

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
192	گردش	7.3
199	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
204	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
206	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
207	مسئلہ سٹوکس	7.4
210	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
217	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
222	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
224	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
229	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
229	متحرک چارج پر قوت	8.1
230	تفرقی چارج پر قوت	8.2
233	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
234	قوت اور مروڑ	8.4
239	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
240	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
243	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
244	مقناطیسی دور	8.8
247	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
248	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
252	مشترکہ امالہ	8.11

255	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
255	9.1	فیراڈے کا قانون
261	9.2	انتقالی برقی رو
265	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
266	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
268	9.5	تاخیری دباؤ
273	10	مستوی امواج
273	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
274	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
281	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
283	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
285	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
288	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
292	10.4	موصل میں امواج
298	10.5	انعکاس مستوی موج
304	10.6	شرح ساکن موج
311	11	ترسیلی تار
311	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
315	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
316	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
319	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
320	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
321	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
326	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
333	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
334	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

339	12	تقطیب موج
339	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
342	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
345	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
345	13.1	ترچھی آمد
356	13.2	ترسیم ہائی گن
359	14	مویج اور گھمکیا
359	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
360	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
366	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
375	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
382	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
386	14.5	کھوکھلی نالی مویج
393	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
395	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
397	14.8	سطحی موج
402	14.9	ذو برق تختی مویج
405	14.10	شیش ریشہ
408	14.11	پردہ بصارت
410	14.12	گھمکی خلاء
413	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 421 15.1 تعارف
- 421 15.2 تاخیری دباؤ
- 423 15.3 مختصر جفت قطبی ایٹینا
- 431 15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
- 434 15.5 ٹھوس زاویہ
- 436 15.6 موثر رقبہ، سمیت اور افزائش
- 442 15.7 قطاری ترتیب
- 443 15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
- 444 15.7.2 ضرب نقش
- 444 15.7.3 ثنائی قطار
- 446 15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
- 448 15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
- 449 15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
- 453 15.8 تداخل پیمہ
- 454 15.9 مسلسل موثر رقبے کی نقش

باب 15

اینڈینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 15.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہوگا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$(15.1) \quad I = I_0 \cos \omega t$$

کی بجائے

$$(15.2) \quad [I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو¹ کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو چکور توسین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

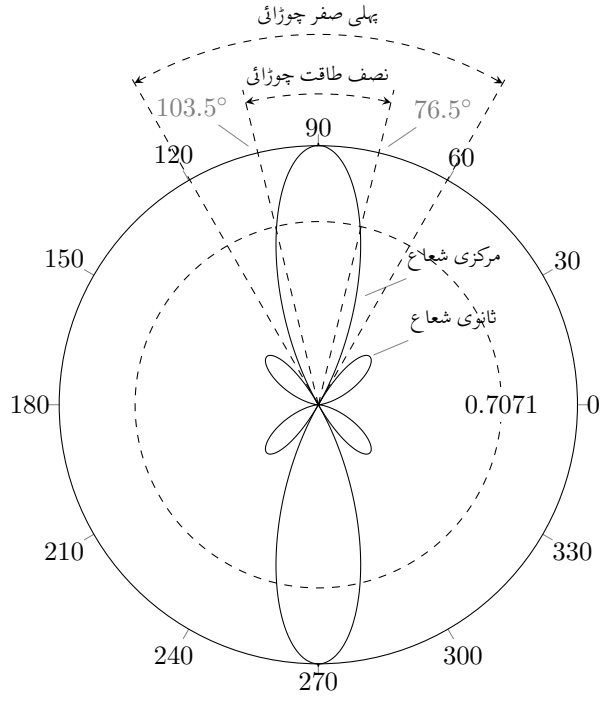
مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $\frac{\omega}{\beta} = c$ کے استعمال سے

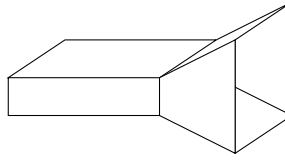
$$(15.3) \quad \cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

