

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 1  | سمتیات  | 1   |
| 1  | مقداری اور سمتیہ . . . . .  | 1.1 |
| 2  | سمتی الجبرا . . . . .   | 1.2 |
| 3  | کارتیسی محدود . . . . .   | 1.3 |
| 5  | اکائی سمتیات . . . . .  | 1.4 |
| 9  | میدانی سمتیہ . . . . .  | 1.5 |
| 9  | سمتی رقبہ . . . . .   | 1.6 |
| 10 | غیر سمتی ضرب . . . . .  | 1.7 |
| 14 | سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . . .   | 1.8 |
| 17 | گول نلکی محدود . . . . .  | 1.9 |
| 20 | 1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . . . |     |
| 20 | 1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . . .                          |     |
| 25 | 1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . . .  |     |
| 27 | 1.10 کروی محدود . . . . .   |     |
| 37 | کولومب کا قانون   | 2   |
| 37 | 2.1 قوت کشش یا دفع . . . . .  |     |
| 41 | 2.2 برقی میدان کی شدت . . . . .   |     |
| 44 | 2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . . .               |     |
| 49 | 2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .                              |     |
| 53 | 2.5 چارج بردار حجم . . . . .  |     |
| 54 | 2.6 مزید مثال . . . . .   |     |
| 61 | 2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط . . . . .                                       |     |
| 63 | 2.8 سوالات . . . . .  |     |

|     |       |   |
|-----|-------|---|
| 65  | 3     | گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ                              |
| 65  | 3.1   | ساکن چارج . . . . .                                   |
| 65  | 3.2   | فیراڈے کا تجربہ . . . . .                             |
| 66  | 3.3   | گاؤس کا قانون . . . . .                               |
| 68  | 3.4   | گاؤس کے قانون کا استعمال . . . . .                    |
| 68  | 3.4.1 | نقطہ چارج . . . . .                                   |
| 70  | 3.4.2 | یکساں چارج بردار کروی سطح . . . . .                   |
| 70  | 3.4.3 | یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . . .         |
| 71  | 3.5   | ہم محوری تار . . . . .                                |
| 73  | 3.6   | یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .          |
| 73  | 3.7   | انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . . . |
| 76  | 3.8   | پھیلاؤ . . . . .                                      |
| 78  | 3.9   | نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات . . . . .             |
| 80  | 3.10  | پھیلاؤ کی عمومی مساوات . . . . .                      |
| 82  | 3.11  | مسئلہ پھیلاؤ . . . . .                                |
| 85  | 4     | توانائی اور برقی دباؤ                                 |
| 85  | 4.1   | توانائی اور کام . . . . .                             |
| 86  | 4.2   | لکیری تکملہ . . . . .                                 |
| 91  | 4.3   | برقی دباؤ . . . . .                                   |
| 92  | 4.3.1 | نقطہ چارج کا برقی دباؤ . . . . .                      |
| 93  | 4.3.2 | لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ . . . . .          |
| 94  | 4.3.3 | ہم محوری تار کا برقی دباؤ . . . . .                   |
| 94  | 4.4   | متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ . . . . .              |
| 98  | 4.5   | برقی دباؤ کی ڈھلان . . . . .                          |
| 100 | 4.5.1 | نلکی محدود میں ڈھلان . . . . .                        |
| 101 | 4.5.2 | کروی محدود میں ڈھلان . . . . .                        |
| 103 | 4.6   | جفت قطب . . . . .                                     |
| 105 | 4.6.1 | جفت قطب کے سمت بہاؤ خط . . . . .                      |
| 108 | 4.7   | ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . . .            |

|     |        |                                   |
|-----|--------|-----------------------------------|
| 113 | 5.1    | برقی رو اور کثافت برقی رو         |
| 115 | 5.2    | استمراری مساوات                   |
| 117 | 5.3    | موصل                              |
| 122 | 5.4    | موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط   |
| 125 | 5.5    | عکس کی ترکیب                      |
| 128 | 5.6    | نیم موصل                          |
| 129 | 5.7    | ذو برق                            |
| 134 | 5.8    | کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط |
| 138 | 5.9    | موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط    |
| 138 | 5.10   | کیپسٹر                            |
| 139 | 5.10.1 | متوازی چادر کیپسٹر                |
| 141 | 5.10.2 | ہم محوری کیپسٹر                   |
| 141 | 5.10.3 | ہم کوہ کیپسٹر                     |
| 142 | 5.11   | سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر   |
| 144 | 5.12   | دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس        |

|     |     |  |
|-----|-----|--|
| 152 | 6.1 | مسئلہ یکنائی                             |
| 154 | 6.2 | نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات |
| 155 | 6.3 | لاپلاس مساوات کے حل                      |
| 162 | 6.4 | پوٹن مساوات کے حل کی مثال                |

|     |     |                       |
|-----|-----|-----------------------|
| 165 | 7.1 | توانائی باب کے سوالات |
| 165 | 7.2 | کیپسٹر                |
| 167 | 7.3 | لاپلاس                |





## باب 5

### موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات<sup>1</sup> حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط<sup>2</sup> حاصل کرتے ہوئے عکس<sup>3</sup> کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق<sup>4</sup> کی تقطیب<sup>5</sup> پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

#### 5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاؤ کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو  $i$  اور  $I$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیر کہتے ہیں۔ یوں

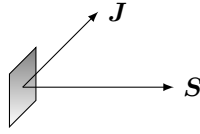
$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترجیحی ہوگی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

continuity equation<sup>1</sup>  
boundary conditions<sup>2</sup>  
images<sup>3</sup>  
dielectric<sup>4</sup>  
polarization<sup>5</sup>





شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو<sup>6</sup> سے مراد برقی رونی اکائی مربع سطح  $(\frac{A}{m^2})$  ہے اور اسے  $J$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح  $\Delta S$  سے عمودی سمت میں  $\Delta I$  برقی رو گزرے تب

$$(5.2) \quad \Delta I = J_n \Delta S$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$(5.3) \quad \Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو مکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$(5.4) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح  $S = 2a_x$  دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو  $\mathbf{J} = 1a_x + 1a_y$  پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں  $\mathbf{J}$  مستقل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 5.4 میں مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے اور یوں اس مکمل سے

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = 2A$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

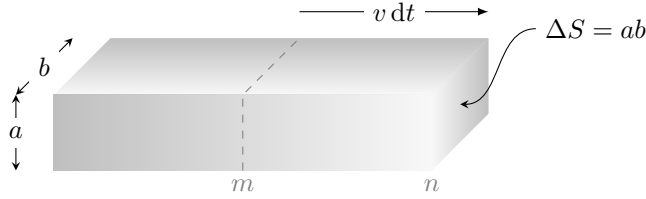
اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب  $\mathbf{S} = -2a_x$  لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = -2A$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\mathbf{S}$  کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں  $a$  اور  $b$  اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں  $v$  رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں  $dt$  دورانیہ میں چارج  $v dt$  فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں  $m$  پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر  $n$  پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

$m$  اور  $n$  کے درمیان موجود چارج سطح  $\Delta S$  سے گزر جائے گا۔  $m$  سے  $n$  تک حجم  $abv dt$  کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت  $\rho_h$  ہو تب اس حجم میں کل چارج  $\rho_h abv dt$  ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv dt}{dt} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$(5.5) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزرنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

## 5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نہ ہی اسے ختم کیا جاسکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کی انہیں ختم کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جاسکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب 5C اور دوسری جانب 3C- چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل 2C چارج ہے۔ اگر ہم 3C کو 3C- کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل 2C ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم  $5 \text{ m}^3$  ہے میں حجمی کثافت چارج  $3 \text{ C/m}^3$  ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج  $1 \text{ C/m}^3$  رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں  $Q_1 = 3 \times 5 = 15 \text{ C}$  چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں  $Q_2 = 1 \times 5 = 5 \text{ C}$  رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے  $10 \text{ C}$  چارج خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو  $\frac{10}{2} = 5 \text{ A}$  ہے۔ اسی کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5 - 15)}{2} = 5 \text{ A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں  $\Delta Q$  منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

جسم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمیل سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(5.6) \quad I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں جسم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمیل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور  $Q$  جسم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات<sup>7</sup> کی مکمل شکل ہے۔ آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاؤ کو صفحہ 83 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمیل کو حجمی تکمیل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh$$

اگر جسم میں حجمی کثافت چارج  $\rho_h$  ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{d}{dt} \int_h \rho_h dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $\frac{d}{dt}$  دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات تکمیل کے اندر حجمی چارج کثافت  $\rho_h$  اور جسم  $h$  ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{d(uv)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $v$  کو مستقل رکھتے ہوئے  $\frac{\partial u}{\partial t}$  اور  $u$  کو مستقل رکھتے ہوئے  $\frac{\partial v}{\partial t}$  حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہوگی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہوگا اور یوں  $\frac{d}{dt}$  کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے مکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم  $dh$  کے لئے مکمل

