

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ . . . . .	1.1
2	سمتی الجبرا . . . . .	1.2
3	کارتیسی محدود . . . . .	1.3
5	اکائی سمتیات . . . . .	1.4
9	میدانی سمتیہ . . . . .	1.5
9	سمتی رقبہ . . . . .	1.6
10	غیر سمتی ضرب . . . . .	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . . .	1.8
17	گول نلکی محدود . . . . .	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . . .	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . . .	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . . .	
27	1.10 کروی محدود . . . . .	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع . . . . .	
41	2.2 برقی میدان کی شدت . . . . .	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . . .	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .	
53	2.5 چارج بردار حجم . . . . .	
54	2.6 مزید مثال . . . . .	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط . . . . .	
63	2.8 سوالات . . . . .	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج . . . . .
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ . . . . .
66	3.3	گاؤس کا قانون . . . . .
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال . . . . .
68	3.4.1	نقطہ چارج . . . . .
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح . . . . .
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . . .
71	3.5	ہم محوری تار . . . . .
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . . .
76	3.8	پھیلاؤ . . . . .
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات . . . . .
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات . . . . .
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ . . . . .
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام . . . . .
86	4.2	لکیری تکملہ . . . . .
91	4.3	برقی دباؤ . . . . .
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ . . . . .
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ . . . . .
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ . . . . .
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ . . . . .
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان . . . . .
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان . . . . .
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان . . . . .
104	4.6	جفت قطب . . . . .
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط . . . . .
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . . .

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
141	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
144	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
153	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
155	6.1 مسئلہ یکنائی	
156	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
157	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
158	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
164	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
167	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
174	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

179	7.1	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون
183	7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون
187	7.3	گردش
194	7.3.1	نلکی محدود میں گردش
200	7.3.2	عمومی محدود میں گردش کی مساوات
201	7.3.3	کروی محدود میں گردش کی مساوات
202	7.4	مسئلہ سٹوکس
206	7.5	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ
212	7.6	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ
217	7.7	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول
218	7.7.1	سمتی مقناطیسی دباؤ
219	7.7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون

## 8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

223	8.1	متحرک چارج پر قوت
224	8.2	تفرقی چارج پر قوت
226	8.3	برقی رو گزارنے تفرقی تاروں کے مابین قوت
228	8.4	قوت اور مروڑ
233	8.5	طاقنور مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے
233	8.6	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

## 9 سوالات

235	9.1	توانائی باب کے سوالات
235	9.2	کیپسٹر
237	9.3	لاپلاس
237	9.4	بایوٹ-سیوارٹ

## باب 8

### مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رول یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رول گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

#### 8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$F = QE \quad (8.1)$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت  $E$  کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت چارج  $Q$  اور برقی میدان کی شدت  $E$  کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$F = Qv \times B \quad (8.2)$$

قوت پیدا کرتا ہے۔ یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ اسی طرح قوت چارج کے رفتار  $v$ ، کثافت مقناطیسی میدان  $B$  اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ قوت کی سمت  $v$  اور  $B$  دونوں کے عمودی یعنی  $v \times B$  سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔ اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$(8.3) \quad \mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 اور زم مساوات قوت<sup>21</sup> کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت  $3C$  اور رفتار  $\mathbf{v} = 2a_x - 3a_y + a_z$  ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف)  $\mathbf{E} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ، (ب)  $\mathbf{B} = -2a_x - 3a_y + 6a_z$ ، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: 78.7 N ، 71.3 N ، 18.49 N

