

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
192	گردش	7.3
199	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
204	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
206	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
207	مسئلہ سٹوکس	7.4
210	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
217	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
222	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
224	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
229	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
229	متحرک چارج پر قوت	8.1
230	تفرقی چارج پر قوت	8.2
233	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
234	قوت اور مروڑ	8.4
239	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
240	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
243	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
244	مقناطیسی دور	8.8
247	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
248	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
252	مشترکہ امالہ	8.11

255	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
255	9.1	فیراڈے کا قانون
261	9.2	انتقالی برقی رو
265	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
266	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
268	9.5	تاخیری دباؤ
273	10	مستوی امواج
273	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
274	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
281	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
283	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
285	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
288	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
292	10.4	موصل میں امواج
298	10.5	انعکاس مستوی موج
304	10.6	شرح ساکن موج
311	11	ترسیلی تار
311	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
315	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
316	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
319	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
320	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
321	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
326	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
333	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
334	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

339	12	تقطیب موج
339	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
342	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئٹنگ سمتیہ
345	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
345	13.1	ترچھی آمد
356	13.2	ترسیم ہائی گن
359	14	مویج اور گھمکیا
359	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
360	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
366	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
375	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
382	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
386	14.5	کھوکھلی نالی مویج
393	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
395	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
397	14.8	سطحی موج
402	14.9	ذو برق تختی مویج
405	14.10	شیش ریشہ
408	14.11	پردہ بصارت
410	14.12	گھمکی خلاء
413	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 421 15.1 تعارف
- 421 15.2 تاخیری دباؤ
- 423 15.3 تکمل
- 424 15.4 مختصر جفت قطبی ایٹینا
- 432 15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
- 436 15.6 ٹھوس زاویہ
- 437 15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افراش
- 444 15.8 قطاری ترتیب
- 444 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
- 445 15.8.2 ضرب نقش
- 446 15.8.3 ثنائی قطار
- 448 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
- 450 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
- 450 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
- 454 15.9 تداخل پیمہ
- 456 15.10 مسلسل خطی ایٹینا
- 457 15.11 مستطیل سطحی ایٹینا
- 460 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں
- 460 15.13 خطی ایٹینا
- 465 15.14 چلتے موج ایٹینا
- 466 15.15 چھوٹا گھیرا ایٹینا
- 467 15.16 پیچ دار ایٹینا
- 469 15.17 چوڑائی شعاع اور سمتیت

- 471 16.1 ایٹینا اور شعاعی اخراج

باب 15

اینڈینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔ یوں شکل 15.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہوگا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔ یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$(15.1) \quad I = I_0 \cos \omega t$$

کی بجائے

$$(15.2) \quad [I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو¹ کہلاتی ہے۔ تاخیری تفاعل کو چکور تو سین میں بند لکھا جاتا ہے۔ تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

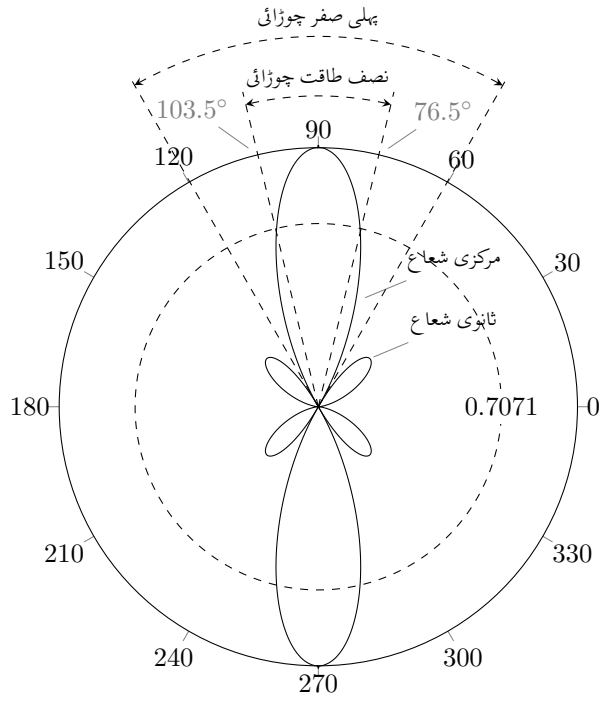
مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔ تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $\frac{\omega}{\beta} = c$ کے استعمال سے

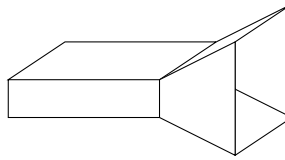
$$(15.3) \quad \cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

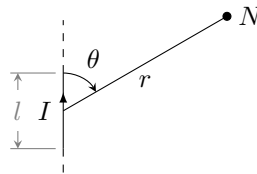
retarded current¹



شکل 15.1: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 15.2: ہورن اینٹینا



شکل 15.3: برقی رو گزرتی تار کی چھوٹی لمبائی

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$(15.4) \quad [I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ہے۔ اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$(15.5) \quad [J] = J_0 e^{j\omega(t-r/c)} = J_0 e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ہوگی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباؤ

$$(15.6) \quad [A] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[J]}{r} dh = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح تاخیری جمعی کثافت چارج

$$(15.7) \quad [\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباؤ

$$(15.8) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} dh$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکورو تسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروئی محدود کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک مکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

15.3 تکمیل

شکل 15.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 مکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے بائیں رقبے کے برابر ہے۔ اس رقبے کو K کہتے ہوئے

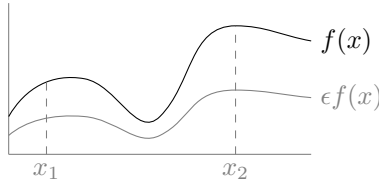
$$(15.9) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = K$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔ چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہوگا لہذا

$$(15.10) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x) dx = \frac{K}{2} = \epsilon K$$

لکھا جائے گا۔ اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔ مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہذا $\epsilon(x)f(x)$ کا مکمل ϵK سے کم ہوگا یعنی

$$(15.11) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x)f(x) dx \leq \epsilon K$$



شکل 15.4: تفاعل کا تکمل

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔ اگر $\epsilon \rightarrow 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$(15.12) \quad \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x) dx \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$(15.13) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} dx$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \rightarrow 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$(15.14) \quad \frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots$$

لکھ سکتے ہیں لہذا تکمل

$$(15.15) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots\right) f(x) dx$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \rightarrow 0$ کی صورت میں اسے

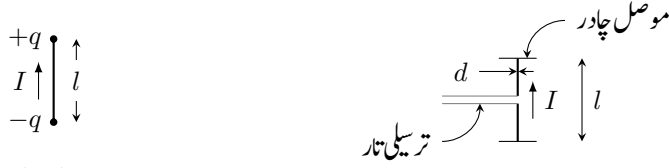
$$(15.16) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \dots\right) f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

لکھا جاسکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب² کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔ لامحدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب³ کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے لہذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

شکل 15.5: جفت قطب

آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $\lambda \ll d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجربے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.5-ب کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہوگا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (15.17)$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کرومی محدود کے مرکز اور لمبائی کو z محدود پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r ، E_θ اور E_ϕ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (15.18)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (15.19)$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباؤ

