برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

ہو گا۔

[1] homogeneous
[2] Poisson equation

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کرلے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جاسکتیں ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پائی جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظرانداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

---

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2(V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 109 پر مساوات 4.80

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)\\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int\limits_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \int\limits_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h + \int\limits_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int\limits_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \oint\limits_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int\limits_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$V_1 = V_2 \tag{6.9}$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا اتریں گے لہٰذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

[5] linear

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلان کی مساوات صفحہ 101 پر مساوات 4.54 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \qquad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔درحقیقت ایسا نہیں ہے۔کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔A اور B دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$
$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$
$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V = \frac{V_0 x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کے سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S = D_n \boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر چارج بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔
- کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

اور

$$\boldsymbol{D} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}\bigg|_{x=d} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 140 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V=A\ln\rho+B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho=b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho=a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آ رہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n=D\bigg|_{\rho=a}=\frac{\epsilon V_0}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$Q=\frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a\ln\frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 141 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.22}$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چھڑاتے ہیں۔یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \qquad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے

$$\boldsymbol{E} = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

[6] undefined

مثال 6.4: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر $r \neq 0$ اور $\sin\theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔ اس کے پہلی بار تکمل سے

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = \frac{A\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمل سے

$$V = A \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} + B = A \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\frac{\pi}{2} < \theta_0$ ہے تب ہمیں

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا چارج کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی ناکہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کیا جا سکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n

[7] silicon
[8] diode

قسم کا ہے۔مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ ازخود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔آئیں اس چارج کثافت کے لئے پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tag{6.33}$$

---

[9] free holes
[10] free electrons
[11] diffusion

کے برابر ہے۔دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x \to +\infty} - V_{x \to -\infty} = \frac{2\pi \rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں کل مثبت چارج

$$Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \, \mathrm{d}x = 2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

سے

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

[12] cross sectional area

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{6.38}$$

صورت اختیار کرے گا۔تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ایسا ہی ایک سادہ حل $V=x+y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V=G(x)+H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ہم $V=x+y$ کو $V=V_1+V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}V_1&=X_1(x)Y_1(y)=1x\\V_2&=X_2(x)Y_2(y)=1y\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y)=1$ اور $X_2(x)=1$ کے برابر ہیں۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x+y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V=x+y$ جواب کو ہرگز رد نہیں کیا۔ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V=G(x)+H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔اگر $V=XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)+X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔m^2 کو علیحدگی مستقل[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}&=m^2\\\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}&=-m^2\end{aligned}$$

[13] separation constant

یا

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) = 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) = 0\end{aligned} \tag{6.41}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C \cos my + D \sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right)\left(C \cos my + D \sin my\right) \tag{6.44}$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

[14] power series

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=0+0+2\times 1a_2+3\times 2a_3x^1+4\times 3a_4x^2+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2\times 1a_2+3\times 2a_3x^1+4\times 3a_4x^2+\cdots=m^2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)$$

جہاں ہم m^2X کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned}2\times 1a_2&=m^2a_0\\3\times 2a_3&=m^2a_1\\4\times 3a_4&=m^2a_2\end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=m^2a_n$$

ہوں۔جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{m^2}{2\times 1}a_0\\a_4&=\frac{m^2}{4\times 3}a_2=\left(\frac{m^2}{4\times 3}\right)\left(\frac{m^2}{2\times 1}a_0\right)=\frac{m^4}{m!}a_0\\a_6&=\frac{m^6}{6!}a_0\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n=\frac{m^n}{n!}a_0 \qquad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$\begin{aligned}a_3&=\frac{m^2}{3\times 2}a_1=\frac{m^3}{3!}\frac{a_1}{m}\\a_5&=\frac{m^5}{5!}\frac{a_1}{m}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n=\frac{m^n}{n!}\frac{a_1}{m} \qquad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X=a_0\sum_{0,\text{جفت}}^{\infty}\frac{m^n}{n!}x^n+\frac{a_1}{m}\sum_{1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{m^n}{n!}x^n$$

[15] coefficient

یا

$$X=a_0\sum_{0,\text{جفت}}^{\infty}\frac{(mx)^n}{n!}+\frac{a_1}{m}\sum_{1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx=\sum_{0,\text{جفت}}^{\infty}\frac{(mx)^n}{n!}=1+\frac{(mx)^2}{2!}+\frac{(mx)^4}{4!}+\cdots$$