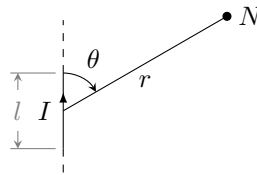
retarded current¹



شکل 15.1: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 15.2: ہپا اینٹینا



شکل 15.3: برقی رو گزرتی تار کی چھوٹی لمبائی

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$(15.4) \quad [I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ہے۔ اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$(15.5) \quad [J] = J_0 e^{j\omega(t-r/c)} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ہوگی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباؤ

$$(15.6) \quad [A] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[J]}{r} dh = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح تاخیری جمی کثافت چارج

$$(15.7) \quad [\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباؤ

$$(15.8) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروئی محدود کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

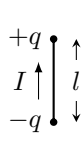
مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب² کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہوگی۔ لا محدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب³ کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے لہذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

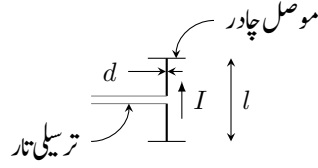
آئیں شکل 15.4-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کیپیسٹر بوجھ کر دار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن تریسلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تریسلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $\lambda \ll d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.4-ب کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہوگا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کیپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$(15.9) \quad I = \frac{\partial q}{\partial t}$$

ہے۔



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

شکل 15.4: جفت قطب

آئیں لا محدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدود کے مرکز اور لمبائی کو z محدود پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r ، E_θ اور E_ϕ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$(15.10) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(15.11) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباؤ

\mathbf{A} نقطہ N پر سمتی دباؤ

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباؤ V اور سمتی دباؤ \mathbf{A} معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباؤ قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$(15.12) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\mathbf{A}]$$

$$(15.13) \quad \mathbf{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\mathbf{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\mathbf{A}]$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباؤ

$$(15.14) \quad [\mathbf{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

$$(15.15) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباؤ $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباؤ $[\mathbf{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر

مختصر ہے۔ مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان H صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان E ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباؤ ہی استعمال کئے جائیں گے لہذا انہیں چکرو تو سین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکرو تو سین کے دباؤ کو تاخیری دباؤ ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباؤ کا صرف a_z جزو

$$(15.16) \quad \mathbf{A} = \frac{a_z \mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l ، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \ll l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \ll l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباؤ میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$(15.17) \quad \mathbf{A} = \frac{a_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$(15.18) \quad \begin{aligned} A_r &= \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \\ A_\phi &= \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = 0 \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$(15.19) \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہذا مقداری دباؤ

$$(15.20) \quad V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

ہوگا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$(15.21) \quad q = \int I dt = \frac{I}{j\omega}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 15.21 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.20 میں پر کرتے ہیں۔

$$(15.22) \quad V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$s_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرتے

$$(15.23) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2} \cos \theta) e^{j\frac{\beta l}{2} \cos \theta} - (r - \frac{l}{2} \cos \theta) e^{-j\frac{\beta l}{2} \cos \theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right]$$

ماتا ہے۔ چکور توسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موپور⁴ کے استعمال سے

$$(15.24) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} + j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} - j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) \right]$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہذا

$$\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} = \cos \frac{\pi l \cos \theta}{\lambda} \approx 1$$

$$\sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \approx \frac{\beta l \cos \theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.24 میں پر کرنے سے

$$(15.25) \quad V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا جیٹ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A،

l جفت قطب کی لمبائی، m،

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s، جہاں ہر ٹHz میں تعدد f ہے

⁴ de Moivre's theorem ($e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$)

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، 3×10^8 m/s

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \ll l$ اور $r \ll l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.19 سمتی دباؤ اور مساوات 15.25 مقداری دباؤ دیتے ہیں۔ کروی محدود میں مقداری دباؤ کی ڈھلوان

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ (15.26) \quad &= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[- \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2c \cos \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_r - \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{c \sin \theta}{j\omega r^2} \right) \mathbf{a}_\theta \right] \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $E = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.13 کی مدد سے

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi \end{aligned}$$

لکھے جاسکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \\ (15.27) \quad E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \quad \text{عمومی میدان} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.12 سے حاصل ہوگی۔ کروی محدود میں سمتی دباؤ کی گردش

$$\begin{aligned} (15.28) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

میں مساوات 15.18 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$(15.29) \quad \begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) & \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $B = \mu_0 H$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r, E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہوگا لہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$(15.30) \quad \begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{j\omega}{c^2 r} = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} & \text{دور میدان} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$(15.31) \quad \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin \theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندر سہ⁵ شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \end{aligned}$$