## 8.2 تفرقی چارج پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج  $dQ$  پر تفرقی قوت  $d\mathbf{F}$  عمل کرے گی۔

$$(8.4) \quad d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

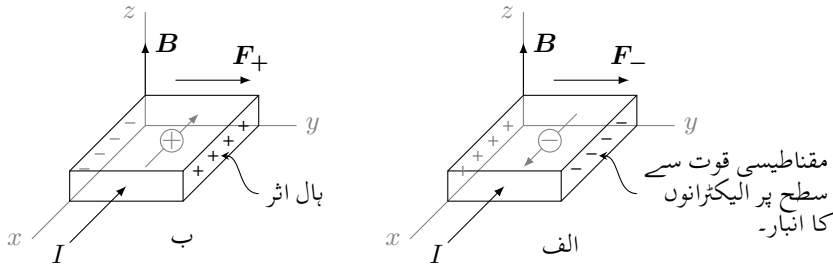
آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔ مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت اور منفی چارج کے مابین کو لو موب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

<sup>1</sup> یہ مساوات ہینڈرک لورنٹز کے نام ہے۔  
Lorentz force equation<sup>2</sup>





شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جاسکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دوالٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباؤ پایا جاتا ہے جسے ہال اثر<sup>3</sup> کے نام<sup>4</sup> سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا  $n$  قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی  $I$  کی سمت  $-a_x$  ہے لہذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی  $a_x$  سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیابی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار  $a_z$  سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت  $a_y$  سمت میں قوت  $F_-$  عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ<sup>5</sup> ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف اور بائیں طرف  $+$  کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت  $E$  اور یوں برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباؤ<sup>6</sup> پایا جائے گا۔ تار کا بائیں طرف ہال برقی دباؤ کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار  $p$  قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول<sup>7</sup> کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو  $-a_x$  سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباؤ کا مثبت سر اتار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ آیا نیم موصل  $n$  یا  $p$  قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً ایک سمٹی روپیما، مقناطیسی بہاؤ پیمائ<sup>8</sup> وغیرہ۔

سمتی رفتار  $v$  سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج  $\rho_h$  کثافت برقی رو  $J$

(8.5)

$$J = \rho_h v$$

کو جنم دیتا ہے۔ اس مساوات کو صفحہ 117 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم  $dh$  میں تھوڑے سے چارج کو

(8.6)

$$dQ = \rho_h dh$$

Hall effect<sup>3</sup>

<sup>4</sup> ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔

uncovered<sup>5</sup>

Hall voltage<sup>6</sup>

free holes<sup>7</sup>

magnetic flux meter<sup>8</sup>

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 8.4 کو

$$dF = \rho_h dhv \times B$$

یا

$$(8.7) \quad dF = J \times B dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم مساوات 7.5 میں دیکھ چکے ہیں کہ  $J dh$  کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جاسکتا ہے جسے

$$J dh = K dS = I dL$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 8.7 کو

$$(8.8) \quad dF = K \times B dS$$

یا

$$(8.9) \quad dF = I dL \times B$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے مکمل سے انہیں یوں

$$(8.10) \quad F = \int_h J \times B dh$$

$$(8.11) \quad F = \int_S K \times B dS$$

$$(8.12) \quad F = \oint I dL \times B$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی  $L$  ہو تو مکمل سے

$$(8.13) \quad F = IL \times B$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$(8.14) \quad F = ILB \sin \alpha$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ  $\alpha$  ہے۔ مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔ دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

### 8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ  $N_1$  پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا  $dL_1$  دکھایا گیا ہے جس میں  $I_1$  برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ  $N_2$  پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا  $dL_2$  دکھایا گیا ہے جس میں  $I_2$  برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ  $N_2$  پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان  $H_2$  میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ یہاں تفرقی مقناطیسی میدان  $dH_2$  سے  $dL_2$  پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ  $d(dF_2)$  لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$d(dF_2) = I_2 dL_2 \times dB_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $dB_2 = \mu_0 dH_2$  کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(8.15) \quad d(dF_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2} dL_2 \times (dL_1 \times a_{R21})$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر مکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ  $N_2$  پر مکمل مکمل لیتے ہوئے میدان  $H_2$  استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان  $dH_2$  استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ  $(1, 2, 3)$  پر  $I_1 dL_1 = 2a_y A m$  جبکہ نقطہ  $(-1, 3, 2)$  پر  $I_2 dL_2 = -4a_z A m$  پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں  $R_{21} = -2a_x + a_y - a_z$  ہے لہذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned} d(dF_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (-4a_z) \times \left[ (2a_y) \times (-2a_x + a_y + 2a_z) \right] \\ &= -108.86 a_y nN \end{aligned}$$

