{ys} = H_{ys}\mathbf{a}_y$  اور  $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$  سے

$$(11.3) \quad \frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

سے

$$(11.4) \quad \frac{dH_{ys}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_{xs}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں  $I_s$  کی جگہ  $H_{ys}$  لکھنے اور اسی طرح  $G$  کی جگہ  $\sigma$  کی جگہ  $\epsilon$  اور  $V_s$  کی جگہ  $E_{xs}$  لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں  $L$  اور  $\mu$  کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر  $R$  کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم  $j\omega\mu$  کی جوڑی  $R + j\omega L$  لے سکتے ہیں۔

لا محدود یکساں مستوی امواج اور لا محدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایابی نہیں جاتا لہذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$(11.5) \quad V_s = V_0e^{-\gamma z}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباؤ کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت  $z$  جانب حرکت کر رہی ہے اور  $z = 0$  پر اس کا جیٹہ  $V_0$  ہے۔ حرکت مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$(11.6) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

ہو جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$(11.7) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہوگا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$(11.8) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل  $R = G = 0$  ہوتے ہیں لہذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$(11.9) \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$(11.10) \quad I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ  $Z_0$  کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$(11.11) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔ اسی طرح اگر  $Z_{01}$  قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج  $Z_{02}$  قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہوگی۔ ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$(11.12) \quad \Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

ہوگی۔ انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$(11.13) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آخر میں اگر  $z > 0$  پر  $\eta_2 = -l$  ہو تب  $\eta = -l$  پر  $E_{xs}$  اور  $H_{ys}$  کی شرح

$$\eta_{داخلی} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔ اس سے  $z > 0$  پر  $Z_{02}$  کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے  $z = -l$  پر  $V_s$  اور  $I_s$  کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$(11.14) \quad Z_{داخلی} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l}$$

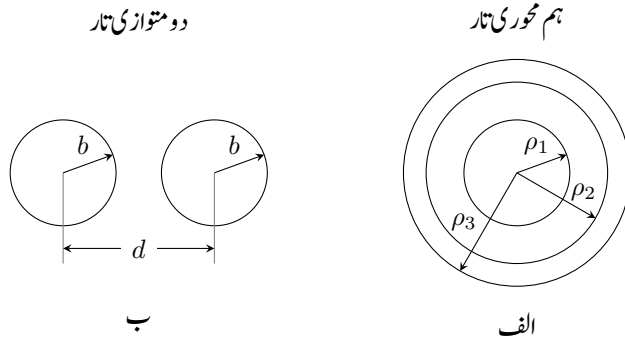
لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو  $\omega = 5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  پر کام کرتی ہے کے مستقل  $R = 0.15 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ،  $L = 0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ،  $G = 8 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$  اور  $C = 80 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$  ہیں۔ اس کے  $\alpha, \beta, \lambda, v$  اور  $Z_0$  حاصل کریں۔

جوابات:  $1.57 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ،  $2.236 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ،  $2.81 \text{ m}$ ،  $2.23 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  اور  $-0.029^\circ$

## 11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہوگا۔ سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

### 11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس  $\rho_1$  ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس  $\rho_2$  اور اس کا بیرونی رداس  $\rho_3$  ہیں۔ تاروں کے درمیان ذوبرق کے مستقل  $\mu, \epsilon$  اور  $\sigma$  ہیں۔ صفحہ 143 پر مساوات میں تار کی لمبائی  $L = 1 \text{ m}$  پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (11.15)$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 247 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.16)$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی روصرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاوپایا جاتا ہے اوریوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \quad (11.17)$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذوبرق کا  $\epsilon$  اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)} \left( \rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right) \quad (11.18)$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رویکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر روصرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظر انداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہوگی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد  $\delta$  اندرونی تار کے رداس  $\rho_1$  سے بہت کم ہے۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی

باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو  $a_z$  سمت میں ہے اور چونکہ  $J_s = \sigma_c E_s$  ہوتا ہے لہذا تار کی سطح پر  $E_s$  کا مماثل جزو بھی  $a_x$  سمت میں ہوگا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں  $\sigma_c$  لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \quad (11.19)$$

ہوگی۔ اب تار کی سطح پر  $E_{zs}$  اور  $H_{ys}$  کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہوگی۔ اگرچہ ہم نکلی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن  $\rho_1 \ll \delta$  کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو دو موٹائی اور  $2\pi\rho_1$  چوڑائی کا موصل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں صفحہ 293 پر مساوات 10.65 سے

$$\left|_{\rho_1} \frac{E_{zs}}{H_{ys}} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}\right.$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ  $E_{zs}$  دراصل فی میٹر برقی دباؤ ہے لہذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \quad (11.20)$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت  $\sigma_c$  پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہوگی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہوگی۔ صفحہ 291 پر مساوات 10.62 کو  $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$  لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1) \quad (11.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.22)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.23)$$

ہوگا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.24)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جاسکتا ہے۔ بے پناہ<sup>3</sup> تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے<sup>4</sup> استعمال ہوتے ہیں۔ یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.25)$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذوق میں سے گزرتی ایک سمتی برقی رو  $I = GV$  سے حاصل ہوتی ہے۔ اندرونی تار پر  $\rho_L$  اور بیرونی تار پر  $\rho_L$  - کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباؤ صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔ تاروں کے درمیان ذوق برقی میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذوق برقی کی موصلیت  $\sigma$  لکھتے ہوئے، صفحہ 120 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس  $\rho$  پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma \rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔ اندرونی تار کے گرد رداس  $\rho$  پر  $L$  لمبائی کی نیکی سطح کا رقبہ  $2\pi\rho L$  ہو گا۔ ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ  $2\pi\rho$  سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma \rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔ یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (11.26)$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں  $G$  کی قیمت  $C$  کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ ایک تار سے دوسرے تار تک  $E$  کی لکیری تکمیل سے برقی دباؤ  $V$  حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 125 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاؤ کے برابر ہوتی ہے، یعنی عمودی  $\rho_S = D$ ۔ یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S dS = \epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں  $S$  تار کا سطحی رقبہ ہے اور  $D = \epsilon E$  لکھا گیا گا۔ یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V} \quad (11.27)$$

ہو گا۔ اب موصل کے سطح پر عمودی  $E$  جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو عمودی  $J = \sigma E$  لکھی جاسکتی ہے لہذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$



ہوگی۔ یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$(11.28) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{عمودی} dS}{V}$$

ہوگی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$(11.29) \quad G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$

لکھا جاسکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے  $\rho_1 = 1 \text{ mm}$ ،  $\rho_2 = 3.49 \text{ mm}$  اور  $\frac{S}{m} = 3.82 \times 10^7$  ہیں کے ذریعہ کے مستقل  $\mu_R = 1$ ،  $\epsilon_R = 2.25$  اور  $\frac{\mu_S}{m} = 10$  ہیں۔ اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ ترسیلی تار کے  $\alpha$ ،  $\beta$  اور  $Z_0$  بھی حاصل کریں۔

جوابات:  $0.1 \frac{nF}{m}$ ،  $0.25 \frac{\mu H}{m}$ ،  $1.29 \frac{nH}{m}$ ،  $0.014 \frac{NP}{m}$ ،  $15.1 \frac{rad}{m}$  اور  $50/0.055^\circ \Omega$

### 11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔ تار کا رداس  $b$ ، تاروں کے مابین فاصلہ  $d$  جبکہ تار کی موصلیت  $\sigma_c$  ہے۔ تاروں کے گرد ذریعہ کے مستقل  $\epsilon$ ،  $\mu$  اور  $\sigma$  ہیں۔ اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 149 پر مساوات 5.75 کی نصف ہوگی۔ اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔ یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$(11.30) \quad C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

ہوگی۔ اگر  $d \gg b$  ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

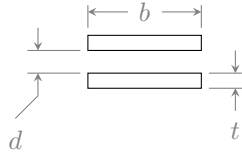
$$L_{بیرونی} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{بیرونی} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جاسکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$(11.31) \quad L_{بلند تعدد} = \frac{\mu}{\pi} \left( \frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \right) \quad (\delta \ll b)$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

ہے۔ تار کی بیرونی  $\delta$  تہہ برقی رو گزارتی ہے۔ اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش  $S = 2\pi b\delta$  ہے لہذا فی میٹر مزاحمت

$$(11.32) \quad R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c}$$

ہوگی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔ مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$(11.33) \quad G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$(11.34) \quad Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

حاصل ہوتا ہے۔

### 11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار<sup>5</sup> دکھایا گیا ہے جس میں  $b$  چوڑائی اور  $t$  موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ  $d$  ہے۔ موصل چادر کی موصلیت  $\sigma_c$  جبکہ ارد گرد کے ذوبق کے مستقل  $\mu, \epsilon$  اور  $\sigma$  ہیں۔

اگر  $d \gg b$  ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کپیسٹنس

$$(11.35) \quad C = \frac{\epsilon \text{ رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d}$$

ہوگی۔ یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$(11.36) \quad L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu \epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b}$$

ہوگی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں کل امالہ

$$(11.37) \quad L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t)$$

ہوگی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہوگی۔ یوں برقی رو رقبہ  $b\delta$  سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت  $\frac{1}{\sigma_c b \delta}$  حاصل ہوتی ہے۔ یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R = \frac{2}{\sigma_c b \delta} \quad (\delta \ll t) \quad (11.38)$$

ہوگی۔

مساوات 11.29 سے

$$G = \frac{\sigma b}{d} \quad (11.39)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{d}{b}} \quad (11.40)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

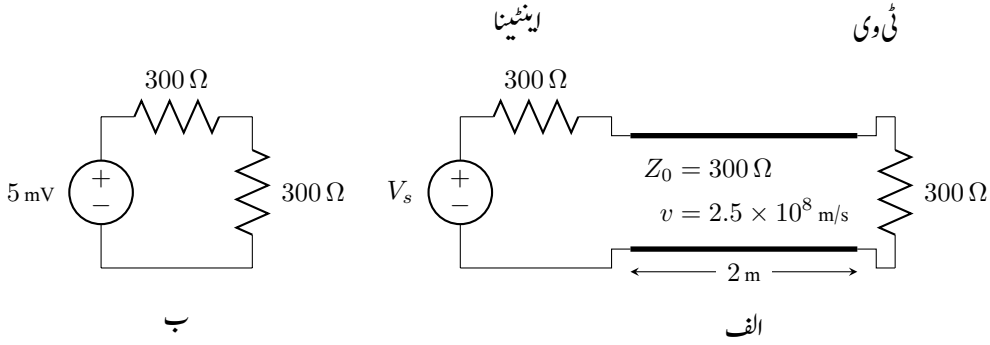
مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ ان میں طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے تمام کے لئے  $\lambda$  اور  $\Gamma$  حاصل کریں۔ ہم محوری تار کا  $\rho_1 = 0.5 \text{ mm}$ ،  $\rho_2 = 2.8 \text{ mm}$ ،  $\mu_R = 1$  اور  $\epsilon_R = 3.1$  ہیں۔ متوازی تار کے  $b = 0.5 \text{ mm}$ ،  $d = 9 \text{ mm}$  اور  $\mu_R = 1$  ہیں۔ سطح کے  $d = 0.2 \text{ mm}$ ،  $b = 5 \text{ mm}$  اور  $\epsilon_R = 2.2$  ہیں۔

جوابات:  $0.26, 42.6 \text{ cm}$ ،  $-0.215, 33.5 \text{ cm}$ ،  $0.816, 50.6 \text{ cm}$

## 11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔ یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ  $300 \Omega$  ہے۔ ایسی تار ٹی وی<sup>6</sup> کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھون<sup>7</sup> مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباؤ  $V_s$  اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی  $300 \Omega$  کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت  $300 \Omega$  ہے۔ ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ ٹی وی اسٹیشن سے



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار  $2.5 \times 10^8 \frac{m}{s}$  ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5 \text{ m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہیں۔ ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \text{ rad}$$

یا  $288^\circ$  ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت 300 Ω ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی 300 Ω ہے لہذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5 \text{ mV}$$

پیدا کرے گا۔ اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہذا منع طاقت  $V_s$  ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا  $2.5 \text{ mV}$  کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچنے کا البتہ یہ داخلی اشارے سے  $1.6\pi$  ریڈین پیچھے ہو گا۔ یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{ب}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔ داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{ب}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔ چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{ب}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41 \text{ nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ  $P = VI$  میں برقی دباؤ اور برقی رو کے موثر<sup>8</sup> قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم  $\sqrt{2}$  کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔ دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی  $300 \Omega$  ہے۔ یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل  $150 \Omega$  کا بار پایا جاتا ہے۔ اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$(11.41) \quad \Gamma = \frac{1}{3} \angle \pi$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب  $300 \Omega$  کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7 \angle -23.79^\circ = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

ہوگی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔ کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s, داخلی} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013/15.017^\circ \mu A$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{داخلی} = \frac{1}{2} (6.3013 \times 10^{-6})^2 \times 466.39 = 9.2593 \text{ nW}$$

طاقت فراہم کی جارہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہذا  $150 \Omega$  کے بار کو  $9.2593 \text{ nW}$  حاصل ہوگا جو گزشتہ جواب یعنی  $10.41 \text{ nW}$  سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہوگا لہذا ہر ٹی وی کو صرف  $4.6297 \text{ nW}$  طاقت مہیا ہوگا۔ چونکہ ایک ٹی وی  $300 \Omega$  مزاحمت رکھتا ہے لہذا ٹی وی پر پیدا برقی دباؤ

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{|V_{s, بار}|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$|V_{s, بار}| = 1.66667 \text{ mV}$$

ہوگا۔ یہ قیمت  $2.5 \text{ mV}$  سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباؤ کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباؤ موج کے چوٹی کے مقامات مساوات  $10.87$

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

دیتا ہے۔ اس میں  $\beta = 0.8\pi$  اور  $\phi = \pi$  پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلند تر}} &= \frac{1}{-0.8\pi} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \\ &= -1.25 \left( \frac{1}{2} + n \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں  $n = 0$  اور  $n = 1$  پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.875 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر  $n = 2$  پر کیا جائے تو  $-3.125 \text{ m}$  بلند تر  $z$  حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح  $n = -1$  پر کرنے سے  $0.625 \text{ m}$  بلند تر  $z$  حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی  $z$  محد پر پائی جاتی ہے لہذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہذا ان کے مقامات

$$z_{\text{نمبر}} = 0 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.25 \text{ m}$$