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

یہ ہے جس سے

$$(5.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاؤ کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاؤ فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

### 5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ انہیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان  $E$  میں الیکٹران پر قوت

$$(5.8) \quad F = -eE$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج  $-e$  ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہوگی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہوگی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ  $E$  کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار  $v_d$  حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔  $v_d$  کو رفتار بہا<sup>8</sup> کہتے ہیں۔ رفتار بہا کا دار و مدار  $E$  کی قیمت پر ہے لہذا ہم

$$(5.9) \quad v_d = -\mu_e E$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل  $\mu_e$  کو الیکٹران کی حرکت پذیری<sup>9</sup> کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ  $v_d$  کو میٹر فی سیکنڈ اور  $E$  کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہذا حرکت پذیری کو  $\frac{m^2}{Vs}$  میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 115 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$(5.10) \quad \mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو  $\rho_e$  لکھا گیا ہے۔  $\rho_e$  منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$(5.11) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$(5.12) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

لکھا گیا ہے۔  $\sigma$  کو موصلیت کا مستقل<sup>10</sup> کہتے ہیں اور اس کی اکائی<sup>11</sup>  $\frac{\text{S}}{\text{m}}$  میٹر فی سیمینر ہے۔ سیمینر کو بڑے S سے جبکہ سینڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 169 پر جدول 7.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تا بنے<sup>12</sup> کی موصلیت کے مستقل کی قیمت  $5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت  $8940 \text{ kg/m}^3$  اور ایٹمی کمیت 63.5 g ہیں۔ اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تا بنے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان  $E = 0.1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہا حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت  $6.023 \times 10^{23}$  یعنی ایک مول<sup>13</sup> ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں  $8940 \text{ kg}$  ہیں لہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہذا  $0.1 \text{ nm}$  اطراف کے مربع میں اوسطاً  $0.848$  یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$(5.13) \quad \rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

ہوگی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$  کو  $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$  لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہا

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران  $E$  کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار<sup>14</sup> سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً  $300 \text{ K}$  پر تا بنے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً  $1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  ہوتی ہے۔

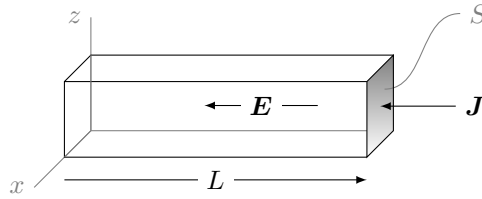
<sup>10</sup> conductivity

<sup>11</sup> یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمینر (1816-1892) کے نام پر جنہوں نے موجودہ سیمینر کمپنی کا بنیاد رکھا۔

<sup>12</sup> copper

<sup>13</sup> mole

<sup>14</sup> کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اُدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔ اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہوگا۔ امید ہی سمجھ آگئی ہوگی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں  $2n^2$  الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے  $n = 1$ ، دوسرے مدار کے لئے  $n = 2$  وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار  $15$  میں 1 الیکٹران ہوگا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی  $L$  اور رقبہ عمودی تراش  $S$  ہیں۔ سلاخ کو  $a_y$  سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان  $E = -Ea_y$  اور کثافت برقی رو  $J = -Ja_y$  پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بائیں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباؤ کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = - \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^L Ea_y \cdot dy a_y = \int_0^L E dy = E \int_0^L dy = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو  $S = -Sa_y$  لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہوگی۔ برقی رو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

<sup>15</sup> چونہے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(5.14) \quad R = \frac{L}{\sigma S}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$(5.15) \quad V = IR$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت<sup>16</sup> دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم<sup>17</sup> ہے جسے  $\Omega$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔ اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جاسکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباؤنی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے  $b$  سے  $a$  سرے تک مزاحمت

$$(5.16) \quad R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

سے حاصل ہوگی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباؤ والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی مکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں  $L = 1000 \text{ m}$  جبکہ  $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^2$  اور  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  ہے لہذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61 \Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ (الف) برقی میدان کی شدت  $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$  ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ  $0.12 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں  $2 \text{ A}$  برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات:  $1.91 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ،  $3.82 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$  اور  $2.55 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔ یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر موصل میں  $\sigma$  اور  $\epsilon$  کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 78 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت  $\rho_e$  اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔ مساوات 5.13 تانبے میں  $\rho_e = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$  دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔ اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہذا  $\sigma$  کی قیمت کو اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا مکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت  $t = 0$  پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت  $\rho_0$  ہے۔ اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت  $\frac{\sigma}{\epsilon}$  وقتی مستقل<sup>18</sup> رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 7.1 اور جدول 7.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07 \mu\text{s}$$



حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جاسکتا ہے۔ اس لحاظ سے چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جاسکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

#### 5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان  $E$  پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چھٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون  $19$  کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

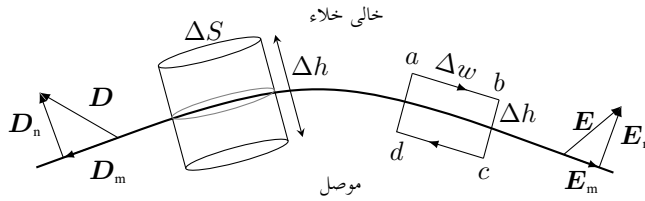
یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔ یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \quad (5.17)$$

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاؤ کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہذا سطح پر چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں  $\Delta S$  سطح سے عمودی اخراج  $\Delta S$  اسی سطح پر چارج  $\rho_s \Delta S$  کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_s \quad (5.18)$$



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط.

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں  $E$  اور  $D$  دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں  $E$  کو  $E_m$  اور  $E_n$  کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح  $D$  کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر  $E$  اور  $D$  دونوں صفر کے برابر ہیں۔ انہیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں  $E$  کی قیمت حاصل کریں۔ ہم  $E$  کے مجموعے  $E_m$  اور  $E_n$  حاصل کریں گے۔ پہلے  $E_m$  حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر  $abcd$  مستطیل بنایا گیا ہے جہاں  $ab$  اور  $cd$  سرحد کے مماسی جبکہ  $da$  اور  $bc$  سرحد کے عمودی ہیں۔  $ab$  خالی خلاء میں سرحد سے  $\Delta h/2$  فاصلے پر جبکہ  $cd$  موصل میں سرحد سے  $\Delta h/2$  فاصلے پر ہیں۔  $ab$  اور  $cd$  کی لمبائیاں  $\Delta w$  ہیں جبکہ  $da$  اور  $bc$  کی لمبائیاں  $\Delta h$  ہیں۔ صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint E \cdot dL = 0$$

کو  $abcd$  پر لاگو کرتے ہیں۔ اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\oint E \cdot dL = \int_a^b E \cdot dL + \int_b^c E \cdot dL + \int_c^d E \cdot dL + \int_d^a E \cdot dL = 0$$

اب  $a$  سے  $b$  تک

$$\int_a^b E \cdot dL = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ  $b$  پر عمودی میدان کو  $E_{n,b}$  لکھتے ہوئے  $b$  سے  $c$  تک

$$\int_b^c E \cdot dL = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ  $bc$  کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں  $E = 0$  ہے۔  $c$  سے  $d$  تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں  $E = 0$  ہے۔

$$\int_c^d E \cdot dL = 0$$

خلاء میں نقطہ  $a$  پر عمودی میدان کو  $E_{n,a}$  لکھتے ہوئے  $d$  سے  $a$  تک

$$\int_d^a E \cdot dL = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w + (E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی  $\Delta h$  کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے  $(E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2}$  کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم  $\Delta w$  کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \quad (5.19)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب  $E_n$  حاصل کریں۔  $E_n$  کی بجائے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

کی مدد سے  $D_n$  کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر  $\Delta h$  لمبائی کا ٹیلن دکھایا گیا ہے۔ اس ٹیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ  $\Delta S$  ہے۔ اگر سرحد پر  $\rho_s$  پایا جائے تب ٹیلن  $\rho_s \Delta S$  چارج کو گھیرے گا۔ گاؤس کے قانون کے تحت ٹیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاؤ کا اخراج ٹیلن کے دونوں سروں اور اس کے نکلی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{اوپر ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_s \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب ٹیلن کی نکلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ ٹیلن کے اوپر والے سرے پر

$$\int_{\text{اوپر ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S = \rho_s \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ  $D = \epsilon_0 E$  ہوتا ہے لہذا یوں

$$(5.20) \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔ موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔ یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا مکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی  $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$  یاد رہے کہ برقی میدان کا مکمل برقی دباؤ دیتا ہے جو مکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جاسکتا ہے جہاں  $E_n = 0$  ہونے کی وجہ سے مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ  $N(2, -3, 5)$  موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں  $\mathbf{E} = 210a_x - 350a_y + 99a_z \frac{V}{m}$  کے برابر ہے۔ اس نقطے پر  $E_n, E_m$  اور  $\rho_S$  حاصل کریں۔