یا

$$(15.32) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j \frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$(15.33) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا جسے

$$(15.34) \quad r \gg \frac{1}{\beta} \quad (\text{دور میدان})$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $\frac{c}{\omega} \ll r \ll \frac{1}{\beta}$ یعنی r لیا جائے گا۔ یوں مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

ہوں گے لہذا قریبی میدان

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان} \end{aligned} \quad (15.35)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$(15.36) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$$

ہوگا۔ مساوات 15.36 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈین کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوائنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.30 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \mathbf{a}_r = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \quad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوائنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.35 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2} [(E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta) \times H_\phi^* \mathbf{a}_\phi]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r \right] \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	0	$\frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$	$\frac{jI_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2}$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.27 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.29 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$E_r = \frac{q_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right)$$

$$E_\theta = \frac{q_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$$

لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \rightarrow 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$E_r = \frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$H_\phi = \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2} \quad \text{نیم ساکن میدان}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (15.37)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میدان کو نیم ساکن میدان⁶ کہا جاتا ہے۔ یہ صفحہ 105 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔ اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 184 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔ چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔ بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.30 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹی ہیں لہذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان⁷ کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \ll \lambda$ اور $l \ll \lambda$ کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف A سے حاصل کیا جاسکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباؤ V کا کوئی کردار نہیں۔ یوں مساوات 15.13 اور مساوات 15.18 سے

$$(15.38) \quad E_{\theta} = -j\omega A_{\theta} = -j\omega \left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \right) = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_{ϕ} کو مساوات 15.12 سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لا محدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$(15.39) \quad H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{Z_0} = j \frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.30 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$(15.40) \quad E_{\theta} = j \frac{60\pi}{\lambda} I_0 \frac{l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

زاویہ شکل فاصلہ لمبائی رو مقدار

لکھا جاسکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin \theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t - \beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوینٹنگ سمتیہ

$$(15.41) \quad \mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی سطحی تکمیل

$$(15.42) \quad P = \int_S \mathcal{P}_{\text{وسط}} \cdot d\mathbf{s} \quad (W)$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سینٹ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمیل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمیل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہوگا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جاسکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیثہ ہے۔ یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \quad (\Omega) \quad (15.43)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت⁸ کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2} \int_S [E_\theta H_\phi^*]_{\text{حقیقی}} ds \quad (15.44)$$

سے حاصل ہوگی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہذا

$$P = \frac{1}{2} \int_S [H_\phi H_\phi^* Z_0]_{\text{حقیقی}} ds = \frac{Z_0}{2} \int_S |H_\phi|^2 ds \quad (15.45)$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0} \int_S |E_\phi|^2 ds \quad (15.46)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوت $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.16 سے مساوات 15.17 حاصل ہونے کی بجائے

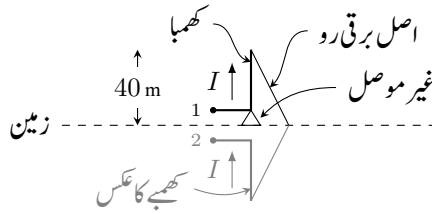
$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_z \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i dz \\ &= \frac{\alpha_z \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

حاصل ہوگا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.30 سے مقناطیسی میدان کا حیثہ

$$H_\phi = \frac{I \beta l}{4\pi r} \sin \theta \quad (15.47)$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیثے کو مساوات 15.45 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{I \beta l}{4\pi r} \sin \theta \right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$



شکل 15.5: کھمبا اینٹینا

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 15.45 یا مساوات 15.46 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (15.48)$$

ہوگی۔ مساوات 15.43 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \quad (\Omega) \quad (15.49)$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 ds = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 ds \quad (15.50)$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 15.5 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{300000} = 1000 \text{ m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہوگا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہوگی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہوگی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 2×40 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.49 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000} \right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0} \right)^2 = 1.2633 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھبے کے سر 1 اور عکسی کھبے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63 \Omega \quad (15.51)$$