ہوں گے۔ آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباؤ کا نشیب پایا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی  $Z_0$  اور  $Z_L$  کی صورت میں اگر  $Z_0 < Z_L$  ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر  $1.66 \text{ mV}$  ہے لہذا دباؤ کی کمترین قیمت یہی ہے اور  $s = 2$  سے دباؤ کی چوٹی اس کے دگنا یعنی  $3.32 \text{ mV}$  حاصل ہوتی ہے۔ ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ

$$V_{s, \text{داخلی}} = I_{s, \text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left( 6.3013 \times 10^{-6} / 15.017^\circ \right) (509.7 / -23.79^\circ) = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر  $0.5\lambda$  فاصلے پر چوٹی ہو گی لہذا سرحد سے  $\frac{3\lambda}{4}$  فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔ آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباؤ یوں

$$V_{s, \text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباؤ اور بار پر برقی دباؤ کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔ اگرچہ ہم دونوں برقی دباؤ کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔ مساوات 10.86 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = \left( e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right) V_0^+$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباؤ معلوم ہے لہذا اس میں  $z = -l$  پر کرنے سے

$$V_{s, \text{داخلی}} = \left( e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l} \right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے  $V_0^+$  کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s, \text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 / -8.77^\circ}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3} e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 / -72^\circ$$

اور یوں بار یعنی  $z = 0$  پر برقی دباؤ حاصل کی جاسکتی ہے

$$V_{s, \text{بار}} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 / -72^\circ = 0.001666 / -288^\circ$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباؤ کی حتمی قیمت برابر ہیں۔ تار کے داخلی سرے پر دباؤ کا زاویہ  $-8.77^\circ$  جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباؤ کا زاویہ  $72^\circ$  ہے۔ یوں ان کے مابین فرق  $80.77^\circ$  یعنی  $279.23^\circ$  ہے۔ انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق  $-288^\circ$  یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کمپیسٹر  $Z_L = -j300 \Omega$  نسب کر کے دیکھتے ہیں۔ کمپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 / -90^\circ$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیثہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔ شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$

ہوگا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

ہوگی جو خیالی عدد ہے لہذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جاسکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیبی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ ان میں سمتھ نقشہ<sup>9</sup> زیادہ اہم ہے۔ اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

#### 11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔ اس نقشے میں بار بمطابق  $Z_0$  یعنی  $\frac{Z_L}{Z_0}$  استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $z$  کار تیزی محدود کا متغیرہ نہیں بلکہ  $Z_0$  کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

اور

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (11.42)$$

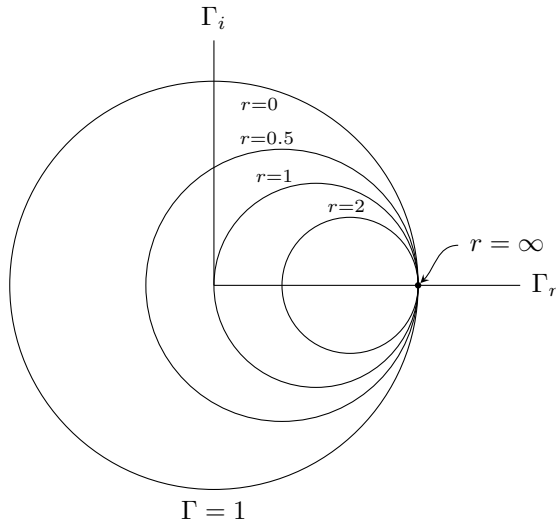
لکھے جاسکتے ہیں۔ شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$





شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات  $\Gamma_r$  اور  $\Gamma_i$  ہیں جبکہ دائرے کا رداس  $\frac{1}{r+1}$  ہے۔

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(11.43) \quad r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$(11.44) \quad x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

لکھ جاسکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

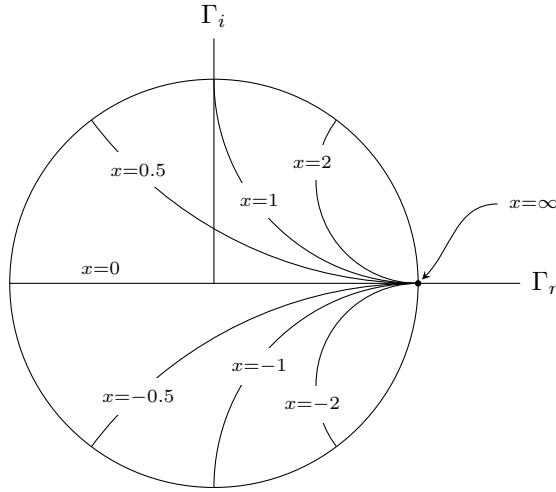
$$(11.45) \quad \left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

$$(11.46) \quad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر کارتیسی محدد کے متغیرات  $\Gamma_r$  اور  $\Gamma_i$  رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر  $r = 0$  ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے  $(0, 0)$  پر ہے۔ خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح  $r = \infty$  کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر  $(1, 0)$  ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی  $\Gamma = 1$  تک محدود ہے۔ اب  $r = \infty$  سے مراد  $Z_L - \infty$  ہے جس سے شرح انعکاس  $\Gamma = 1$  ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال  $r = 1$  کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز  $(0.5, 0)$  ہے۔ شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ  $r = 0.5$  اور  $r = 2$  سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس  $\frac{1}{x}$  اور مرکز  $(1, \frac{1}{x})$  ہیں۔ لامحدود  $x$  کی صورت میں دوبارہ  $Z = \infty$  اور  $\Gamma = 1 + j0$  ہوں گے۔ مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز  $(1, 0)$  ہے لہذا یہ  $\Gamma = 1$  کو ہی ظاہر کرتا ہے۔ اگر  $x = 1$  ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز  $(1, 1)$  ہوں گے۔ جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ  $|\Gamma| = 1$  دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح  $x = -1$  کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ  $\Gamma_r$  محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔ شکل میں  $x = 0.5$ ،  $x = -0.5$ ،  $x = 2$  اور  $x = -2$  کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں  $x = 0$  سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی  $\Gamma_r$  محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدود پر  $\frac{1}{x}$  رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔ یوں کسی بھی  $Z_L$  کی صورت میں  $\frac{Z_L}{Z_0}$  کی شرح لیتے ہوئے  $z$  یعنی  $r$  اور  $x$  حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔ اگر نقشے پر درکار  $r$  اور  $x$  کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔ جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے  $\Gamma$  پڑھیں۔ نقشے کے مرکز  $(0,0)$  سے اس نقطے تک فاصلہ  $|\Gamma|$  کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدود یعنی  $\Gamma_r$  سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ  $\Gamma$  کا زاویہ ہو گا۔ اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔ یوں محدود کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں  $|\Gamma|$  ناپنے کی غرض سے محدود کے مرکز  $(0,0)$  پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جاسکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔ آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔ اب مثال کے طور پر  $Z_0 = 50 \Omega$  کی ترسیلی تار پر  $Z_L = 25 + j50 \Omega$  کا بار  $z = 0.5 + j1$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ  $N$  دکھایا گیا ہے جو  $r = 0.5$  اور  $x = 1$  کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔ شرح انعکاس تقریباً  $0.62/83^\circ$  حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ اس فیتے پر فاصلہ طول موج  $\lambda$  کی صورت میں ناپا جاسکتا ہے۔ آپس دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

کو برقی رو

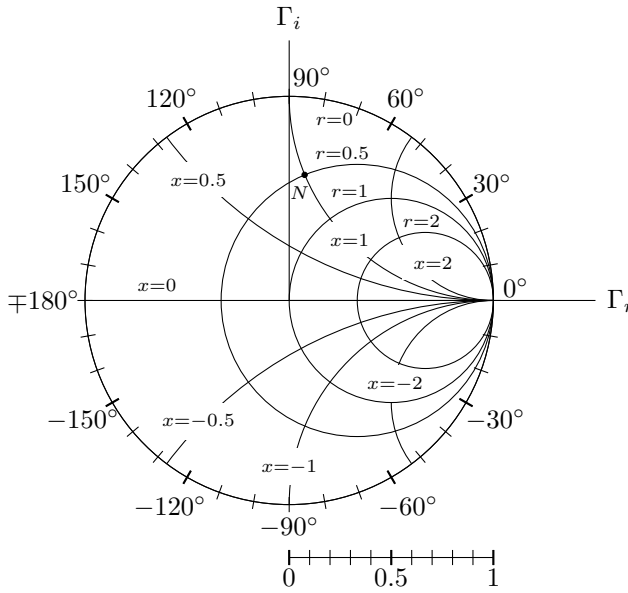
$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

سے تقسیم کرتے ہوئے  $Z_0$  کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{Z_{\text{دغلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جاسکتی ہے جس میں  $l = -z$  پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}} \quad (11.47)$$



شکل 11.7: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں  $r$  اور  $x$  سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $l = 0$  پر کرنے سے

$$(11.48) \quad z_{\text{داخلی}} \Big|_{l=0} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = z$$

حاصل ہوتا ہے جو عین بار پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ  $\Gamma$  کو  $e^{-j2\beta l}$  سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

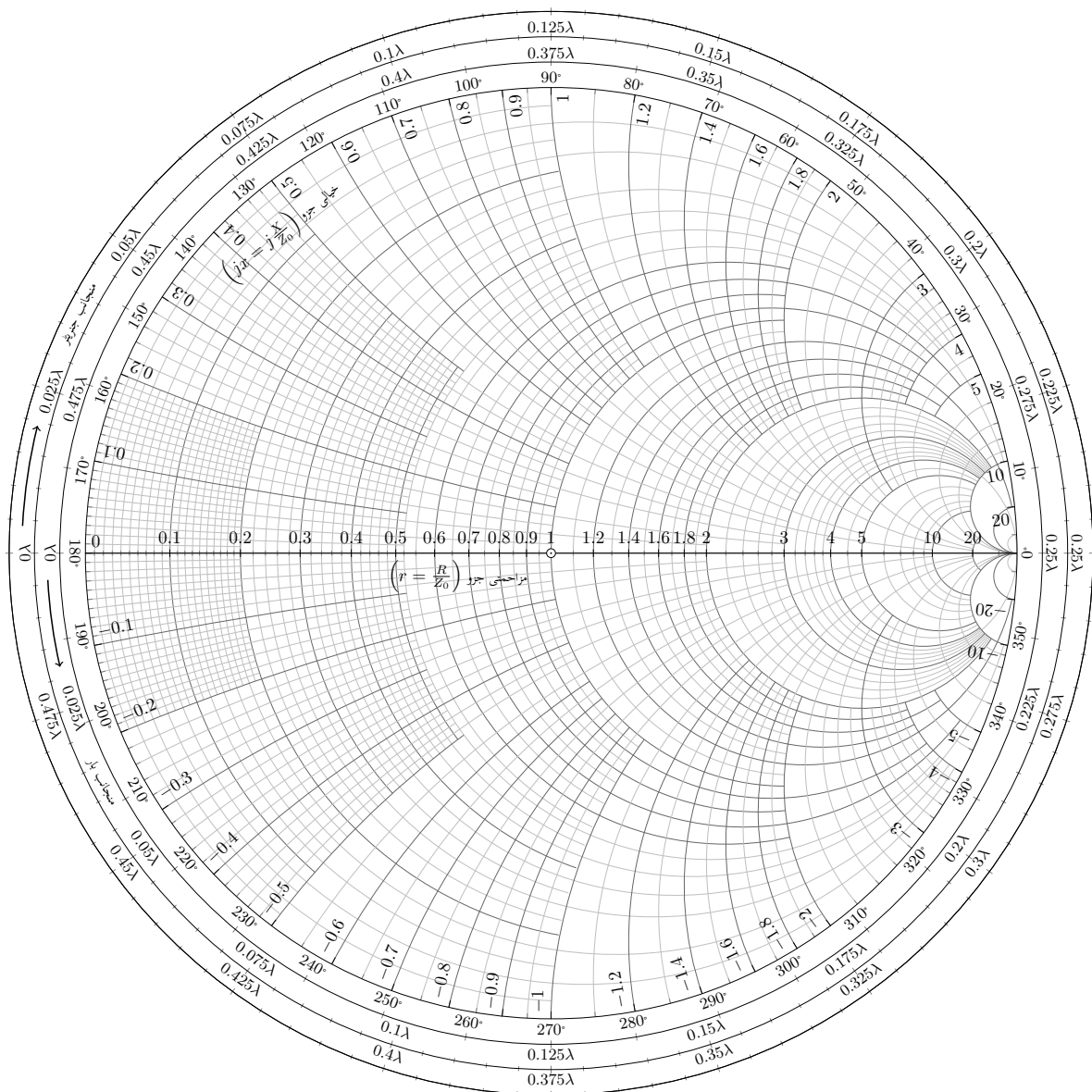
حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی  $|\Gamma|$  ہی ہے لیکن نیازاویہ  $(\phi - 2\beta l)$  ہے۔ یوں سمتھ نقشے میں نقطہ  $z$  یعنی

$$(11.49) \quad z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

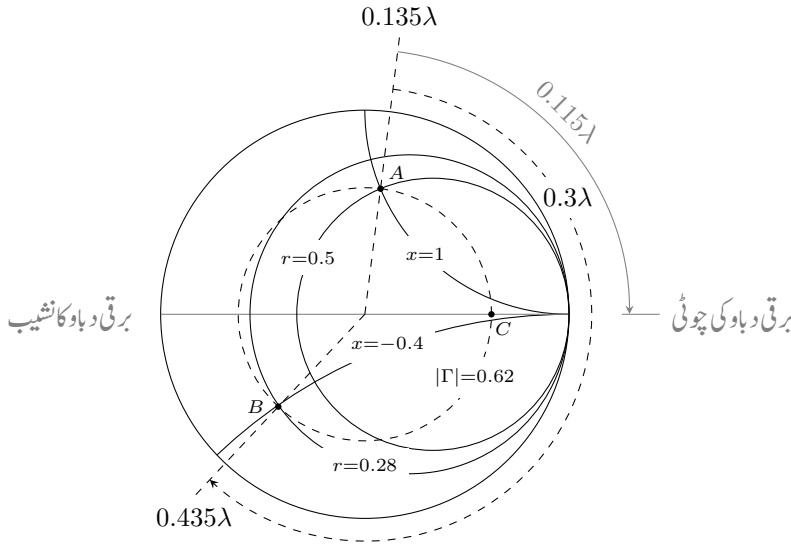
کی نشاندہی کرتے ہوئے  $\phi$  /  $|\Gamma|$  تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے  $(\phi - 2\beta l)$  تک پہنچیں اور یہاں سے  $z$  داخلی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں  $\Gamma$  کی جگہ  $\Gamma e^{-j2\beta l}$  پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بار سے  $l$  فاصلے پر بمطابق  $Z_0$  داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں بار  $z$  سے دور داخلی  $z$  کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جزیئر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ  $\phi$  سے کم ہو کر  $\phi - 2\beta l$  ہوتا ہے لہذا نقشے پر ہم گھڑی کی سمت چلتے ہیں۔ یوں  $\beta l = \pi$  فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔ اس طرح  $\frac{\lambda}{2}$  لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین بار کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو  $0.5\lambda$  دکھایا جاتا ہے۔ جیسے شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جزیئر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی



شکل 11.8: مکمل سمتی نقشه.