ہوگا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned} d(dF_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{3}{2}}} (2a_y) \times \left[ (-4a_z) \times (2a_x - a_y - 2a_z) \right] \\ &= 54.4 a_z nN \end{aligned}$$

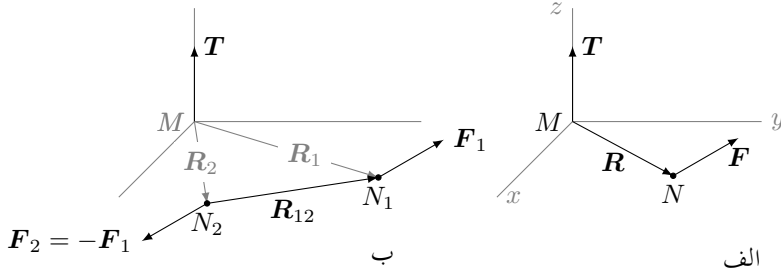
قوت حاصل ہوتی ہے جہاں  $R_{12} = -R_{21}$  استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نہ ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی مکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} (8.16) \quad F_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[ dL_2 \times \oint \frac{dL_1 \times a_{R21}}{R_{21}^2} \right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[ \oint \frac{a_{R21} \times dL_1}{R_{21}^2} \right] \times dL_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی مکمل نقطہ  $N_2$  پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی مکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

#### 8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزرتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں  $B$  کو مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$F = -B \times \oint dL$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔ کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری مکمل  $\oint dL = 0$  ہوتا ہے لہذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔ البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نمائندوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ<sup>9</sup> یعنی قوت کا معیار اثر<sup>10</sup> عموماً صفر نہیں ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی پُچول<sup>11</sup> کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ  $N$  پر قوت  $F$  عمل کر رہا ہے۔ ہم نقطہ  $M$  کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ  $M$  سے  $N$  تک سمتی فاصلہ  $R$  قوت کا بازو<sup>12</sup> کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر  $T$

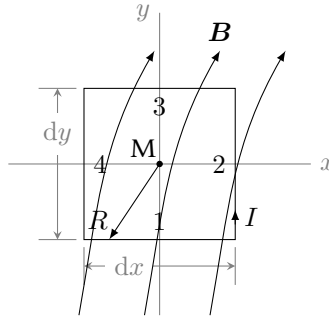
$$T = R \times F \quad (8.17)$$

کے برابر ہے۔ مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔ چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور  $M$  پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T &= R_1 \times F_1 + R_2 \times F_2 \\ &= (R_1 - R_2) \times F_1 \\ &= R_{12} \times F_1 \end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر  $F_2 = -F_1$  پر کیا گیا ہے۔ اس مساوات میں قوتوں کے محور کا  $R_{12}$  پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔ اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جاسکتا ہے۔



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارنے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان  $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$  میں مروڑ حاصل کریں۔ تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف dx اور dy ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔ اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

(8.18)  $B_0 = B_{x0} a_x + B_{y0} a_y + B_{z0} a_z$  کے برابر ہے۔ یوں وسط سے  $-\frac{dy}{2}$  جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلس سے

$$B_1 = B_0 - \frac{\partial B}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$B_1 = \left( B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_x + \left( B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y + \left( B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$dF_1 = I dx a_x \times B_1$$

یا

$$\begin{aligned} dF_1 &= I dx a_x \times \left[ \left( B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_x + \left( B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y + \left( B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z \right] \\ &= I dx \left[ \left( B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_z - \left( B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) a_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی  $\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$  لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[ \left( B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z - \left( B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left( B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

ہوگا۔

اسی طرح وسط سے  $\frac{dy}{2}$  + جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مگنٹارن تسلسل سے