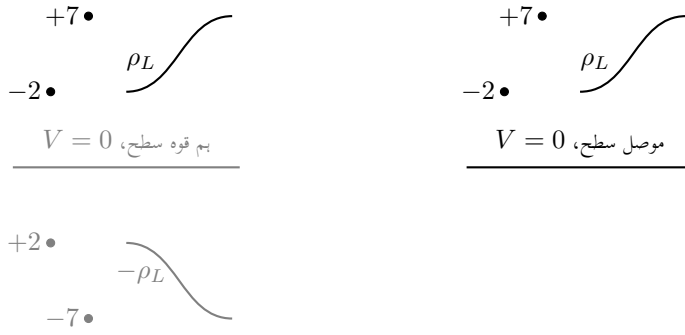
جوابات:  $0, 420 \frac{V}{m}$  اور  $3.71 \frac{nC}{m^2}$

## 5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 105 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جاسکتی ہے۔ ایسی موصل سطح پر برقی دباؤ صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔ موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے اوپر جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔ یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتا ہے۔ موصل سطح کے اوپر جانب میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔ اسی طرح سطح کے اوپر جانب سے جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔ فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین کے اوپر مثبت نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں سطح کے اوپر جانب برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہذا ہم برقی زمین کے ٹکلی جانب عین مثبت چارج کے نیچے اور اتنے ہی فاصلے پر برابر مگر منفی چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔ یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس<sup>20</sup> کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جاسکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ لہذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہوگی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح کے اوپر جانب مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کی ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح  $z = 3$  کے قریب  $N(5, 7, 8)$  پر  $5 \mu\text{C}$  چارج پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ  $M(2, 4, 3)$  پر  $E$  حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل:  $5 \mu\text{C}$  کا عکس  $-5 \mu\text{C}$  لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ  $P(5, 7, -2)$  پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب  $N$  سے  $M$  تک سمتیہ  $R_{MN} = -3a_x - 3a_y - 5a_z$  ہے جبکہ  $P$  سے  $M$  تک سمتیہ  $R_{MP} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$  ہے۔ یوں  $5 \mu\text{C}$  نقطہ  $M$  پر

$$E_+ = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔ اسی طرح  $5 \mu\text{C}$  چارج نقطہ  $M$  پر

$$E_- = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔ چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ  $M$  پر کل میدان

$$E_{\text{کل}} = E_+ + E_- = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہوگا۔ موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔ موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔ یوں موصل کی سطح پر

$$D = \epsilon_0 E = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13 \times 10^{-9}a_z$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔ یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_s = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر  $N(5, 7, 8)$  پر  $5 \mu\text{C}$  پایا جاتا اور لا محدود سطح موجود نہ ہوتا تب  $M(2, 4, 3)$  پر میدان  $E_+$  ہوتا۔ لا محدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی  $E$  ہو جاتی ہے۔ درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لا محدود موصل سطح  $z = 0$  میں  $Q$  پر نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

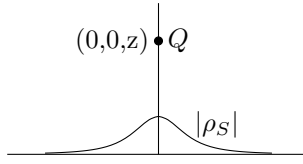
حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر  $(0, 0, -z)$  پر  $Q$  چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ  $(\rho, \phi, 0)$  پر  $Q$  اور  $-Q$  چارج

$$E_+ = \frac{Q(\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_- = \frac{-Q(\rho a_\rho + z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔  $D = \epsilon_0 E$  استعمال کرتے ہوئے کل

$$D = \frac{-2Qz a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت  $-a_z$  ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$(5.21) \quad \rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{C}{m^2}$$

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں چارج  $Q$  اور موصل سطح پر  $\rho_S$  دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار  $-Q$  ہی حاصل ہوگی۔

## 5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلیکان اور جرمنیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ<sup>21</sup> سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول<sup>22</sup> کے چوتھے جماعت<sup>23</sup> سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ<sup>24</sup> عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھادی گئی ہو کو  $n$  نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ<sup>25</sup> عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول<sup>26</sup> کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج  $e$  الیکٹران کے چارج  $-e$  کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت  $m_h$  لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری  $\mu_h$  لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو  $v_d = \mu_h E$  سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت  $\sigma = \rho_h \mu_h$  کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول  $E$  کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہذا اس کے رفتار بہاو کی سمت  $E$  کی سمت ہی ہوگی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو  $p$  نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$(5.22) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

doping<sup>21</sup>  
periodic table<sup>22</sup>  
group<sup>23</sup>  
donor<sup>24</sup>  
acceptor<sup>25</sup>  
hole<sup>26</sup>

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں  $\rho_{11}$  آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سیلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد  $1.5 \times 10^{16}$  فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاؤ  $0.12 \frac{m^2}{Vs}$  جبکہ خول کی رفتار بہاؤ  $0.025 \frac{m^2}{Vs}$  ہے۔ جرمنیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب  $2.4 \times 10^{19}$  فی مربع میٹر،  $0.36 \frac{m^2}{Vs}$  اور  $0.17 \frac{m^2}{Vs}$  ہیں۔ خالص سیلیکان اور خالص جرمنیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات:  $0.348 \frac{mS}{m}$  اور  $2 \frac{S}{m}$

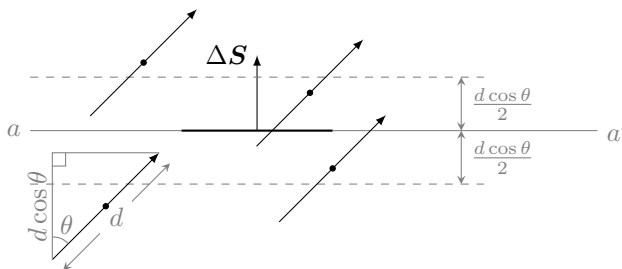
## 5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباؤ لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔ آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے مالیکیول کو قطبی<sup>27</sup> مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان  $E$  لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو غیر قطبی<sup>28</sup> کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا





ہے۔ مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔ یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنادیتا ہے۔ پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے المکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ المکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج<sup>30</sup> کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

(5.23)  $p = Qd$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں  $Q$  ذروں کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

(5.24) 
$$p_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی  $p$  مختلف ہو سکتے ہیں۔ تقطیب<sup>31</sup> سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

(5.25) 
$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔  $\Delta v$  کو کم سے کم  $32$  کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں  $\Delta v$  کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد ( $n\Delta v$ ) اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذوبق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں  $P = 0$  ہوگا۔ ذوبق کے اندر تصوراتی سطح  $\Delta S$  لیتے ہیں جسے موٹی گہری سہاٹی کی لکیر

dielectric<sup>29</sup>  
bound charge<sup>30</sup>  
polarization<sup>31</sup>

32 یہ ایسر ہی ہر جیسر لمحاتی رفتار  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  حاصل کرتے وقت  $\Delta t \rightarrow 0$  لیا جاتا ہے۔

سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے دونوں جانب ہلکی سیابی سے  $a$  تا  $a'$  لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔ بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب  $p = Qd$  پیدا ہوتے ہیں جن کا  $d$  اور  $p$  سطح  $\Delta S$  کے ساتھ  $\theta$  زاویہ بناتے ہیں۔ ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ  $aa'$  سے  $\frac{d \cos \theta}{2}$  فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے  $aa'$  سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔ یوں  $\Delta S$  رقبہ اور  $d \cos \theta$  گہرائی کے حجم  $\Delta S d \cos \theta$  میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سر  $\Delta S$  سے گزرے گا۔ چونکہ اکائی حجم میں  $n$  جفت قطب ہیں لہذا اتنی حجم میں  $n \Delta S d \cos \theta$  جفت قطب ہوں گے۔ یوں  $\frac{n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$  چارج  $\Delta S$  سے گزر کر اوپر جبکہ  $\frac{-n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$  چارج  $\Delta S$  سے گزر کر نیچے جائے گا۔ مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہذا کل

$$(5.26) \quad \Delta Q_m = n Q d \Delta S \cos \theta = n Q d \cdot \Delta S$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں  $\Delta Q_m$  لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔ چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہذا اس حجم کی تقطیب

$$(5.27) \quad P = n Q d$$

ہوگی۔ یوں مساوات 5.26 کو

$$(5.28) \quad \Delta Q_m = P \cdot \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $\Delta S$  کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں  $\alpha_S$  بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S P \cdot dS$$

کے برابر ہو گا۔ یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$(5.29) \quad Q_m = - \oint_S P \cdot dS$$

ہو گا۔ یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہذا ہم کثافت برقی بہاؤ کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔ گاوس کا قانون ص 67 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ ہم پہلے اس قانون کو  $\epsilon_0 E$  اور کل گھیرے چارج  $Q$  کی شکل میں لکھتے ہیں

$$(5.30) \quad Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0 E \cdot dS$$

