برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 10

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہٰذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی تعدد[2] کا دار و مدار چارج یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω زاویائی تعدد[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی[4] کہلاتی ہے۔ سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس[6]، شعاعی انحراف[7] اور انکسار امواج[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار جسم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے

electromagnetic[1]
frequency[2]
angular frequency[3]
light[4]
time period[5]
reflection[6]
refraction[7]
diffraction[8]

ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہٰذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 263 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \,\mathrm{\frac{m}{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہٰذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ϕ زاویائی فاصلہ[11] ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x، y، z اور ω کا تابع تفاعل[12] ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز[13] ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

---

[9] phasor
[10] angular frequency
[11] phase angle
[12] dependent function
[13] Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل[14] کو $e^{jx}=\cos x+j\sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j=\sqrt{-1}$ خیالی عدد[15] ہے۔آزاد متغیرہ $\omega t+\psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t+\psi)}=\cos(\omega t+\psi)+j\sin(\omega t+\psi)$$

لکھا جا سکتا ہے جو حقیقی[16] اور خیالی[17] اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل[18] ہے۔یوں $\cos(\omega t+\psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$E_y=E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)=\left[E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[E_{xyz}e^{j\omega t}e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys}=E_{xyz}e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد[19] ہے۔ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s=j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y=10.5\cos(10^6t-0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y=\left[10.5e^{j(10^6t-0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[10.5e^{j10^6t}e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد e^{j10^6t} اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys}=10.5e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)\right]=-\omega E_{xyz}\sin(\omega t+\psi)\\&=\left[j\omega E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=-\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

[14] Euler's identity
[15] imaginary number
[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی باآسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_s = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_s = j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s = \gamma^2 \boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)} \tag{10.12}$$

حرکی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21][22] کہلاتی ہے۔کارتیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

---

[20] propagation constant
[21] vector Helmholtz equation
[22] ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2}=\gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}=0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}=0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2}=\gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs}=Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

اور

$$E_{xs}=Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma=\alpha+j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔مساوات 10.18 در حقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned}E_x&=\left[Ae^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z}\right]_{\text{حقیقی}}\\&=\left[Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x=Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)$$

لیتے ہیں۔مساوات کے مستقل A کی جگہ $t=0$ اور $z=0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x=E_0e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مستوی موج[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x=E_0e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z) \tag{10.21}$$

حاصل ہوتی۔

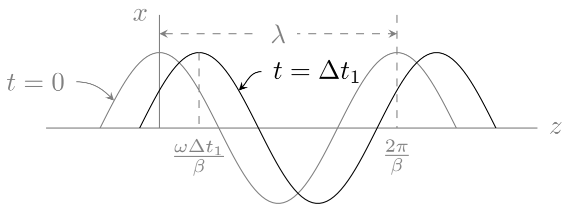
مساوات 10.18 میں $A=E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s=E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{10.22}$$

لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو پر مشتمل ہے۔آئیں مساوات 10.20 میں دیے متحرک موج[24] پر اب غور کریں۔

---

[23] plane wave
[24] travelling wave



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α تقلیلی مستقل[25] کہلاتا ہے۔تقلیلی مستقل کو نیپر[26] فی میٹر $\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا[27] جاتا ہے۔یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد[28] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کے مساوات میں $-\beta z$ زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[29] کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[30] پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

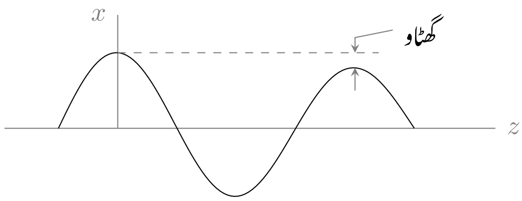
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \tag{10.26}$$

---

[25] attenuation constant
[26] neper
[27] تقلیلی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[28] dimensionless
[29] phase constant
[30] wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\alpha = 0.001\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $1\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $0.368 = \frac{e^{-1}}{e^{-0}}$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{s} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_\mathrm{s}$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\mathrm{y} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_\mathrm{s}$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{10.31}$$

لکھی[31] گئی[32] ہے۔اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \tag{10.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \tag{10.33}$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباو $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z|\, e^{j\theta_Z} = |Z| \underline{/\theta_Z}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z|\, e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos\left(\omega t - \psi - \theta_Z\right)$$

[31] یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔
[32] eta η

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| \, e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباو کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η، قدرتی رکاوٹ[33] کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta| \, e^{j\theta_\eta} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج[34] کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \end{aligned}$$

[33] intrinsic impedance
[34] transverse waves

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{10.37}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \\ H_y &= \frac{E_0}{120\pi} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[35] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

---

[35] wireless

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.38}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہو گی۔خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.39}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔چونکہ $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$E_x = E_0\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.40}$$
$$H_y = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.41}$$

ہیں۔

مثال 10.1: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{78.4}}=0.3388\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{0.3388\times10^8}{300\times10^6}=11.29\,\text{cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda=1\,\text{m}$ ہے۔بقایا مستقل

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=55.7\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$\eta=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}=\frac{377}{\sqrt{78.4}}=42.58\,\Omega$$

ہیں۔امواج کے مساوات

$$E_x=0.05\cos(6\pi10^8t-55.7z)$$
$$H_y=\frac{0.05}{42.58}\cos(6\pi10^8t-55.7z)=0.00117\cos(6\pi10^8t-55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے، $5.6\,\text{GHz}$ اور $10\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$، $23\,\text{cm}$، $272.6\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $162.1\,\Omega$ اور $1.62\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 286 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2\times\pi\times 20\times 10^9\times\frac{\sqrt{1\times 41}}{3\times 10^8}\sqrt{1-j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^\circ}\\ &= 1005+j2864 \quad \mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تقلیلی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[36] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}}\frac{1}{\sqrt{1-j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1+j17.2 \quad \Omega$$

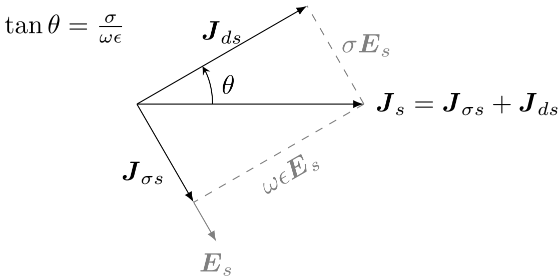
ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s = (\sigma+j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s}+\boldsymbol{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی

[36] radar



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

رو سے $90°$ آگے رہتی ہے۔مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.42}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجنٹ[37] یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی[38]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.43}$$

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.44}$$

---

[37] loss tangent
[38] binomial theorem

حاصل ہوتے ہیں۔اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.45}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.46}$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل $20\,\mathrm{GHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.43 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.44 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.45 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.46 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

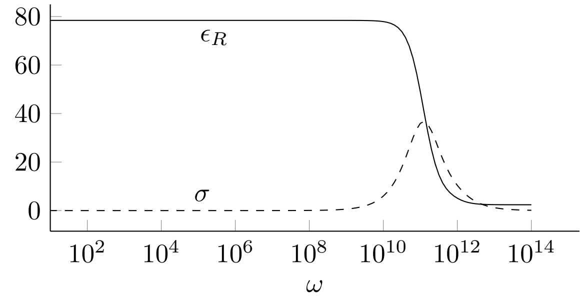
حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.47 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔افقی محدد تعدد کا لاگ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\mathrm{Grad}}{\mathrm{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu S}{m}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تقلیلی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642، $1.13 \times 10^{-3}\,\frac{Np}{m}$ اور $3.51 \times 10^{-4}\,\frac{rad}{m}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کا تقلیلی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031\,\frac{Np}{m}$، 6.9 m، $0.095\,\frac{Np}{m}$، 2.3 m