\mathbf{A} نقطہ N پر سمتی دباؤ

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطہ پر مقداری دباؤ V اور سمتی دباؤ \mathbf{A} معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطہ پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباؤ قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\mathbf{A}] \quad (15.20)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\mathbf{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\mathbf{A}] \quad (15.21)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباؤ

$$(15.22) \quad [A] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{J_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

$$(15.23) \quad [V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.20 اور مساوات 15.21 سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات 15.23 کے تحت تاخیری مقداری دباؤ $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.22 کے تحت تاخیری سمتی دباؤ $[A]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.20 کے تحت مقناطیسی میدان H صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.21 کے تحت برقی میدان E ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباؤ ہی استعمال کئے جائیں گے لہذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباؤ کو تاخیری دباؤ ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباؤ کا صرف a_z جزو

$$(15.24) \quad A = \frac{a_z \mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l ، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \ll l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \ll l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جاسکتا ہے⁴ اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباؤ میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$(15.25) \quad A = \frac{a_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محد میں یوں

$$A = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$(15.26) \quad \begin{aligned} A_r &= a_r \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_r \cdot a_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= a_\theta \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_\theta \cdot a_z = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \\ A_\phi &= a_\phi \cdot A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} a_\phi \cdot a_z = 0 \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$(15.27) \quad A = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos \theta a_r - \sin \theta a_\theta)$$

⁴ جیسے حصہ 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہذا مقداری دباؤ

$$(15.28) \quad V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

ہو گا جہاں مساوات 15.17 کے تحت

$$(15.29) \quad q = \int I dt = \frac{I}{j\omega}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 15.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$(15.30) \quad V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right]$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$s_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

لکھے جاسکتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پر کرتے

$$(15.31) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{(r + \frac{l}{2} \cos \theta) e^{j\frac{\beta l}{2} \cos \theta} - (r - \frac{l}{2} \cos \theta) e^{-j\frac{\beta l}{2} \cos \theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right]$$

ماتا ہے۔ چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موئے ور^s کے استعمال سے

$$(15.32) \quad V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\left(r + \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} + j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) - \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \left(\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} - j \sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \right) \right]$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہذا

$$\cos \frac{\beta l \cos \theta}{2} = \cos \frac{\pi l \cos \theta}{\lambda} \approx 1$$

$$\sin \frac{\beta l \cos \theta}{2} \approx \frac{\beta l \cos \theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.32 میں پر کرنے سے

$$(15.33) \quad V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

I_0 برقی رو کا جیٹ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s- جہاں ہر ٹHz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، 3×10^8 m/s

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \ll l$ اور $r \ll l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.27 سمتی دباؤ اور مساوات 15.33 مقداری دباؤ دیتے ہیں۔ کروی محدود میں مقداری دباؤ کی ڈھلوان

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ (15.34) \quad &= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[- \left(\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2c \cos \theta}{j\omega r^3} \right) \mathbf{a}_r - \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{c \sin \theta}{j\omega r^2} \right) \mathbf{a}_\theta \right] \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $E = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.21 کی مدد سے

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi \end{aligned}$$

لکھے جاسکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \\ (15.35) \quad E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \quad \text{عمومی میدان} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.20 سے حاصل ہوگی۔ کروی محدود میں سمتی دباؤ کی گردش

$$(15.36) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

میں مساوات 15.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$(15.37) \quad \begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) && \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $B = \mu_0 H$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r ، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہوگا لہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$(15.38) \quad \begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \frac{j\omega}{c^2 r} = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} && \text{دور میدان} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ مساوات 15.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$(15.39) \quad \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin \theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندر سے ⁶ شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left| j \frac{\omega}{c^2 r} \right| &\gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \end{aligned}$$

یا

$$(15.40) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا۔ اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j \frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$(15.41) \quad r \gg \frac{c}{\omega}$$

تصور کیا گیا جسے

$$(15.42) \quad r \gg \frac{1}{\beta} \quad (\text{دور میدان})$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $\frac{c}{\omega} \ll r \ll \frac{1}{\beta}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 میں

$$\begin{aligned} \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\ \left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

ہوں گے لہذا قریبی میدان

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \quad \text{قریبی میدان} \end{aligned} \quad (15.43)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$(15.44) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r + \frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$$

ہو گا۔ مساوات 15.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈین کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مطلوب پوینٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^* \mathbf{a}_r = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4 \pi r^2} \sin^2 \theta \mathbf{a}_r \quad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوینٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2} \left[(E_r \mathbf{a}_r + E_{\theta} \mathbf{a}_{\theta}) \times H_{\phi}^* \mathbf{a}_{\phi} \right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{I_0 l \cos \theta}{2 \pi \epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_{\theta} + \frac{I_0 l \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 \omega r^3} \mathbf{a}_r \right] \frac{I_0 l \sin \theta}{4 \pi r^2} e^{-j \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.35 میں $I_0 = j \omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2 \pi \epsilon_0} \left(\frac{j \omega}{c r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ E_{\theta} &= \frac{q_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4 \pi \epsilon_0} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j \omega}{c r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \\ H_{\phi} &= \frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4 \pi} \left(\frac{j \omega}{c r} + \frac{1}{r^2} \right) \end{aligned}$$

لیتے ہوئے، صفر کے قریب تردد $\omega \rightarrow 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_0 l \cos \theta}{2 \pi \epsilon_0 r^3} \\ E_{\theta} &= \frac{q_0 l \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ H_{\phi} &= \frac{I_0 l \sin \theta}{4 \pi r^2} \end{aligned} \quad \text{نیم ساکن میدان}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\mathbf{E} = \frac{q_0 l}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_{\theta}) \quad (15.45)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میدان کو نیم ساکن میدان⁷ کہا جاتا ہے۔ یہ صفحہ 105 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔ اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_{ϕ} کی قیمت صفحہ 184 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔ چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔ بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان⁸ کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \ll \lambda$ اور $l \ll \lambda$ کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ بقایا $E_r = H_r = H_{\theta} = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	0	$\frac{q_0 l \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{q_0 l \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right)$	$\frac{jI_0 \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2r} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{I_0 l \sin \theta}{4\pi r^2}$

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف A سے حاصل کیا جاسکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباؤ V کا کوئی کردار نہیں۔ یوں مساوات 15.21 اور مساوات 15.26 سے

$$(15.46) \quad E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega \left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin \theta \right) = j \frac{30 I_0 \beta l}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 15.20 سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$(15.47) \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j \frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)} = j \frac{I_0 \beta l}{4\pi r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.38 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$(15.48) \quad E_\theta = j \frac{60\pi I_0}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

زاویہ شکل فاصلہ لمبائی رو مقدار

لکھا جاسکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{1}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin \theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t - \beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوٹنٹنگ سمتیہ

$$(15.49) \quad \mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [E_s \times H_s^*]$$

کی سطحی مکمل

$$P = \int_S \mathcal{P}_{\text{اوسط}} \cdot d\mathbf{s} \quad (W) \quad (15.50)$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سینکڑ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے مکمل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے مکمل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جاسکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیثہ ہے۔ یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \quad (\Omega) \quad (15.51)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت⁹ کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2} \int_S [E_\theta H_\phi^*]_{\text{حقیقی}} d\mathbf{s} \quad (15.52)$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہذا

$$P = \frac{1}{2} \int_S [H_\phi H_\phi^* Z_0]_{\text{حقیقی}} d\mathbf{s} = \frac{Z_0}{2} \int_S |H_\phi|^2 d\mathbf{s} \quad (15.53)$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0} \int_S |E_\phi|^2 d\mathbf{s} \quad (15.54)$$