ہوگی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔ موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ ان ضیاع کو مزاحمت ضیعی $R_{\text{ضیعی}}$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیعی}} \quad (15.52)$$

ہوگی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر 0.63Ω $R_{\text{ضیعی}}$ ہوتا تب اینٹینا کی کارگزاری k^0

$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50 \% \quad (15.53)$$

پچاس فی صد ہوگی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارگزاری اس سے بہتر کی جاسکتی ہے۔

اگر مخلوط پونٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گہرے سطح پر اس کا مکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح مکمل کی صورت اور مقام کا مکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دار و مدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح مکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

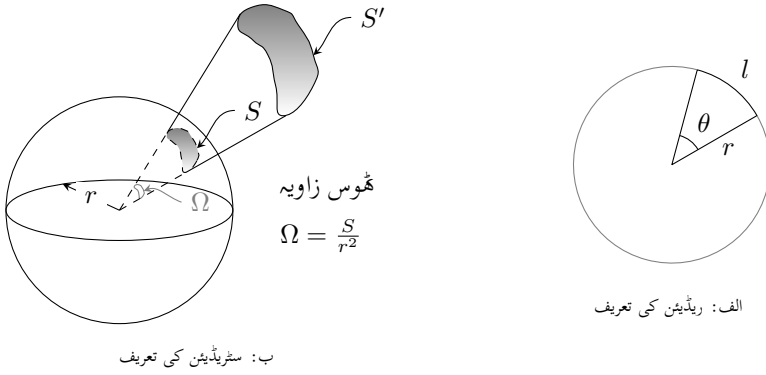
15.5 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ¹⁰ درکار ہو گا لہذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 15.6-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \quad (\text{rad}) \quad (15.54)$$

زاویے θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈین¹¹ (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈین (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈین کے زاویے کو ظاہر کرتی



شکل 15.6: ریڈین اور سٹریڈین کی تعریف

ہے۔ اگرچہ مساوات 15.54 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\text{sr}) \quad (15.55)$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈین یعنی سٹریڈین¹² (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری کرہ 4π سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 15.6-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدود کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (15.56)$$

کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہوگی۔

شکل 15.6-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 15.6-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.6-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 15.6-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈین یا ریڈین کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈین کو ہی ایک سٹریڈین کہتے ہیں۔

$$1 \text{ sr} = 1 \text{ rad}^2 \quad (15.57)$$

کرہ کی محدود میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبہ کو

$$S = \int_{\theta} \int_{\phi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (15.58)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_{\theta} \int_{\phi} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{sr}) \quad (15.59)$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.6 موثر رقبہ، سمیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_{θ} اور H_{ϕ} پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہذا پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 \mathbf{a}_r = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \mathbf{a}_r \quad (15.60)$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔ یوں پونٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے

$$P(\theta, \phi) = r^2 \mathcal{P} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 r^2 \quad (\text{W/sr}) \quad (15.61)$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔ $P(\theta, \phi)$ اخراجی شدت¹³ کہلاتی ہے۔ اخراجی شدت کے بعد پر غور کریں۔ پونٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔ مساوات 15.55 سے رقبہ کو $S = \Omega r^2$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پونٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو تقابل پذیر¹⁴ بنانے کی خاطر $P(\theta, \phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت بلند تر $r^2 \mathcal{P}_{\text{بلند تر}} = P(\theta, \phi)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}} \quad \text{بے بعد} \quad (15.62)$$

بے بعد¹⁵ مقدار $P_n(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابل پذیر نقش طاقت¹⁶ ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{P} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (15.63)$$

ہے۔ اگر کثافت طاقت بلند تر \mathcal{P} ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہوگی یعنی

$$\mathcal{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{P} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (15.64)$$