---

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ[39] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[40] حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

[39] Poynting theorem
[40] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ باآسانی کارتیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2}\right)$$

اور

$$\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}h=\int_h\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h+\frac{\partial}{\partial t}\int_h\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\mathrm{d}h$$

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h+\frac{\partial}{\partial t}\int_h\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\mathrm{d}h \tag{10.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔سمتی ضرب $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ پوئنٹنگ سمتیہ[41] $\mathscr{P}$ پکارا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{10.49}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہٰذا طاقت کی بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گی۔ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لہٰذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔مزید کامل ذو برق میں

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\
H_y &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)
\end{aligned}$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \mathscr{P} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} \left[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}}
\end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{10.50}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاو دیتا ہے۔اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad \mathrm{W}$$

---

[41] Poynting vector

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\theta_\eta) \tag{10.51}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

لیا گیا ہے۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z = 0$ اور $z = 5\,\mathrm{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 27.1 W، 26.4 W، 24.7 W، 12.48 W، 23.7 W، 14.31 W

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔ نائیکروم[42] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع $100\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

---

[42] nichrome

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$-j = 1\angle{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\angle{-90^\circ}} = 1\angle{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.52}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.53}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔مساوات 10.54 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0\cos\omega t \qquad (z = 0) \tag{10.55}$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.55 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.54 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{10.56}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.54 اور مساوات 10.57 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$ جزو پر غور کریں۔سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد[43] کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.58}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد[44] کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \tag{10.59}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف $1.8\,\%$ رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں $50\,\mathrm{Hz}$ کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.368^2 = 0.135$ گنا کم ہو گی۔ خرد امواج[45] کے تعدد یعنی $10\,\mathrm{GHz}$ پر گہرائی جلد $0.661\,\mathrm{\mu m}$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں $50\,\mathrm{Hz}$ کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظرانداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی $1.4\,\mathrm{cm}$ ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661\,\mathrm{\mu m}$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.59 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

---

[43] skin depth
[44] skin effect
[45] microwave

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح مساوات 10.25

$$v=\frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v=\omega\delta \tag{10.60}$$

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8\,\text{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔میں تقریباً $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000\,\text{km}$ اور رفتار $3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہو گی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔مساوات 10.31

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\gg 1$ کی وجہ سے

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$\eta=\frac{\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}}{\sigma\delta}=\frac{1}{\sigma\delta}+j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 10.55 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x=E_0e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right) \tag{10.62}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y=\frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{10.63}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

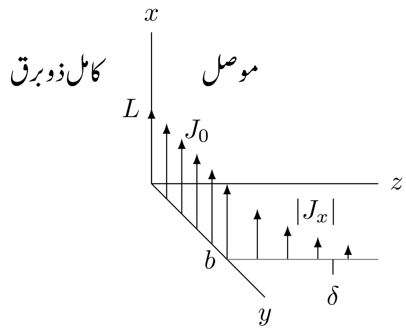
مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2z}{\delta}}\cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{\sigma\delta E_0^2}{4}e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2}=0.135$ گنا رہ گئی ہے۔



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^L \left.\frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right|_{z=0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta b L J_0^2 \tag{10.64}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned}
J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\
&= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}
\end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{J_0 b \delta}{1+j}
\end{aligned}
$$

اس سے

$$
I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$
J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$
P_L = \frac{1}{\sigma} \left(J'_x\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گا۔ مربع کوسائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$
P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.65}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.64 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لامحدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$
R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \tag{10.66}
$$

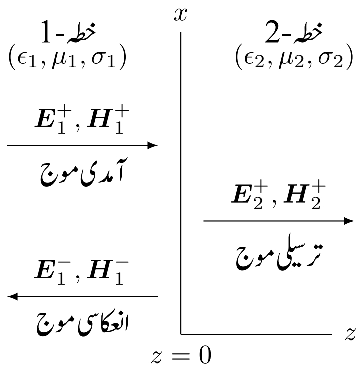
ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$
R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88\,\mathrm{m\Omega}
$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mathrm{\mu m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$
R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega
$$

ہو گی۔



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رو مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: 3.09 mΩ، 62 µm، 1.25 Ω اور 2.49 W

10.5 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج ترسیلی تاروں[46] اور رہبر موج[47] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

---

[46] transmission lines
[47] waveguide

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^{+} = E_{x10}^{+} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.67}$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^{+} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.68}$$

بھی ہو گی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج[48] کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہٰذا اس کے حرکت کو عمودی آمد[49] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج[50] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^{+} = E_{x20}^{+} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.69}$$

$$H_{ys2}^{+} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.70}$$

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 264 پر مساوات 9.43 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.45 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں $K_{\perp} = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \\ H_{m1} &= H_{m2} \quad (K_{\perp} = 0) \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.67 اور مساوات 10.69 برابر ہوں گے۔ یوں $E_{x10}^{+} = E_{x20}^{+}$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.68 اور مساوات 10.70 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$E_{xs1}^{-} = E_{x10}^{-} e^{\gamma_1 z} \tag{10.71}$$

$$H_{ys1}^{-} = -\frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \tag{10.72}$$

---

[48] incident wave
[49] normal incidence
[50] transmitted wave

بھی پائے جائیں جنہیں انعکاسی امواج[51] کہا جاتا ہے۔انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہو گا تا کہ $\boldsymbol{E}_1^- \times \boldsymbol{H}_1^-$ کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+ \tag{10.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یا

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} \tag{10.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 کو E_{x10}^- کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.73 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس[52] پکارا اور Γ سے ظاہر[53] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.75}$$

---

[51] reflected wave
[52] reflection coefficient
[53] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.76}$$

اسی طرح مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 سے E_{x10}^{-} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E_{x20}^{+}}{E_{x10}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل[54] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مساوات 10.75 اور مساوات 10.77 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہٰذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔یوں مساوات 10.77 سے

$$E_{x20}^{+} = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.75 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^{-} = -E_{x10}^{+}$$

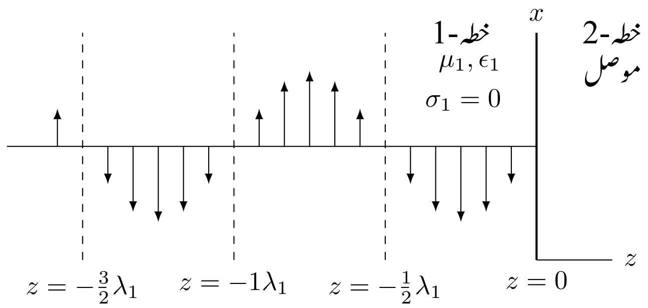
حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں $180°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+} \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} \right) \\ &= -j2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