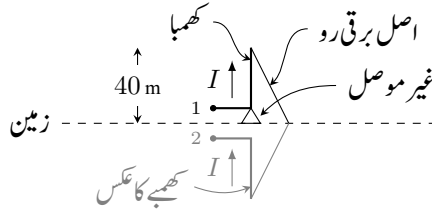
لکھا جاسکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوت $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $d\mathbf{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.24 سے مساوات 15.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\alpha_z \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i dz \\ &= \frac{\alpha_z \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.38 سے مقناطیسی میدان کا حیثہ

$$H_\phi = \frac{I \beta l}{4\pi r} \sin \theta \quad (15.55)$$



شکل 15.6: کھمبہ اینٹینا

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 15.53 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta I l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta d\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 15.53 یا مساوات 15.54 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (15.56)$$

ہوگی۔ مساوات 15.51 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \quad (\Omega) \quad (15.57)$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 ds = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 ds \quad (15.58)$$

سے حاصل کی جاسکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبہ اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبہ اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{300000} = 1000 \text{ m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہوگا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہوگی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے

زیادہ ہوگی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالقابل لمبائی l کا خط ٹکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_0/2 = I_{\text{اوسط}}$ ہوگی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 2×40 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.57 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000} \right)^2 \left(\frac{0.5I_0}{I_0} \right)^2 = 1.2633 \Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھجے کے سر 1 اور عکسی کھجے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63 \Omega \quad (15.59)$$

ہوگی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہوگا۔ موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہوگا۔ ان ضیاع کو مزاحمت ضیاعی R سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

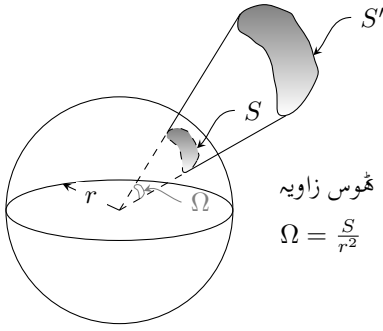
$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}} \quad (15.60)$$

ہوگی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر 0.63Ω ضیاعی R ہوتا تب اینٹینا کی کارگزاری k^{10}

$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\% \quad (15.61)$$

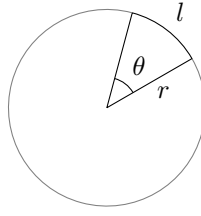
پچاس فی صد ہوگی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارگزاری اس سے بہتر کی جاسکتی ہے۔

اگر مخلوط پونٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا مکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہوگا۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح مکمل کی صورت اور مقام کا مکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دار و مدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح مکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔



$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

ب: سٹریڈین کی تعریف



الف: ریڈین کی تعریف

شکل 15.7: ریڈین اور سٹریڈین کی تعریف

15.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ¹¹ درکار ہو گا لہذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 15.7-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \quad (\text{rad}) \quad (15.62)$$

زاویہ theta دیتی ہے جس کی اکائی ریڈین¹² (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈین (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈین کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔ اگرچہ مساوات 15.62 کے تحت theta دراصل بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\text{sr}) \quad (15.63)$$

ٹھوس زاویہ Omega دیتی ہے جسے مربع ریڈین یعنی سٹریڈین¹³ (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈین کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری کرہ 4π سٹریڈین کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈین میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 15.7-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدود کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک بڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویہ

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (15.64)$$

کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہوگی۔

شکل 15.7-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 15.7-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.7-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 15.7-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈین یا ریڈین کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈین کو ہی ایک سٹریڈین کہتے ہیں۔

$$(15.65) \quad 1 \text{ sr} = 1 \text{ rad}^2$$

کروی محدود میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$(15.66) \quad S = \int_{\theta} \int_{\phi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$(15.67) \quad \Omega = \frac{S}{r^2} = \int_{\theta} \int_{\phi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{sr})$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افرائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_{θ} اور H_{ϕ} پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.38 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہذا پونٹنگ سمتیہ

$$(15.68) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 \mathbf{a}_r = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 \mathbf{a}_r$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹتے گی۔ یوں پونٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے

$$(15.69) \quad P(\theta, \phi) = r^2 \mathcal{P} = \frac{Z_0}{2} |H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 r^2 \quad (\text{W/sr})$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔ $P(\theta, \phi)$ اخراجی شدت¹⁴ کہلاتی ہے۔ اخراجی شدت کے بعد پر غور کریں۔ پونٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔ مساوات 15.63 سے رقبے کو $\Omega r^2 = S$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پونٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو تقابل پذیر¹⁵ بنانے کی خاطر $P(\theta, \phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت بلند تر $r^2 \mathcal{P}$ بلند تر $P(\theta, \phi)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(15.70) \quad P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}} \quad \text{بے بعد}$$

بے بُعد¹⁶ مقدار $P_n(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابل پذیر نقش طاقت¹⁷ ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$(15.71) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{P} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

ہے۔ اگر کثافت طاقت بلند تر \mathcal{P} ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہوگی یعنی

$$(15.72) \quad \mathcal{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{P} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

ہوگا۔ اس میں مساوات 15.63 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبہ کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\mathcal{P} r^2}{\mathcal{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

یعنی

$$(15.73) \quad \Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\theta, \phi) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) \, d\Omega \quad (\text{sr})$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ¹⁸ کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع¹⁹ پر مکمل

$$(15.74) \quad \Omega_M = \iint_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta, \phi) \, d\Omega \quad (\text{sr})$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ²⁰ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں ثانوی شعاع²¹ کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$(15.75) \quad \Omega_m = \Omega_A - \Omega_M$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی²² اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہوگا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت²³ ہے۔ اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$(15.76) \quad D = \frac{\text{بلند تر } P(\theta, \phi) \text{ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta, \phi)_{\text{اوسط}}} \quad \text{بے بُعد}$$

dimensionless¹⁶
normalized power pattern¹⁷
beam solid angle¹⁸
main lobe¹⁹
major lobe solid angle²⁰
minor lobe²¹
isotropic²²
directivity²³

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈین سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت اوسط $P(\theta, \phi)$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta, \phi)$ کا 4π سٹریڈین پر مکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}}{W/4\pi} = \frac{4\pi P(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}}{\int \int_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega} \\ (15.77) \quad &= \frac{4\pi}{\int \int_{4\pi} \frac{P(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}} d\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\int \int_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 15.73 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$(15.78) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad \text{بے بُعد}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہوگی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 15.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کا $P_n(\theta, \phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$(15.79) \quad D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 15.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$(15.80) \quad P_n(\theta, \phi) = \frac{H_\phi^2(\theta, \phi)}{H_\phi^2(\theta, \phi)_{\text{بلندتر}}} = \sin^2 \theta$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 15.73 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{8\pi}{3} \quad (15.81)$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \quad (15.82)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دار و مدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کارگزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کارگزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش²⁴ پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} = \text{افزائش} \quad (15.83)$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \quad (15.84)$$

ہو گا جہاں

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 15.61 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

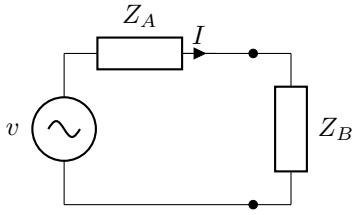
$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \quad (15.85)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہوگی۔