ہوگا۔ اس میں مساوات 15.55 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبہ کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mathcal{P} r^2}{\mathcal{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin \theta d\theta d\phi$$

radiation intensity¹³

normalized¹⁴

dimensionless¹⁵

normalized power pattern¹⁶

یعنی

$$(15.65) \quad \Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega \quad (\text{sr})$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ¹⁷ کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع¹⁸ پر مکمل

$$(15.66) \quad \Omega_M = \iint_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta, \phi) d\Omega \quad (\text{sr})$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ¹⁹ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ثنائی شعاع²⁰ کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$(15.67) \quad \Omega_m = \Omega_A - \Omega_M$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی²¹ اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت²² ہے۔ اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$(15.68) \quad D = \frac{\text{بلند تر زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta, \phi)_{\text{اوسط}}} \quad \text{بے بُعد}$$

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈین سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta, \phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta, \phi)$ کا 4π سٹریڈین پر مکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} = \frac{4\pi P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}} d\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 15.65 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$(15.69) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad \text{بے بُعد}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہوگی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

beam solid angle¹⁷main lobe¹⁸major lobe solid angle¹⁹minor lobe²⁰isotropic²¹directivity²²

مثال 15.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \quad (15.70)$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 15.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{H_\phi^2(\theta, \phi)}{H_\phi^2(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}} = \sin^2 \theta \quad (15.71)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 15.65 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{8\pi}{3} \quad (15.72)$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \quad (15.73)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

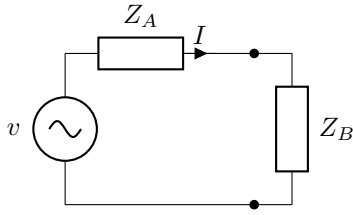
سمتیت کا دار و مدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کارگزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کارگزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش²³ پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} = \text{افزائش} \quad (15.74)$$

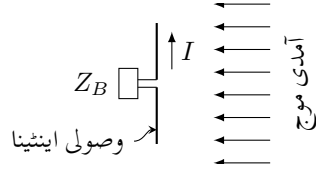
ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \quad (15.75)$$

ہو گا جہاں



ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

شکل 15.7: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 15.53 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \quad (15.76)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\%$) کی افراش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\%$ اینٹینا کی صورت میں افراش کی قیمت سمتیت سے کم ہوگی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افراش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$1 \leq D \leq \infty$$

$$0 \leq G \leq \infty \quad \text{ممکنہ قیمت}$$

اخراجی اینٹینا²⁴ شعاعی اخراج کرتی ہے۔ اس کے برعکس وصولی اینٹینا²⁵ شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\mathcal{P}S = I^2 R_B \quad (15.77)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ²⁶ کہا جاتا ہے۔ یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathcal{P}} \quad (15.78)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں

transmitting antenna²⁴
receiving antenna²⁵
antenna aperture²⁶

A اینٹینا کا فرضی رقبہ، m^2

I موثر برقی رو، A

\mathcal{P} آمدی موج کا پوٹیننگ سمتیہ، W/m^2

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 15.7-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن²⁷ مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہوگی جہاں

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباؤ،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔ یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$(15.79) \quad |I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2}$$

ہوگا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$(15.80) \quad S = \frac{v^2 R_B}{\mathcal{P} [(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2]}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ پیدا ہوگا۔ اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہوگی جب

$$(15.81) \quad R_B = R_A$$

$$(15.82) \quad X_B = -X_A$$

ہوں۔ بے ضیاع اینٹینا کی تھوڑی مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔ اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{موثر}} = \frac{v^2}{4\mathcal{P}R_r} \quad (15.83)$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا موثر رقبہ $S_{\text{موثر}}^{28}$ پکارا جاتا ہے۔ ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا موثر رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 15.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا موثر رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.83 سے ظاہر ہے کہ موثر رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا ہونے والی برقی دباؤ v ، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت \mathcal{P} درکار ہوں گے۔ جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ اس صورت پیدا ہوگی جب اینٹینا کی تار آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \quad (15.84)$$

برقی دباؤ پیدا ہوگی۔ آمدی موج کی پوٹنٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \frac{E^2}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (15.85)$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 15.49 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (15.86)$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 15.83 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{موثر}} = \frac{E^2 l^2}{4 \frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \quad (\text{m}^2) \quad (15.87)$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ موثر رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}} + R_{\text{اخراجی}}$ ہوگی۔ یوں کامل جفت قطب کا موثر رقبہ کچھ کم ہوگا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا موثر رقبہ $S_{\text{موثر}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ موثر رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{موثر}} \quad (15.88)$$