شکل 11.9: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان فیٹوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی  $Z_L$  اور  $Z_0$  کی صورت میں اگر  $Z_L < Z_0$  ہو تب برقی دباؤ کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے۔ یوں  $50 \Omega$  کے ترسیلی تار پر  $Z_L = 25 + j50 \Omega$  کے بار پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ شکل 11.9 میں  $z = 0.5 + j1$  کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے  $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62/83^\circ$  حاصل ہوتا ہے۔ مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر  $0.135\lambda$  پڑھا جاتا ہے۔ اگر تار کی لمبائی 60 cm ہو اور اشارے کی تعداد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج 2 m ہو، تب  $\frac{l}{\lambda} = 0.3$  ہو گا لہذا تار  $0.3\lambda$  لمبی ہو گی۔ یوں بیرونی دائرے پر  $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$  سے مرکز تک لکیر اور  $|\Gamma|$  ارداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے  $z = 0.28 - j0.4$  حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح  $Z_{in} = 14 - j20$  ہو گا۔ تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب  $Z_{in} = 13.7 - j20.2$ ، یعنی نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔ کسی بھی  $\phi$  کے  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$  کے لئے  $z = -l$  پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$\begin{aligned} V_s &= V_0^+ (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) \\ &= V_0^+ e^{j\beta l} \left[ 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right] \end{aligned}$$

کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} |V_s| &= V_0^+ |e^{j\beta l}| \left| 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right| \\ &= V_0^+ \left| 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right| \end{aligned}$$

ہے جہاں  $|e^{j\beta l}| = 1$  کے برابر<sup>10</sup> ہے۔ اس کی کم سے کم قیمت  $V_0^+ (1 - |\Gamma|)$  ہے جو  $\phi - \beta l = (2n + 1)\pi$  کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  عین بار پر  $l = 0$  ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو  $\phi = \pi$  لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح  $|V_s|$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$|e^{j\beta l}| = |\cos \beta l + j \sin \beta l| = \sqrt{\cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l} = 1^{10}$$

$V_0^+ (1 + |\Gamma|)$  ہے جو  $\phi - \beta l = 2n\pi$  کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  عین بار پر  $l = 0$  ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو  $\phi = 0$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $\phi = \pi$  کی صورت میں بار پر  $V_s$  کی کم سے کم قیمت ہوگی جبکہ  $\phi = 0$  کی صورت میں بار پر  $V_s$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہوگی۔ انہیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی بار  $R_L$  اور حقیقی  $Z_0$  کی صورت میں اگر  $R_L < Z_0$  ہو تب  $\Gamma$  منفی حقیقی عدد ہوگا جسے  $|\Gamma|/\pi$  لکھا جاسکتا ہے جبکہ  $R_L > Z_0$  کی صورت میں  $\Gamma$  مثبت حقیقی عدد ہوگا جسے  $|\Gamma|/0$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں  $R_L < Z_0$  یعنی  $|\Gamma|/0$  کی صورت میں بار پر کٹر  $V_s$  ہوگا جبکہ  $R_L > Z_0$  یعنی  $|\Gamma|/\pi$  کی صورت میں بار پر بلند تر  $V_s$  ہوگا۔ سمٹھ نقشے پر افقی محدود حقیقی  $\Gamma$  دیتا ہے۔ منفی افقی محدود پر  $|\Gamma|/\pi$  ہوتا ہے لہذا بار پر کٹر  $V_s$  ہر صورت سمٹھ نقشے میں منفی افقی محدود پر پایا جائے گا۔ اسی طرح مثبت افقی محدود پر  $|\Gamma|/0$  ہوتا ہے لہذا بار پر بلند تر  $V_s$  ہر صورت سمٹھ نقشے میں مثبت افقی محدود پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔ کسی بھی مخلوط بار  $Z_L = R_L + jX_L$  کی صورت میں سمٹھ نقشے میں  $z = r + jx$  سے شروع کر کے فاصلہ  $l$  بڑھانے سے زاویہ  $\phi - 2\beta l$  گھٹتا ہے جو سمٹھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔ جس فاصلے پر  $\phi - 2\beta l = 2n\pi$  ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر  $\phi - 2\beta l = (2n + 1)\pi$  ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔ اب  $2n\pi$  سے مراد سمٹھ نقشے کے افقی محدود کا مثبت حصہ جبکہ  $(2n + 1)\pi$  سے مراد افقی محدود کا منفی حصہ ہے۔ یوں شکل 11.9 میں نقطہ  $A$  سے گھڑی کی سمت  $0.115\lambda$  گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔ یوں بار سے پہلی چوٹی  $0.115\lambda$  یعنی  $23 \text{ cm}$  یا  $0.115 \times 200 = 23 \text{ cm}$  فاصلے پر ہے۔ اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب بار سے  $0.365\lambda$  دور پہلا نشیب پایا جاتا۔ چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں  $\phi - 2\beta l = 2n\pi$  کا شرط پورا ہو۔ برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l})$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔ اسی طرح جس نقطے پر برقی دباؤ کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں سمٹھ نقشے کے افقی محدود کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی بار  $R_L$  اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں  $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$  ہوگا۔ اگر  $R_L > R_0$  ہو تب  $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$  ہوگا جبکہ  $R_L < R_0$  کی صورت میں  $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$  ہوگا۔ یوں  $R_L > R_0$  کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ  $R_L < R_0$  کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہوگا۔ یاد رہے کہ  $s > 1$  ہوتا ہے لہذا  $\frac{R_L}{R_0}$  اور  $\frac{R_0}{R_L}$  میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی  $s$  ہوگا۔ یوں  $|\Gamma|$  ارداس کے دائرے اور مثبت افقی محدود سے  $r$  پڑھ کر  $s$  کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔ شکل 11.9 میں نقطہ  $C$  سے  $r = 4.2$  پڑھا جائے گا لہذا  $s = 4.2$  ہے۔ مثبت افقی محدود پر  $r > 1$  ہوتا ہے لہذا محدود کے اسی حصے سے  $s$  کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ  $\frac{R_0}{R_L} > 1$  کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست  $s$  حاصل ہوتا ہے۔

## 11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو  $\frac{\lambda}{4}$  لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔ اتنی لمبائی کے تار کا  $\beta l = 90^\circ$  ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں  $Z_{\text{داخلی}}$  کو  $Z_0$  سے تقسیم کرتے اور  $\beta l = 90^\circ$  پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90^\circ}{Z_0 + jZ_L \tan 90^\circ} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$(11.50) \quad \frac{Z_{\text{داخلی}}}{0.25\lambda} = \frac{1}{z}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = z_{\text{داخلی}} \quad \frac{Z_L}{Z_0} = z$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 11.50 کے تحت بار سے  $0.25\lambda$  فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ  $\frac{1}{z}$  کے برابر ہے لیکن  $y = \frac{1}{z}$  ہوتا ہے لہذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(11.51) \quad y = \frac{1}{z} = z_{\text{منجانب جزیر}} \quad \frac{1}{0.25\lambda}$$

جہاں  $0.25\lambda$  تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جزیر  $0.25\lambda$  گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں  $z$  سے منجانب جزیر  $0.25\lambda$  گھوم کر  $|\Gamma|$  رداس کے دائرے سے  $y$  حاصل ہو گا۔

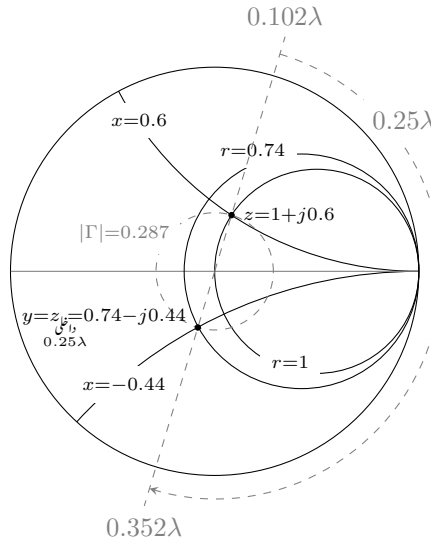
شکل 11.10 میں  $z = 1 + j0.6$  دکھایا گیا ہے جو منجانب جزیر  $0.102\lambda$  زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہ رکاوٹ  $\Gamma = 0.287/73.7^\circ$  دیتا ہے۔ چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جزیر  $0.25\lambda$  چلتے ہوئے  $0.352\lambda$  سے مرکز تک لکیر اور  $0.287$  رداس کے دائرے کے ملاپ سے  $0.74 - j0.44 = Z_{\text{داخلی}}$  حاصل ہوتا ہے جو  $\frac{1}{z}$  یعنی  $y$  کے عین برابر ہے۔

آئیں کسر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ کسر دور تار کی صورت میں  $Z_L = 0$  ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$(11.52) \quad \begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} \\ &= jZ_0 \tan \beta l \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کسر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$(11.53) \quad \frac{Z_{\text{داخلی}}}{0.25\lambda} = jZ_0 \tan 90^\circ = \infty \quad (\text{کسرے دور})$$



شکل 11.10: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برفی فراوانی کے برابر ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں  $Z_L = \infty$  ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j \tan \beta l} \\ &= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \end{aligned} \quad (11.54)$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\text{داخلی}} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \quad (\text{کھلے دور}) \quad (11.55)$$

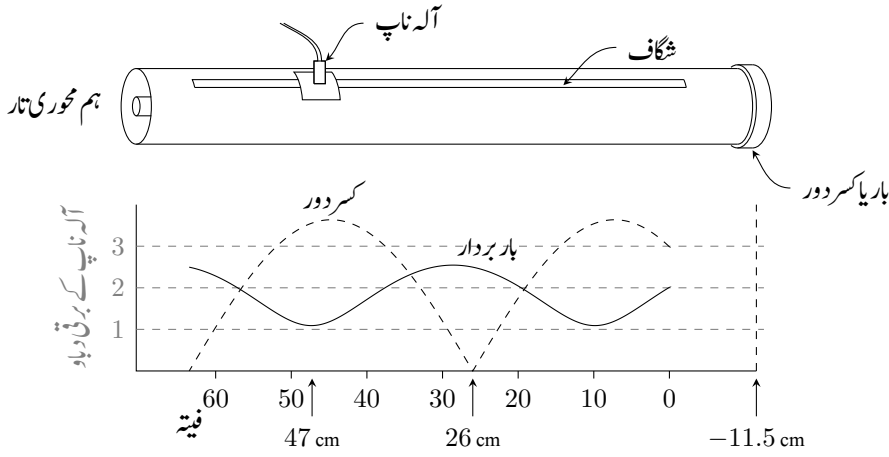
حاصل ہوتی ہے۔ یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور کسر دور کردار ادا کرتی ہے۔

سمتہ مزاحمتی نقشے<sup>11</sup> کا متبادل سمتہ فراوانی<sup>12</sup> نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں  $y = \frac{Y}{Y_0} = g + jb$  لیا جاتا ہے جہاں  $Y_L = \frac{1}{R_L}$  اور  $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$  کے برابر ہیں۔ اس طرح  $y$  برقی فراوانی بمطابق  $Y_0$  کھلائے گی۔ یوں  $r$  سے حاصل دائرے اب  $g$  کے دائرے کھلاتے ہیں جبکہ  $x$  کے دائرے  $b$  کے دائرے کھلاتے ہیں۔ اس نقشے میں  $g > 1$  اور  $b = 0$  کی صورت میں برقی دباؤ کی کمتر قیمت حاصل ہوگی۔ ایصالی سمتہ نقشے سے حاصل  $\Gamma$  کا زاویہ  $180^\circ$  بڑھانا ہوگا۔

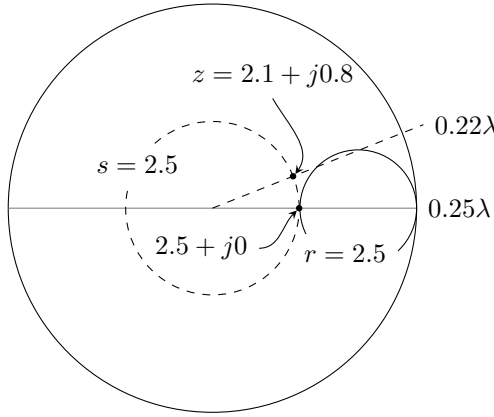
## 11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے بار کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں بار کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔





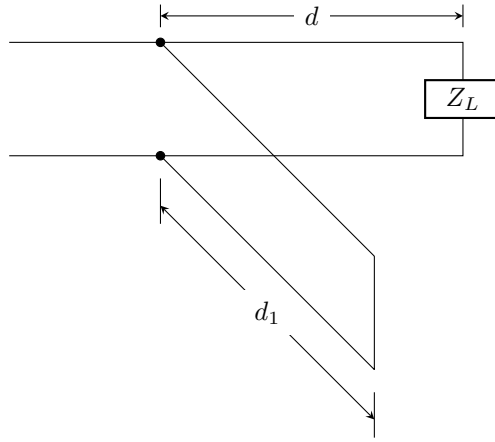
شکل 11.11: ہم محوری تار میں شگاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔



شکل 11.12: اگر  $0.03\lambda$  لمبی تار پر  $z = 2.5 + j0$  داخل  $z$  ہو تب  $z = 2.1 + j0.8$  ہو گا۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لے کر  $s = 2.5$  حاصل کیا گیا ہے۔ شکل 11.11 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جاسکتا ہے لہذا اسے بار کا مقام تصور نہیں کریں۔ کمتر برقی دباؤ فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔ سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔ اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ  $50 \Omega$  ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔ اشارے کی تعدد 400 MHz ہے لہذا طول موج 75 cm ہے۔ بار کا مقام تعین کرنے کی خاطر بار کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو کسر دور پایا جاتا ہے۔ کسر دور تار پر کمتر دباؤ فیتے پر 26 cm کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کسر دور نقطے سے کمتر دباؤ کا فاصلہ  $\frac{n\lambda}{2}$  ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباؤ کسر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ ایسی صورت میں کسر دور کا مقام فیتے پر  $-11.5 \text{ cm} = 26 - 37.5$  نشان کے ساتھ ہو گا۔ چونکہ بار کے مقام پر ہی کسر دور پیدا کیا گیا تھا لہذا بار بھی فیتے پر  $-11.5 \text{ cm}$  کے نشان کے ساتھ ہو گا۔ یوں حاصل نتائج کے تحت بار سے کم تر دباؤ کا نقطہ  $47 - (-11.5) = 58.5 \text{ cm}$  فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے بار سے کمتر دباؤ کا فاصلہ 21 cm حاصل ہوتا ہے۔ بلند تر دباؤ کا بار سے فاصلہ یوں  $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25 \text{ cm}$  ہو گا جو  $\frac{2.25}{75} = 0.03$  طول موج کے برابر ہے۔



شکل 11.13: بار سے  $d$  فاصلے پر  $d_1$  لمبائی کے کسرے دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے بار اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

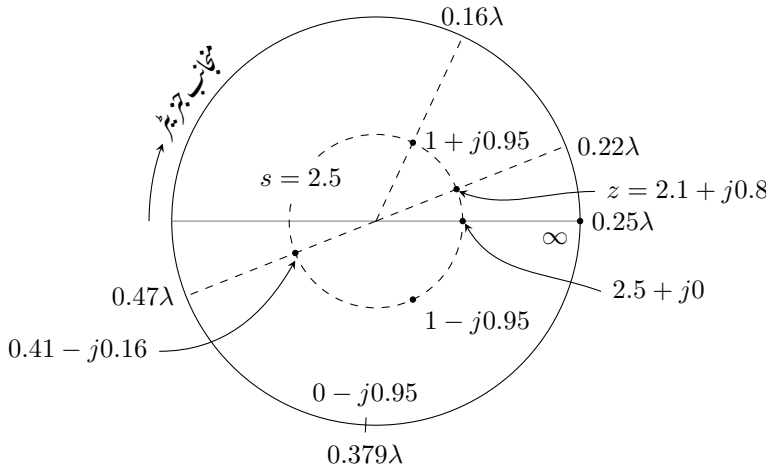
ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.12 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔ بلند تر برقی دباؤ کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت  $sR_0$  کے برابر ہوتی ہے، لہذا ایسے نقطے پر  $z = 2.5$  داخلی ہو گا۔ ہم یوں سمتھ نقشے پر  $z = 2.5$  داخلی نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جزئی فاصلہ  $0.25\lambda$  پڑھا جاتا ہے۔ اس سے  $0.03\lambda$  منفی کرتے ہوئے بار تک پہنچتے ہیں، لہذا  $0.22\lambda$  سے مرکز تک لکیر اور  $s = 2.5$  یعنی  $|\Gamma| = 0.429$  رداس کے دائرے کے ملاپ سے  $z = 2.1 + j0.8$  پڑھا جاتا ہے۔ یوں  $Z_L = 105 + j40 \Omega$  حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے بار کو فیتے پر  $11.5 \text{ cm}$  یا اس نقطے سے  $\frac{n\lambda}{2}$  فاصلے پر تصور کیا ہے۔ چونکہ بار کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل  $Z_L$  کی بات کرتے ہوئے بار کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس بار کو  $50 \Omega$  ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ ایسا  $d_1$  لمبائی کے کسر دور تار کے ٹکڑے کو بار سے  $d$  فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ ایسا شکل 11.13 میں دکھایا گیا ہے۔ بار سے  $d$  فاصلے پر  $z$  کے متوازی  $d_1$  لمبی کسرے دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ  $z = 1 + j0$  حاصل کرنے مقصد ہے۔ یہاں  $d_1$  اور  $d$  مطلوب ہیں۔ کسر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ  $50 \Omega$  کے برابر ہے۔

برقی بار اور کسر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔ متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔ برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ ہم  $d$  اتار کھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی  $1 + jb$  داخلی ہو۔ اب اگر داخلی  $y$  کے متوازی  $-jb$  برقی تاثیریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی  $1 + j0$  ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔ یوں  $d_1$  لمبی کسر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثیریت  $-jb$  درکار ہے۔ ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے  $d$  اور  $d_1$  کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں  $z = 2.1 + j0.8$  پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جزئی  $0.25\lambda$  گھومنے سے  $y = \frac{1}{z}$  حاصل ہوتا ہے۔ شکل 11.14 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ سمتھ نقشے میں  $z = 2.1 + j0.8$  منجانب جزئی  $0.22\lambda$  زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہاں سے منجانب جزئی  $0.25\lambda$  گھومتے ہوئے  $0.47\lambda$  تک پہنچا جاتا ہے جہاں  $|\Gamma|$  رداس کے دائرے سے  $y = 0.41 - j0.16$  ملتا ہے۔ اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جزئی گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی  $1 + jb$  حاصل ہو۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا  $0.16\lambda$  اور  $0.34\lambda$  زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب  $y_1 = 1 + j0.95$  اور  $y_2 = 1 - j0.95$  حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ بار سے اس نقطے تک  $d = 0.19\lambda$  (یعنی  $0.16\lambda + (0.5\lambda - 0.47\lambda)$ ) تار درکار ہو گی لہذا  $d = 0.19\lambda$  یعنی  $14.25 \text{ cm}$  بنتا ہے۔

اب  $1 + j0.95$  کے متوازی  $-j0.95$  برقی تاثیریت جوڑ کر  $1 + j0$  حاصل ہو گا۔ مساوات 11.54 کے تحت کسرے دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا  $g = 0$  ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔ عین کسر دور پر



شکل 11.14: بار  $z = 2.1 + j0.8$  سے  $0.19\lambda$  فاصلے پر  $0.129\lambda$  لمبائی کا کسر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

$y = \infty$  حاصل ہوتا ہے جو منجانب جزیر  $0.25\lambda$  پر پایا جاتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $-j0.95$ ، داخلی  $y$  نقشے پر منجانب جزیر  $0.379\lambda$  پر حاصل ہوتا ہے۔ یوں کہ دور ٹکڑے کی لمبائی  $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$  یعنی  $9.67 \text{ cm}$  حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع  $50 \Omega$  ترسلی تار کو کسرے دور کرنے سے برقی دباؤ کے دو آپس میں قریبی نشیب  $12 \text{ cm}$  اور  $27 \text{ cm}$  پر پائے جاتے ہیں۔ کسرے دور ختم کرتے ہوئے یہاں بار نسب کرنے سے  $0.4 \text{ V}$  حیطے کے نشیب اور  $0.72 \text{ V}$  حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب  $9 \text{ cm}$  پر حاصل ہوتا ہے۔ ترسلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔  $Z_L$  اور  $\Gamma$ ،  $s$ ،  $f$ ،  $\lambda$ ۔

جوابات:  $36.5 + j21.6 \Omega$  اور  $0.286/108^\circ$ ،  $1.8$ ،  $1 \text{ GHz}$ ،  $0.3 \text{ m}$ ۔

مشق 11.5: بے ضیاع  $50 \Omega$  کے ساتھ  $Z_L = 100 + j100 \Omega$  کا بار نسب ہے۔ بار سے  $d$  فاصلے پر  $d_1$  لمبائی کا کسرے دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔ اگر تار پر  $v = \frac{2}{3}c$  ہو جبکہ اشارے کی تعدد  $10 \text{ MHz}$  ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔  $\lambda$ ، چھوٹے سے چھوٹا  $d_1$  اور ایسی صورت میں  $d$ ۔

جوابات:  $4.4 \text{ m}$  اور  $1.8 \text{ m}$ ،  $20 \text{ m}$ ۔



## باب 12

### تقطیب موج

اس باب میں تقطیب موج پر غور کیا جائے گا۔ خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

#### 12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔ یوں  $a_z$  جانب حرکت کرتا  $a_x$  سمت کا میدان

$$(12.1) \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا گیا۔ یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف  $x$  سمت میں پایا جاتا ہے۔ عموماً  $a_z$  جانب حرکت کرتے موج میں  $a_x$  کے علاوہ  $a_y$  جزو بھی پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں موج کے اجزاء

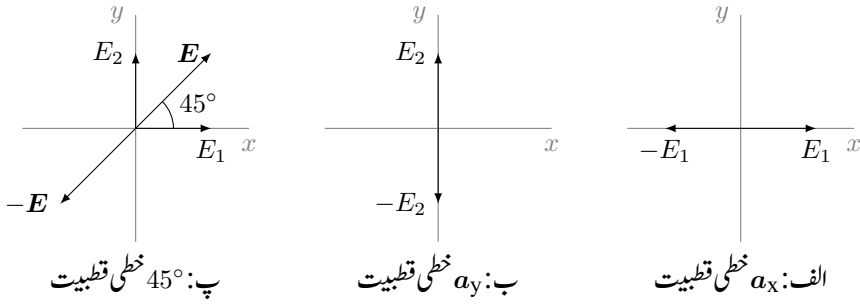
$$(12.2) \quad \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned}$$

ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ  $\delta$  بھی پایا جاسکتا ہے۔ ان اجزاء کا مجموعہ

$$(12.3) \quad \mathbf{E} = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \mathbf{a}_y$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔ یہ مساوات غور طلب ہے۔ آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسی میدان پر غور کریں۔ ہم خلاء میں  $z = 0$  کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر  $E_2 = 0$  ہو تب وقت  $t$  کے تبدیلی سے میدان کی قیمت  $E_1 \mathbf{a}_x - E_1 \mathbf{a}_x + E_1 \mathbf{a}_x$  تبدیل ہوتی ہے۔ اس میدان کو تمام  $t$  کے لئے شکل 12.1-الف میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک  $E_1 - E_1 + E_1$  خطی لکیر پر رہتی ہے۔ اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت<sup>2</sup> کہتے ہیں۔ یہ موج  $a_x$  سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس اگر مساوات 12.3 میں  $E_1 = 0$  ہو تب یہ  $a_y$  خطی قطبیت کی موج ہوگی جسے شکل 12.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر  $E_1 = E_2 = E_{12}$  اور  $\delta = 0$  ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محور کے ساتھ  $45^\circ$  کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 12.1-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔



شکل 12.1: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

آئیں اب ذرہ دلچسپ صورت حال دیکھیں۔ نقطہ  $z = 0$  پر مساوات 12.2

(12.4)

$$E_x = E_1 \cos \omega t$$

$$E_y = E_2 \cos(\omega t - \delta)$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں  $E_y$  کو

$$E_y = E_2 (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta)$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات میں،  $E_x$  کی مساوات استعمال کرتے ہوئے،  $\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$  اور  $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$  پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[ \frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta \right]$$

ملتا ہے جسے

(12.5)

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta$$

یا

(12.6)

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

(12.7)

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \quad b = \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \quad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta}$$

لئے گئے ہیں۔ مساوات 12.6 بیضوی قطبیت<sup>3</sup> کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 12.5 میں  $E_1 = E_2 = E_0$  اور  $\delta = \pm 90^\circ$  کی صورت میں

(12.8)

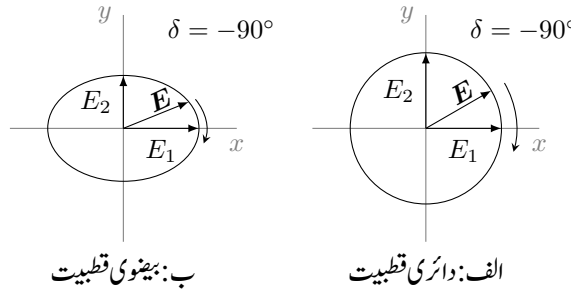
$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں  $E_1$  اور  $E_2$  بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر

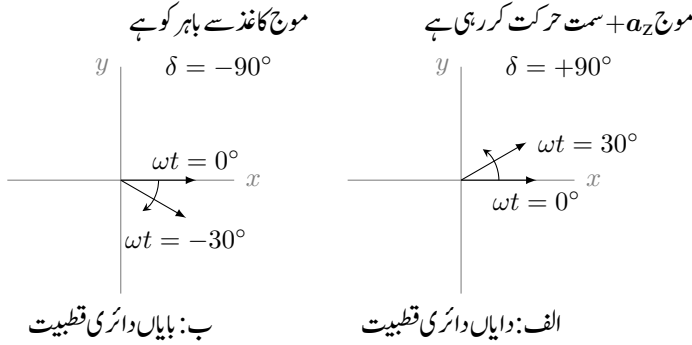
ہے۔ مساوات 12.4 سے  $\delta = +90^\circ$  کی صورت میں  $\omega t = 0$  پر

$$E_x = E_0 \cos 0 = E_0$$

$$E_y = E_0 \cos(0 - 90^\circ) = 0 \quad (\delta = +90^\circ)$$



شکل 12.2: دائری اور بیضوی قطبیت۔



شکل 12.3: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمبے بعد  $\omega t = 30^\circ$  کی صورت میں

$$E_x = E_0 \cos 30^\circ = 0.866E_0$$

$$E_y = E_0 \cos(30^\circ - 90^\circ) = 0.5E_0 \quad (\delta = +90^\circ)$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 12.3-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت  $a_z$  کاغذ سے باہر کو ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کے حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کا سمت دیتی ہیں۔ یوں  $\delta = +90^\circ$  کی صورت میں مساوات 12.8 دائیں دائری قطبیت<sup>4</sup> کی موج کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح  $\delta = -90^\circ$  کی صورت میں بائیں دائری قطبیت<sup>5</sup> حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔

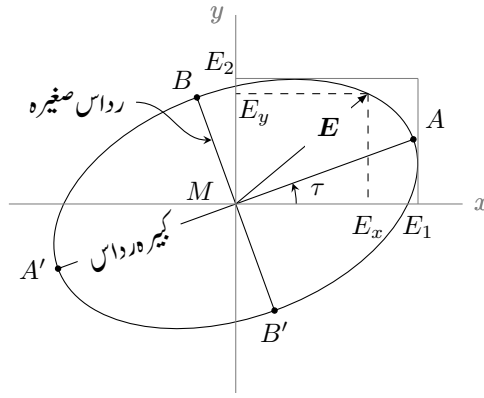
دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتے ہوئے آپ کو دائیں ہاتھ گھومتی نظر آئے۔ کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہوگی۔

جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 12.5 میں  $E_1 \neq E_2$  کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.2-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.4 میں مساوات 12.6 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں ترخیم<sup>6</sup> افقی محور کے ساتھ  $\tau$  زاویہ بتاتا ہے لہذا یہ  $\tau$  زاویے کی بیضوی قطبیت کو ظاہر کرتی ہے۔

right circular polarization<sup>4</sup>  
left circular polarization<sup>5</sup>  
ellipse<sup>6</sup>



شکل 12.4: عمومی بیضوی قطبیت.