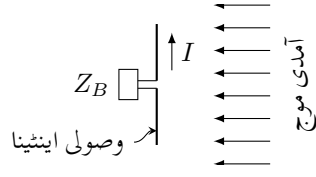
سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$1 \leq D \leq \infty$$

$$0 \leq G \leq \infty \quad \text{مکمل قیمت}$$



ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے



الف: آمدی موج میں تر وصلی اینٹینا

شکل 15.8: وصلی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا²⁵ شعاعی اخراج کرتی ہے۔ اس کے برعکس وصلی اینٹینا²⁶ شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصلی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصلی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہوگا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\mathcal{P}S = I^2 R_B \quad (15.86)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس فرضی رقبے کو وصلی رقبہ²⁷ کہا جاتا ہے۔ یوں وصلی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathcal{P}} \quad (15.87)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، m^2

I موثر برقی رو، A

\mathcal{P} آمدی موج کا پونٹنگ سمتیت، W/m^2

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 15.8-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن²⁸ مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہوگی جہاں

²⁴gain

²⁵transmitting antenna

²⁶receiving antenna

²⁷antenna aperture

²⁸Thevenin equivalent circuit

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباؤ،

R_A اینٹینا کے تھون مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھون دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔ یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$(15.88) \quad |I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$(15.89) \quad S = \frac{v^2 R_B}{\mathcal{P} [(R_A + R_B)^2 + (X_A + X_B)^2]}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ پیدا ہو گا۔ اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$(15.90) \quad R_B = R_A$$

$$(15.91) \quad X_B = -X_A$$

ہوں۔ بے ضیاع اینٹینا کی تھون مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔ اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$(15.92) \quad S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4 \mathcal{P} R_r}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا اخراجی رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 15.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.92 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباؤ v ، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت \mathcal{P} درکار ہوں گے۔ جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباؤ اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$(15.93) \quad v = E l$$

برقی دباو پیدا ہوگی۔ آمدی موج کی پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \frac{E^2}{Z_0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (15.94)$$

جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 15.57 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (15.95)$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 15.92 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{E^2 l^2}{4 \frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \quad (\text{m}^2) \quad (15.96)$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہوگا لہذا اس کی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}} + R$ ضائع ہوگی۔ یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہوگا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{اخراجی}} \quad (15.97)$$

ہوگا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \quad (15.98)$$

ہوگا۔

ہم آگے جا کر مساوات 15.158 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = S_{\text{اخراجی}} \Omega_A \quad (\text{m}^2) \quad (15.99)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔ اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔ یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.78 میں مساوات 15.99 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \quad (15.100)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔ تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$D = \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}} \quad (15.101)$$

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}$$

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

15.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔ نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت³⁰ دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔ دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔ مزید یہ کہ دونوں کے E میدان صفحے کے عمودی ہیں۔ دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \quad (15.102)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta \quad (15.103)$$

ہے۔ ان مساوات میں

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر ($E_1 = E_2$) ہونے کی صورت میں یوں

$$(15.104) \quad E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیان مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$(15.105) \quad \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$(15.106) \quad E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2}$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیان مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

15.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 15.104 (یا مساوات 15.106) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش³¹ جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش³² کہا جائے گا۔ یوں

$$(15.107) \quad E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 15.107 ضرب نقش³³ کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

primary pattern³¹

array pattern³²

pattern multiplication³³

مساوات 15.106 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔ نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$(15.108) \quad E = \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل ب حاصل ہوتا ہے۔ اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$(15.109) \quad E = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

ہوگا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جاسکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت (1 : 2 : 1) نسبت سے ہے۔ اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جاسکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت (1 : 3 : 3 : 1) نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$(15.110) \quad E = \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

ہے۔ اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل³⁴ کے ثنائی سر³⁵ کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکلون³⁶ کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔ متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$(15.111) \quad E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

کے برابر ہوگا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 15.5: مساوات 15.109 کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 15.105 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) + E_0 e^{j\psi} (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi}) (1 + e^{j\psi}) \\ &= E_0 (1 + e^{j\psi})^2 \end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos \theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \angle \psi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا حیث $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 15.6: مساوات 15.111 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(15.112) \quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(15.113) \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

کے سر کی نسبت 1 : 2 : 1 سے ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یادائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(15.114) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi})^2 = E_0 (1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi})$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$(15.115) \quad E = E_0 (1 + e^{j\psi})^{n-1}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos \theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیث لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$(15.116) \quad E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔ آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔ یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\psi = \beta d \cos \theta + \delta \quad (15.117)$$

ہو گا۔ قطار کا دور میدان

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi} \right) \quad (15.118)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

$\psi = \beta d \cos \theta + \delta$ یعنی کل زاویائی فرق

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} \right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 15.118 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E e^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{jn\psi} \right) \quad (15.119)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 15.118 سے مساوات 15.119 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \angle (n-1) \frac{\lambda}{2} \quad (15.120)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا ہے مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\angle (n-1) \frac{\lambda}{2}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \quad (15.121)$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $0 \rightarrow \psi$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی³⁷ ہے لہذا ہمیں ال ہوس پٹل³⁸ کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تقابل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $a \rightarrow x \rightarrow 0$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m / \partial x}{\partial n / \partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $0 \rightarrow \psi$ پر

$$E = E_0 \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \bigg|_{\psi \rightarrow 0}$$

$$= E_0 \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \bigg|_{\psi \rightarrow 0}$$

یعنی

$$(15.122) \quad E = nE_0$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$(15.123) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

ہو جس سے

$$(15.124) \quad \theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 15.121 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$(15.125) \quad \frac{n}{2} (\beta d \cos \theta + \delta) = \mp k\pi$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$(15.126) \quad \theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right]$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

$k = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے جہاں $mn \neq k$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \dots$ کے برابر ہے۔

مساوات 15.121 کو مساوات 15.122 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان

$$(15.127) \quad E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\delta = -\beta d \cos \theta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90^\circ$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ γ^{39} استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$(15.128) \quad \gamma_0 = \sin^{-1} \left(\mp \frac{k\lambda}{nd} \right)$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $k\lambda \gg nd$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہذا اسے

$$(15.129) \quad \gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 15.129 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$(15.130) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی⁴⁰، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار⁴¹ کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی⁴² کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$(15.131) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} \approx \frac{1}{2} \frac{\text{نصف طاقت چوڑائی}}{L/\lambda} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda}$$

ہوگی۔

شکل 15.9 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہے۔

15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 15.123

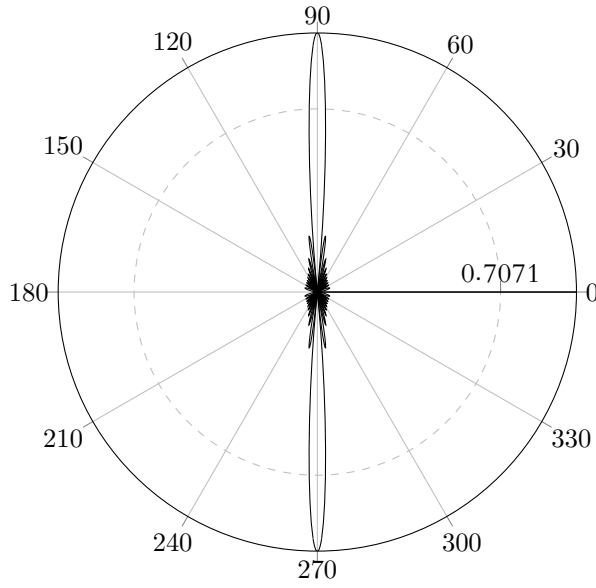
$$(15.132) \quad \beta d \cos \theta + \delta = 0$$