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx=\sum_{1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{m^n}{n!}x^n=mx+\frac{(mx)^3}{3!}+\frac{(mx)^5}{5!}+\cdots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X=a_0\cosh mx+\frac{a_1}{m}\sinh mx$$

یا

$$X=A\cosh mx+B\sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx=\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx=\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X=A'e^{mx}+B'e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$Y=C\cos my+D\sin my \tag{6.47}$$

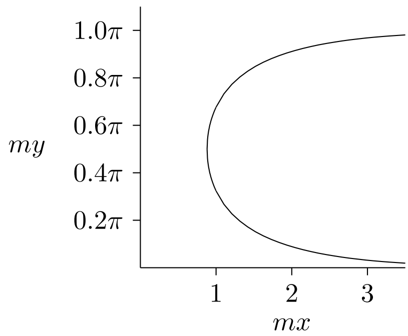
لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$V=XY=(A\cosh mx+B\sinh mx)\,(C\cos my+D\sin my) \tag{6.48}$$

یا

$$V=XY=\left(A'e^{mx}+B'e^{-mx}\right)(C\cos my+D\sin my) \tag{6.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)$$

ہے لہٰذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y = 0$، $y = \frac{\pi}{m}$، $\frac{2\pi}{m} = y$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

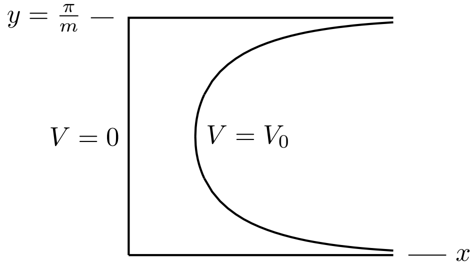
یا

$$my = \sin^{-1}\frac{1}{\sinh mx}$$

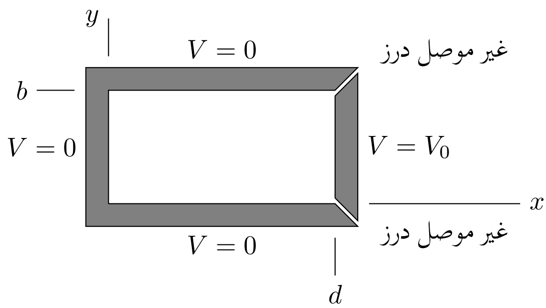
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔$x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔انس درز کے اثر کو نظرانداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$\begin{aligned}
0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right)\\
0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔$y = 0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$\begin{aligned}
0 &= B\sinh mx\,(C\cos 0 + D\sin 0)\\
0 &= BC\sinh mx
\end{aligned}$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔اب چونکہ $A = 0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD\sinh mx\sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 \qquad (0 < y < b) \\ V &= -V_0 \qquad (b < y < 2b) \end{aligned}$$

Fourier series[16]

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y + \int_b^{2b} (-V_0)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\right]$$

سے

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \\ c_n &= 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh\frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$V = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\sinh\frac{n\pi d}{b}} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل:ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

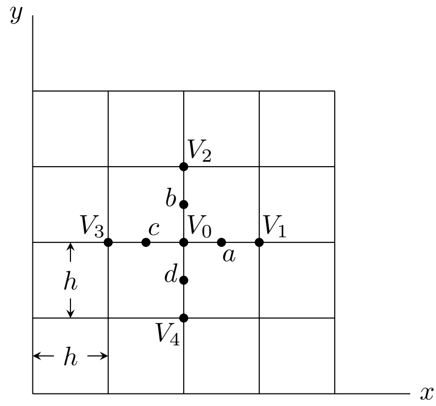
$$\begin{aligned} V &= \frac{4\times 90}{\pi}\left(\frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sinh\frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\frac{\sinh\frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi}\sin\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4\times 90}{\pi}(0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