## 12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوائنٹنگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.55

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ شکل 12.4 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے  $x$  اور  $y$  اجزاء

$$(12.9) \quad E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$(12.10) \quad E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta)}$$

میں  $\delta$  زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہوگا جسے نقطہ  $z = 0$  پر

$$(12.11) \quad \mathbf{E}_s = \mathbf{a}_x E_1 e^{j\omega t} + \mathbf{a}_y E_2 e^{j(\omega t + \delta)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathbf{E}}{H} = \eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

ہوتا ہے لہذا مساوات 12.9 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|\eta|} e^{-j\theta_\eta} = \frac{E_1}{|\eta|} e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)} = H_1 e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)}$$

ہوگی۔ اسی طرح مساوات 12.10 کی جوڑی

$$(12.12) \quad H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta - \theta_\eta)}$$

ہوگی۔ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہوگا جسے نقطہ  $z = 0$  پر

$$(12.13) \quad \mathbf{H}_s = -\mathbf{a}_x H_2 e^{j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{j(\omega t - \theta_\eta)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہوگا۔ جوڑی دار مخلوط  $\mathbf{H}_s$  کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت  $z$  کو منفی اور منفی  $z$  کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$(12.14) \quad \mathbf{H}_s^* = -\mathbf{a}_x H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)}$$



مخلوط پوٹنٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{a}_x E_1 e^{j\omega t} + \mathbf{a}_y E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \right) \times \left( -\mathbf{a}_x H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \mathbf{a}_y H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)} \right) \right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \left[ E_1 H_1 e^{j\theta_\eta} + E_2 H_2 e^{j\theta_\eta} \right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

یعنی

$$(12.15) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \cos \theta_\eta$$

حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت  $\delta$  پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ ان میں  $\frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2} = \eta_0$  کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ  $\theta_\eta = 0$  ہے۔ ایسے خطے میں

$$(12.16) \quad \begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (H_1^2 + H_2^2) \eta_0 = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z H^2 \eta_0\end{aligned}$$

ہوگا جہاں  $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$  کے برابر ہے۔ اس مساوات کو

$$(12.17) \quad \begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z (E_1 H_1 + E_2 H_2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \frac{E_1^2 + E_2^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_z \frac{E^2}{\eta_0}\end{aligned}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں  $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$  کے برابر ہے۔

مثال 12.1: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$\begin{aligned}E_x &= 2 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= 3 \cos(\omega t - \beta z + 75^\circ)\end{aligned}$$

وولٹ فی میٹر ہیں۔ موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ  $\eta = 120\pi$  لیتے ہوئے مساوات 12.17 سے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{2^2 + 3^2}{120\pi} = 17.24 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔



## باب 13

### ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔ اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہو بہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔ یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

#### 13.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج  $E_{\perp}$

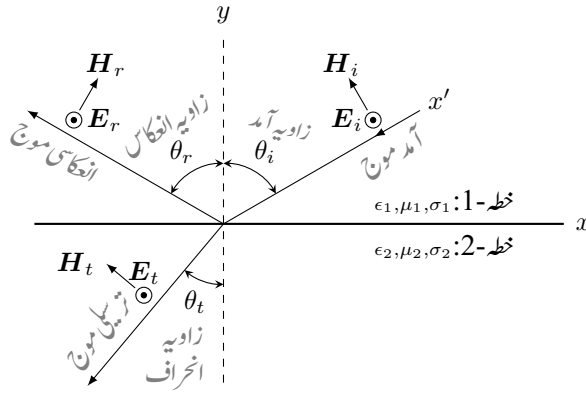
شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمد موج دکھائی گئی ہے۔ سرحد  $y = 0$  پر پایا جاتا ہے لہذا  $y$  محدود، سرحد کے عمودی ہے۔ پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_i$  زاویہ آمد<sup>1</sup> بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_r$  زاویہ انعکاس<sup>2</sup> بناتی ہے۔ ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_t$  زاویہ بناتی ہے۔ ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہذا  $\theta_t$  اصطلاحاً زاویہ انحراف<sup>3</sup> کہلاتی ہے۔ پہلے خطے کے مستقل  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  جبکہ دوسرے خطے کے مستقل  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$  ہیں۔

ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی  $xy$  سطح) کے عمودی ہوگی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہوگی۔ ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج<sup>4</sup> اور متوازی قطب موج<sup>5</sup> کہلائیں گے۔ شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

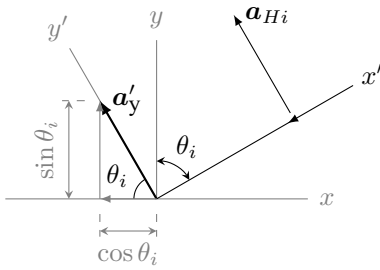
منفی  $z$  سمت میں حرکت کرتی  $a_x$  میدان کی برقی موج

$$E_i = E_0 a_x e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

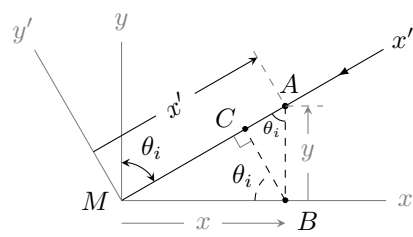
incidence angle<sup>1</sup>  
reflection angle<sup>2</sup>  
refraction angle<sup>3</sup>  
perpendicular polarized<sup>4</sup>  
parallel polarized<sup>5</sup>



شکل 13.1: ترجہی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔ برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔



(ل) فاصلے کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدود میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جاتی ہے۔ اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات  $a_x$  سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ  $z$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب  $a_x$  اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ  $a$  سمت کا میدان جو  $z$  محدود کی بجائے لکیر  $l$  پر گھٹے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$E_i = E_0 a e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔ اب شکل 13.1 میں  $E_i$  پر دوبارہ غور کریں۔ یہ برقی میدان  $a_z$  سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر  $x'$  پر حرکت کر رہی ہے لہذا اس موج کو

$$(13.1) \quad E_i = E_0 a_z e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود  $x, y$  کے مرکز سے لکیر  $x'$  پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔ آئیں مساوات 13.1 میں لکیر  $x'$  پر فاصلے کو کارتیسی محدود  $x, y$  کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

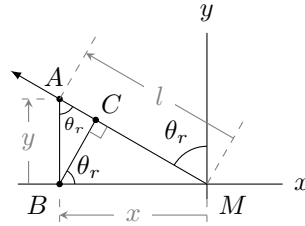
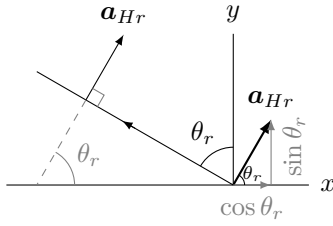
شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدود دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں لکیر  $x'$  کو کارتیسی محدود  $x', y$  کا حصہ دکھایا گیا ہے۔ لکیر  $x'$  پر نقطہ  $A$  کا مرکز سے فاصلہ  $MA$  کو  $x'$  لکھا گیا ہے۔ اب  $MA = MC + CA$  کے برابر ہے جہاں  $MC = x \sin \theta_i$  اور  $CA = y \cos \theta_i$  برابر ہیں لہذا

$$(13.2) \quad x' = x \sin \theta_i + y \cos \theta_i$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$(13.3) \quad E_i = E_0 a_z e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اس مساوات میں موج گھٹے  $x'$  کی طرف رواں ہے۔



(ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔ (ل) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان  $x'$  کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت  $a_z$  (یا  $a'_z$ ) ہے جہاں  $a_z$  اور  $a'_z$  دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان  $H_i$  کی اکائی سمتیہ  $a_{Hi}$  محدود  $y'$  کی سمت میں ہے۔ یوں  $a'_{Hi} = a'_{y'}$  لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں  $a'_{y'}$  کو کارتیسی محدود  $x, y$  کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ  $a'_{y'}$  کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہذا شکل میں متکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں متکون کا قاعدہ  $\cos \theta_i$  اور اس کا عمود  $\sin \theta_i$  کے برابر ہوں گے جس سے

$$(13.4) \quad a'_{y'} = -\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$H_i = \frac{E_0}{\eta_1} a'_{y'} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$(13.5) \quad H_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(13.6) \quad E_{si} = a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(13.7) \quad H_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی ( $\perp$ ) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$(13.8) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔ مرکز  $M$  سے موج کا فاصلہ  $l$  لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اب  $MA = MC + CA$  کے برابر ہے جہاں  $MC = -x \sin \theta_r$  اور  $CA = y \cos \theta_r$  کے برابر ہیں لہذا

$$(13.9) \quad l = -x \sin \theta_r + y \cos \theta_r$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ منفی محدود پر  $x$  کی قیمت منفی ہوگی لہذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہوگی۔ یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned} E_{sr} &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 l} \\ &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \end{aligned} \quad (13.10)$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے  $l$  کی جانب حرکت کی بنا پر  $e$  کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت  $a_z$  ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔ شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ  $a_H$  دکھائی گئی ہے جو  $x$  محدود کے ساتھ  $\theta_r$  زاویہ بناتی ہے۔ اکائی سمتیہ کو محدود کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$a_{Hr} = \cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y \quad (13.11)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$H_{sr} = (\cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y) \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \quad (13.12)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جاسکتے ہیں

$$E_{st} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)} \quad (13.13)$$

$$H_{st} = (-\cos \theta_t a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)} \quad (13.14)$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدود کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔ یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل  $\beta_2$  اور  $\eta_2$  استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 264 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں  $y = 0$  پر کرتے ہوئے یوں

$$a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + 0 \cos \theta_r)} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\perp} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (13.15)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی  $x$  کے لئے درست ہے لہذا یہ  $x = 0$  کے لئے بھی درست ہوگی۔ اس میں  $x = 0$  پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (13.16)$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.15 میں  $x$  کی قیمت تبدیل کرنے سے  $e$  کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت  $x$  کے ہر قیمت کے لئے درست ہوگی جب مساوات میں تینوں  $e$  کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} = e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (13.17)$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \quad (13.18)$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$(13.19) \quad \beta_2 \sin \theta_t = \beta_1 \sin \theta_r$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

اور صفحہ 281 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$(13.20) \quad \sin \theta_t = \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i$$

یعنی

$$\begin{aligned} \sin \theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \mu_0 \epsilon_{r1} \epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2} \mu_0 \epsilon_{r2} \epsilon_0}} \sin \theta_i \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \end{aligned}$$

یا

$$(13.21) \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.22) \quad \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}} \\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}} \end{aligned}$$

انحرافی مستقل<sup>6</sup> کہلاتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل  $n$  اور قدرتی رکاوٹ  $\eta$  میں فرق کر پائیں گے۔

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔ مساوات 13.21 جسے ابن سہل<sup>7</sup> کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل<sup>8</sup> سے جانا جاتا ہے۔ بصریات<sup>9</sup> کے میدان میں قانون ابن سہل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے  $\theta_i = 30^\circ$  زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔ پانی میں انحرافی موج کا زاویہ  $\theta_t$  حاصل کریں۔ اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب  $\theta_t$  کیا ہو گا۔ شیشے کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 2.3$  لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 1$  لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}} \sin 30^\circ = 0.32969$$

<sup>6</sup>index of refraction

<sup>7</sup>بغداد کے ابو سعد العلاء ابن سہل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔

<sup>8</sup>Snell's law

<sup>9</sup>optics

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 265 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان  $a_x$  اور  $a_y$  اجزاء پر مشتمل ہیں۔ ان میں صرف  $a_x$  اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے  $a_x$  اجزاء میں  $y = 0$  پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos \theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r)} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t)}$$

یا

$$-\cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos \theta_i + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میں مساوات 13.16 سے  $\tau_{\perp}$  کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (13.23)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 298 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں  $\theta_i = 0^\circ$  پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب  $\eta_2 = 0$  ہو گا جس سے  $\Gamma_{\perp} = -1$  حاصل ہوتا ہے۔ اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (13.24)$$

حاصل ہوتا ہے۔ خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت ( $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ) میں  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$  ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہذا  $\sin^2 \theta_i \leq 1$  ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے  $\Gamma_{\perp}$  حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برعکس  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  کی صورت میں اگر  $\sin^2 \theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہذا  $\Gamma_{\perp}$  خیالی عدد ہو گا۔ ایسی صورت میں  $|\Gamma_{\perp}| = 1$  ہوتا ہے اور



سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس<sup>10</sup> سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر  $\Gamma_{\perp} = 1$  ہو اسے زاویہ فاصل<sup>11</sup> پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$(13.25) \quad \theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل  $\mu_0$  لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے  $(\theta_i > \theta_{i,ف})$  کی صورت میں مساوات 13.20 سے  $\sin \theta_t > 1$  حاصل ہوتا ہے جس سے  $\cos \theta_t$  خیالی عدد حاصل ہوگا

$$(13.26) \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i} = jA$$

جہاں  $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$  حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned} E_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + yjA)} \\ &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \end{aligned}$$

یا

$$(13.27) \quad E_{st} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(13.28) \quad \alpha = \beta_2 A = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں  $x$  - جانب بے نیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر  $E_{\perp}$  کی مقدار  $\tau_{\perp} E_0$  ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے  $e^{-\alpha y}$  کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج<sup>12</sup> کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج  $\theta_i = 55^\circ$  زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان  $E_i = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہے۔ پانی کے مستقل  $\epsilon_r = 80$  اور  $\mu_r = 1$  لیں۔  $\sigma = 0$  لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 13.20 سے

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}} \sin 55^\circ = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos \theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

ہو گا۔ مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544 \angle -54.746^\circ$$

• اس طرح ہوا میں سرحد پر  $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہو گا۔