جہاں

$$(5.31) \quad Q_{\text{کل}} = Q + Q_m$$

کے برابر ہے۔ مساوات 5.30 میں بند سطح  $S$  آزاد چارج  $Q$  اور مقید چارج  $Q_m$  کو گھیرے ہوئے ہے۔ مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$(5.32) \quad Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 E + P) \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاؤ کو اب

$$(5.33) \quad D = \epsilon_0 E + P$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کار آمد اور عمومی مساوات ہے۔ یوں ذو برقی اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاؤ میں اضافی جزو  $P$  شامل ہو جاتا ہے۔ اس طرح

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.34)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $Q$  گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} Q &= \int_h \rho_h dh \\ Q_m &= \int_h \rho_m dh \\ Q_{کل} &= \int_h \rho_{کل} dh \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\rho_m \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_{کل} \end{aligned}$$

اور

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h \quad (5.35)$$

لکھ جاسکتے ہیں۔

قلم میں دوراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جاسکے اسے آسان محور<sup>33</sup> یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں ناہم سموت<sup>34</sup> کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال<sup>35</sup> کی خاصیت رکھتے ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برقی اشیاء میں لاگو بیرونی میدان  $E$  اور تقطیب  $P$  ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء ہم سمتی<sup>36</sup> کہلاتے ہیں۔ انجینئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برقی اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \\ &= (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.36)$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو  $\chi_e \epsilon_0$  یا  $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$  لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$D = \epsilon_0 E + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 E$$

یا

$$(5.37) \quad D = \epsilon_R \epsilon_0 E = \epsilon E$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$(5.38) \quad \epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$$

کے برابر ہے۔ ماہر طبیعیات عموماً  $\chi_e$  جبکہ انجینئر عموماً  $\epsilon_R$  استعمال کرتے ہیں۔ ان کا تعلق

$$(5.39) \quad \chi_e = \epsilon_R - 1$$

ہے۔

$\chi_e$  ذو برقی مستقل<sup>37</sup>،  $\epsilon_R$  جزوی برقی مستقل<sup>38</sup> جبکہ  $\epsilon_0$  خالی خلاء کا برقی مستقل<sup>39</sup> کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 170 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 7.2 میں دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں<sup>40</sup> خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں بننے جاتے۔ ان اشیاء میں  $E$  کا ہر کارتیسی جزو  $D$  کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق یوں

$$(5.40) \quad \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نواعدادی  $\epsilon_{ij}$  کو مجموعی طور پر تناوی مستقل<sup>41</sup> کہا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔ ناہم سموت اشیاء میں  $D$  اور  $E$  (اور  $P$ ) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ  $D = \epsilon_0 E + P$  ان کے لئے بھی درست ہے،  $D = \epsilon E$  استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہوگا کہ  $\epsilon$  اب تناوی مستقل ہے۔ ناہم سموت اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک ناہم سموت ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔ برقی میدان  $E = \sqrt{3}a_x$ ،  $E = \sqrt{3}a_y$  اور  $E = 1a_x + 1a_y + 1a_z$  کی صورت میں  $D$  حاصل کریں۔

$$D = \epsilon_0 (4a_x + 9a_y + 9a_z) \text{ اور } D = 9\epsilon_0 a_y, D = 4\sqrt{3}\epsilon_0 a_x \text{ جوابات:}$$

<sup>37</sup>susceptibility

<sup>38</sup>relative electric constant, relative permittivity

<sup>39</sup>permittivity of vacuum, electric constant of vacuum

<sup>40</sup>non homogeneous

<sup>41</sup>tensor

اس مثال میں تینوں بار  $|E| = \sqrt{3}$  رہا جبکہ  $D$  کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی ناہم سموت ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں  $E = 5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$  کی صورت میں  $D = 1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  پایا جاتا ہے۔ (ب)  $D = 2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  اور  $\chi_e = 1.5$  ہیں۔ (پ) ذو برق میں  $6 \times 10^{20}$  مالکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں  $E = 100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$  پر ہر مالکیول کا معیار جفت قطب  $1.2 \times 10^{-26} \text{ C m}$  ہے۔

جوابات:  $7.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  اور  $1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ،  $1.156 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برقی کا برقی مستقل  $\epsilon_1$  جبکہ دوسرے ذو برقی کا برقی مستقل  $\epsilon_2$  ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ  $abcd$  پر

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

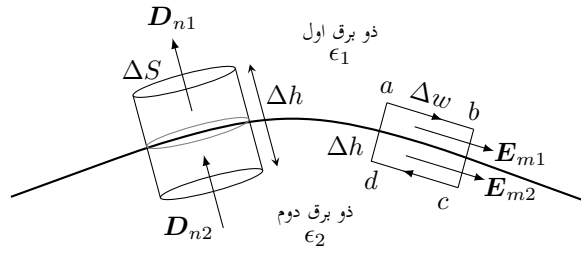
حاصل ہوتا ہے۔  $\Delta w$  اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں  $a$  اور  $b$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ ایسا کرنے سے  $\Delta h \rightarrow 0$  ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \rightarrow 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$(5.42) \quad \frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برقی سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ<sup>42</sup> ہوتا ہے۔ اس کے برعکس مساوات 5.42 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاؤ جوڑ دار<sup>43</sup> ہوتا ہے۔ یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاؤ میں سیڑھی نما<sup>44</sup> تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاوس کا قانون شکل میں رقبہ  $\Delta S$  گھیرتے ہیں پر لاگو کرتے ہوئے

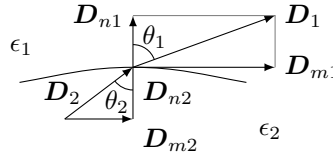
$$(5.43) \quad \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S} \rho_S dS$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.43 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} = D_{n1} \Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہذا  $D_{n1}$  اور بیلن کے اوپر ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ  $D_{n2}$  اور بیلن کا نیچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.43 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} = -D_{n2} \Delta S$$



شکل 5.9:  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  کی صورت میں  $D_1 > D_2$  ہو گا۔ اسی طرح  $\theta_1 > \theta_2$  جبکہ  $E_1 < E_2$  ہو گا۔

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے  $\Delta h \rightarrow 0$  ہو گا جس سے نکلی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.43 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S dS = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$(5.44) \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم ذو برقی کا برقی مستقل  $\epsilon_R$  گنا کرتے ہوئے اس میں مقید چارج کا حساب رکھتے ہیں۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں  $\rho_S$  مقید چارج نہیں ہے۔  $\rho_S$  سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برقی کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔ انجینئرنگ مسائل میں عموماً  $\rho_S = 0$  ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$(5.45) \quad D_{n1} = D_{n2}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$(5.46) \quad \epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت  $E_n$  میں سیڑھی نما تبدیلی پائے جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر  $E_n$  جوڑ دار<sup>45</sup> ہے۔ اس کے برعکس  $D_n$  سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$D_{m1} = D_1 \sin \theta_1$$

$$D_{n1} = D_1 \cos \theta_1$$

$$D_{m2} = D_2 \sin \theta_2$$

$$D_{n2} = D_2 \cos \theta_2$$

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos \theta_1}{D_2 \cos \theta_2} = 1$$

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 5.45 اور مساوات 5.42 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$(5.47) \quad \begin{aligned} D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2}$$

جس سے

$$(5.48) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔ چونکہ  $D = \epsilon E$  ہوتا ہے لہذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا  $E$  اور  $D$  ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  تصور کیا گیا ہے لہذا اس میں  $\theta_1 > \theta_2$  ہے۔

مساوات 5.47 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2 \theta_1 &= D_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2 \theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.47 کے دوسرے جزو سے  $D_2 \sin \theta_2$  کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2 \theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(5.49) \quad D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

ملتا ہے۔ چونکہ  $E = \frac{D}{\epsilon}$  ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

$$(5.50) \quad E_2 = E_1 \sqrt{\left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}$$



حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف  $D$  کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  ہوں جس صورت میں  $D_2 = D_1$  ہوتا ہے۔ اسی طرح کم  $\epsilon$  جانب  $E$  کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب  $\theta_1 = \theta_2 = 90$  ہوں جس صورت میں  $E_2 = E_1$  ہوتا ہے۔

## 5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برقی کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسا ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھا۔ موصل میں  $E = 0$  ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برقی میں  $E_m = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح  $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$  ہوگا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن  $\rho_S \Delta S$  چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برقی جانب ڈھکن پر عمودی بہاؤ  $D_n \Delta S$  پیدا کرے گا۔ یوں  $D_n = \rho_S$  حاصل ہوتا ہے جس سے  $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$  حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برقی کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں  $\epsilon_0$  کی جگہ  $\epsilon$  پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \quad (5.51)$$