[17] numerical iteration



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

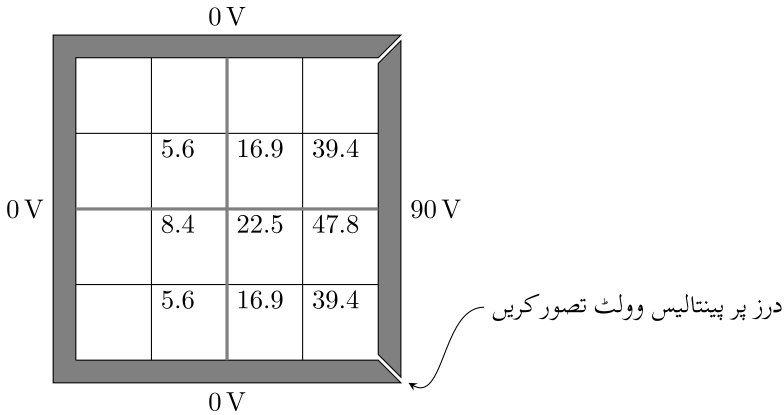
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

بھی لکھ سکتے ہیں۔ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\doteq\frac{V_1+V_2+V_3+V_4-4V_0}{h^2}=0$$

سے

$$V_0\doteq\frac{V_1+V_2+V_3+V_4}{4} \tag{6.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

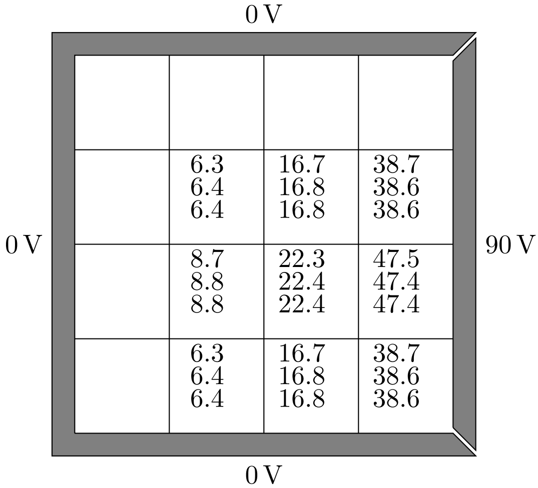
عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کی جاتی ہے حتٰی کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V=\frac{45+45+0+0}{4}=22.5\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔



شکل 6.6: چار بار دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔یہی اصل جواب ہیں۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V=\frac{90+45+0+22.5}{4}=39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V=\frac{90+45+0+22.5}{4}=39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V=\frac{22.5+0+0+0}{4}=5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں

$$\frac{90+39.4+22.5+39.4}{4}=47.8\,\mathrm{V}$$
$$\frac{39.4+0+5.6+22.5}{4}=16.9\,\mathrm{V}$$
$$\frac{22.5+5.6+0+5.6}{4}=8.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب $39.4\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{90+0+16.9+47.8}{4}=38.7\,\mathrm{V}$$

ہو جائے گی۔اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔یوں $47.8\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{90+38.7+22.5+38.7}{4}=47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر $16.9\,\mathrm{V}$ کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو $22.4\,\mathrm{V}$ حاصل ہوا ہے۔مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے $22.5\,\mathrm{V}$ حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔ یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جا سکے۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

باب 7

برقرار مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ[1] کا قانون[2]

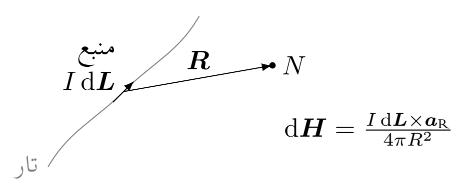
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔ چھوٹے لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{R}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 = \frac{\mathrm{d}Q_1 \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 117 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.2}$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

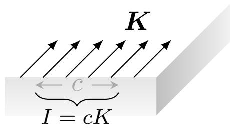
لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

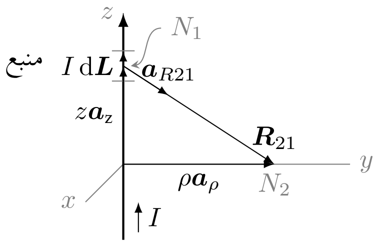
$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.3}$$

ہی تجرباتی طور ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.3 لکھی جا سکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.3 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا مساوات 7.3 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔ اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احمقانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔



شکل 7.2: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔



شکل 7.3: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

شکل 7.2 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی تو بذریعہ تکمل

$$I = \int K\,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}v \tag{7.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.5}$$