• ہوا میں سرحد سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔ سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یاد رہے کہ  $\sin \theta_t$  حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ  $\cos \theta_t$  خیالی عدد ہے۔ مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ \mathbf{H}_{st} &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(j\beta_2 x \sin \theta_t - j\theta_\eta)} \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں  $\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$  کا استعمال کیا گیا۔ ہوا میں سرحد سے دور  $\mathbf{a}_y$  سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان کا  $\mathbf{a}_y$  جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اس کا صرف  $\mathbf{a}_x$  جزو لیا جائے گا۔ جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان  $\mathbf{H}_s^*$  لکھتے ہوئے  $\mathbf{H}_s$  میں تمام مقامات پر  $z$  کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \right] \times \left[ jA \mathbf{a}_x \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(-j\beta_2 x \sin \theta_t + j\theta_\eta)} \right] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} [j \cos \theta_\eta - \sin \theta_\eta] \end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -\mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin \theta_\eta$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہوا میں  $\eta$  حقیقی عدد ہے لہذا  $\theta_\eta = 0$  ہو گا اور چونکہ  $\sin 0 = 0$  ہوتا ہے لہذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -a_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔ یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ ایسی امواج کو فنا پذیر امواج<sup>13</sup> کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا  $a_y$  جزو اور برقی  $a_z$  اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع  $-a_x$  سمت میں حرکت کریں گے۔ ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{پانی میں رفتار موج} = \frac{\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار}}{\sin \theta_i}$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج  $E_{\parallel}$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔ یاد رہے کہ موج کی سمت پونٹنگ سمتیہ  $H \times E$  کی سمت ہی ہوتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پونٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔ متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 13.4 میں  $E_i$  کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔ یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج  $E_r$  کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔ برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 13.2 اور مساوات 13.4 کی مدد سے شکل 13.4 کے لئے

$$(13.29) \quad E_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(13.30) \quad H_{si} = -a_z \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

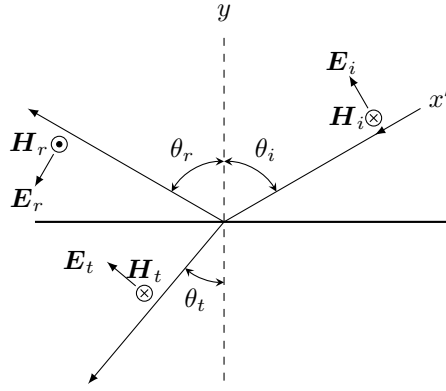
لکھ جا سکتے ہیں۔ اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$(13.31) \quad E_{sr} = -(\cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(13.32) \quad H_{sr} = a_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(13.33) \quad E_{st} = (-\cos \theta_t a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

$$(13.34) \quad H_{st} = -a_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$



شکل 13.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

لکھے جاسکتے ہیں۔ سرحد ( $y = 0$ ) پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔ یوں  $a_y$  جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ  $a_x$  جزو کو استعمال کیا جائے گا لہذا

$$-\cos \theta_i a_x E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} - \cos \theta_r a_x \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} = -\cos \theta_t a_x \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یعنی

$$(13.35) \quad \cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \cos \theta_t \tau_{\parallel} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $x$  کی قیمت تبدیل کرنے سے  $e$  کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں  $e$  کے طاقت،  $x$  کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$(13.36) \quad j\beta_1 x \sin \theta_i = j\beta_1 x \sin \theta_r = j\beta_2 x \sin \theta_t$$

ہو۔ اس مساوات سے

$$(13.37) \quad \theta_i = \theta_r$$

اور

$$(13.38) \quad \sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔ مساوات 13.35 میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$(13.39) \quad 1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tau_{\parallel}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔ اس طرح

$$-a_z \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} = -a_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} - \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\parallel} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$(13.40) \quad 1 - \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 حل کرتے ہوئے

$$(13.41) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$(13.42) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب  $\Gamma_{\parallel} = -1$  حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر  $\Gamma_{\parallel} = 0$  حاصل ہو لہذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔ اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ<sup>14</sup> کہتے ہیں۔ مساوات 13.42 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$(13.43) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔ عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔ عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہذا انحرافی موج غیر قطبی ہو گی۔ زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت<sup>16</sup> بھی کہتے ہیں۔

مثال 13.3: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔ زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔ پانی کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 80$  لیں۔

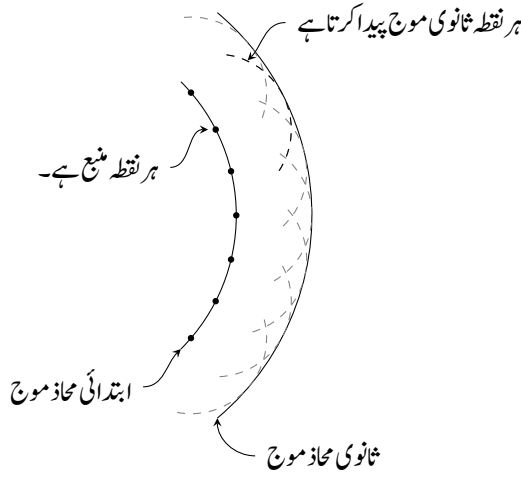
حل:

$$(13.44) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ$$

<sup>14</sup>Brewster angle

<sup>15</sup>یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

<sup>16</sup>polarizing angle



شکل 13.5: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

مشق 13.1: شکل 13.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس  $\Gamma_{\parallel}$  حاصل کریں۔ چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ  $\Gamma_{\parallel}$  کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہوگی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{E}_{sr} = (\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$\mathbf{H}_{sr} = -\mathbf{a}_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

شرح انعکاس  $\frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$  حاصل ہو گا۔

## 13.2 ترسیم ہائی گن

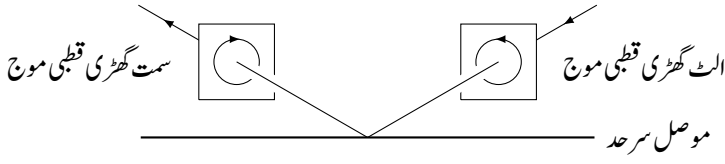
ہائی گن<sup>17</sup> کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 13.5 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائے گئے ہیں۔ یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جاسکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انحراف کے زمرے میں آتا ہے۔

شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int dE \quad (13.45)$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدود پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان dE کے برابر ہے۔

$$dE = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)} dx \quad (13.46)$$



شکل 13.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

سے

$$(13.47) \quad E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^\infty e^{-j\beta \delta} dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $r \gg \delta$  ہو تب

$$(13.48) \quad \delta = \frac{x^2}{2r}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں  $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$  اور  $u = kx$  لیتے ہوئے

$$(13.49) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du$$

لکھا جاسکتا ہے جسے

$$(13.50) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left( \int_0^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du \right)$$

لکھ سکتے ہیں۔

بائی گن  
بہتر بنائیں  
الٹ گھڑی  
گھڑی  
شکل پ  
ہے۔





## مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی<sup>1</sup> TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔ وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں مینوج<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

دو لا محدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مینوج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نکلی مینوج تک بات بڑھائی جائے گی۔ ان مینوج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تقابلی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔ اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مینوج پر غور کیا جائے گا۔ آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

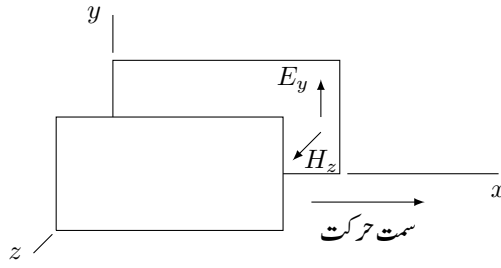
### 14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباؤ، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاؤٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔ یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباؤ لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جاسکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نکلی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔ کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔ البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نکلی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد ( $10^{16}$  Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

<sup>1</sup>transverse electromagnetic, TEM  
<sup>2</sup>waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہوگی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد<sup>3</sup> کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پونٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے تاکہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباؤ اور برقی رواں منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

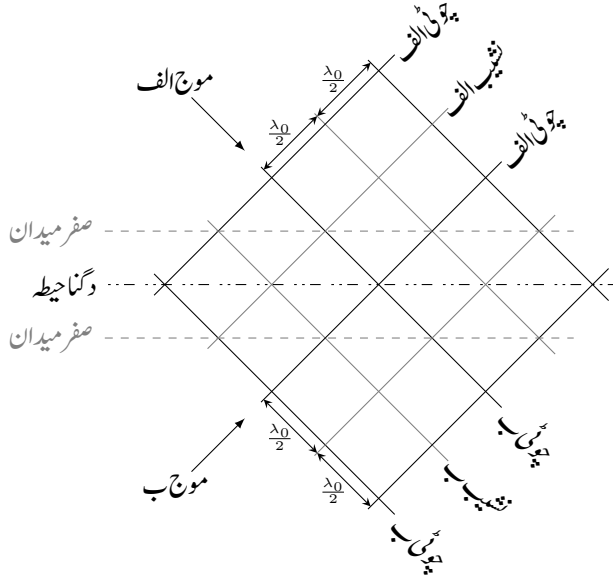
## 14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو  $y$  سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز<sup>4</sup> کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے موج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر  $y$  سمتی ہے جبکہ سمت حرکت  $ax$  ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہذا اس انداز کو عرضی برقی انداز<sup>5</sup> (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہوگا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

low cutoff frequency<sup>3</sup>  
higher order mode<sup>4</sup>  
transverse electric mode, TE mode<sup>5</sup>



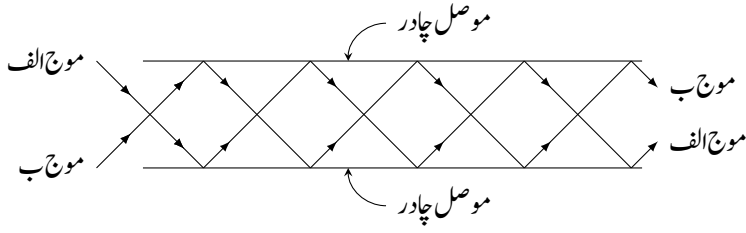
شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ  $\frac{\lambda_0}{2}$  کے برابر ہے۔

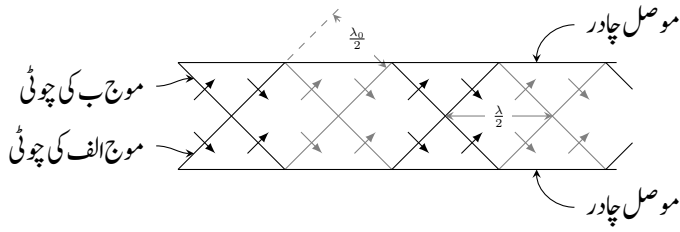
جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطے دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جاسکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں موج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور موج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو بہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر  $E$  کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

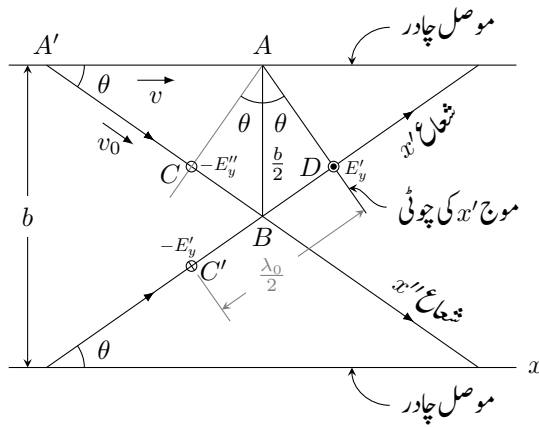
اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ موج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول<sup>6</sup> پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور موج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے موج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو  $x'$  اور  $x''$  سمت میں گامزن ہیں۔ دونوں جزو موصل چادر یعنی  $x$  محدود کے ساتھ  $\theta$  زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی  $y$  محدود کی سمت میں ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ  $b$  ہے۔ نقطہ  $D$  پر موج  $x'$  کی چوٹی ہے لہذا یہاں برقی میدان  $E_y$  مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر  $AD$  لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ  $C$  پر موج  $x''$  کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر  $AC$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ  $A$  پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔ اس نقطے کو شکل میں  $B$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں موج  $x''$  کا نشیب  $C$  پر جبکہ اس کی چوٹی  $B$  پر ہے۔ اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔ اسی طرح  $BD$  اور  $C'B$  بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$(14.1) \quad BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج  $\lambda_0$  ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔ موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$(14.2) \quad BC = \frac{n\lambda_0}{4}$$

ہے جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$  ہو سکتے ہیں۔ جفت  $n$  کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق  $n$  کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔ شکل 14.5 میں متکون  $ABC$  سے

$$AB \sin \theta = \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$(14.3) \quad \lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی  $BC$  کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔ اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج  $\lambda_{0c}$  کی قیمت  $\sin \theta = 1$  یعنی  $\theta = 90^\circ$  پر

$$(14.4) \quad \lambda_{0c} = \frac{2b}{n}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے  $n$  کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انتظامی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔ جب  $n = 1$  ہو تب

$$(14.5) \quad \lambda_{0c} = 2b$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم تردد رے کی TE موج کا انتظامی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

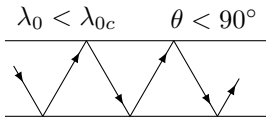
$n = 1$  کو بلند درجی TE امواج کا کم تردد رے کہا جاتا ہے۔  $n = 2$  اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انتظامی طول

$$(14.6) \quad \lambda_{0c} = b$$

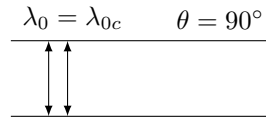
ہو گا۔ یوں  $n = 2$  درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصلہ موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔ اسی طرح  $n = 3$  کے لئے  $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$  حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

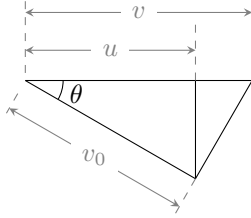
$$(14.7) \quad \lambda_0 = \lambda_{0c} \sin \theta$$



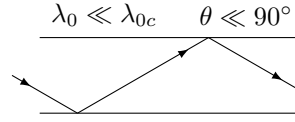
(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(c) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$(14.8) \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ  $\theta = 90^\circ$  حاصل ہوتا ہے۔ اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین،  $x$  تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔ یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو  $x$  سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔ اگر طول موج  $\lambda_0$  انقطاعی طول موج  $\lambda_{0c}$  سے قدر کم ہو تب  $\theta$  کی قیمت  $90^\circ$  سے کم ہوگی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان  $x$  سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔ آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار  $v_0$  لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$(14.9) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