³⁹complementary angle

⁴⁰half power beam width, HPBW

⁴¹broadside array

⁴²beam width between first nulls, BWFN



شکل 15.9: چوڑائی جانب اخراجی قطار

سے حاصل ہوتا ہے۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے ($\theta = 0$) لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہوگا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \quad (15.133)$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 15.125 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d (\cos \theta_0 - 1) = \mp k\pi$$

یعنی

$$\cos \theta_0 - 1 = \mp \frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔ اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1} \left(\mp \sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}} \right) \quad (15.134)$$

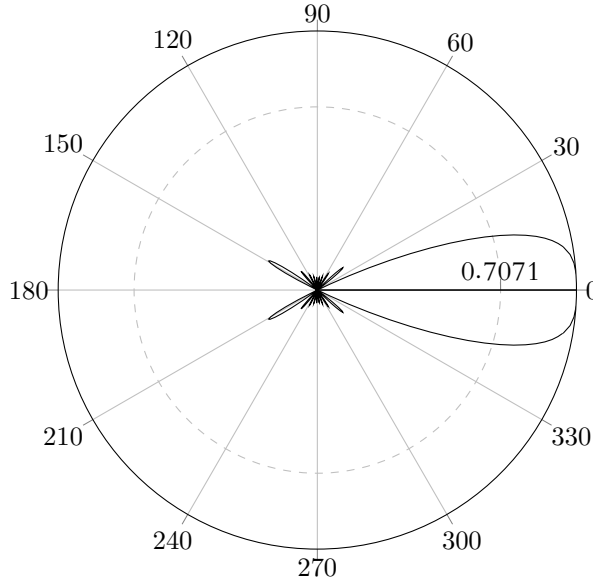
لکھا جاسکتا ہے۔ لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp \sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp \sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \quad (15.135)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں $L \approx nd$ لکھا گیا ہے۔ پہلا صفر $k=1$ پر حاصل ہوگا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \text{ rad} = 114.6^\circ \sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \quad (15.136)$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 15.10: لمبائی جانب اخراجی قطار

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 15.10 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 15.127 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 15.7 اور مثال 15.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 15.78 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (15.137)$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 15.73 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظر انداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہوگا لہذا ایسی صورت میں مساوات 15.73 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\theta_{HP}} \quad (15.138)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi \text{ sr} = 4\pi \text{ rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \text{ deg}^2 = 41\,253 \text{ deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^\circ \phi_{HP}^\circ} \quad (15.139)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 15.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ اور $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.139 سے

$$D \approx \frac{41253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = \phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

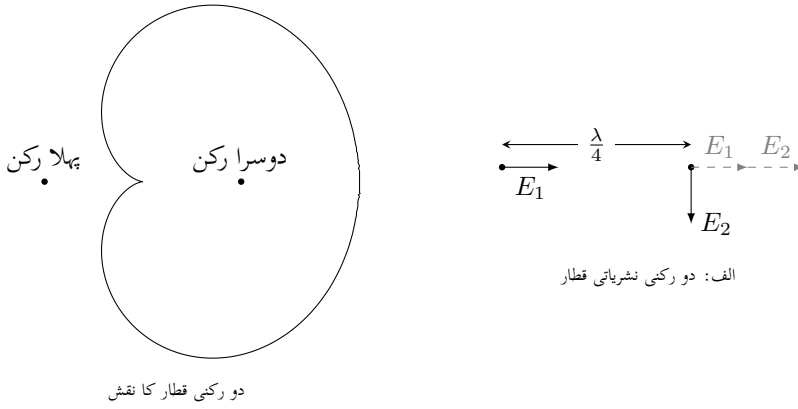
حل: مساوات 15.139 سے

$$D \approx \frac{41253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2| = E$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان 90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 15.11-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہذا دوسرے رکن میں برقی رو $90^\circ = \frac{1}{4} \times 360^\circ$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 15.11-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔



شکل 15.11: دو رکنی اشاعی قطار اور اس کا نقش

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہو گی۔ اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔ اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔ یوں دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔ شکل 15.11 میں صفر اور پائے ریڈیٹن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔ یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2 + E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔ شکل 15.11-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

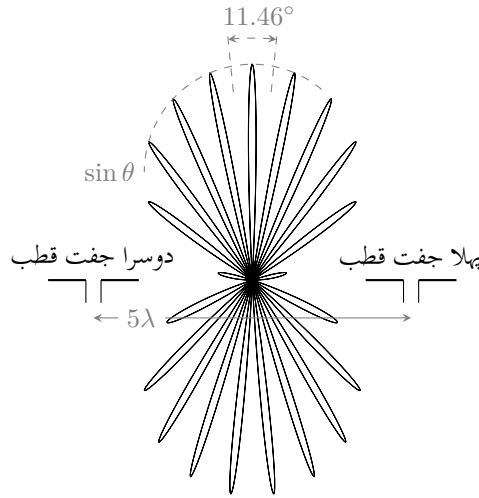
مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نصب کیا جاسکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

15.9 تداخل پیمما

فلکیات⁴³ کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ ریڈیائی فلکیات⁴⁴ میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیمما⁴⁵ اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 15.12 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔ دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \quad (15.140)$$



شکل 15.12: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیمما کا نقش۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos \theta$ کے برابر ہے۔ ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ دور کنی قطار کا نقش ہے۔ مساوات 15.48 سے مختصر جفت قطب کا نقش $\sin \theta$ حاصل ہوتا ہے لہذا تقابل پذیر نقش

$$(15.141) \quad E = \sin \theta \cos \frac{\psi}{2} = \sin \theta \cos \left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 15.12 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔ زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta = \frac{\pi L}{\lambda} \sin \gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$(15.142) \quad \gamma_{01} = \sin^{-1} \frac{1}{2L/\lambda}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

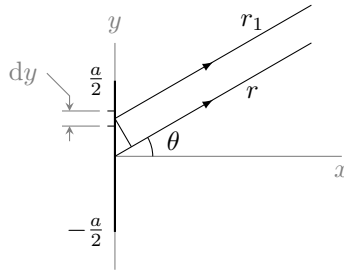
$$(15.143) \quad \text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda} \text{ rad} = \frac{57.3}{L/\lambda} \text{ deg}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یہ مساوات 15.130 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی ادھی قیمت ہے۔ ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin \theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 15.143 سے پہلی صفر چوڑائی 11.46° حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیمما سے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 15.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیمما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔



شکل 15.13: مسلسل اینٹینا

جواب: 2.865°

15.10 مسلسل خطی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔ اگر متعدد نقطہ منبع کی قطار میں منبع کے درمیان فاصلہ اتنا کم کر دیا جائے کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل لکیر نظر آئے تو ایسی صورت میں مسلسل خطی اینٹینا حاصل ہو گا۔ شکل 15.13 میں ایسا ہی اینٹینا دکھایا گیا ہے جس میں تمام نقطہ منبع کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اس اینٹینے کی کل لمبائی a کے برابر ہے۔ اینٹینا y محور پر پایا جاتا ہے۔

اینٹینا کے چھوٹے حصے dy کا دور میدان dE

$$(15.144) \quad dE = \frac{A}{r_1} e^{j(\omega t - \frac{r_1}{c})} dy = \frac{A}{r_1} e^{j(\omega t - \beta r_1)} dy$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں A برقی رو پر منحصر مستقل ہے۔ یوں مکمل اینٹینا کا میدان

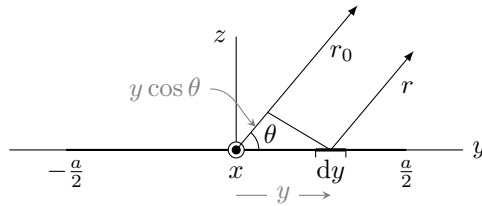
$$(15.145) \quad E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{A}{r_1} e^{j(\omega t - \beta r_1)} dy$$