ہوگا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \quad (15.89)$$

ہوگا۔

ہم آگے جا کر ایک نتیجہ حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_{mAx}}{r\lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = A_{\text{موثر}} \Omega_A \quad (\text{m}^2) \quad (15.90)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$A_{\text{موثر}}$ اینٹینا کا موثر رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔ اس مساوات کے تحت اینٹینا کا موثر رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔ یوں اگر ہمیں موثر رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب موثر رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.69 میں مساوات 15.90 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{موثر}} \quad (15.91)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔ تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$D = \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}}{P_{\text{اوسط}}} \quad (15.92)$$

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}$$

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{موثر}}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے موثر رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

15.7 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا اور اصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زوایائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔ نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت²⁹ دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔ دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔ مزید یہ کہ دونوں کے E میدان صفحے کے عمودی ہیں۔ دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \quad (15.93)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta \quad (15.94)$$

ہے۔ ان مساوات میں

E_1 - منبع 1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 - منبع 2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر ($E_1 = E_2$) ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \quad (15.95)$$

ہوگا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع 1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \quad (15.96)$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2} \quad (15.97)$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع 1 پر چنا ہے۔

15.7.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 15.95 (یا مساوات 15.97) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش³⁰ جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش³¹ کہا جائے گا۔ یوں

$$E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2} \quad (15.98)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 15.98 ضرب نقش³² کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

15.7.3 ثنائی قطار

مساوات 15.97 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔ نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (15.99)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل ب حاصل ہوتا ہے۔ اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (15.100)$$

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جاسکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت (1 : 2 : 1) نسبت سے ہے۔ اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جاسکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت (1 : 3 : 3 : 1) نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (15.101)$$

ہے۔ اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل³³ کے ثنائی سر³⁴ کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تنکون³⁵ کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔ متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (15.102)$$

primary pattern³⁰array pattern³¹pattern multiplication³²binomial series³³binomial coefficient³⁴Pascal triangle³⁵

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 15.5: مساوات 15.100 کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 15.96 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) + E_0 e^{j\psi} (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi})^2 \end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos \theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \angle \psi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا حیث $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 15.6: مساوات 15.102 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(15.103) \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(15.104) \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

کے سر کی نسبت 1 : 2 : 1 سے ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(15.105) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi})^2 = E_0 (1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi})$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$E = E_0 (1 + e^{j\psi})^{n-1} \quad (15.106)$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos \theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (15.107)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائى قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔ آپس شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔ یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\psi = \beta d \cos \theta + \delta \quad (15.108)$$

ہوگا۔ قطار کا دور میدان

$$E = E_0 (1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi}) \quad (15.109)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

$\psi = \beta d \cos \theta + \delta$ یعنی کل زاویائی فرق

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 15.109 کو $e^{jn\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(15.110) \quad Ee^{jn\psi} = E_0 (e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{jn\psi})$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 15.109 سے مساوات 15.110 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(15.111) \quad E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \angle (n-1) \frac{\lambda}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\angle (n-1) \frac{\lambda}{2}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$(15.112) \quad E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $0 \rightarrow \psi$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = 0$ دیتا ہے جو بے معنی³⁶ ہے لہذا ہمیں ال ہوس پٹل³⁷ کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت a پر $x \rightarrow 0$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\frac{dm}{dn}}{\frac{dx}{dx}}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $0 \rightarrow \psi$ پر

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \rightarrow 0} \\ &= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \rightarrow 0} \end{aligned}$$

یعنی

$$(15.113) \quad E = nE_0$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$(15.114) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

ہو جس سے

$$(15.115) \quad \theta_{\text{بلندتر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 15.112 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$(15.116) \quad \frac{n}{2} (\beta d \cos \theta + \delta) = \mp k\pi$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \quad (15.117)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