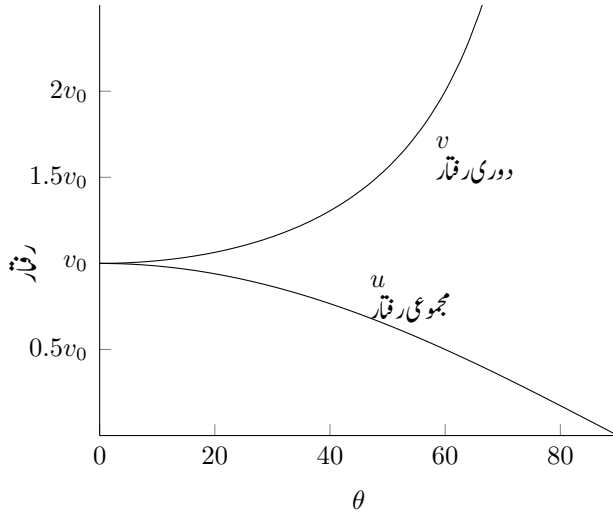
ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل  $\mu$  اور اس کا برقی مستقل  $\epsilon$  ہیں۔ شکل 14.6-د میں TE موج کی  $x$  سمت میں دوری رفتار  $v$  ہے۔ TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور ذاتی نقطہ اس رفتار سے  $x$  سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

$$(14.10) \quad \frac{v_0}{v} = \cos \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(14.11) \quad v = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon \cos \theta}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ عین  $\lambda_{0c}$  پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے  $\theta$  کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہوگی حتیٰ کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت  $v_0$  کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار<sup>8</sup> سے ہوتی ہے جسے شکل میں  $u$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos \theta \quad (14.12)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہذا اس کی قیمت  $v_0$  سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \quad (14.13)$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہذا مساوات 14.11 کو

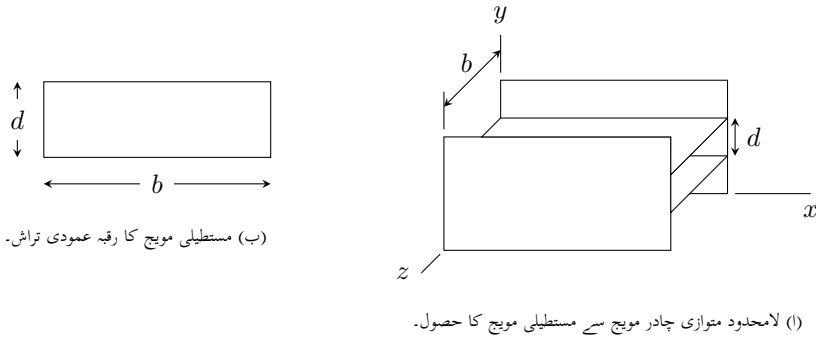
$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول  $\lambda$  اور آزاد موج کے طول  $\lambda_0$  کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے  $\theta$  کی قیمت  $90^\circ$  کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔



شکل 14.8: مستطیلی موج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت<sup>9</sup> کے چادروں پر مبنی موج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی موج عموماً گھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ  $b$  ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی موج بننا دکھایا گیا ہے جہاں  $d$  فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل موج کے لئے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی  $d$  لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موج پر غور کرنے سے انتظامی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل موج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

### 14.3 کھوکھلا مستطیلی موج

مستطیل موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدود میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جاسکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی موج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ موج کو  $x$  محور پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان  $E$  کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی  $TE^{10}$  موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی  $TM^{11}$  موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں  $E_x = 0$  ہوگا لہذا ایسی صورت میں  $H_x$  صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر  $H_x$  بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہوگی ناکہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو  $H_x$  کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے  $H_x$  کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل  $H_x$  کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے  $E_y$ ،  $E_z$ ،  $H_y$  اور  $H_z$  حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی موج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

<sup>9</sup> حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔  
transverse electric,  $TE^{10}$   
transverse magnetic,  $TM^{11}$



- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کا پابند بنائیں۔
- موج کو  $x$  سمت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کے لئے حرکتی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے  $E_x = 0$  اور  $H_x \neq 0$  رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی  $E_y, E_z, H_y$  اور  $H_z$  کے مساوات  $H_x$  کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات  $H_x$  کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو  $H_x$  کے لئے حل کریں۔
- $E_y, E_z, H_y$  اور  $H_z$  کے مساوات میں حاصل  $H_x$  پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان اقدامات سے مکمل حل حاصل ہوگا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کارتیسی محدود میں

$$(14.14) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.15) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.16) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

اور

$$(14.17) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.18) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.19) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

لکھے جائیں گے جہاں  $B = \mu H$  اور  $D = \epsilon E$  کا استعمال کیا گیا ہے۔ اسی طرح خالی خلاء میں  $\rho_h = 0$  لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

کارتیسی محدود میں

$$(14.20) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.21) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج  $x$  فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ  $x$  سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔ یوں  $E_y$  اور  $H_x$  کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \quad (14.22)$$

لکھے جائیں گے جہاں

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{حرکی مستقل} = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \text{تقلیلی مستقل} \\ \beta &= \text{زاویائی مستقل} \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 14.22 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.14

$$\left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x \right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \quad (14.23)$$

لکھا جائے۔ اسی طرح مساوات 14.22 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.15 تا مساوات 14.21 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \quad (14.24)$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \quad (14.25)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0 \quad (14.26)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0 \quad (14.27)$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0 \quad (14.28)$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (14.29)$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (14.30)$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں تریسلی تار کے برقی رکاوٹ  $Z$  اور برقی فراوانی  $Y$  کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/\text{m}) \quad (14.31)$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (\text{S}/\text{m}) \quad (14.32)$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$(14.33) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.34) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.35) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0$$

$$(14.36) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0$$

$$(14.37) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.38) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.39) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.40) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

یہ  $x$  سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ  $E_x = 0$  لیا جائے گا۔ ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$(14.41) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.42) \quad \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.43) \quad -\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$(14.44) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$(14.45) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.46) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.47) \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.48) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو  $H_x$  کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.42 اور 14.43 سے

$$(14.49) \quad \frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma}$$

لکھتے ہیں۔ اب  $\frac{E_y}{H_z}$  یا  $\frac{E_z}{H_y}$  کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔ چونکہ مساوات 14.49 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ  $Z_{yz}$ <sup>12</sup> کہا جائے گا جہاں

$$(14.50) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (\Omega)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.50 کو مساوات 14.46 میں پر کرتے ہوئے  $H_y$  کے لئے حل کرنے سے

$$(14.51) \quad H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.50 کو مساوات 14.45 میں پر کرتے ہوئے  $H_z$  کے لئے حل کرنے سے

$$(14.52) \quad H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب مساوات 14.51 کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.53) \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

اور مساوات 14.52 کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.54) \quad E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.51 تا مساوات 14.54 تمام اجزاء کو  $H_x$  کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.51 کا  $y$  کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.52 کا  $z$  کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma (\gamma - YZ_{yz}) H_x = 0$$

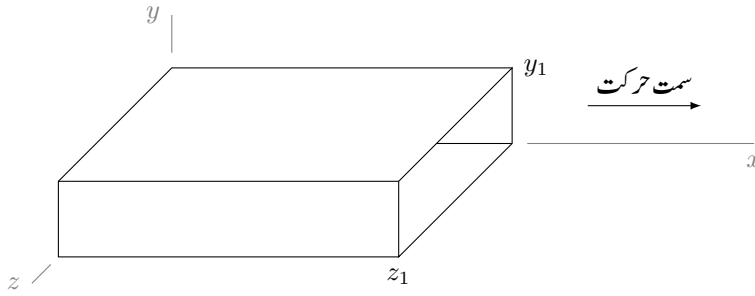
حاصل کرتے ہیں جس میں

$$(14.55) \quad k^2 = \gamma (\gamma - YZ_{yz})$$

پر کرتے ہوئے

$$(14.56) \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.56 موج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔ موج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔



شکل 14.9: مستطیل موج۔

ساتویں قدم میں موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔ شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی  $z_1$  اور اونچائی  $y_1$  ہے۔ موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا موج کے اطراف پر متوازی  $E$  صفر ہو گا۔ یوں موج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر  $E_z = 0$  ہو گا۔ اسی طرح موج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر  $E_y = 0$  ہو گا۔ اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.56 کا حل درکار ہے۔ علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں  $H_x$  کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \quad (14.57)$$

جہاں  $Y$  ایسا متغیر ہے جو صرف  $y$  پر منحصر ہے جبکہ  $Z$  ایسا متغیر ہے جو صرف  $z$  پر منحصر ہے۔ اصل میں ان متغیرات کو  $Y(y)$  اور  $Z(z)$  لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں  $Y$  اور  $Z$  ہی لکھا جائے گا۔ مساوات 14.57 کے استعمال سے مساوات 14.56

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \quad (14.58)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ دونوں اطراف کو  $YZ$  سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \quad (14.59)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف  $y$  پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف  $z$  پر منحصر ہے۔ یوں  $y$  کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔ اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں  $y$  کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو ناقابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم  $A_1$  - لکھتے ہیں۔ اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم  $A_2$  - لکھتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \quad (14.60)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \quad (14.61)$$

ہوں گے لہذا مساوات 14.59 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \quad (14.62)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.60 اور مساوات 14.61 ایک متغیرہ پر بنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔ مساوات 14.60 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \quad (14.63)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $m_1$ ،  $c_2$  اور  $b_1$  مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.63 کو واپس مساوات 14.60 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 14.60 کا حل

$$(14.64) \quad Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y$$

ہے۔ اسی طرح مساوات 14.61 کا حل

$$(14.65) \quad Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z$$

ہے۔ ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.57 کو

$$(14.66) \quad H_x = \left( c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \right) \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسے مساوات 14.53 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left( -c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y \right) \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر  $y = 0$  پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق،  $E_z = 0$  ہو گا لہذا  $y = 0$  پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

یعنی

$$(14.67) \quad c_2 = 0$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر  $y = y_1$  پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباؤ صفر کے برابر ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں  $y_1$  پر  $E_z = 0$  پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا ایک ممکنہ حل  $c_1$  مساوی صفر ہے جس سے  $H_x = 0$  حاصل ہو گا۔ اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے ناکہ ہر قسم کے میدان سے خالی موج سے، لہذا ہم

$$(14.68) \quad c_1 \neq 0$$

لیتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$(14.69) \quad \sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ یوں

$$(14.70) \quad H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

ہو گا۔ اس مساوات کو مساوات 14.54 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left( -c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر  $z = 0$  پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ  $c_1 \neq 0$  ہے لہذا

$$(14.71) \quad c_4 = 0$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بایاں کھڑا چادر  $z = z_1$  پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت  $E_y$  ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب  $c_1 \neq 0$  اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل  $c_3$  برابر صفر ہے جس سے  $H_x$  کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$(14.72) \quad c_3 \neq 0$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$(14.73) \quad \sqrt{A_2} z_1 = m\pi$$

یعنی

$$(14.74) \quad \sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $m = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ یوں  $c_1 c_3 = H_0$  لکھتے ہوئے

$$(14.75) \quad H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقدار ی مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت  $t$  اور  $x$  سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.22 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہذا

$$(14.76) \quad H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں  $H_x$  کو مساوات 14.51 تا مساوات 14.54 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$(14.77) \quad H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.78) \quad H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.79) \quad E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.80) \quad E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.81) \quad E_x = 0$$

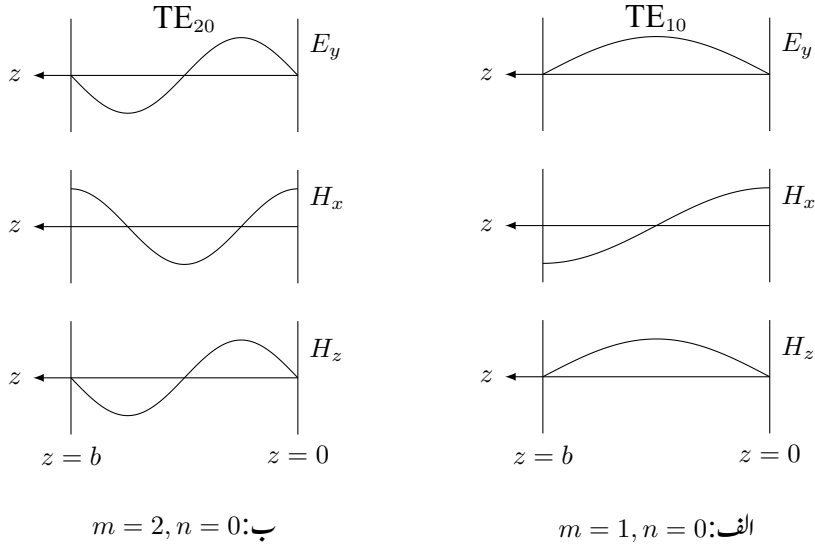
جہاں آخر میں  $E_x = 0$  بھی شامل کیا گیا ہے۔ مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 مستطیلی موج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔ یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی موج میں  $m$  اور  $n$  مستقل پر غور کریں۔ اگر  $m = 1$  اور  $n = 0$  ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں  $H_y, E_z$  اور  $E_x$  صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ یوں موج میں صرف  $H_x, H_z$  اور  $E_y$  میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی  $z = 0$  پر  $E_y = 0$  پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان  $z = \frac{z_1}{2}$  پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 14.10 الف میں پہلا خط  $E_y$  ہی ہے۔ اگر  $H_x$  کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی  $z = 0$  پر  $H_x$  کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی  $z = z_1$  پر  $H_x$  کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان  $z = \frac{z_1}{2}$  پر  $H_x = 0$  پایا جاتا ہے۔ شکل 14.10 الف میں دوسرا خط  $H_x$  ہے۔ مقناطیسی میدان  $H_z$  بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں  $m = 1$  اور  $n = 0$  کی صورت میں میدان  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ  $y$  کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ  $z$  پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$  اور  $n = 0$  کی صورت میں میدان شکل 14.10 ب میں دکھائے گئے ہیں۔ اب بھی میدان  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ  $y$  کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ  $z$  پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $m$  کی قیمت  $z$  پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ  $n$  بالکل اسی طرح  $y$  پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو  $m$  اور  $n$  سے پہچانا جاتا ہے۔ یوں شکل 14.10 الف کے امواج  $TE_{10}$  جبکہ شکل 14.10 ب کے امواج  $TE_{20}$  کہلاتے ہیں۔ یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج  $TE_{mn}$  کہلائے گی جہاں  $z$  پر آدھے چکروں کی تعداد  $m$  ہے جبکہ  $y$  پر آدھے چکروں کی تعداد  $n$  ہے۔ مستطیلی موج میں عموماً  $z$  سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مقناطیسی امواج  $TM_{mn}$  کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔





شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

### 14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE<sub>10</sub> موج:

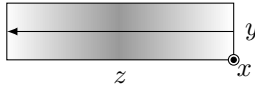
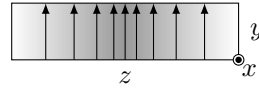
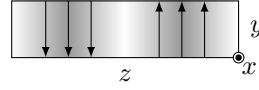
مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 میں  $m = 1$  اور  $n = 0$  پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE<sub>10</sub> امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.82}$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی  $E_x = 0$ ، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ ان امواج کو شکل 14.10-الف میں  $t = 0$  اور  $x = 0$  کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں میدان بالقابل  $z$  دکھایا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی  $y$  پر منحصر نہیں ہے لہذا  $y$  کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔ TE<sub>10</sub> تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہذا اس کی انقطاعی تعداد سب سے کم ہے۔ شکل 14.11 میں  $E_y$  اور  $H_z$  کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں  $z = \frac{z_1}{2}$  پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE<sub>20</sub> موج:

شکل 14.11 میں TE<sub>20</sub> کے  $E_y$  اور  $H_z$  اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

TE<sub>10</sub> کا  $H_z$  میدان۔TE<sub>10</sub> کا  $E_y$  میدان۔TE<sub>20</sub> کا  $H_z$  میدان۔TE<sub>20</sub> کا  $E_y$  میدان۔

شکل 14.11: TE<sub>10</sub> اور TE<sub>20</sub> کے  $E_y$  اور  $H_z$  میدان۔

بلند درجی TE<sub>11</sub> موج:

مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 میں  $m = 1$  اور  $n = 1$  پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE<sub>11</sub> امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.83}$$

اس بلند درجی انداز میں صرف  $E_x$  ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موج میں پائے جاسکتے ہیں۔ حقیقت میں کسی بھی موج میں پائے جانے والے امواج کا دار و مدار موج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موج میں ناہمواریوں پر ہے۔ کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.62، مساوات 14.69 اور مساوات 14.74 کو ملا کر

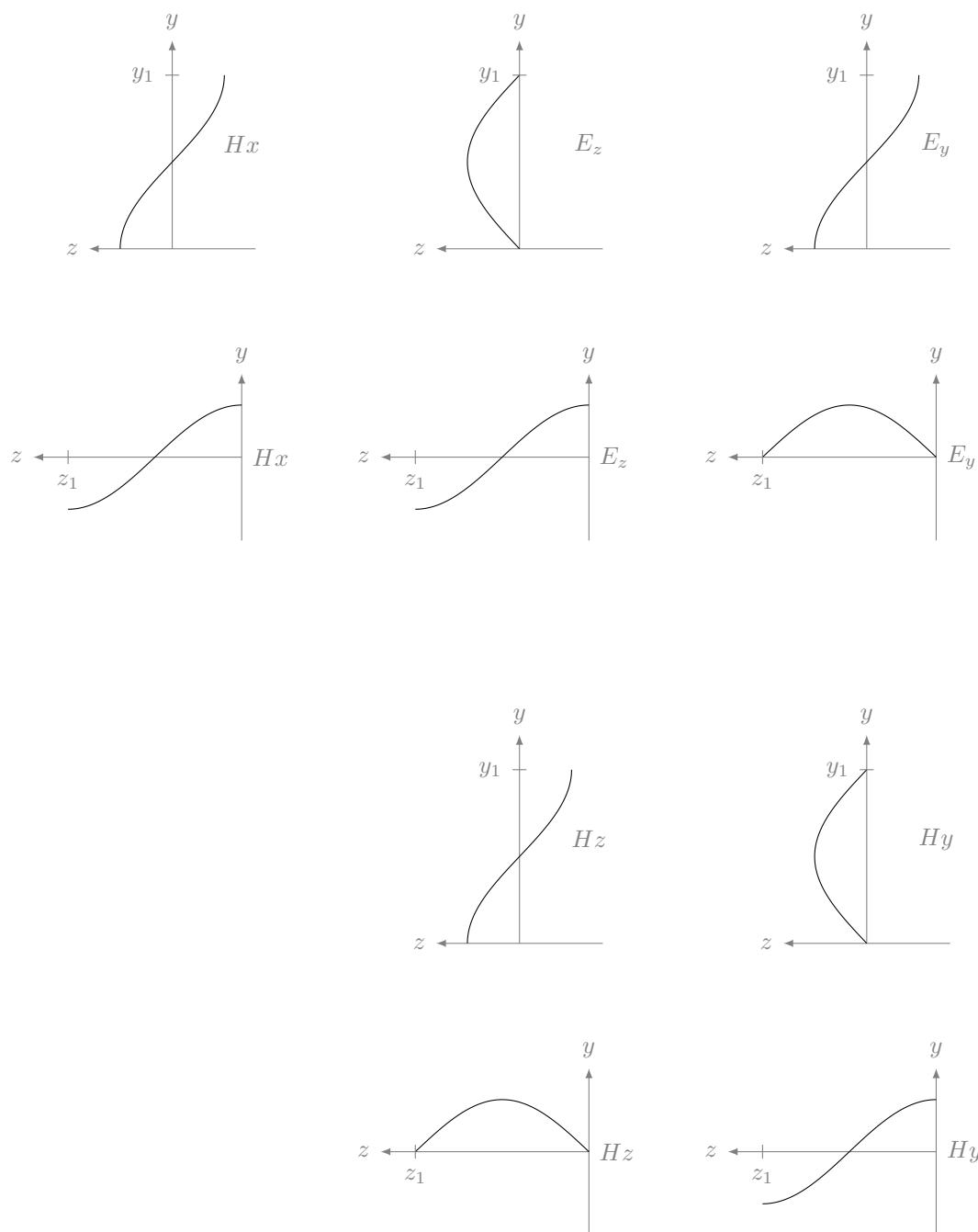
$$k^2 = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2
 \tag{14.84}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 14.31، مساوات 14.50 اور مساوات 14.55 سے

$$k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)
 \tag{14.85}$$

کے برابر ہے۔ بے ضیاع ذو برق میں  $\sigma = 0$  لیا جاسکتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}
 \tag{14.86}$$



شکل 14.12:  $TE_{11}$  میدان.

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہذا  $\gamma$  حقیقی ہو گا۔ حقیقی  $\gamma$  کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر  $\gamma$  خیالی عدد ہو گا لہذا موج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر  $\gamma = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اس تعدد کو انقطاعی تعدد<sup>13</sup> کہتے ہیں۔ انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہذا یہ موج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• کم تعدد یعنی کم  $\omega$  پر  $\gamma$  حقیقی ہوتا ہے۔ موج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔

• مخصوص درمیانی تعدد پر  $\gamma = 0$  ہوتا ہے۔ یہ انقطاعی تعدد ہے۔

• زیادہ تعدد پر  $\gamma$  خیالی ہوتا ہے۔ موج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.86 میں  $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$  درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل  $\beta_0$  ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو موج میں پایا جاتا ہے۔ یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \quad (14.87)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔ یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر  $k > \beta_0$  ہو گا لہذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \quad (14.88)$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{موج میں زاویائی مستقل}$$

$$\lambda \quad \text{موج میں طول موج}$$

ہیں۔ کافی بلند تعدد پر  $k \gg \beta_0$  ہو گا اور یوں موج کے زاویائی مستقل  $\beta$  کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل  $\beta_0$  کے قیمت کے قریب ہو گی۔ اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر  $k < \beta_0$  ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \quad (14.89)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $\alpha$  تقلیلی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر  $k \ll \beta_0$  ہو گا لہذا تقلیلی مستقل کی قیمت  $k$  کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر  $k = \beta_0$  ہو گا لہذا  $\gamma = 0$  ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$(14.90) \quad \omega^2 \mu \epsilon = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد<sup>14</sup>

$$(14.91) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left( \frac{n}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m}{z_1} \right)^2} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(14.92) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left( \frac{n}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m}{z_1} \right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں  $\lambda_{0c}$  لا محدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج<sup>15</sup> پکارا جاتا ہے۔ مساوات 14.91 اور مساوات 14.92 سے کھوکھلے مستطیلی موج کے کسی بھی  $\text{TE}_{mn}$  موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر  $\text{TE}_{10}$  موج کا انقطاعی طول موج

$$(14.93) \quad \lambda_{0c} = 2z_1$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں  $z_1 = b$  کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد ( $\beta_0 > k$ ) پر

$$(14.94) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2}$$

لہذا موج میں دوری رفتار<sup>16</sup>  $v_p$

$$(14.95) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{n\lambda_0}{2y_1} \right)^2 - \left( \frac{m\lambda_0}{2z_1} \right)^2}}$$

یا

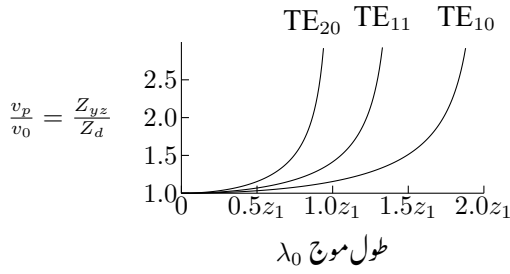
$$(14.96) \quad v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \right)^2}}$$

ہو گی جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{لا محدود خطے میں دوری رفتار}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لا محدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی موج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج  $\lambda_0$ ۔

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج  $\lambda_0$  دکھائے گئے ہیں۔ دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار  $v_0$  کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں مستطیلی موج کے دونوں اطراف برابر لمبائی ( $y_1 = z_1$ ) کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجربے میں موج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔ اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موج میں صفر کرتے ہیں۔ حقیقت میں موج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے  $\gamma = \alpha + j\beta$  ہو گا لہذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے موج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ ایسے موج میں طاقت کا ضیاع صرف موج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔ موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب ہے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان  $E_m$  صفر نہیں ہو گا۔ اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں  $E_m$  کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی موج کے طول موج  $\lambda$ ، زاویائی مستقل  $\beta$  یا دوری رفتار  $v_p$  حاصل کرتے وقت موج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تقبیلی مستقل  $\alpha$  کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ  $Z_{yz}$  مساوات 14.50 سے حاصل کرتے ہیں۔

(14.97)

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر  $\gamma = j\beta$  ہوتا ہے لہذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_d}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\Omega)$$

ہو گا جہاں

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{موج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ ہوا کے لئے  $Z_d = 120\pi = 376.7 \Omega$  کے برابر ہے۔ چونکہ  $Z_{yz}$  اور  $Z_d$  کی شرح بالکل  $v_p$  اور  $v_0$  کی شرح کے برابر ہے لہذا شکل 14.13

بالمقابل  $\lambda_0$  بھی دیتا ہے۔

cutoff frequency<sup>14</sup>  
cutoff wavelength<sup>15</sup>  
phase velocity<sup>16</sup>

14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM<sub>mn</sub> موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ اقدام صفحہ 364 پر بتلائے گئے۔ انہیں آٹھ قدم سے عرضی مقناطیسی موج بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔ باب کے آخر میں آپ کو یہی راہ استعمال کرتے ہوئے، مستطیلی موج میں TM<sub>mn</sub> موج حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔ انہیں یہاں مستطیلی موج میں TM<sub>mn</sub> موج حاصل کرنے کا ذرہ گہرا طریقہ استعمال کریں۔

چارج سے خالی خلاء ( $\rho_h = 0$ ) کی صورت میں میکس ویل کے مساوات

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_d + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

میں وقت کے ساتھ سائن نما تعلق اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا شرط یعنی مساوات 14.22 لاگو کرنے سے

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{ZH} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{YE} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\quad (14.98)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 14.31 کا استعمال کیا گیا۔ ان میں دوسری مساوات کی گردش لے کر پہلا مساوات پر کرتے ہوئے

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{Y} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{H}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے مزید یوں

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{H}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.98 کے تحت  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  ہے لہذا

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{H} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات درحقیقت تین مختلف مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا  $H_x$  جزو

$$\nabla^2 H_x + \mathbf{Y} \mathbf{Z} H_x = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \mathbf{Y} \mathbf{Z} H_x = 0$$

ہے۔





باب 15

سوالات



جدول 15.1:  $\sigma$ 

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
$7 \times 10^4$	گرفتار	$6.17 \times 10^7$	چاندی
1200	سلیکان	$5.80 \times 10^7$	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	$4.10 \times 10^7$	سونا
5	سمندری پانی	$3.82 \times 10^7$	المونیم
$10^{-2}$	چھونا پتھر	$1.82 \times 10^7$	ٹنگسٹن
$5 \times 10^{-3}$	چکنی مٹی	$1.67 \times 10^7$	جست
$10^{-3}$	تازہ پانی	$1.50 \times 10^7$	پیتل
$10^{-4}$	تقطیر شدہ پانی	$1.45 \times 10^7$	نکل
$10^{-5}$	ریتیلی مٹی	$1.03 \times 10^7$	لوبا
$10^{-8}$	سنگ مرمر	$0.70 \times 10^7$	قلعی
$10^{-9}$	بیک لائٹ	$0.60 \times 10^7$	کاربن سٹیل
$10^{-10}$	چینی مٹی	$0.227 \times 10^7$	مینگنیز
$2 \times 10^{-13}$	بیرا	$0.22 \times 10^7$	جرمنیم
$10^{-16}$	پولیسٹرن پلاسٹک	$0.11 \times 10^7$	سٹینلس سٹیل
$10^{-17}$	کوارٹس	$0.10 \times 10^7$	نائیکروم

جدول 15.2:  $\sigma/\omega\epsilon$  and  $\epsilon_R$ 

$\sigma/\omega\epsilon$	$\epsilon_R$	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا $\text{SiO}_2$
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 15.3:  $\mu_R$ 

$\mu_R$	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 15.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	$\epsilon_0$	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	$\mu_0$	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