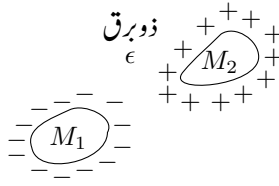
## مثال 5.8: ٹیفلون

## 5.10 کپیسٹر

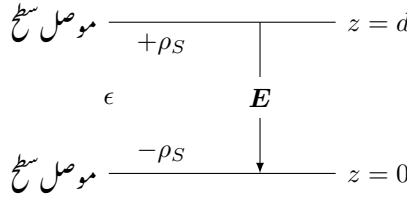
شکل 5.10 میں دو عدد موصل  $M_1$  اور  $M_2$  دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برقی پایا جاتا ہے۔  $M_1$  پر کل  $-Q$  اور  $M_2$  پر کل  $+Q$  چارج پایا جاتا ہے۔ ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔ یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔ چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔

گاوس کے قانون کے تحت  $M_2$  سے عمودی سمت میں  $+Q$  کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج اور  $M_1$  پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاؤ کا دخول ہو گا۔ یوں موصل کے گرد ذو برقی میں کثافت برقی بہاؤ  $D$  اور برقی میدان کی شدت  $E$  پائی جائے گی۔  $D$  اور  $E$  کی ابتدا  $M_2$  سے ہوگی اور ان کا اختتام  $M_1$  پر ہوگا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج  $M_1$  تا  $M_2$  منتقل کرنے کی خاطر  $V_0$  توانائی درکار ہوگی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔



شکل 5.10: کیپیسٹنس کی تعریف۔



شکل 5.11: متوازی چادر کیپیسٹر۔

کیپیسٹنس  $C^{46}$  کی تعریف

(5.52) 
$$C = \frac{Q}{V_0}$$
 ہے جہاں  $M_1$  کو صفر برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے  $M_2$  کی برقی دباؤ  $V_0$  اور مثبت موصل یعنی  $M_2$  کا چارج  $Q$  ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی  $V_0$  کو مکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مثبت موصل پر چارج  $Q$  کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں صفحہ 67 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 91 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کیپیسٹنس کی عمومی مساوات

(5.53) 
$$C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاؤ بھی دگنی ہو جائے گی۔ یوں  $D$  اور  $E$  بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباؤ بھی دگنا ہو گا۔ اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباؤ ایک بار پھر وہی کیپیسٹنس دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیپیسٹنس کی قیمت کا دار و مدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کیپیسٹنس کی اکائی فیراڈ<sup>47</sup> ہے جسے  $F$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ<sup>48</sup> کے برابر ہے۔ ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور پر کیپیسٹنس کو مائیکرو فیراڈ  $\mu F$  یا پیکو فیراڈ  $pF$  میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر کیپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ چلی چادر  $z = 0$  پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت  $-\rho_s$  پائی جاتی ہے جبکہ اوپر چادر  $z = d$  پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت  $+\rho_s$  پائی جاتی ہے۔ اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔ دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 52

<sup>46</sup>capacitance

<sup>47</sup>Farad

<sup>48</sup>یہ اکائی انگریزی ماہر طبیعیات مائیکل فیراڈ کے نام سے منسوب ہے۔

پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر  $x = 0$  اور منفی چادر  $x = x_1$  پر رکھے گئے تھے۔ یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$E = -\frac{\rho_S}{\epsilon} a_z$$

ہوگی۔ میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔ مثبت سطح سے خارج برقی بہاؤ کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی  $D_+ = \rho_S$  کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاؤ داخل ہوتا ہے لہذا یہاں  $D_- = -\rho_S$  ہوگا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = - \int_0^d E \cdot dL = \int_0^d \frac{\rho_S a_z}{\epsilon} \cdot dz a_z = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباؤ ہوگا۔ لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہوگا۔ حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہوگا۔  $S$  رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S dS = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.54)$$

ہوگی۔ کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے<sup>49</sup> کو ہم نے نظر انداز کیا ہے۔ کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جاسکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ ابرق کپیسٹر<sup>50</sup> انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا<sup>51</sup> کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.9: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی مونٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا۔ اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 7.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_R = 5.4$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1 \text{ pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری کیپسٹر

صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت  $\rho_L$  ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔  $L$  لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں  $Q = \rho_L L$  چارج پایا جائے گا۔ اس طرح اتنی تار کا کیپسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (5.55)$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس  $\rho_1$  جبکہ بیرونی تار کا رداس  $\rho_2$  ہے۔

5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر

محدد کے مرکز پر  $r_A$  اور  $r_B$  رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں  $r_B > r_A$  ہے۔ اندرونی سطح پر  $Q$  اور بیرونی سطح پر  $-Q$  چارج پایا جاتا ہے۔ گاؤس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی  $r < r_A$  اور بیرونی سطح باہر یعنی  $r > r_B$  پر میدان صفر ہو گا۔ دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محد کے مرکز پر نقطہ چارج  $Q$  کا میدان ہوتا ہے۔ یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباؤ صفحہ 93 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان سطحوں کا کیپسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \quad (5.56)$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔ اگر  $r_B$  کو لا محدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \quad \text{کرہ کی کیپسٹنس} \quad (5.57)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $r_A$  کی جگہ  $R$  لکھا گیا ہے۔ یہ مساوات رداس  $R$  کرہ کی کیپسٹنس دیتا ہے۔ یاد رہے کہ اس کیپسٹر کی دوسری سطح لا محدود فاصلے پر ہے۔

مثال 5.10: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔ بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔ خالی خلاء میں موصل بلور کی کیپسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55 \text{ pF}$$

$r_A$  رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر  $r_A$  تا  $r_1$  برقی مستقل  $\epsilon_1$  کے ذو برقی کی تہہ چھڑانے سے  $D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$  کی بدولت

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} a_r & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r & (r > r_1) \end{cases}$$

ہوگا۔ برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباؤ

$$V = - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)$$

ہوگا جس سے کپیسٹنس

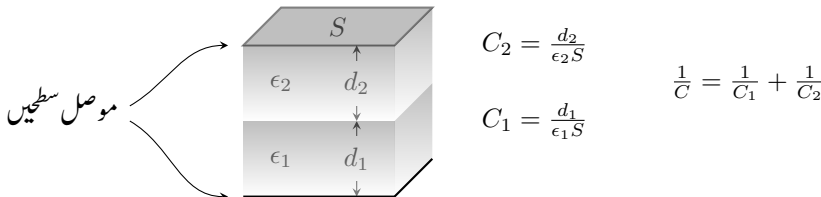
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

(5.58)

حاصل ہوتی ہے۔

## 5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برقی بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ منفی چادر پر  $\epsilon_1$  برقی مستقل کی  $d_1$  موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر  $\epsilon_2$  برقی مستقل کی  $d_2$  موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر  $-\rho_S$  جبکہ مثبت چادر پر  $+\rho_S$  سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان  $D = \rho_S$  ہوگا۔ یوں  $\epsilon_1$  ذو برقی کے خطے میں



شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ  $\epsilon_2$  ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہوگا جبکہ مثبت چادر پر چارج  $\rho_S S = Q$  ہوگا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

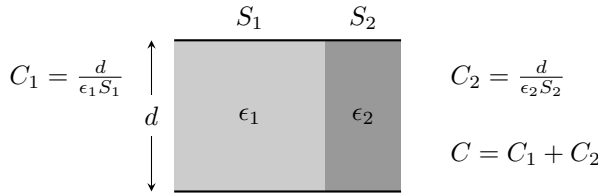
$$(5.59) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں

$$(5.60) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے  $C_1$  اور  $C_2$  کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جاسکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے۔



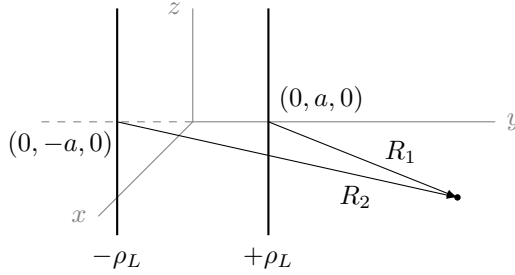
شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$(5.61) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھ سکتے ہیں۔ آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔ دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہذا ٹپلی چادر کو برقی زمین یعنی صفروولٹ اور دوسری چادر کو  $V_0$  برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان خطے میں  $E = \frac{V_0}{d}$  ہوگا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی  $\epsilon_1$  برقی مستقل کے ذو برق میں  $D_1 = \epsilon_1 E$  جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں  $D_2 = \epsilon_2 E$  ہوں گے۔  $D_1$  اور  $D_2$  موصل چادروں کے عمودی ہیں لہذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے  $S_1$  حصے پر  $\rho_1 = D_1$  جبکہ اس کے  $S_2$  حصے پر  $\rho_2 = D_2$  ہوگا۔ یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$(5.62) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(5.63) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔

## 5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو (0, a, 0) سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت +ρ<sub>L</sub> پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو (0, -a, 0) سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت -ρ<sub>L</sub> پایا جاتا ہے۔ z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ صفحہ 94 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ<sub>0</sub> پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباؤ

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر R<sub>10</sub> = R<sub>20</sub> رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح  $y = 0$  پر  $R_{10} = R_{20}$  ہوگا لہذا دراصل ہم برقی زمین کو  $y = 0$  سطح پر رکھ رہے ہیں۔ اب  $R_1$  اور  $R_2$  کو  $x$  اور  $y$  کی صورت

$$\begin{aligned} R_1 &= xa_x + (y - a)a_y \\ R_2 &= xa_x + (y + a)a_y \end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے

$$(5.64) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

یا

$$(5.65) \quad e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباؤ مثلاً  $V_1$  کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔ چونکہ  $V_1$  اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$(5.66) \quad K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = -a^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب  $a^2 \frac{(K_1 + 1)^2}{(K_1 - 1)^2}$  جمع کرتے ہوئے یوں

$$(5.67) \quad x^2 + \left[ y - a \left( \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \right]^2 = \left( \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right)^2$$

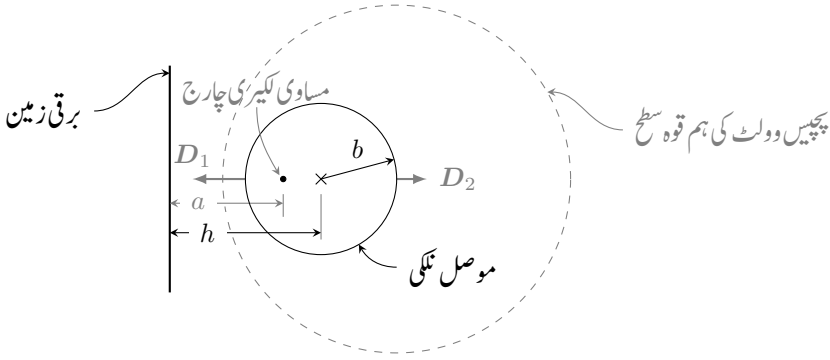
لکھا جاسکتا ہے جو رداس  $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$  کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز  $\left[ 0, \frac{a(K_1 + 1)}{K_1 - 1} \right]$  پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح  $z$  کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ ٹکلی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.67 میں

$$(5.68) \quad \begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \\ h &= a \left( \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$(5.69) \quad x^2 + (y - h)^2 = b^2$$





شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جاسکتا ہے۔ ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے  $y = 0$  پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں  $b$  رداس کے دائرے بنائے گئے جن کا مرکز زمین سے  $h$  فاصلے پر ہوگا۔ ہم قوہ سطح کے رداس  $h$  اور  $h$  کا دار و مدار  $K_1$  پر ہے جو از خود  $V_1$  پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباؤ  $V_2, V_3, \dots$  کے لئے  $K_2, K_3, \dots$  حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم  $V_1$  ہم قوہ سطح کی جگہ  $V_1$  برقی دباؤ کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے  $h$  فاصلے پر  $b$  رداس کے موصل نکلی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں  $h$  اور  $b$  دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.68 کی مدد سے  $K_1, a$  اور  $V_1$  معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 5.68 کو حل کرتے ہوئے

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$K_1 = \left( \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \right)^2 \quad (5.70)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نکلی  $V_1$  وولٹ پر ہے لہذا ان کے درمیان  $V_1$  برقی دباؤ ہوگا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے لمبائی پر کل چارج  $Q = \rho_L L$  پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہوگا جبکہ  $b$  رداس کے موصل نکلی پر یہی  $Q = \rho_L L$  چارج ہوگا۔ یوں  $L$  لمبائی کے موصل نکلی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \frac{h}{b}} \quad (5.71)$$

کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں  $b \gg h$  ہو گا لہذا مساوات 5.71

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \quad (5.72)$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.71 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جاسکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ انہیں مثال 5.11 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.11: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- نکلی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نکلی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔
- پچیس وولٹ ہم قوه سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو ہو ایسی ہی ہم قوه سطحیں پیدا کرے گا۔
- نکلی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں  $h = 10$  جبکہ  $b = 5$  ہیں لہذا مساوات 5.70 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66 \text{ m}$$

$$K_1 = \left( \frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5} \right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.66 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.71 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22 \text{ nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.66 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9 \times 10^9 \times 2.11 \times 10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.68 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25 \text{ m}$$

$$h = 8.66 \times \left( \frac{3.73 + 1}{3.73 - 1} \right) = 15 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر  $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$  لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

- کسی بھی جگہ  $E$  کو مساوات 5.64

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln(x^2 + (y+a)^2) - \ln(x^2 + (y-a)^2) \right]$$

کے ڈھلان  $E = -\nabla V$  سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس سے

$$D = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \nabla V = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y \right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2x}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2(y+a)}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر  $D$  عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہذا ہم موصل نکلی پر برقی زمین کے قریبی جانب  $D_1$  اور اس سے دور جانب  $D_2$  کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے نکلی کا قریبی فاصلہ  $h - b = 5 \text{ m}$  ہے۔ یوں  $x = 0$  اور  $y = 5$  ہو گا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2 \times 0}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2(5 + 8.66)}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2(5 - 8.66)}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$D_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi} a_y$$

ہو گا۔ زمین سے دور نکلی پر  $x = 0$  اور  $y = h + b = 10 + 5 = 15 \text{ m}$  ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2 \times 0}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2(15 + 8.66)}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2(15 - 8.66)}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = -\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$D_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi} a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاؤ کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نکلی پر

$$\rho_{S\text{ قریبی}} = \frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$

$$\rho_{S\text{ دور}} = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج  $a_y$  جانب ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نکلی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے  $8.66 \text{ m}$  فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر  $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$  پایا جاتا ہو۔ نکلی سے پیدا ہونے والی سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.70 کو ثابت کریں۔



## باب 6

### پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$(6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

میں  $D = \epsilon E$  اور حاصل جواب میں  $E = -\nabla V$  پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$(6.2) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں<sup>1</sup> خاصیت کے خطے میں  $\epsilon$  اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن<sup>2</sup> مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیر  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$  کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

عموماً  $\nabla \cdot \nabla^2$  کو لکھا جاتا ہے۔ اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$(6.4) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتی ہے۔

جھمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی  $\rho_h = 0$  کی صورت میں مساوات 6.2

$$(6.5) \quad \nabla^2 V = 0$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس<sup>3</sup> مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں جھمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جاسکتی ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ کارتیسی محدود میں لاپلاس کی مساوات

$$(6.6) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صورت رکھتی ہے۔  $\nabla^2$  کو لاپلاس عامل<sup>4</sup> کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت  $\nabla^2 = 0$  ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباؤ  $V_1, V_0$ ،  $V_2$  وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا  $E$  معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔ اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباؤ اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاؤ دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔ اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباؤ معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاؤ یا برقی دباؤ حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباؤ کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

## 6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات  $V_1$  اور  $V_2$  حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(6.7) \quad \nabla^2(V_1 - V_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباؤ  $V_s$  ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 109 پر مساوات 4.80

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری  $V$  اور کسی بھی سمتیہ  $D$  کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم  $V_1 - V_2$  کو مقداری اور  $\nabla(V_1 - V_2)$  کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل پورے حجم کے لئے

$$(6.8) \quad \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] dh + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی مکمل کو بند سطحی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot dS = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر  $V_{1s} = V_{2s}$  ہونے کی بنا پر  $V_{1s} - V_{2s} = 0$  ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت  $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$  ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی مکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں مکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں  $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$  کا مکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہذا موجودہ مکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ مکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا مکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$



ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب  $\nabla(V_1 - V_2) = 0$  کا مطلب ہے کہ  $V_1 - V_2$  کی ڈھلان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب  $V_1 - V_2$  کی قیمت کسی بھی محدود کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر مکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$(6.9) \quad V_1 = V_2$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوٹنسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوٹنسن مساوات کے دو جوابات  $V_1$  اور  $V_2$  پوٹنسن مساوات پر پورا اتریں گے لہذا  $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$  اور  $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$  لکھے جا سکتے ہیں جن سے  $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی  $V_{1s} - V_{2s} = 0$  ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوٹنسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہو صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

## 6.2 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات

نکلی محدود میں ڈھلان کی مساوات صفحہ 101 پر مساوات 4.54 دیتا ہے جس سے

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= -E_\rho \mathbf{a}_\rho - E_\phi \mathbf{a}_\phi - E_z \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

لکھتے ہیں جہاں  $E = -\nabla V$  کا استعمال کیا گیا۔ نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ  $E$  کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ  $E = -\nabla V$  اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$(6.11) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی}$$