[54] transmission coefficient



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$E_{x1} = 2E^{+}_{x10} \sin \beta_1 z \sin \omega t \tag{10.79}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔اس کا موازنہ آمدی موج

$$E^{+}_{x1} = E^{+}_{x10} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.79 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.79 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔مساوات 10.79 کو ساکن موج[55] کہا جاتا ہے۔برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E^{+}_{xs1} = \eta_1 H^{+}_{ys1}$ اور $E^{-}_{xs1} = -\eta_1 H^{-}_{ys1}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E^{+}_{x10}}{\eta_1} \left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z} \right)$$

[55] standing wave

یا

$$H_{y1}=2\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t \tag{10.80}$$

ہو گا۔یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں $90°$ کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1=0$ اور $\alpha_2=0$ ہوں گے۔عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔فرض کریں کہ

$$\begin{aligned}\eta_1&=50\,\Omega\\ \eta_2&=377\,\Omega\\ E_{x10}^{+}&=10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

ہیں۔یوں

$$\Gamma=\frac{377-50}{377+50}=0.7658$$

ہے لہٰذا

$$E_{x10}^{-}=0.7658\times 10=7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned}H_{y10}^{+}&=\frac{10}{50}=0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\\ H_{y10}^{-}&=-\frac{7.658}{50}=-0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

ہیں۔آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.51 سے

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+}=\frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{|\eta_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1}=1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

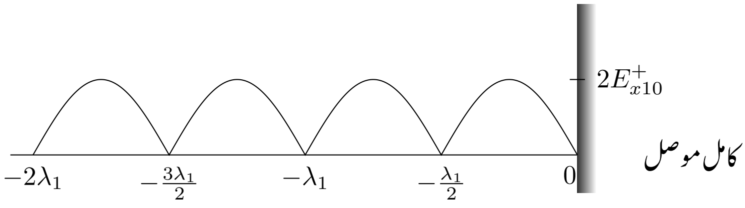
جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1,\text{اوسط}}^{-}=\frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{|\eta_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1}=0.5864\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1=0$ اور $\eta_1=50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}}=|\Gamma|^2 \tag{10.81}$$

کے برابر ہے۔



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E_{x10}^+ = 17.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$
$$H_{y20}^+ = \frac{17.658}{377} = 0.046\,84\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ہیں لہٰذا

$$P_{2,\text{اوسط}}^+ = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x20}^+\right)^2}{|\eta_2|}e^{-2\alpha_2 z}\cos\theta_{\eta 2} = 0.4135\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1,\text{اوسط}}^+ = P_{1,\text{اوسط}}^- + P_{2,\text{اوسط}}^+$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار [56] سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر [57] رکھا جاتا ہے تا کہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin\beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

---

[56] rectifier
[57] tuned

مثال 10.2: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E_{xs1}^- = -E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو شرح ساکن موج[58] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^+ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^- &= \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہٰذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| \, e^{j\phi}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^- = |\Gamma| \, E_{x10}^+ e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

[58] standing wave ratio

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)}\right) E_{x10}^{+} \tag{10.82}$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لہٰذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+1$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.82 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)}\right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^{+}$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} - \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} + \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} - 2\pi\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.83}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}} = (1 + |\Gamma|) \, E_{x10}^{+} \tag{10.84}$$

ہو گا۔اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.85}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{کمتر}} = (1 - |\Gamma|) \, E_{x10}^{+} \tag{10.86}$$

ہو گا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $0 = -\beta_1 z$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔اگر $\eta_1 < \eta_2$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z = 0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔اس کے برعکس اگر $\eta_1 > \eta_2$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیرِ استعمال لانے کی غرض سے $10 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $1 \, \mathrm{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 3$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 6$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9 \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \quad \beta_1 = 36.28 \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}, \quad \beta_2 = 51.3 \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول $30 \, \mathrm{cm}$ ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32 \, \mathrm{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25 \, \mathrm{cm}$ ہیں۔قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66 \, \Omega$ اور $\eta_2 = 153.91 \, \Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_1 > \eta_2$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر $8.66 \, \mathrm{cm}$ فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔مساوات 10.86 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $|Exs1|_{\text{کمتر}} = 8.3 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، . . . سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج[59] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{10.87}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

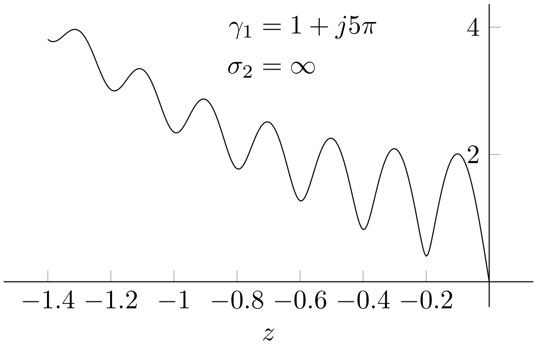
$$s \geq 1 \tag{10.88}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گا۔پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $\eta_1 = \eta_2$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^+ = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تقلیلی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\mp\eta_1$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

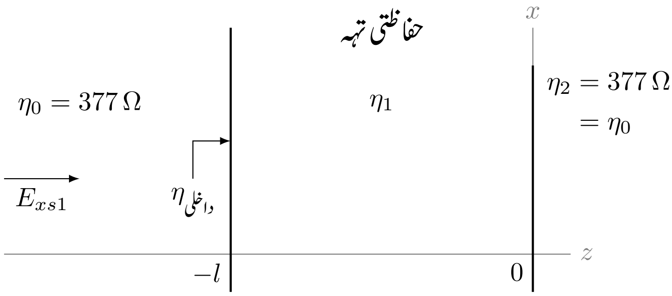
$$E_{xs1} = \left(e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) E_{x10}^+$$

$$H_{ys1} = \left(e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}$$

ہیں۔ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے اور $\eta_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta_{\text{داخلی}} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

[59] standing wave ration



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل[60] استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan\beta_1 l} \tag{10.89}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی[61] کہلاتا ہے۔ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں

$$\eta_{\text{داخلی}} = j\eta_1 \tan\beta_1 l \quad (\eta_2 = 0) \tag{10.90}$$

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.89 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہوتی ہے۔ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تا کہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ایسا تب ہو گا جب $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2$ ہو یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan\beta_1 l}$$

---

[60] $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$
[61] matched

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $377 < \eta_1$ ہے لٰہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار $10\,\text{GHz}$ کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1\,\text{cm}$$

رکھنی ہو گی۔

اگر $10\,\text{GHz}$ پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی $0.5\,\text{cm}$ کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \eta_{\text{داخلی}} &= 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ &\approx 167.6\,\Omega \end{aligned}$$

ہو گی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^-\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^+\right)^2}{2\eta_0}} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

ہو گی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ سرحد کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6\,\text{cm}$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: 5 ، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمٹر)[1] اور اینٹینا[2] یا پھر ڈیم میں نسب جنریٹر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباو اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیمی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

11.1 ترسیلی تار کے مساوات

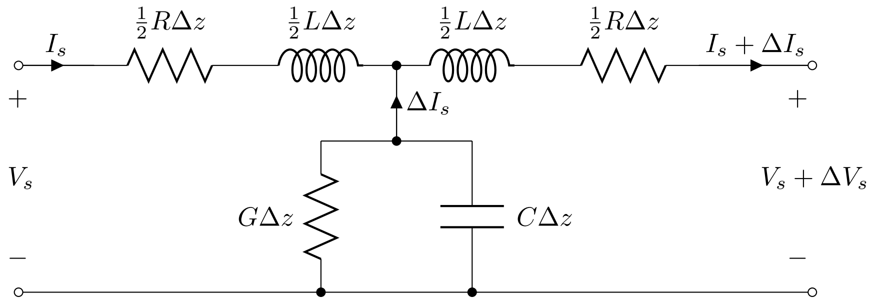
ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ، μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R، L، C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$، امالہ $L\Delta z$، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہٰذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباو

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

[1] transmitter
[2] antenna



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R، L، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباو کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s - \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\Delta I_s$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہو گا۔یوں $\Delta z \to 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اسے

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s \tag{11.1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباو

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L \Delta z}{2}\right) I_s\right]\left(G\Delta z + j\omega C\Delta z\right)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s + \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) I_s \Delta z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta z \to 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یوں

$$\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s \tag{11.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

میں $\boldsymbol{E}_s = E_{xs}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{H}_{ys} = H_{ys}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}E_{xs}}{\mathrm{d}z} = -j\omega\mu H_{ys} \tag{11.3}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s$$

سے

$$\frac{\mathrm{d}H_{ys}}{\mathrm{d}z} = -\left(\sigma + j\omega\epsilon\right) E_{xs} \tag{11.4}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہٰذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$V_s = V_0 e^{-\gamma z} \tag{11.5}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباو کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا حیطہ V_0 ہے۔ حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{11.6}$$

ہو جائے گا۔طول موج اب بھی

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

ہو گا۔موج کی رفتار اب بھی

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.8}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہٰذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.9}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{11.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^{-}}{E_{x0}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہو گی۔ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{11.12}$$

ہو گی۔انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{11.13}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta = \eta_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \tag{11.14}$$

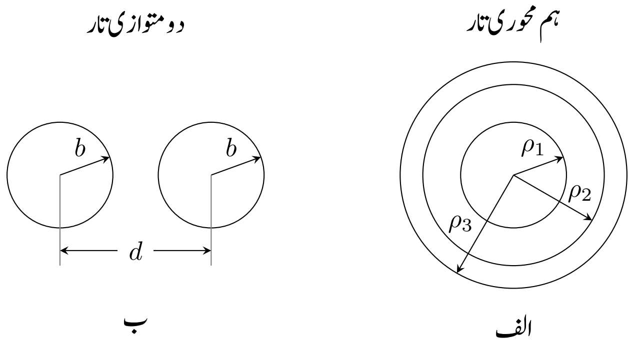
لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو $\omega = 5 \times 10^8 \,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر کام کرتی ہے کے مستقل $R = 0.15 \,\frac{\Omega}{\text{m}}$، $L = 0.25 \,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$، $G = 8 \,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80 \,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔اس کے α، β، λ، v اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $2.236 \,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $2.81 \,\text{m}$، $2.23 \times 10^8 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9\underline{/-0.029^\circ} \,\Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ صفحہ 143 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1\,\mathrm{m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 247 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.16}$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}}C = \mu\epsilon \tag{11.17}$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{11.18}$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رو یکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظرانداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہو گی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔ یوں

اندرونی تار کے بیرونی باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہے اور چونکہ $\boldsymbol{J}_s = \sigma_c \boldsymbol{E}_s$ ہوتا ہے لہٰذا تار کی سطح پر $\boldsymbol{E}_s$ کا مماثل جزو بھی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہو گا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \tag{11.19}$$

ہو گی۔ اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہو گی۔ اگرچہ ہم نلکی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\rho_1 \ll \delta$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں صفحہ 292 پر مساوات 10.61 سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{H_{ys}}\right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباو ہے لہٰذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \tag{11.20}$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہو گی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہو گی۔ صفحہ 291 پر مساوات 10.58 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \qquad (\delta \ll \rho_1) \tag{11.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \qquad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right] \qquad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.23}$$

ہو گا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \qquad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ بے پناہ[3] تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

---

[3] unshielded

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے[4] استعمال ہوتے ہیں۔ یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.25}$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی یک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔ اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباو صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔ تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 120 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔ اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔ یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ ایک تار سے دوسرے تار تک $\boldsymbol{E}$ کی لکیری تکمل سے برقی دباو V حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 125 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاو کے برابر ہوتی ہے، یعنی $\rho_S = D_{\text{عمودی}}$۔ یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \epsilon\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا ہے۔ یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S}{V} \tag{11.27}$$

ہو گا۔ اب موصل کے سطح پر $E_{\text{عمودی}}$ جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو $J = \sigma E_{\text{عمودی}}$ لکھی جا سکتی ہے لہٰذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S$$

---

[4] Bessel functions

ہو گی۔یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}} \, \mathrm{d}S}{V} \tag{11.28}$$

ہو گی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} C \tag{11.29}$$

لکھا جا سکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1\,\mathrm{mm}$، $\rho_2 = 3.49\,\mathrm{mm}$ اور $\sigma_c = 3.82 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں کے ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mathrm{\mu S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ ترسیلی تار کے α، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1\,\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}}$، $0.25\,\frac{\mathrm{\mu H}}{\mathrm{m}}$، $1.29\,\frac{\mathrm{nH}}{\mathrm{m}}$، $0.014\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$، $15.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ اور $50\underline{/0.055^\circ}\,\Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔ تار کا رداس b، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔ تاروں کے گرد ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 149 پر مساوات 5.75 کی نصف ہو گی۔ اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔ یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}} \tag{11.30}$$

ہو گی۔ اگر $b \ll d$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

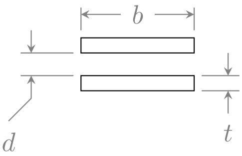
$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جا سکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \right) \quad (\delta \ll b) \tag{11.31}$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

ہے۔تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزارتی ہے۔اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہٰذا فی میٹر مزاحمت

$$R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c} \tag{11.32}$$

ہو گی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}} \tag{11.33}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \tag{11.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار[5] دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔

اگر $d \ll b$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{\epsilon \text{رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d} \tag{11.35}$$

ہو گی۔یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu \epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b} \tag{11.36}$$

ہو گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔یوں کل امالہ

$$L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b}(d + \delta) \quad (\delta \ll t) \tag{11.37}$$

[5] stripline

ہو گی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہو گی۔یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b\delta}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R=\frac{2}{\sigma_c b\delta} \quad (\delta \ll t) \tag{11.38}$$

ہو گی۔

مساوات 11.29 سے

$$G=\frac{\sigma b}{d} \tag{11.39}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}}=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{d}{b} \tag{11.40}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