$k = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \dots$ کے برابر ہے۔

مساوات 15.112 کو مساوات 15.113 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \quad (15.118)$$

حاصل ہوتا ہے۔

15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d \cos \theta = -\delta$ ۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90^\circ$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ γ^{38} استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1} \left(\mp \frac{k\lambda}{nd} \right) \quad (15.119)$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $k\lambda \gg nd$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \quad (15.120)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $1 \gg n$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 15.120 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda} = \text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی} \quad (15.121)$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی³⁹، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار⁴⁰ کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی⁴¹ کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

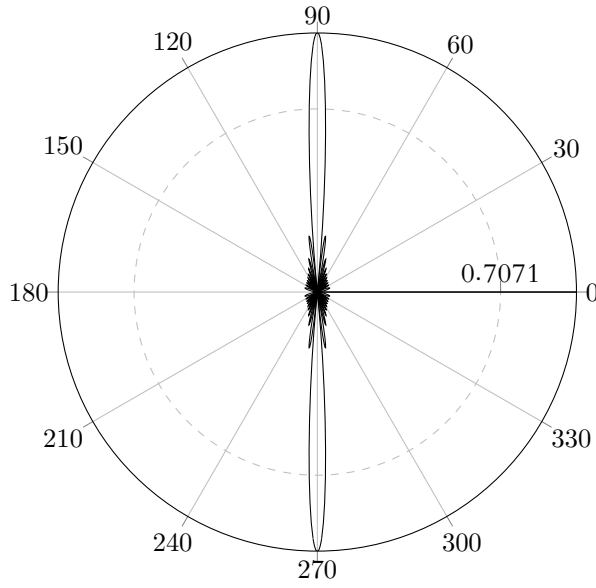
$$\frac{\text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی}}{2} \approx \text{نصف طاقت چوڑائی} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \quad (15.122)$$

³⁸complementary angle

³⁹half power beam width, HPBW

⁴⁰broadside array

⁴¹beam width between first nulls, BWFN



شکل 15.8: چوڑائی جانب اخراجی قطار

ہوگی۔

شکل 15.8 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP} = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP} = 360^\circ$ ہے۔

15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 15.114

$$(15.123) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے ($\theta = 0$) لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

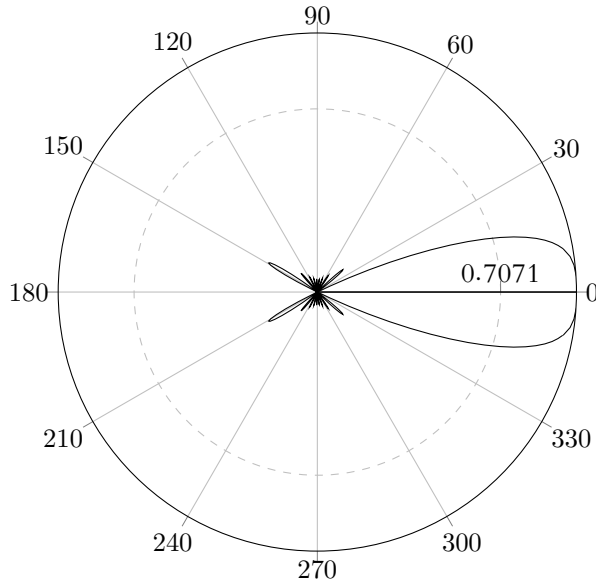
$$(15.124) \quad \delta = -\beta d$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 15.116 کے تحت

$$\frac{n}{2} \beta d (\cos \theta_0 - 1) = \mp k\pi$$

یعنی

$$\cos \theta_0 - 1 = \mp \frac{k}{nd/\lambda}$$



شکل 15.9: لمبائی جانب اخراجی قطار

سے حاصل ہوں گے۔ اس سے

$$(15.125) \quad \frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1} \left(\mp \sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

$$(15.126) \quad \theta_0 = \mp \sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp \sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں $L \approx nd$ لکھا گیا ہے۔ پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$(15.127) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \text{ rad} = 114.6^\circ \sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 15.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 15.118 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 15.7 اور مثال 15.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 15.69 اینٹینا کی سمتیت

$$(15.128) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 15.65 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظر انداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہوگا لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.65 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$(15.129) \quad D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi \text{ sr} = 4\pi \text{ rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \text{ deg}^2 = 41\,253 \text{ deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$(15.130) \quad D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^\circ \phi_{HP}^\circ}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 15.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ اور $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.130 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