لکھا جاسکتا ہے جو نلکی محدود میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدود میں بالکل اسی

$$(6.12) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی}$$

جبکہ عمومی محدود میں

$$(6.13) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{k_1 k_3}{k_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad \text{عمومی}$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

### 6.3 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ مکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ مکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدود کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدود کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارتیسی محدود میں  $x$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے  $y$  یا  $z$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح  $x$  محدود سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہوگا۔ یوں کارتیسی محدود میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور  $x$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہذا کارتیسی محدود میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔ نلکی محدود میں  $z$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدود میں دیکھ لیں گے لہذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدود میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ  $V$  صرف  $x$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہوگا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہوگی کہ  $V$  صرف  $x$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔ چونکہ  $V$  کی قیمت صرف  $x$  پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$(6.14) \quad V = Ax + B$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو  $x$  کہا جائے گا۔  $A$  اور  $B$  دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباؤ کا دار و مدار صرف  $x$  پر ہے جبکہ  $y$  اور  $z$  کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔  $x$  کی کسی بھی قیمت پر یعنی  $x = x_0$  سطح پر  $V$  کی قیمت اٹل ہوگی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں  $x$  محدود کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباؤ اور چادروں کا  $x$  محدود پر مقام بیان کرتے ہوئے  $A$  اور  $B$  کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر  $x_1$  پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ  $V_1$  ہے اور اسی طرح دوسری چادر  $x_2$  پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ  $V_2$  ہے تب

$$\begin{aligned} V_1 &= Ax_1 + B \\ V_2 &= Ax_2 + B \end{aligned}$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \\ B &= \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان

$$(6.15) \quad V = \left( \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو  $x = 0$  اور دوسری چادر کو  $d$  پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباؤ کو صفر اور  $V_0$  کہتے تب ہمیں

$$(6.16) \quad V = \frac{V_0x}{d}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباؤ اور کپیسٹنس حاصل کئے۔ موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ برقی دباؤ سے میدان بذریعہ  $E = -\nabla V$  اور بہاؤ بذریعہ  $D = \epsilon E$  حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاؤ کے برابر ہے۔ سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے  $Q = C$  حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباؤ  $V$  حاصل کریں۔

• مکمل کے سرحدی شرائط سے مکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔

• برقی دباؤ سے برقی میدان اور برقی بہاؤ بذریعہ  $E = -\nabla V$  اور  $D = \epsilon E$  حاصل کریں۔

• کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاؤ کی قیمت  $D_S = D_n a_N$  حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہوگا۔

• چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاؤ برابر ہوتے ہیں لہذا  $\rho_S = D_n$  ہوگا۔ مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا چادر میں دخول ہوگا۔

• سطح پر چارج بذریعہ سطحی مکمل حاصل کریں۔

• کپیسٹنس  $C = \frac{Q}{V}$  ہوگا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہذا

$$E = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} a_x$$

اور

$$D = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

چونکہ بہاؤ کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہذا مثبت چادر  $x = d$  پر جبکہ منفی چادر  $x = 0$  پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$D_S = D \Big|_{x=d} = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$a_N = -a_x$$

ہے لہذا برقی بہاؤ چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon \frac{V_0}{d}$$

ہوگا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ  $S$  ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int \epsilon \frac{V_0}{d} dS = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 140 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو  $y$  یا  $z$  محدود پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہذا کارتیسی محدود کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نکلی محدود میں  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدود کے مثال کی طرح ہی ہے لہذا ہم باری باری  $\rho$  اور  $\phi$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف  $\rho$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

یا

$$(6.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

ہو گا جس سے

$$(6.18) \quad \rho = \infty$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ہو گا۔ اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمیل لے کر حل کرتے ہیں۔ پہلی بار تکمیل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

یا

$$dV = A \frac{d\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمل سے

$$V = A \ln \rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہم توہ سطحیں تکلی شکل کے ہیں۔ یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباؤ دیتی ہے۔ ہم محوری تار کے بیرونی تار  $\rho = b$  کو برقی زمین اور اندرونی تار  $\rho = a$  کو  $V_0$  برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے

$$(6.20) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباؤ صفر ہی ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔ یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$E = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \mathbf{a}_\rho$$

اور

$$D_n = D \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(6.21) \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 141 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو  $\rho$  سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب  $\rho \neq 0$  ہو۔ یاد رہے کہ  $\rho = 0$  کی صورت میں  $\frac{\rho}{\rho} = 0$  ہو گا جو غیر معین<sup>5</sup> ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر  $\rho \neq 0$  ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$(6.22) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad \rho \neq 0$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباؤ نکلی محدود کے متغیر  $\phi$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل  $\rho = \infty$  حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی  $\rho = 0$  بھی کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو  $\rho^2$  سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم توہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\rho = 0$  کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباؤ ممکن نہ ہو گا۔ یوں  $\rho = 0$  قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں  $\phi = 0$  کو برقی زمین جبکہ  $\phi = \phi_0$  پر  $V_0$  برقی دباؤ کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \quad \rho \neq 0 \quad (6.23)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$E = -\frac{V_0}{\phi_0} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.4: کرووی محدود میں  $\phi$  کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے  $r$  اور بعد میں  $\theta$  کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباؤ کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (6.24)$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (6.25)$$

حاصل کریں جہاں  $r = b$  پر برقی زمین اور  $r = a$  پر  $V_0$  برقی دباؤ ہے اور  $b > a$  ہے۔

مثال 6.5: کروی محدود میں  $\theta$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.26) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر  $r \neq 0$  اور  $\sin \theta \neq 0$  ہوں تب اس مساوات کو  $r^2 \sin \theta$  سے ضرب دیتے ہوئے

$$(6.27) \quad \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔  $\sin \theta$  اس صورت صفر کے برابر ہوگا جب  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  ہوں۔ اس کے پہلی بار مکمل سے

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

یا

$$dV = \frac{A d\theta}{\sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار مکمل سے

$$(6.28) \quad V = A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + B = A \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔ اگر  $\theta = \frac{\pi}{2}$  اور  $V = 0$  پھر  $\theta = \theta_0$  اور  $V = V_0$  ہوں جہاں  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$  ہے تب ہمیں

$$(6.29) \quad V = V_0 \frac{\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کمپسیٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔ پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.30) \quad E = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \mathbf{a}_\theta$$

خروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r \sin \theta_0 \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$



ہوگا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin \theta_0 \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta_0 d\phi dr}{r}$$

ہوگا۔ مکمل میں رداس کا حد لا محدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لا محدود حاصل ہوتی ہے جس سے لا محدود کپیسٹنس حاصل ہوگا۔ حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہذا ہم رداس کے حدود  $r_1$  تا  $0$  لیتے ہیں۔ ایسی صورت میں

$$(6.31) \quad C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln \left( \cot \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے لا محدود سطح سے شروع کیا تھا لہذا چارج کی مساوات بھی صرف لا محدود سطح کے لئے درست ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہوگی ناکہ بالکل درست قیمت۔

#### 6.4 پوئنسن مساوات کے حل کی مثال

پوئنسن مساوات تب حل کیا جاسکتا ہے جب  $\rho_h$  معلوم ہو۔ حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباؤ وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں  $\rho_h$  ہی درکار ہوتی ہے۔ ہم پوئنسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں  $\rho_h$  معلوم ہو۔

سلیکان<sup>6</sup> کی پتھری میں  $p$  اور  $n$  اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے  $p$  اور  $n$  سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی سلیکان پتھری پر آپس میں جڑے ہوئے  $p$  اور  $n$  خطے ڈایوڈ<sup>7</sup> کو جنم دیتے ہیں۔  $x$  محدود رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ تصور کریں کہ  $x < 0$  خطہ  $p$  اور  $x > 0$  خطہ  $n$  قسم کا ہے۔ مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہوگا کہ  $p$  یا  $n$  خطہ از خود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ  $p$  خطے میں آزاد خول<sup>8</sup> اور  $n$  خطے میں آزاد الیکٹران<sup>9</sup> پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف  $p$  جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف  $n$  جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحہ ہی آزاد خول  $p$  سے  $n$  جانب اور آزاد الیکٹران  $n$  سے  $p$  جانب نفوذ<sup>10</sup> کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چارج کے اس حرکت سے جلد  $p$  اور  $n$  کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی  $x > 0$  جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔ یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح  $E = -Ea_x$  پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان  $E$  چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے  $E$  بڑھتی رہے گی۔ آخر کار  $E$  کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ آپس برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں  $p$  اور  $n$  خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری

silicon<sup>6</sup>diode<sup>7</sup>free holes<sup>8</sup>free electrons<sup>9</sup>diffusion<sup>10</sup>

جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \quad (6.32)$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت  $\rho_0$  ہے جو  $x = 0.881a$  پر پائی جاتی ہے۔ آئیں اس چارج کثافت کے لئے پونسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل کے مستقل  $A$  کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جاسکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا  $x \rightarrow \pm\infty$  پر  $E_x \rightarrow 0$  ہو گا جس سے  $A = 0$  حاصل ہوتا ہے لہذا