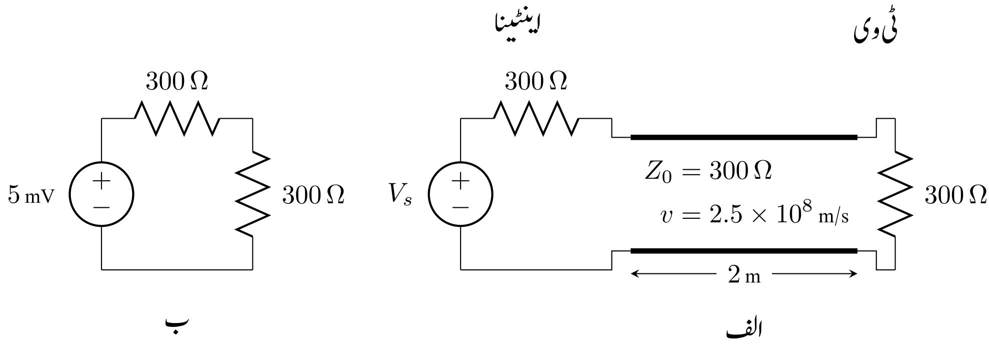
مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ان میں طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ہم محوری تار کا $\rho_1=0.5\,\text{mm}$، $\rho_2=2.8\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b=0.5\,\text{mm}$، $d=9\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=5$ ہیں۔ مستوی سطح کے $d=0.2\,\text{mm}$، $b=5\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=2.2$ ہیں۔

جوابات: 42.6 cm، 0.26، 33.5 cm، −0.215، 50.6 cm، 0.816

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ ہے۔ ایسی تار ٹی وی[6] کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[7] مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباو V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی $300\,\Omega$ کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ٹی وی اسٹیشن سے



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہٰذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہٰذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5\,\text{m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہیں۔ ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \,\text{rad}$$

یا $288°$ ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی $300\,\Omega$ ہے لہٰذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5\,\text{mV}$$

TV, television[6]
Thevenin[7]

پیدا کرے گا۔اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لٰہذا منبع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا 2.5 mV کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچے گا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈیئن پیچھے ہو گا۔یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{بار}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{بار}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لٰہذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{بار}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41 \, \text{nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباو اور برقی رو کے موثر[8] قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی $300\,\Omega$ ہے۔یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل $150\,\Omega$ کا بار پایا جاتا ہے۔اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 = 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$\Gamma = \frac{1}{3}\underline{/\pi} \tag{11.41}$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب $300\,\Omega$ کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7\underline{/-23.79^\circ} = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

---

[8] RMS, effective

ہو گی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔ کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s,\text{داخلی}} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013\underline{/15.017^\circ} \quad \mu\text{A}$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{\text{داخلی}} = \frac{1}{2}\left(6.3013 \times 10^{-6}\right)^2 \times 466.39 = 9.2593\,\text{nW}$$

طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہٰذا $150\,\Omega$ کے بار کو $9.2593\,\text{nW}$ حاصل ہو گا جو گزشتہ جواب یعنی $10.41\,\text{nW}$ سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہو گا لہٰذا ہر ٹی وی کو صرف $4.6297\,\text{nW}$ طاقت مہیا ہو گا۔ چونکہ ایک ٹی وی $300\,\Omega$ مزاحمت رکھتا ہے لہٰذا ٹی وی پر پیدا برقی دباو

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{\left|V_{s,\text{بار}}\right|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$\left|V_{s,\text{بار}}\right| = 1.666\,67\,\text{mV}$$

ہو گا۔ یہ قیمت $2.5\,\text{mV}$ سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباو کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباو کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباو موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.83

$$-\beta_1 z_{\text{بلندتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

دیتا ہے۔ اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلندتر}} &= \frac{1}{-0.8\pi}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ &= -1.25\left(\frac{1}{2} + n\right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلندتر}} = -0.625\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.875\,\text{m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو $z_{\text{بلندتر}} = -3.125\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہٰذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے $z_{\text{بلندتر}} = 0.625\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محدد پر پائی جاتی ہے لہٰذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہٰذا ان کے مقامات

$$z_{\text{کمتر}} = 0\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.25\,\text{m}$$

ہوں گے۔آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباو کا نشیب پایا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر $1.66\,\mathrm{mV}$ ہے لہٰذا دباو کی کمتر قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباو کی چوٹی اس کے دگنا یعنی $3.32\,\mathrm{mV}$ حاصل ہوتی ہے۔ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو

$$V_{s,\text{داخلی}} = I_{s,\text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left(6.3013 \times 10^{-6} \underline{/15.017^\circ}\right) \left(509.7 \underline{/-23.79^\circ}\right) = 0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہٰذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباو یوں

$$V_{s,\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباو اور بار پر برقی دباو کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔اگرچہ ہم دونوں برقی دباو کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔مساوات 10.82 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) V_0^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباو معلوم ہے لہٰذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s,\text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3} e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 \underline{/-72^\circ}$$

اور یوں بار یعنی $z = 0$ پر برقی دباو اب حاصل کی جا سکتی ہے

$$V_{s,\text{بار}} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 \underline{/-72^\circ} = 0.001666 \underline{/-288^\circ}$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباو کی حتمی قیمت برابر ہیں۔تار کے داخلی سرے پر دباو کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباو کا زاویہ 72° ہے۔یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی -279.23° ہے۔انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کپیسٹر $Z_L = -j300\,\Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔کپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 \underline{/-90^\circ}$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیطہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1+|-j|}{1-|-j|} = \infty$$

ہو گا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300\frac{-j300 + j300\tan 288^\circ}{300 + j(-j300)\tan 288^\circ} = j589$$

ہو گی جو خیالی عدد ہے لہٰذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جا سکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیمی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ان میں سمتھ نقشہ[9] زیادہ اہم ہے۔اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔اس نقشے میں بار بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں z کارتیسی محدد کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

اور

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.42}$$

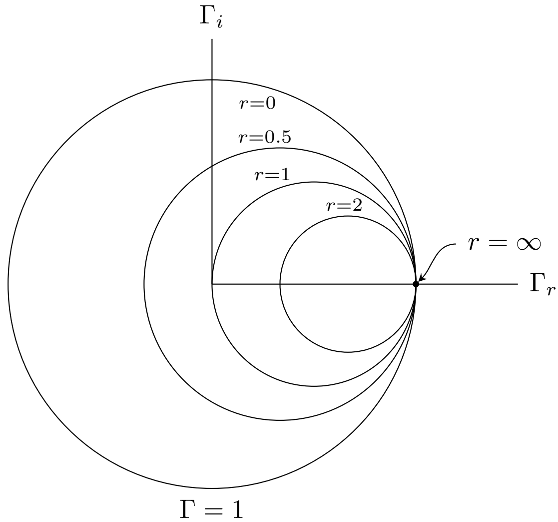
لکھے جا سکتے ہیں۔شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1+\Gamma_r + j\Gamma_i}{1-\Gamma_r - j\Gamma_i}$$

[9] Smith chart



شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$r=\frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.43}$$

$$x=\frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.44}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