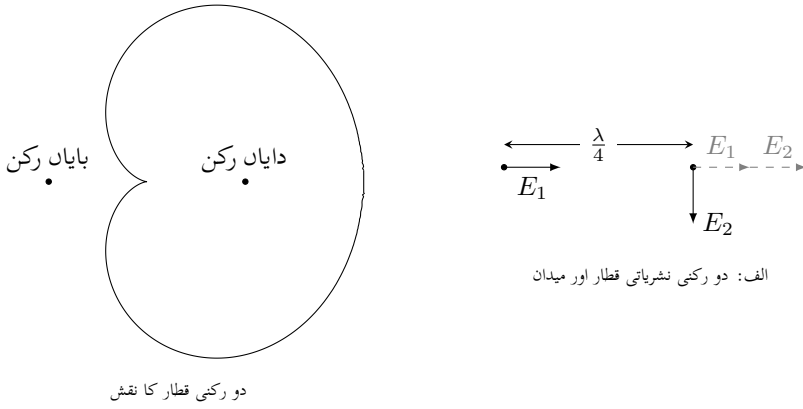
حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = \phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.130 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 15.10: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

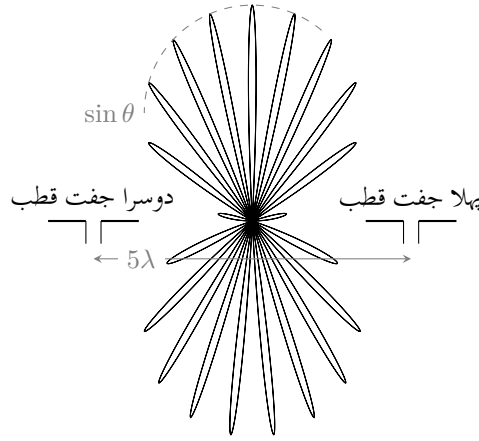
مثال 15.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح کے عمودی کھڑے ہیں۔ افقی میدان میں اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2|$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (رکن-1) کا برقی میدان 0° پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (رکن-2) کا میدان 90° پر ہو گا۔ شکل 15.10-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیانی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہذا جتنی دیر میں بائیں رکن کا میدان E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہذا رکن-2 میں برقی رو $90^\circ = 360^\circ \times \frac{1}{4}$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں یہ اس لمحہ 0° پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں رکن-2 پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 15.10-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیانی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہو گی۔ اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔ اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔ یوں دائیں رکن پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہو گے لہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔ شکل 15.10 میں صفر اور پائے ریڈیٹن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔ یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2 + E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔ شکل 15.10-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نصب کیا جاسکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔



شکل 15.11: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیمما کا نقش۔

15.8 تداخل پیمما

فلکیات⁴² کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ ریڈیائی فلکیات⁴³ میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیمما⁴⁴ اینٹینا کہتے ہیں۔ شکل میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔ دونوں کو ہم قدم برقی رومہیا کی گئی ہے۔ ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$(15.131) \quad E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos \theta$ کے برابر ہے۔ ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ دور کنی قطار کا نقش ہے۔ مساوات 15.40 سے مختصر جفت قطب کا نقش $\sin \theta$ حاصل ہوتا ہے لہذا تقابل پذیر نقش

$$(15.132) \quad E = \sin \theta \cos \frac{\psi}{2} = \sin \theta \cos \left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ زاویہ θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta = \frac{\pi L}{\lambda} \sin \gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$(15.133) \quad \gamma_{01} = \sin^{-1} \frac{1}{2L/\lambda}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$(15.134) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3}{L/\lambda} \text{ deg}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یہ مساوات 15.121 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ ہلکی سیابہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin \theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیمما سے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا حساب لگانے میں اینٹینا کی کم سے کم چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

15.9 مسلسل موثر رقبے کی نقش

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