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \quad (6.33)$$

کے برابر ہے۔ دوسری بار مکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے  $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left( \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (6.34)$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب جمعی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباؤ دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباؤ  $V_0$  کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x \rightarrow +\infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \quad (6.35)$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کل مثبت چارج

$$(6.36) \quad Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش  $S^{11}$  ہے۔ مساوات 6.35 سے  $a$  کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$(6.37) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت  $C = \frac{Q}{V_0}$  لکھ کر نہیں حاصل کی جاسکتی البتہ

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

سے

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہوگی۔ اسے اس طرح سمجھا جاسکتا ہے کہ زیادہ برقی دباؤ کی صورت میں سرحد کے دونوں جانب چارجوں کا آپس میں فاصلہ بڑھ جاتا ہے۔ یہ اسی طرح ہے جیسے دو چادر کپیسٹر کے چادروں کا آپس میں فاصلہ بڑھا دیا جائے جس سے کپیسٹنس کم ہی ہوتی ہے۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ  $S$  اور چادروں کے مابین فاصلہ  $2\pi a$  ہو۔

## باب 7

### سوالات

7.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 7.1:

سوال 7.2: برقی میدان  $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$  میں  $-0.1 \text{ C}$  کے چارج کو نقطہ  $(1, 0, 2)$  سے نقطہ  $(0, 0, 2)$  اور یہاں سے نقطہ  $(0, 1, 2)$  لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات:  $0.2 \text{ J}$ ،  $-0.2 \text{ J}$  اور  $0 \text{ J}$

سوال 7.3: مثال 4.7 کے طرز پر  $L$  لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس  $a$  جبکہ بیرونی تار کا رداس  $b$  ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ جواب}$$

7.2 کیپیسٹر

سوال 7.4:  $N(0, 0, 2)$  سے گزرتی  $y$  محدد کے متوازی کیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے  $M(5, 3, 1)$  پر  $D$  حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \text{ جواب}$$

سوال 7.5: لامحدود موصل زمینی سطح  $z = 0$  رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \text{ جواب:}$$

سوال 7.6:  $N(0, 0, 2)$  سے گزرتی  $y$  محور کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ  $z = 0$  پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے  $M(5, 3, 0)$  مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{nC}{m^2}$$

سوال 7.7: مشق 5.3 میں 300 K درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی  $1 \times 10^7$  سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت  $15 \times 10^{28}$  ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{S}{m}$$

سوال 7.8: صفحہ 127 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح  $z = 0$  میں  $(0, 0, z)$  پر پائے جانے والے نقطہ چارج  $Q$  سے پیدا سطحی چارج کثافت  $\rho_S$  حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی کثافت سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -Q$$

سوال 7.9: صفحہ 118 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپئیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

$$\text{جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔}$$

$$\text{سوال 7.10: مساوات 5.71 میں } \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b} \text{ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔}$$

سوال 7.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نکلی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا  $\rho_L$  حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نکلی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نکلی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 12 \text{ m}, 3.46 \frac{nC}{m}, 13.4 \text{ m}, 18 \text{ m}, 1.65 \frac{pF}{m^2} \text{ اور } 0.73 \frac{pF}{m^2}$$

## 7.3 لاپلاس

سوال 7.12: صفحہ 155 پر مساوات 6.13 عمومی محدود میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 7.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کمپلیٹمنس حاصل کریں۔

سوال 7.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 7.15: مساوات 6.28 کے مکمل کو حل کریں۔

سوال 7.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 7.17: مساوات 6.31 حل کریں۔



جدول 7.1:  $\sigma$ 

| $\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ | چیز                 | $\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$ | چیز         |
|-------------------------------------|---------------------|-------------------------------------|-------------|
| $7 \times 10^4$                     | گرفتار              | $6.17 \times 10^7$                  | چاندی       |
| 1200                                | سلیکان              | $5.80 \times 10^7$                  | تانبا       |
| 100                                 | فیرائٹ (عمومی قیمت) | $4.10 \times 10^7$                  | سونا        |
| 5                                   | سمندری پانی         | $3.82 \times 10^7$                  | المونیم     |
| $10^{-2}$                           | چھونا پتھر          | $1.82 \times 10^7$                  | ٹنگسٹن      |
| $5 \times 10^{-3}$                  | چکنی مٹی            | $1.67 \times 10^7$                  | جست         |
| $10^{-3}$                           | تازہ پانی           | $1.50 \times 10^7$                  | پیتل        |
| $10^{-4}$                           | تقطیر شدہ پانی      | $1.45 \times 10^7$                  | نکل         |
| $10^{-5}$                           | ریتیلی مٹی          | $1.03 \times 10^7$                  | لوہا        |
| $10^{-8}$                           | سنگ مرمر            | $0.70 \times 10^7$                  | قلعی        |
| $10^{-9}$                           | بیک لائٹ            | $0.60 \times 10^7$                  | کاربن سٹیل  |
| $10^{-10}$                          | چینی مٹی            | $0.227 \times 10^7$                 | مینگنیز     |
| $2 \times 10^{-13}$                 | بیرا                | $0.22 \times 10^7$                  | جرمنیم      |
| $10^{-16}$                          | پولیسٹرن پلاسٹک     | $0.11 \times 10^7$                  | سٹینلس سٹیل |
| $10^{-17}$                          | کوارٹس              | $0.10 \times 10^7$                  | نائیکروم    |



جدول 7.2:  $\sigma/\omega\epsilon$  and  $\epsilon_R$ 

| $\sigma/\omega\epsilon$ | $\epsilon_R$ | چیر                            |
|-------------------------|--------------|--------------------------------|
|                         | 1            | خالی خلاء                      |
|                         | 1.0006       | ہوا                            |
| 0.0006                  | 8.8          | المونیم آکسائیڈ                |
| 0.002                   | 2.7          | عمیر                           |
| 0.022                   | 4.74         | بیک لائٹ                       |
|                         | 1.001        | کاربن ڈائی آکسائیڈ             |
|                         | 16           | جرمنیم                         |
| 0.001                   | 4 تا 7       | شیشہ                           |
| 0.1                     | 4.2          | برف                            |
| 0.0006                  | 5.4          | ابر                            |
| 0.02                    | 3.5          | نائلون                         |
| 0.008                   | 3            | کاغذ                           |
| 0.04                    | 3.45         | پلیکسی گلاس                    |
| 0.0002                  | 2.26         | پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)      |
| 0.000 05                | 2.55         | پولیسٹرین                      |
| 0.014                   | 6            | چینی مٹی                       |
| 0.0006                  | 4            | پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا) |
| 0.000 75                | 3.8          | کوارٹس                         |
| 0.002                   | 2.5 تا 3     | ریڑ                            |
| 0.000 75                | 3.8          | سلیکا $\text{SiO}_2$           |
|                         | 11.8         | سلیکان                         |
| 0.5                     | 3.3          | قدرتی برف                      |
| 0.0001                  | 5.9          | کھانے کا نمک                   |
| 0.07                    | 2.8          | خشک مٹی                        |
| 0.0001                  | 1.03         | سٹائروفوم                      |
| 0.0003                  | 2.1          | ٹیفلان                         |
| 0.0015                  | 100          | ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ          |
| 0.04                    | 80           | تقطیر شدہ پانی                 |
| 4                       |              | سمندری پانی                    |
| 0.01                    | 1.5 تا 4     | خشک لکڑی                       |

جدول 7.3:  $\mu_R$ 

| $\mu_R$      | چیز                       |
|--------------|---------------------------|
| 0.999 998 6  | بسمت                      |
| 0.999 999 42 | پیرافین                   |
| 0.999 999 5  | لکڑی                      |
| 0.999 999 81 | چاندی                     |
| 1.000 000 65 | المونیم                   |
| 1.000 000 79 | بیریلم                    |
| 50           | نکل                       |
| 60           | ڈھلوان لوہا               |
| 300          | مشین سٹیل                 |
| 1000         | فیرائٹ (عمومی قیمت)       |
| 2500         | پریم بھرت (permalloy)     |
| 3000         | ٹرانسفارمر پتری           |
| 3500         | سیلکان لوہا               |
| 4000         | خالص لوہا                 |
| 20 000       | میو میٹل (mumetal)        |
| 30 000       | سنڈسٹ (sendust)           |
| 100 000      | سوپریم بھرت (supermalloy) |

جدول 7.4: اہم مستقل

| قیمت  | علامت        | چیز                          |
|---|--------------|------------------------------|
| $(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$                     | c            | الیکٹران چارج                |
| $(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$                          | m            | الیکٹران کمیت                |
| $(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ | $\epsilon_0$ | برقی مستقل (خالی خلاء)       |
| $4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$  | $\mu_0$      | مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)   |
| $(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     | c            | روشنی کی رفتار خالی خلاء میں |