ہو گا۔ شکل سے $r_1 = r - y \sin \theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(15.146) \quad E = e^{j(\omega t - \beta r)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{A}{r_1} e^{j\beta y \sin \theta} dy$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $a \gg r_1$ ہو تب مکمل کے $e^{j\beta y \sin \theta}$ جزو کی قیمت y تبدیل ہونے سے اتنی تبدیل ہوتی ہے کہ اس تبدیلی کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ اس کے برعکس، جیسے حصہ 15.3 میں دکھایا گیا ہے، $r_1 \gg a$ کی صورت میں $\frac{A}{r_1} \approx \frac{A}{r}$ لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے اسے مکمل کے باہر

$$(15.147) \quad E = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - \beta r)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\beta y \sin \theta} dy$$



شکل 15.14: مستطیل سطحی اینٹینا

لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل لیتے ہوئے

$$E = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - \beta r)} \left[\frac{e^{j\beta \frac{a}{2} \sin \theta}}{j\beta \sin \theta} - \frac{e^{-j\beta \frac{a}{2} \sin \theta}}{j\beta \sin \theta} \right] \quad (15.148)$$

$$= A' \frac{\sin \left(\frac{\beta a}{2} \sin \theta \right)}{\frac{\beta a}{2} \sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{a A e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} = A'$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 15.148 سے زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر A' دیتا ہے۔ یوں مساوات 15.148 کو A' سے تقسیم کرنے سے مسلسل اینٹینا کی تقابل پذیر قیمت

$$E_n = \frac{\sin \left(\frac{\beta a}{2} \sin \theta \right)}{\frac{\beta a}{2} \sin \theta} \quad (15.149)$$

حاصل ہوتی ہے۔

یہاں رک کر صفحہ 449 پر مساوات 15.127 کو دوبارہ دیکھیں۔

15.11 مستطیل سطحی اینٹینا

حصہ 15.10 کی ترکیب مستطیل سطحی اینٹینا پر بھی لاگو کی جاسکتی ہے۔ اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں مسلسل سطحی اینٹینا حاصل ہوگا۔ ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 15.14 میں دکھایا گیا ہے۔ سطح پر میدان x سمت میں ہے۔ اس سطح پر میدان x کا تفاعل نہیں ہے البتہ یہ y پر منحصر ہے۔ یوں میدان کو $E_x(y)$ لکھا جائے گا۔ پورے سطح پر میدان ہم قدم ہے۔

ہائی گن⁴⁶ کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔ یوں سطح پر چھوٹے رقبے $dx dy$ پر میدان $E_x(y)$ بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح پر برقی میدان $E_x(y)$ سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$H_y = \frac{E_x(y)}{Z_0} \quad (15.150)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔ مقناطیسی میدان کا بُعد ایکمیٹر فی میٹر $\frac{A}{m}$ ہے لہذا اسے

$$H_y = J_x z_1 \quad (15.151)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں سطح کی موٹائی z_1 اور اس میں کثافت برقی رو J_x تصور کی گئی ہے۔ اس طرح لکھنے سے اس حقیقت کی وضاحت ہوتی ہے کہ مقناطیسی میدان بالکل اسی طرح کردار ادا کرتا ہے جیسے کثافت برقی رو یوں مقناطیسی میدان کو منبع تصور کیا جاسکتا ہے۔

مساوات 15.25 میں $I_0 = J_x z_1$ اور $dl = dx$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $dx dy$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} dE &= -j\omega [dA_x] \\ &= -j\omega \frac{\mu_0 I_0 dl e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \\ &= -\frac{j\omega \mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t - \beta r)} dx dy \end{aligned} \quad (15.152)$$

جہاں J_x کی وجہ سے A_x سمتی دباؤ لکھی گئی ہے۔ پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی مکمل سے حاصل ہو گا۔ رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

$$E(\theta) = -\frac{j\omega \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y \cos \theta} dx dy \quad (15.153)$$

ہو گا جہاں $r_0 \approx r$ لیا⁴⁷ گیا ہے۔ بیرونی مکمل لیتے اور $\frac{1}{2\lambda} = \frac{\omega \mu_0}{4\pi Z_0}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0 \lambda} \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y \cos \theta} dy \quad (15.154)$$

حاصل ہوتی ہے۔ پوری سطح پر یکساں میدان $E_a = E(y)$ کی صورت میں

$$E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2r_0 \lambda} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y \cos \theta} dy \quad (15.155)$$

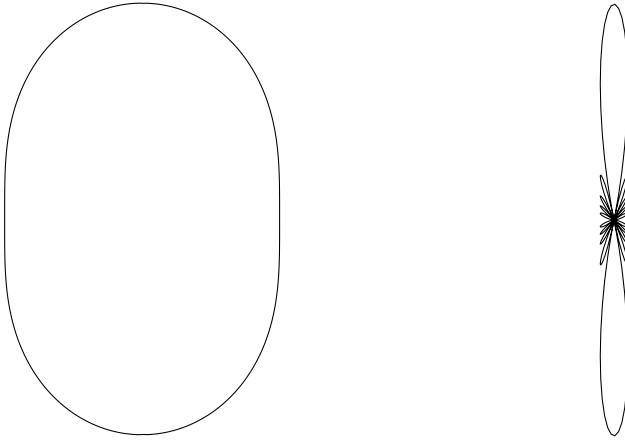
لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{x_1 a E_a}{2r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2) \cos \theta]}{(\beta a/2) \cos \theta} \\ &= \frac{E_a S_{\text{اخراج}}}{2r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2) \cos \theta]}{(\beta a/2) \cos \theta} \end{aligned} \quad (15.156)$$

حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراج}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر

$$E(\theta)_{\text{بندتر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراج}}}{2r_0 \lambda} \quad \text{دورِ نخی اخراج} \quad (15.157)$$



الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش
ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 15.15: مستطیل سطحہ کے نقش

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\theta = 270^\circ$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta = 90^\circ$ جانب اخراج دگنی

$$(15.158) \quad E(\theta) = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0 \lambda} \quad \text{یک رُخی اخراج}$$

ہوگی۔ اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 15.15 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 448 پر مساوات 15.121

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos \theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$(15.159) \quad E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/2) \cos \theta]}{\sin[(\beta d/2) \cos \theta]}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $nd \approx (n-1)d = a'$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 15.159 کو

$$(15.160) \quad E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/2) \cos \theta]}{(\beta a'/2) \cos \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 15.156 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $E_a S_{\text{اخراجی}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0 \lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں

ایک بُعدی میدان $E(y)$ اور اس سے پیدا دور میدان $E(\theta)$ ایک دوسرے کے فوریئر بدل⁴⁸ ہوتے ہیں۔ محدود سطح کے لئے ان جڑواں فوریئر تسلسل میں سے ایک بدل کو

$$(15.161) \quad E(\theta) = \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y \cos \theta} dy$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کا مساوات 15.154 کے ساتھ موازنہ کریں۔ ان میں صرف جزو ضربی $\frac{x_1}{2r_0\lambda}$ کا فرق پایا جاتا ہے۔