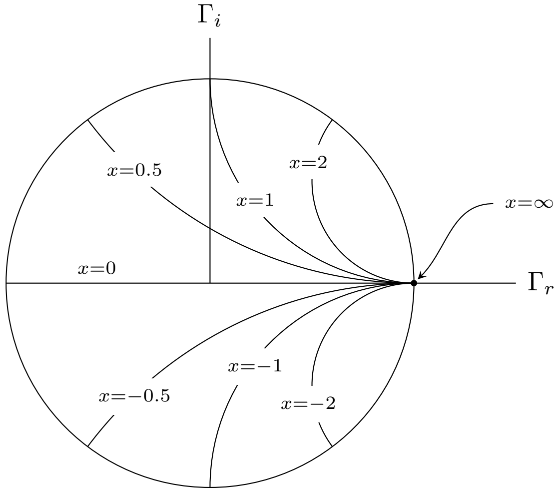
$$\left(\Gamma_r-\frac{r}{1+r}\right)^2+\Gamma_i^2=\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{11.45}$$

$$(\Gamma_r-1)^2+\left(\Gamma_i-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{11.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔اگر $r=0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے $(0,0)$ پر ہے۔خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔اسی طرح $r=\infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر $(1,0)$ ہے۔یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma=1$ تک محدود ہے۔اب $r=\infty$ سے مراد $Z_L-\infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma=1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ایک آخری مثال $r=1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5,0)$ ہے۔شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ $r=0.5$ اور $r=2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مراکز $(1,\frac{1}{x})$ ہیں۔لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z=\infty$ اور $\Gamma=1+j0$ ہوں گے۔مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1,0)$ ہے لہٰذا یہ $\Gamma=1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔اگر $x=1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1,1)$ ہوں گے۔جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma|=1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $x=-1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔شکل میں $x=0.5$، $x=-0.5$، $x=2$ اور $x=-2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔شکل میں $x=0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدد پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔اگر نقشے پر درکار r اور (یا) x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔نقشے کے مرکز $(0,0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدد یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔یوں محدد کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدد کے مرکز $(0,0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جا سکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔اب مثال کے طور پر $Z_0 = 50\,\Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کا بار $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔شرح انعکاس تقریباً $0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

کو برقی رو

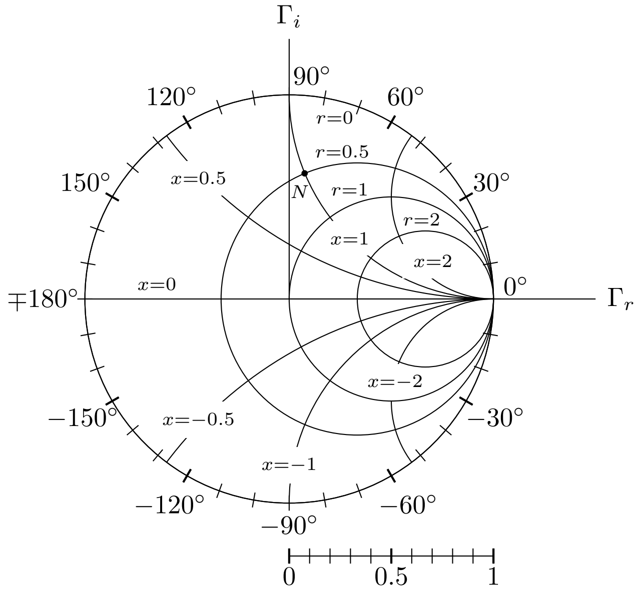
$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} \left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جا سکتی ہے جس میں $z = -l$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}} \tag{11.47}$$



شکل 11.7: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $l=0$ پر کرنے سے

$$z_{\text{داخلی}}\Big|_{l=0} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} = z \tag{11.48}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین بار پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma|\, e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma|\, e^{j(\phi-2\beta l)}$$

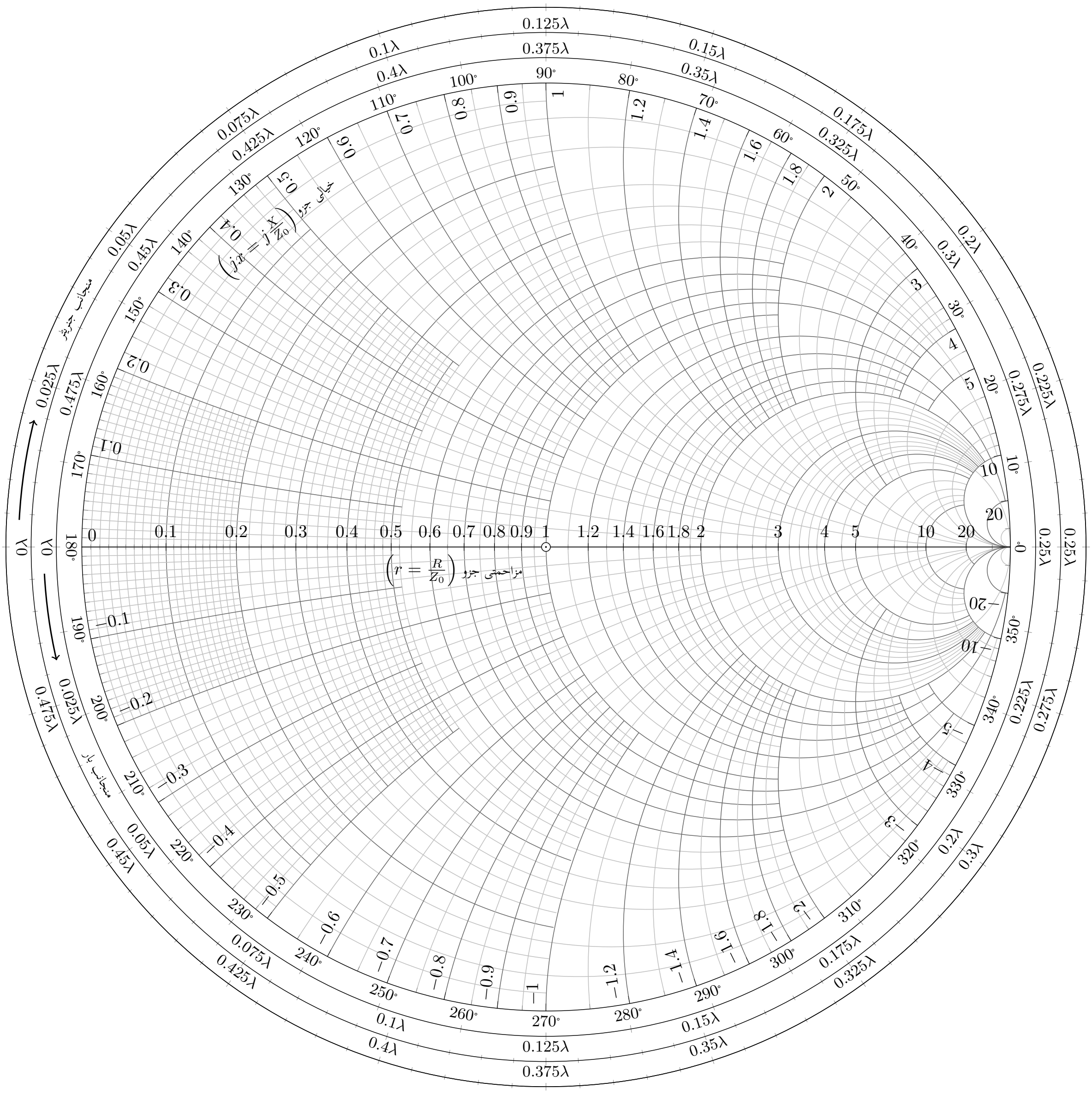
حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیا زاویہ $(\phi-2\beta l)$ ہے۔یوں سمتھ نقشے میں نقطہ z یعنی