یا

$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.3 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظرانداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جا سکتی ہے۔ چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} R_{21} &= |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} &= \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho\, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi\, \mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنا ہو گا۔ اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_2 &= \frac{I\rho \boldsymbol{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho \boldsymbol{a}_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \tag{7.7}$$

سے

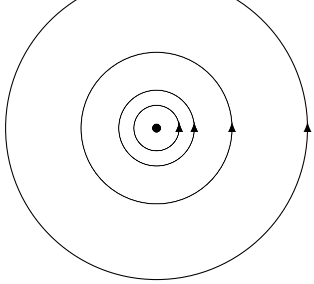
$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi \tag{7.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.4 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z اور نا ہی زاویہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

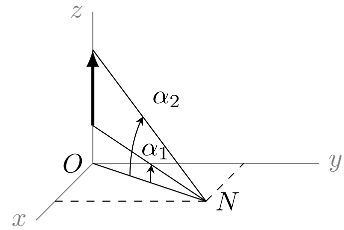
اگر شکل 7.3 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.5 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho} \left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right) \boldsymbol{a}_\phi \tag{7.9}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.5 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔



شکل 7.4: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.5: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔گاؤس کے قانون کی مدد سے تشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔تشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون[3] کہتے ہیں۔اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آگے جا کر حاصل کیا گیا ہے۔فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.10}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

[3]Ampere's circuital law

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی رو ان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.3 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.10 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتی ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H\,\mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ اور $H_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi = H_\phi\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

یا

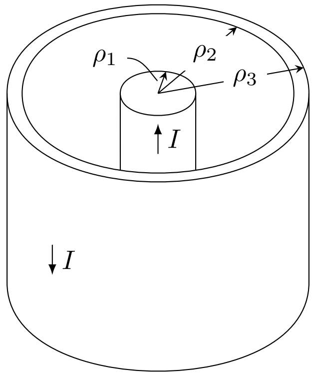
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

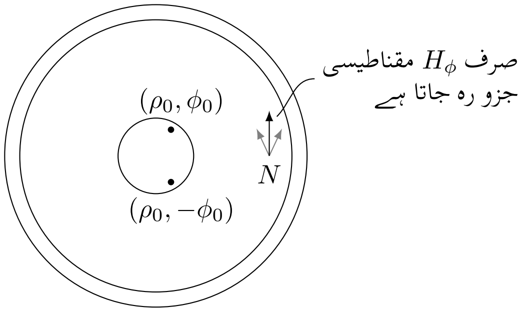
ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.6 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویاتی اجزاء ہوں گے۔ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویاتی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہٰذا N پر صرف زاویاتی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویاتی جزو رہ جاتا ہے۔

شکل 7.6: ہم محوری تار۔

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہٰذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہٰذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

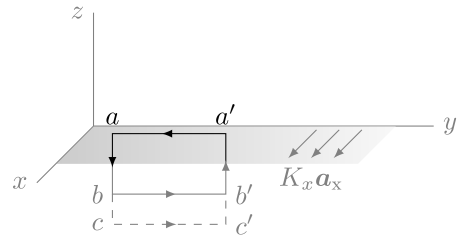
ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$

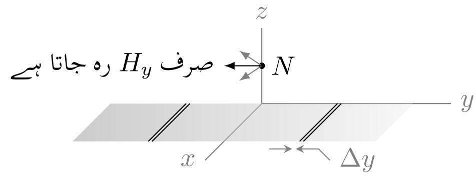
برقی رو گھیرے گی لہٰذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔

شکل 7.7: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.7-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل 7.7-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ برقی رو گزارے گی۔لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.7-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya} y_1 + H_{yb} y_1 = K_x y_1$$

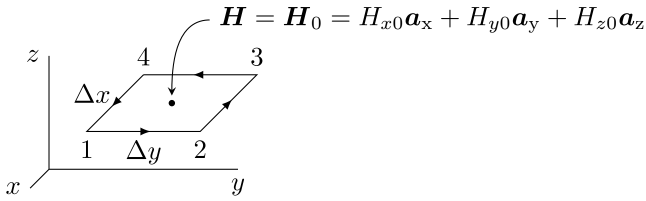
یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.11}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔



شکل 7.8: گردش کی تعریف۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $\left|\boldsymbol{H}_{ya}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{yb}\right|$ ہو گا۔اس طرح مساوات 7.11 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_y &= -\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z > 0) \\ \boldsymbol{H}_y &= +\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z < 0) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \tag{7.12}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \qquad (-h < z < 0) \\ \boldsymbol{H} &= 0 \qquad (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned} \tag{7.13}$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[4] کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔شکل 7.8 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x\Delta y$ کو گھیرتی ہے۔شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

[4] curl

کے برابر ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔آئیں اس تکمل کو حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.8 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو گا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y \,\mathrm{d}y = H_{y21}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y = H_{y21}\Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21}\Delta y \tag{7.14}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل[5] بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.15}$$

لکھ کر مساوات 7.14 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.16}$$

---

[5] Taylor series

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.15 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\Delta x \frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔ اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہٰذا یہاں

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.17}$$

ہو گا جو عین مساوات 7.15 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.18}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq -\left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.19}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.20}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.16، مساوات 7.18، مساوات 7.19 اور مساوات 7.20 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \tag{7.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = J_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + J_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + J_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.22}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.23}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta x\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.24}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.23 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔اسی طرح مساوات 7.24 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.22، مساوات 7.23 اور مساوات 7.24 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[6] کہتے ہیں۔انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔اس تعریف کی حسابی شکل

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.23، مساوات 7.24 اور مساوات 7.22 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت[7] کی شکل میں

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.26}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

[6] curl
[7] determinant

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.27}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.28}$$

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.29}$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہٰذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔یوں $q \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔مساوات 7.29 یہی کہتا ہے۔اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہو گا۔مساوات 7.28 یہی کہتا ہے۔

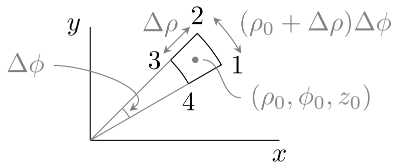
مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \times \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.25 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H} = (x^2y + 2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (xz - y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (e^xz - x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2 - e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z - x^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو گی۔



شکل 7.9: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.9 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0,\phi_0,z_0)=H_{\rho0}\boldsymbol{a}_\rho+H_{\phi0}\boldsymbol{a}_\phi+H_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

ہو گا۔کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi21}\doteq H_{\phi0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi43}\doteq H_{\phi0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21}&\doteq\left(H_{\phi0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\\&\doteq\left[H_{\phi0}\rho_0+H_{\phi0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43}&\doteq\left(H_{\phi0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right]\\&\doteq\left[-H_{\phi0}\rho_0+H_{\phi0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

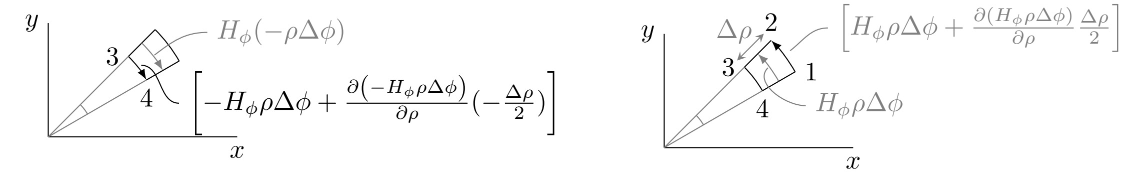
ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi32}\doteq H_{\rho0}+\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi14}\doteq H_{\rho0}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویاتی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویاتی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.10: زاویاتی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

ہیں۔یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$

اور

$$(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.30}$$

ہو گا۔اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right) \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گا اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right) = J_z \tag{7.31}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.30 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔شکل 7.10-الف کو دیکھتے ہوئے آگے بڑھیں۔اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi\rho\Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi \rho \Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} = \frac{\partial (H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial (H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi 0}\rho_0 \Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_\phi \rho \Delta\phi + \frac{\partial (H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} \tag{7.32}$$

ہو گی۔اسی طرح، جیسا شکل 7.10-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_\phi \rho \Delta\phi + \frac{\partial (-H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\ &= -H_\phi \rho \Delta\phi + \frac{\partial (H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned} \tag{7.33}$$

ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho \Delta\rho$ ہو گی۔اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial (H_\rho \Delta\rho)}{\partial \phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho \Delta\rho - \frac{\partial (H_\rho \Delta\rho)}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

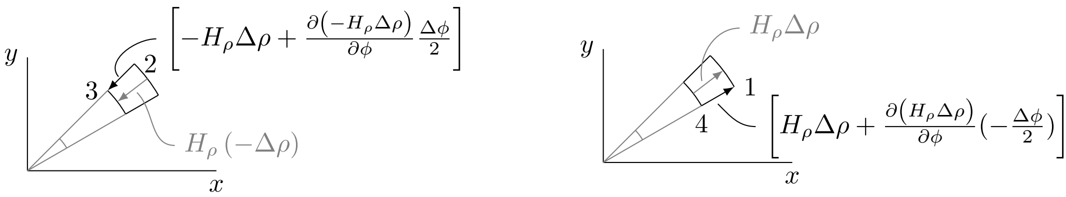
$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\rho \Delta\rho - \frac{\partial (H_\rho \Delta\rho)}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.34}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\rho \Delta\rho - \frac{\partial (H_\rho \Delta\rho)}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.35}$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویاتی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.12: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویاتی اجزاء کے رقبے۔

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.32، مساوات 7.33، مساوات 7.34 اور مساوات 7.35 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi$$
$$= \left[\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.36}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.30 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔مساوات 7.36 سے گردش

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right] = J_z \tag{7.37}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0 \Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔اس رقبے کو شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z \Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $\frac{\Delta z}{2}+$ تا $\frac{\Delta z}{2}-$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $\frac{\Delta\phi}{2}-$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_z\Delta z + \frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = +\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے کے قریب $\frac{\Delta\phi}{2}-$ تا $\frac{\Delta\phi}{2}+$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $\frac{\Delta z}{2}-$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $\frac{\Delta\phi}{2}+$ تا $\frac{\Delta\phi}{2}-$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $\frac{\Delta z}{2}+$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویاتی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.38 اور مساوات 7.39 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\Delta z\Delta\phi = J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right] = J_\rho \tag{7.40}$$

ملتا ہے۔

شکل 7.12-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} &= H_z\Delta z + \frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_z\Delta z + \frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\rho}\left(+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(-H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)
\end{aligned}$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) = J_\phi \tag{7.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.41، مساوات 7.40 اور مساوات 7.37 کا مجموعہ نلکی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.42}$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نلکی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کے گردش کو $\nabla\times\boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho\cos\phi+5)\boldsymbol{a}_\rho + 6\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho}+3)\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ان میں تین اطراف

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_u &= k_1\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}L_v &= k_2\,\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}L_w &= k_3\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2\Delta v$ اور $k_3\Delta w$ ہوں گے۔اب $v-\frac{\Delta v}{2}$ سے $v+\frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2\Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_v k_2\Delta v + \frac{\partial(H_v k_2\Delta v)}{\partial w}\left(-\frac{\Delta w}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $v+\frac{\Delta v}{2}$ سے $v-\frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_v k_2\Delta v + \frac{\partial(-H_v k_2\Delta v)}{\partial w}\left(\frac{\Delta w}{2}\right)$$

ہو گا۔یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\Delta v\Delta w \tag{7.43}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}&=H_w k_3\Delta w+\frac{\partial(H_w k_3\Delta w)}{\partial v}\left(\frac{\Delta v}{2}\right)\\ \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}&=-H_w k_3\Delta w+\frac{\partial(-H_w k_3\Delta w)}{\partial v}\left(-\frac{\Delta v}{2}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}\Delta v\Delta w \tag{7.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w \tag{7.45}$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w=J_u k_2 k_3\Delta v\Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2k_3\Delta v\Delta w}=\frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]=J_u \tag{7.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1k_3\Delta u\Delta w}=\frac{1}{k_1k_3}\left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w}-\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u}\right]=J_v \tag{7.47}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1k_2\Delta u\Delta v}=\frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u}-\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v}\right]=J_w \tag{7.48}$$