شکل میں کئی $E(y)$ اور اس سے پیدا $E(\theta)$ آمنے سامنے دکھائے گئے ہیں۔ سطح پر یکساں میدان اور اس کا پیدا کردہ دور میدان شکل-الف میں دکھائے گئے ہیں جن کے حوالے سے بقایا پر تبصرہ کرتے ہیں۔ ٹکوئی اور سائن نما سطحی تقسیم کے مرکزی شعاع کی چوڑائی زیادہ ہے البتہ ان کے ثانوی شعاعیں کمزور ہیں۔ مربع کو سائن اور گاوسی تقسیم⁴⁹ کے مرکزی شعاع مزید زیادہ چوڑی ہے جبکہ ان میں ثانوی شعاع نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس منفی ڈھلوان کی تقسیم مثلاً شکل-ث کم چوڑائی کی مرکزی شعاع پیدا کرتی ہے البتہ اس کی ثانوی شعاعیں بھی زیادہ طاقتور ہوتی ہیں۔ منفی ڈھلوان کی انتہا شکل-ث میں دکھائی گئی ہے جو دور کنی تداخل پیمائی ہے۔ اس کی چوڑائی شکل-الف کی آدھی ہے البتہ اس کے ثانوی شعاعیں عین مرکزی شعاع جتنی طاقتور ہیں۔

15.13 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ تھی۔ آئیں لمبی اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل میں کل L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں dy کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔ تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

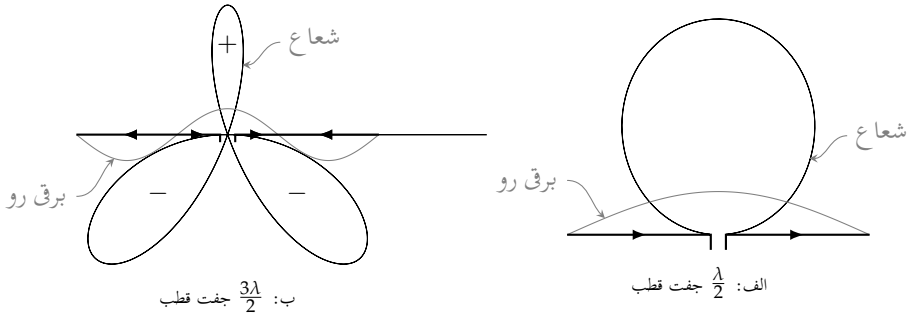
$$(15.162) \quad I = \begin{cases} I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} + y \right) \right] & y < 0 \\ I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} - y \right) \right] & y > 0 \end{cases}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو dy اور اس کے دور میدان کو dE_θ لکھتے ہوئے مساوات 15.38

$$(15.163) \quad dE_\theta = j \frac{30I\beta dy}{r} \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}$$

یعنی

$$(15.164) \quad dE_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{r_0\lambda} \sin \theta I e^{j\beta y \cos \theta} dy$$



شکل 15.16: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

دیتی ہے۔ یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$(15.165) \quad E_{\theta} = k \sin \theta \int_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y \cos \theta} dy$$

ہو گا جہاں

$$(15.166) \quad k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{r_0 \lambda}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 15.162 استعمال کرتے اور مکمل لیتے ہوئے

$$(15.167) \quad E_{\theta} = \frac{j60[I_0]}{r_0} \left\{ \frac{\cos[(\beta L \cos \theta)/2] - \cos(\beta L/2)}{\sin \theta} \right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0] = I_0 e^{j(\omega t - \beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$(15.168) \quad E_{\theta} = \frac{j60[I_0]}{r_0} \frac{\cos[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 15.167 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$(15.169) \quad E_{\theta} = \frac{\cos[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2}$$

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$(15.170) \quad E_{\theta} = \frac{\cos[\frac{3\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{3\lambda}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 15.16 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع نکلی محدود پر دکھائے گئے ہیں۔ جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔

شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں 180° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جنت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

اوسط پوینٹنگ سمتیہ کا بڑی رداس کے کرہ پر سطحی مکمل

$$(15.171) \quad P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|E_\theta|^2}{2Z} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔ اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 15.168 سے پر کرتے ہوئے

$$P = \frac{15I_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \, d\theta \, d\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ اور $r = r_0$ لکھے گئے ہیں۔ بیرونی مکمل پہلے لیتے ہوئے

$$(15.172) \quad P = 30I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \, d\theta$$

ماتا ہے۔ اس مساوات کو عددی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعے

$$(15.173) \quad P = \sum_{i=0}^n 30I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta} \Delta\theta = \sum_{i=0}^n p(\theta) \Delta\theta$$

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$(15.174) \quad p(\theta) = 30I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin \theta}$$

لکھا گیا ہے۔ شکل 15.17 میں کارتیسی محدود پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔ افقی محدود پر $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ ہے جبکہ عمودی محدود پر $p(\theta)$ ہے۔ اگر $\theta = 0$ تا π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہوگی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ان تمام مستطیل کے رقبے جمع کرتے ہوئے مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسے کہتے ہیں عددی طریقہ۔

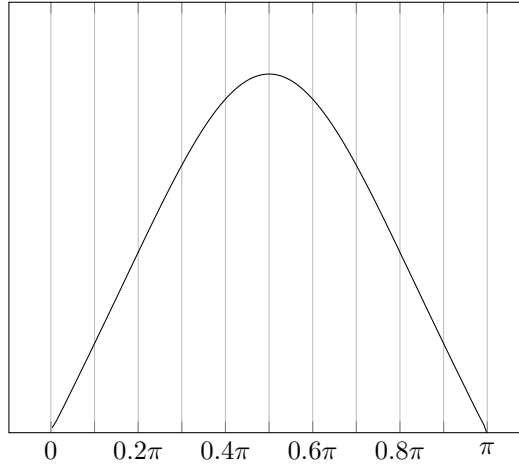
شکل میں $n = 10$ لیا گیا ہے۔ یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔ بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta = 0.1\pi$ پر مساوات 15.174 سے

$$(15.175) \quad p_1(\theta) = 30I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos(0.1\pi)]}{\sin(0.1\pi)} = 0.573I_0^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 15.2 میں دیے گئے ہیں۔

شکل 15.17 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta = 0.1\pi$ تا $\theta = 0.2\pi$) کا رقبہ

$$\begin{aligned} \text{اوسط قد} & \times \text{چوڑائی} = \text{رقبہ} \\ & = 0.1\pi \times \left(\frac{0.573I_0^2 + 4.457I_0^2}{2} \right) \\ & = 0.79I_0^2 \end{aligned}$$



شکل 15.17: اخراجی مزاحمت کا عددی حل۔

جدول 15.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2 \frac{\cos^2[\pi/2 \cos \theta]}{\sin \theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

ہے۔

جدول 15.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$P = 0.1\pi I_0^2 \left(\frac{0}{2} + 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30 \right. \\ \left. + 24.677 + 13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2} \right)$$

یعنی

$$(15.176) \quad P = 36.5675 I_0^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ سائن نمابرتی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2} I_0^2 R$ ہوتا ہے لہذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2} I_0^2 R_{\text{اخراجی}} = 36.5675 I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

$$(15.177) \quad R_{\text{اخراجی}} = 73.13 \Omega \quad \text{جفت قطب} \quad \frac{\lambda}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت (0.63Ω) کے ساتھ کریں جسے صفحہ 434 پر مثال 15.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینٹینا کی رکاوٹ میں $42.5j$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔ اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جاسکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر 70Ω رہ جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینٹینا کو 70Ω قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔ $\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت 100Ω حاصل ہوتا ہے۔