$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.49}$$

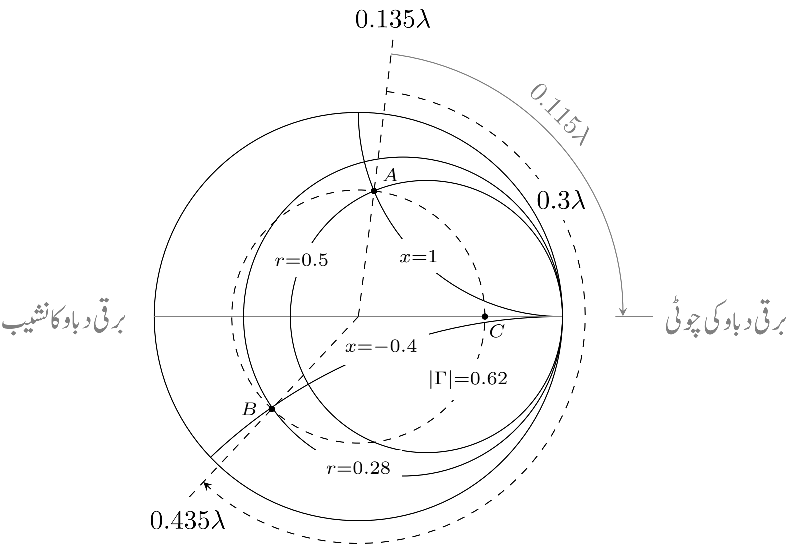
کی نشاندہی کرتے ہوئے $|\Gamma|\underline{/\phi}$ ناپیں۔اب $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi-2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے $z_{\text{داخلی}}$ ناپیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بار سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں بار z سے دور $z_{\text{داخلی}}$ کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جنریٹر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi-2\beta l$ ہوتا ہے لہٰذا نقشے پر ہم گھڑی کے سمت چلتے ہیں۔یوں $\beta l=\pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین بار کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔جیسے شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جنریٹر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی



شکل 11.8: مکمل سمتھ نقشہ۔



شکل 11.9: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ان فیتوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباو کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔یوں $50\,\Omega$ کے ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کے بار پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ شکل 11.9 میں $z = 0.5 + j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔ مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔ اگر تار کی لمبائی 60 cm ہو اور اشارے کی تعداد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج 2 m ہو، تب $\frac{l}{\lambda} = 0.3$ ہو گا لہٰذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$ سے مرکز تک لکیر اور $|\Gamma|$ رداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z_{\text{داخلی}} = 0.28 - j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $Z_{\text{داخلی}} = 14 - j20$ ہو گا۔ تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{\text{داخلی}} = 13.7 - j20.2$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔کسی بھی $\Gamma = |\Gamma|\underline{/\phi}$ کے لئے $z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$\begin{aligned} V_s &= V_0^+\left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) \\ &= V_0^+ e^{j\beta l}\left[1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right] \end{aligned}$$

کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} |V_s| &= V_0^+\left|e^{j\beta l}\right|\left[\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|\right] \\ &= V_0^+\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right| \end{aligned}$$

ہے جہاں $\left|e^{j\beta l}\right| = 1$ کے برابر[10] ہے۔اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+\left(1 - |\Gamma|\right)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n+1)\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت

[10] $\left|e^{j\beta l}\right| = \left|\cos\beta l + j\sin\beta l\right| = \sqrt{\cos^2\beta l + \sin^2\beta l} = 1$

$V_0^+ (1+|\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے۔ عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں بار پر V_s کی کم سے کم قیمت ہو گی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں بار پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔آئیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی بار R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0^\circ}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $R_L < Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ کی صورت میں بار پر کمتر V_s ہو گا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ کی صورت میں بار پر بلند تر V_s ہو گا۔سمتھ نقشے پر افقی محدد حقیقی Γ دیتا ہے۔منفی افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر کمتر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں منفی افقی محدد پر پایا جائے گا۔اسی طرح مثبت افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر بلند تر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں مثبت افقی محدد پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔کسی بھی مخلوط بار $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمتھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمتھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = (2n+1)\pi$ ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔اب $2n\pi$ سے مراد سمتھ نقشے کے افقی محدد کا مثبت حصہ جبکہ $(2n+1)\pi$ سے مراد افقی محدد کا منفی حصہ ہے۔یوں شکل 11.9 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔یوں بار سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی $0.115 \times 200 = 23\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر ہے۔اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب بار سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہٰذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} \left(e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l} \right)$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔اسی طرح جس نقطے پر برقی دباو کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں سمتھ نقشے کے افقی محدد کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی بار R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا۔اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہو گا۔یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہو گا۔یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\frac{R_L}{R_0}$ اور $\frac{R_0}{R_L}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہو گا۔یوں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے اور مثبت افقی محدد سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔شکل 11.9 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہٰذا $s = 4.2$ ہے۔مثبت افقی محدد پر $r > 1$ ہوتا ہے لہٰذا محدد کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔ اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90°$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں $Z_{\text{داخلی}}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90°$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90°}{Z_0 + jZ_L \tan 90°} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = \frac{1}{z} \tag{11.50}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}}$$
$$\frac{Z_L}{Z_0} = z$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 11.50 کے تحت بار سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہٰذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$y = \frac{1}{z} = z_{\underset{0.25\lambda}{\text{منجانب جنریٹر}}} \tag{11.51}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

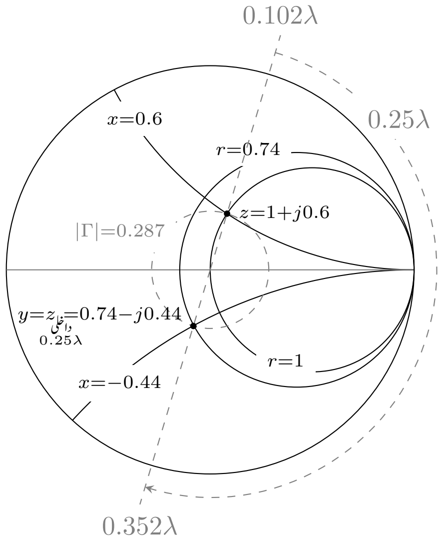
شکل 11.10 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جنریٹر 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287\underline{/73.7°}$ دیتا ہے۔ چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جنریٹر 0.25λ چلتے ہوئے 0.352λ سے مرکز تک لکیر اور 0.287 رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z_{\text{داخلی}} = 0.74 - j0.44$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{z}$ یعنی y کے عین برابر ہے۔

آئیں کسر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ کسر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} \\ &= jZ_0 \tan \beta l \end{aligned} \tag{11.52}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کسر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = jZ_0 \tan 90° = \infty \qquad (\text{کسرے دور}) \tag{11.53}$$



شکل 11.10: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برقی فراوانی کے برابر ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کسر دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$
\begin{aligned}
Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j\infty \tan \beta l} \\
&= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l}
\end{aligned}
\tag{11.54}
$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$
Z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \qquad (\text{کھلے دور}) \tag{11.55}
$$

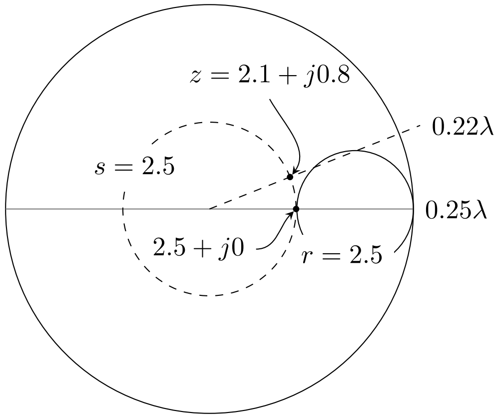
حاصل ہوتی ہے۔یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور کسر دور کردار ادا کرتی ہے۔