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\mathbf{B}_3 = \left( B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left( B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y + \left( B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$d\mathbf{F}_3 = -I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times \left[ \left( B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_x + \left( B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y + \left( B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &= I dx \left[ - \left( B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left( B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی  $\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y$  لہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 \\ &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx \left[ - \left( B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_z + \left( B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \mathbf{a}_y \right] \\ &= -\frac{I}{2} \left( B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dy \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

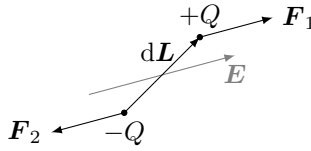
ہوگا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -IB_{y0} dx dy \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوٹے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = IB_{x0} dx dy \mathbf{a}_y$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$dT = I dx dy (B_{x0} a_y - B_{y0} a_x)$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$dT = I dx dy (a_z \times B_0)$$

یا

$$(8.19) \quad dT = I dS \times B$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبہ  $dS$  کو گھیرتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہا  $B$  لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر  $dm^{13}$  کی تعریف ہے جس کی اکائی  $Am^2$  ہے۔ یوں

$$(8.20) \quad dm = I dS$$

اور

$$(8.21) \quad dT = dm \times B$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ  $dS$  مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہوگی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔ مثبت چارج پر قوت  $F_1 = QE$  اور منفی چارج پر قوت  $F_2 = -QE$  ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned} dT &= dL \times QE \\ &= dp \times E \end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں  $dp = Q dL$  برقی جفت قطب ہے۔ مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔ بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان  $E$  کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_1 &= I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= -\frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (B_{y0} \mathbf{a}_z - B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= -I dx \mathbf{a}_x \times (B_{x0} \mathbf{a}_x + B_{y0} \mathbf{a}_y + B_{z0} \mathbf{a}_z) \\ &= I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \frac{dy}{2} \mathbf{a}_y \times I dx (-B_{y0} \mathbf{a}_z + B_{z0} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{I}{2} dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -I dx dy B_{y0} \mathbf{a}_x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = I dx dy B_{x0} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان نتائج سے کل مروڑ

$$d\mathbf{T} = I dx dy (B_{x0} \mathbf{a}_y - B_{y0} \mathbf{a}_x)$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

$$(8.22) \quad \mathbf{T} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{یکساں مقناطیسی میدان}$$

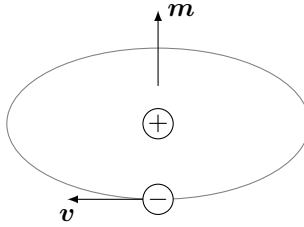
سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔ اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جاسکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔





شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔



شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

## 8.5 طاقتور مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار پر گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے یہ برقی رو  $v$  کے الٹ سمت میں ہو گا۔ اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر برقی رو تصور کیا جاسکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب  $m$  کو جنم دیتا ہے۔ ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات<sup>14</sup> سے ہی سمجھے جاسکتے ہیں۔ یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نیکل<sup>15</sup> اور کوبالٹ<sup>16</sup> ایسے عنصر ہیں جن کا  $m$  قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔ یہ اشیاء طاقتور مقناطیسی اشیاء<sup>17</sup> کہلاتے ہیں۔ ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

طاقتور مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ ایسے ہم صف<sup>18</sup> خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ ان خطوں کو مقناطیسی خطے<sup>19</sup> کہتے ہیں۔ مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔ کسی بھی قدرتی مقناطیسی شے میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ ہاں بیرونی مقناطیسی میدان  $B_0$  لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو  $B_0$  کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔ یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔ بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔ یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔ یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال<sup>20</sup> کہلاتا ہے۔

## 8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

آئیں پہلے مقناطیسیت  $M$  کی تعریف کریں۔ تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں  $n$  مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔

<sup>14</sup> quantum mechanics

<sup>15</sup> nickel

<sup>16</sup> cobalt

<sup>17</sup> ferromagnetic

<sup>18</sup> aligned

<sup>19</sup> magnetic domain

<sup>20</sup> hysteresis