مثال 15.10: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

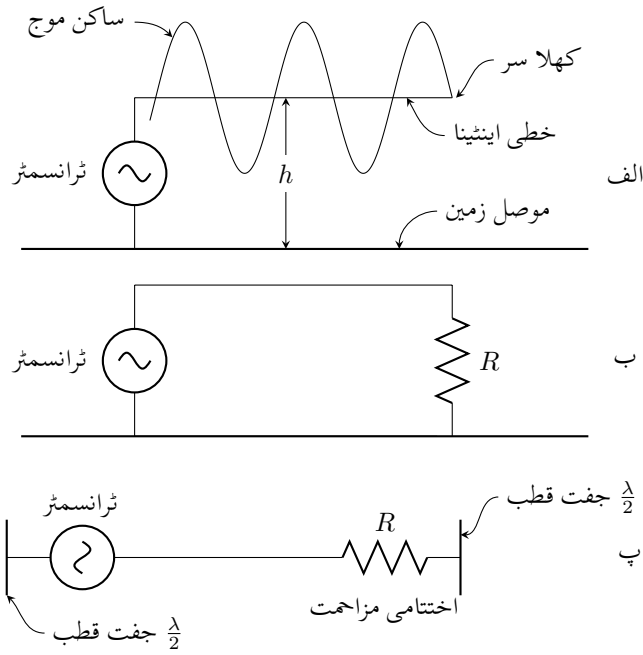
حل: مساوات 15.77 میں مساوات 15.169 پر کرتے ہوئے

$$(15.178) \quad D = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2} \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مساوات 15.172 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 15.176 میں حاصل کی گئی قیمت $36.5675 I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$(15.179) \quad D = \frac{4\pi}{2\pi \left(\frac{36.5675 I_0^2}{30 I_0^2} \right)} = 1.64$$

حاصل ہوتا ہے۔



شکل 15.18: مسلسل موج اینٹینا۔

15.14 چلتے موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ ایسی دہلی موصول تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $\frac{\lambda}{100} < d$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصول زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 15.18-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمیٹر⁵⁰ طاقت مہیا کرتا ہے۔ خطی اینٹینا اور موصول زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔ تار کے کھلے سر پر برقی رو کے ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

آئیں اب ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R ، تار کے کھلے سر اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہوگی۔ تار میں قابل نظر انداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہوگی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زاویائی فرق پایا جائے گا۔ اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 15.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 15.18-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 15.127 غیر سستی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

$$E_n = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi = \beta d(\cos \theta - 1)$ کے برابر ہے۔ اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

$$E(\theta) = \frac{E_0 \sin \frac{n\psi}{2}}{n \sin \frac{\psi}{2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0 = \sin \theta$ ہے لہذا لمبے اینٹینا $L = d(n - 1) \approx nd$ کے لئے

$$(15.180) \quad E(\theta) = \frac{\sin \theta \sin \left[\frac{\beta L}{2} (\cos \theta - 1) \right]}{n \sin \left[\frac{\beta L}{2n} (\cos \theta - 1) \right]}$$

لکھا جائے گا۔ یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہوگی۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(15.181) \quad E(\theta) = \sin \theta \frac{\sin [\beta L/2 (1 - \cos \theta)]}{\beta L/2 (1 - \cos \theta)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل میں مساوات 15.181 کی شعاع دکھائی گئی ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 15^\circ$ پر پائی جاتی ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں 30° کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک سمتی اینٹینا حاصل ہوگا جسے دو تار کے ترکیبی تار سے طاقت مہیا کی جاسکتی ہے۔

زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا

شکل 15.19-الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا⁵¹ دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $\lambda \ll d$ ہے لہذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جاسکتی ہے۔ اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔ چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

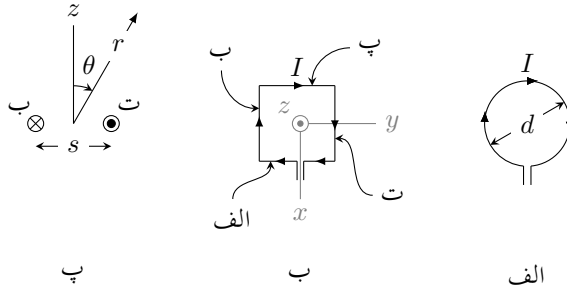
$$(15.182) \quad S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ چکور کو کارتیسی محدود کے مرکز پر $z = 0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x = 0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ سطح $x = 0$ پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔ اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x = 0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin \theta$ ہیں۔ یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin \left(\frac{\beta s}{2} \sin \theta \right)$$



شکل 15.19: دائرہ اور چکور اینٹینا

لکھا جاسکتا ہے جسے $s \ll \lambda$ کی صورت میں

$$(15.183) \quad E(\theta) = -jE_2\beta s \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 432 پر دیے گئے جدول 15.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$(15.184) \quad E(\theta) = \frac{60\pi I l}{r\lambda} \beta s \sin \theta$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 15.19-پ میں جفت قطب کی لمبائی $l = s$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہذا

$$(15.185) \quad E(\theta) = \frac{120\pi^2 I}{r} \frac{S}{\lambda^2} \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکور کا دور میدان دیتی ہے۔ چکور کا قطر بتنا کم ہو یہ مساوات اتنا ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔ حقیقت میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتا ہے۔

15.16 بیج دار اینٹینا

طول موج برابر محیط کا بیج دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔ لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ بیج دار اینٹینا s^2 کا قطر D ، اس کا محیط C ، چکر کے مابین فاصلہ d ، چکر کی لمبائی l اور بیج دار زاویہ α ، اس کے اہم ناپ ہیں۔ ان تمام کو شکل میں دکھایا گیا ہے جہاں ان کے تعلق بھی بیان کئے گئے ہیں۔ ایسا لچھے جس کا محیط $C = \pi D$ تقریباً 1 لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔ یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور چارج دکھائے گئے ہیں جو میدان E پیدا کرتے ہیں۔ جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان E گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت s^3 کو جنم دے گی۔ بیج دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کر داتا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔ اینٹینا کے کھلے سر سے انوکھی موج قابل نظر انداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیطے کے برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

بیج دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جاسکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$(15.186) \quad E(\theta) = \cos \theta \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔ اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos \theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں

$$\psi = \beta d \cos \theta - \frac{c\beta L}{v} \quad (15.187)$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 15.186 اور مساوات 15.181 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔ مساوات 15.186 میں $\cos \theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta = 0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔ اس کے برعکس مساوات 15.181 میں $\sin \theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہذا اس اینٹینا کی شعاع دو شاخی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$\psi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad (15.188)$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔ تیج دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل تیج دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔ تیج دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے۔ منسن اور ووڈیارد⁵⁴ یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ مساوات 15.186 میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 15.187 سے

$$\psi = \beta d \cos \theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n} \quad (15.189)$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}} \quad (15.190)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12^\circ$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہو گی۔ حقیقی تیج دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ تیج دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔ تین سے زیادہ چکر پر مبنی تیج دار اینٹینا یہ عمل ($5^\circ < \alpha < 20^\circ$) اور ($\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda$) تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جاسکتی ہے۔

تیج دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 \frac{nd}{\lambda} \quad (15.191)$$

کے برابر ہے۔ یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12^\circ$ کی صورت میں $D = 64$ ہو گی۔

تیج دار زاویہ $\alpha = 12^\circ$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہو گا۔ اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔

تیج دار اینٹینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں تیج دار اینٹینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

15.17 چوڑائی شعاع اور سمتیت

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

16.1 اینٹینا اور شعاعی اخراج

سوال 16.3: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 463 پر دیے جدول 15.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہوگا۔

جواب: 100Ω

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبہ
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیراٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