سمتھ مزاحمتی نقشے[11] کا متبادل سمتھ فراوانی[12] نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں $y = \frac{Y_L}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباو کی کمتر قیمت حاصل ہو گی۔ ایصالی سمتھ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہو گا۔

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے بار کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں بار کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔

[11] Smith impedance chart
[12] Smith admittance chart



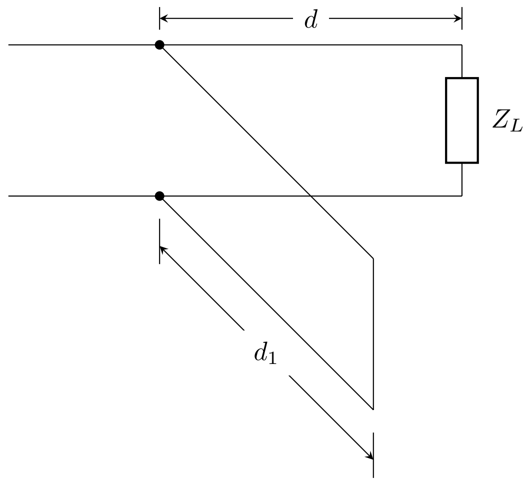
شکل 11.11: اگر 0.03λ لمبی تار پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5 + j0$ ہو تب $z = 2.1 + j0.8$ ہو گا۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جا سکتا ہے لہٰذا اسے بار کا مقام تصور نہیں کریں۔کمتر برقی دباو فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہٰذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔اشارے کی تعدد 400 MHz ہے لہٰذا طول موج 75 cm ہے۔بار کا مقام تعین کرنے کی خاطر بار کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو کسر دور کیا جاتا ہے۔کسر دور تار پر کمتر دباو فیتے پر 26 cm کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

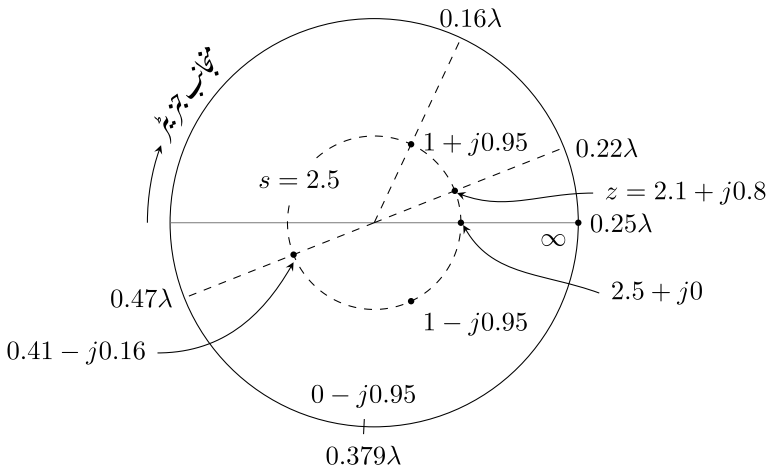
ہم جانتے ہیں کہ کسر دور نقطے سے کمتر دباو کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباو کسر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ایسی صورت میں کسر دور کا مقام فیتے پر $26 - 37.5 = -11.5\,\text{cm}$ نشان کے ساتھ ہو گا۔چونکہ بار کے مقام پر ہی کسر دور پیدا کیا گیا تھا لہٰذا بار بھی فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ کے نشان کے ساتھ ہو گا۔یوں حاصل نتائج کے تحت بار سے کم تر دباو کا نقطہ $47 - (-11.5) = 58.5\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے بار سے کمتر دباو کا فاصلہ 21 cm حاصل ہوتا ہے۔بلند تر دباو کا بار سے فاصلہ یوں $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25\,\text{cm}$ ہو گا جو $\frac{2.25}{75} = 0.03$ طول موج کے برابر ہے۔

ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.11 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔بلند تر برقی دباو کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہٰذا ایسے نقطے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ ہو گا۔ہم یوں سمتھ نقشے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جنریٹر فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔اس سے 0.03λ منفی کرتے ہوئے بار تک پہنچتے ہیں، لہٰذا 0.22λ سے مرکز تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.429$ رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔یوں $Z_L = 105 + j40\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے بار کو فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔چونکہ بار کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہٰذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے بار کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس بار کو $50\,\Omega$ ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ایسا d_1 لمبائی کے کسر دور تار کے ٹکڑے کو بار سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ایسا شکل 11.12 میں دکھایا گیا ہے۔بار سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی کسرے دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔کسر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ کے برابر ہے۔



شکل 11.12: بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے کسرے دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے بار اور اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔



شکل 11.13: بار $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا کسر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

برقی بار اور کسر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔ متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہٰذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔ برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ ہم d اتنا رکھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $y_{\text{داخلی}} = 1 + jb$ ہو۔ اب اگر $y_{\text{داخلی}}$ کے متوازی $-jb$ برقی تاثریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔ یوں d_1 لمبی کسر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثریت $-jb$ درکار ہے۔ ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل 11.13 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جنریٹر 0.22λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہاں سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔ اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جنریٹر گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہٰذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ بار سے اس نقطے تک $(0.5\lambda - 0.47\lambda) + 0.16\lambda = 0.19\lambda$ تار درکار ہو گی لہٰذا $d = 0.19\lambda$ یعنی $14.25\,\text{cm}$ بنتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $y_{\text{ٹکڑا}} = -j0.95$ برقی تاثریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہو گا۔ مساوات 11.54 کے تحت کسرے دور ٹکڑے کی داخلی

رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہٰذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔ عین کسر دور پر $y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جنریٹر 0.25λ پر پایا جاتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $y_{\text{داخلی}} = -j0.95$ نقشے پر منجانب جنریٹر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔یوں کسے دور ٹکڑے کی لمبائی $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$ یعنی $9.67\,\text{cm}$ حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع $50\,\Omega$ ترسیلی تار کو کسرے دور کرنے سے برقی دباو کے دو آپس میں قریبی نشیب $12\,\text{cm}$ اور $27\,\text{cm}$ پر پائے جاتے ہیں۔ کسرے دور ختم کرتے ہوئے یہاں بار نسب کرنے سے $0.4\,\text{V}$ حیطے کے نشیب اور $0.72\,\text{V}$ حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب $9\,\text{cm}$ پر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، f، s، Γ اور Z_L

جوابات: $0.3\,\text{m}$، $1\,\text{GHz}$، 1.8، $0.286\underline{/108^\circ}$ اور $36.5 + j21.6\,\Omega$

مشق 11.5: بے ضیاع $50\,\Omega$ کے ساتھ $Z_L = 100 + j100\,\Omega$ کا بار نسب ہے۔بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا کسرے دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رماوٹ بنایا جاتا ہے۔اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد $10\,\text{MHz}$ ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d

جوابات: $20\,\text{m}$، $1.8\,\text{m}$ اور $4.4\,\text{m}$

باب 12

سوالات

جدول 12.1: σ

$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز
7×10^4	گریفائٹ	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنین
2×10^{-13}	ہیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 12.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 12.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 12.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$