لکھ سکتے ہیں۔عمومی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u+\frac{1}{k_1k_3}\left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w}-\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v\\ +\frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u}-\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w\end{aligned} \tag{7.49}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}}=\begin{vmatrix}\frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1k_2}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ k_1H_u & k_2H_v & k_3H_w\end{vmatrix} \tag{7.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= r \\
k_3 &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.49 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(H_\phi r)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: اگر $\boldsymbol{H}=2r\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}-3r\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H}=-4\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$

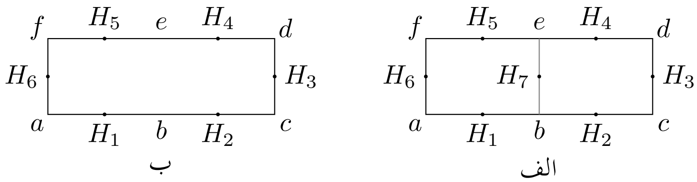
7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.13-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

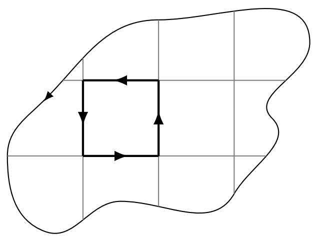
$$\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B}\doteq(\nabla\times\boldsymbol{H}_B)_N$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B}\doteq(\nabla\times\boldsymbol{H}_B)\cdot\boldsymbol{a}_N$$



شکل 7.13: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔



شکل 7.14: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

یا

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \boldsymbol{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_B$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_D) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_D$$

اور

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_B + (\nabla \times \boldsymbol{H}_D) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.13-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.13-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے

لئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔شکل 7.14 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.52 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[8] بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔کسی بھی عمومی سمتیہ میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A})\, \mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T\, \mathrm{d}h$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T\, \mathrm{d}h$$

[8] Stokes theorem

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔صفر لمبائی کے راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T \, \mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.53 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.1: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.53 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.54}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.54 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.2 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے گزرتی یک سمتی برقی رو ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.55}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[9] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل[10] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.56}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ہو بہو مساوات 7.55 کی طرح ہے۔کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے

---

[9] Tesla

[10] magnetic constant, permeability

مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل مقناطیسی بہاو[11] Φ دیتا ہے جسے ویبر[12] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{Wb} \tag{7.57}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.58}$$

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.59}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.58 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.59 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.59 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \tag{7.60}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{7.61}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{7.62}$$

مساوات 7.60 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔انہیں کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} &\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h \, \mathrm{d}h \\ &\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \\ &\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \end{aligned} \tag{7.63}$$

[11] magnetic flux
[12] Weber

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.6 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا۔اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تا $z = d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi \cdot (\mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\phi)$$

یعنی

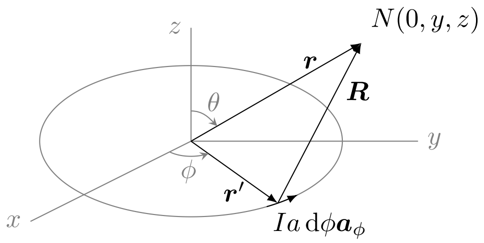
$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.64}$$

ہو گی۔یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس $25\,\mathrm{mm}$ جبکہ اس کا بیرونی رداس $28\,\mathrm{mmeter}$ ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس $35\,\mathrm{mm}$ اور بیرونی رداس $37\,\mathrm{mm}$ ہے میں $10\,000\,\mathrm{A}$ کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mu\mathrm{Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے $(0,0,0)$ پر ہے۔اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔



شکل 7.15: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل[13] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.2: شکل 7.15 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0,y,z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = a\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کو کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = a\,\mathrm{d}\phi\left(-\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi, a\sin\phi)$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}_\rho = a\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + a\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

کے برابر ہے۔نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi)\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

[13] numerical solution

لکھتے ہوئے

$$|\boldsymbol{R}| = R = \sqrt{(-a\cos\phi)^2 + (y - a\sin\phi)^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{R} = a\,\mathrm{d}\phi\left(-\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right) \times \left[-a\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right]$$
$$= a\,\mathrm{d}\phi\left[z\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + z\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (a - y\sin\phi)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right]$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + z\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (a - y\sin\phi)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi$ پر کرتے ہوئے تکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ہی ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$H_y = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$H_z = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a - y\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi$$

ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل[14] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل[15] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

[14] elliptic integral
[15] numerical solution

مثال 7.3: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ان کا عددی حل حاصل کریں۔

حل:

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو[16] بیان کیا جا سکتا ہے۔البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباو[17] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔سمتی مقناطیسی دباو اینٹینا[18]، موج‌بج[19] اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)[20] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 100 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.65}$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J} = 0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.66}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

[16] scalar magnetic potential
[17] vector magnetic potential
[18] antenna
[19] waveguide
[20] microwave oven

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.67}$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J} = 0$ ہے

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.66 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلان کا زاویاتی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تا کہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے نا کہ صفر۔تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لہٰذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کے راہ پر $\boldsymbol{J} = 0$ ہے۔یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ان حقائق کو مدنظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \tag{7.68}$$

بیان کی جاتی ہے۔ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi \leq \pi)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔زاویہ $\phi = \pi$ تک صرف زاویہ صفر سے بڑھاتے ہوئے پہنچا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.1 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلان کی گردش صفر کے برابر ہو گی۔

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

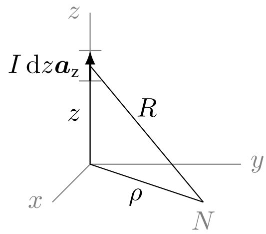
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.69}$$

سے کرتے ہیں۔سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔مساوات 7.53 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ A کا گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.70}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$



شکل 7.16: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

ہی ہو گا۔ہم مساوات 7.70 میں دئے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.69 کے ہم آہنگ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}$$

اور

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔

ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A} = \oint\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.71}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔چونکہ ڈھلان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا $\boldsymbol{H}$ کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباو کے مساوات

$$V = \int\frac{\rho_L\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.71 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتے ہیں۔ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری تکمل دیتا ہے۔دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.71 کی تفرق شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.72}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.16 میں z محدد پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}},\quad \mathrm{d}A_\rho=0,\quad \mathrm{d}A_\phi=0 \tag{7.73}$$

سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نلکی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\,\mathrm{d}A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{I\,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

سے حاصل ہو گا۔یہی مساوات شکل 7.16 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جا سکتے ہیں۔یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔حقیقت میں دونوں طریقے درست ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A}=\int_S\frac{\mu_0\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.74}$$

اور

$$\boldsymbol{A}=\int_h\frac{\mu_0\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.75}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے بذریعہ تکمل حاصل ہوتے ہیں۔برقی دباو کی طرح سمتی مقناطیسی دباو کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R\to\infty$ پر $\boldsymbol{A}\to 0$ تصور کیا جاتا ہے۔لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R\to\infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

باب 8

سوالات

8.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 8.1:

سوال 8.2: برقی میدان $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں $-0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\mathrm{J}$، $-0.2\,\mathrm{J}$ اور $0\,\mathrm{J}$

سوال 8.3: مثال 4.7 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

8.2 کپیسٹر

سوال 8.4: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times26}$

سوال 8.5: لامحدود موصل زمینی سطح $z=0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D}=\frac{5\times 10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-112\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times 884}$

سوال 8.6: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L=5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}\qquad(-\infty<y<\infty, x=0, z=2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z=0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 8.7: مشق 5.3 میں $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر سیلکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔اگر سیلکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلکان کی موصلیت کیا ہو گی۔ سیلکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔(ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 8.8: صفحہ 127 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 8.9: صفحہ 118 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 8.10: مساوات 5.71 میں $\cosh^{-1}\frac{h}{b}=\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$ لکھا گیا ہے۔اسے ثابت کریں۔

سوال 8.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلا اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلا دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$

8.3 لاپلاس

سوال 8.12: صفحہ 155 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 8.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 8.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 8.15: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 8.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 8.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 8.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 8.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

8.4 بایوٹ-سیوارٹ

سوال 8.20: مساوات 7.9 حاصل کریں۔

سوال 8.21: شکل 7.7ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.22: مساوات 7.17 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.8 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\partial H_y}{\partial x}$ تبدیلی رونما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 8.23: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 8.24: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

جدول 8.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 8.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عمبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
تقطیر شدہ پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 8.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 8.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

فرهنگ