

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلان
100	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلان
101	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلان
103	4.6	جفت قطب
105	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
108	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

113	5	موصل، ذو برق اور کیپسٹر
113	5.1	برقی رو اور کثافت برقی رو
115	5.2	استمراری مساوات
117	5.3	موصل
122	5.4	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط
125	5.5	عکس کی ترکیب
128	5.6	نیم موصل
129	5.7	ذو برق
134	5.8	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط
138	5.9	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط
138	5.10	کیپسٹر
139	5.10.1	متوازی چادر کیپسٹر
141	5.10.2	ہم محوری کیپسٹر
141	5.10.3	ہم کوہ کیپسٹر
142	5.11	سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر
144	5.12	دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس
151	6	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات
153	6.1	مسئلہ یکنائی
154	6.2	لاپلاس مساوات خطی ہے
155	6.3	نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات
156	6.4	لاپلاس مساوات کے حل
162	6.5	پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال
165	6.6	لاپلاس مساوات کا ضربی حل
172	6.7	عددی دہرائے کا طریقہ
177	7	سوالات
177	7.1	توانائی باب کے سوالات
177	7.2	کیپسٹر
179	7.3	لاپلاس

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$(6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

میں $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ اور حاصل جواب میں $\mathbf{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$(6.2) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں¹ خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن² مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدود میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیر $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ہوگا۔

عموماً $\nabla \cdot \nabla^2$ کو لکھا جاتا ہے۔ اس طرح پوٹنسن مساوات کی کار تینسی شکل

$$(6.4) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$(6.5) \quad \nabla^2 V = 0$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس³ مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جاسکتی ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ کار تینسی محدود میں لاپلاس کی مساوات

$$(6.6) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صورت رکھتی ہے۔ ∇^2 کو لاپلاسی عامل⁴ کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباؤ V_1, V_0, V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا E معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔ اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباؤ اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاؤ دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔ اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباؤ معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاؤ یا برقی دباؤ حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ حل برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباؤ پائی جائے۔ اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظر انداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباؤ کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

6.1 مسئلہ یکنائے

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(6.7) \quad \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباؤ V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 109 پر مساوات 4.80

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ D کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل پورے حجم کے لئے

$$(6.8) \quad \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] dh + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلا بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی مکمل کو بند سطحی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot dS = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی مکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں مکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا مکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہذا موجودہ مکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ مکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا مکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدود کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر مکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$(6.9) \quad V_1 = V_2$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوٹنسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوٹنسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوٹنسن مساوات پر پورا اتریں گے لہذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوٹنسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی⁵ ہے۔

6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدود میں ڈھلان کی مساوات صفحہ 101 پر مساوات 4.54 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= -E_\rho \mathbf{a}_\rho - E_\phi \mathbf{a}_\phi - E_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (6.10)$$

لکھتے ہیں جہاں $E = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ E کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ $E = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \quad (6.11)$$

لکھا جاسکتا ہے جو نلکی محدود میں لاپلاس کی مساوات ہے۔

کروی محدود میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \quad (6.12)$$

جبکہ عمومی محدود میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad \text{عمومی} \quad (6.13)$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ مکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ مکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدود کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدود کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارتیسی محدود میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح x محدود سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔ یوں کارتیسی محدود میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہذا کارتیسی محدود میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔ نکلی محدود میں z محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدود میں دیکھ لیں گے لہذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدود میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدود کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔ چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ مکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \quad (6.14)$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔ A اور B دو درجی مکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباؤ کا دار و مدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔ x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں x محدود کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباؤ اور چادروں کا x محدود پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$

$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$

$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان

$$(6.15) \quad V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباؤ کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$(6.16) \quad V = \frac{V_0 x}{d}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباؤ اور کپیسٹنس حاصل کئے۔ موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ برقی دباؤ سے میدان بذریعہ $E = -\nabla V$ اور بہاؤ بذریعہ $D = \epsilon E$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاؤ کے برابر ہے۔ سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباؤ V حاصل کریں۔

• مکمل کے سرحدی شرائط سے مکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔

• برقی دباؤ سے برقی میدان اور برقی بہاؤ بذریعہ $E = -\nabla V$ اور $D = \epsilon E$ حاصل کریں۔

• کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاؤ کی قیمت $D_S = D_n a_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔

• چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاؤ برابر ہوتے ہیں لہذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔ مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا چادر میں دخول ہو گا۔

• سطح پر چارج بذریعہ سطحی مکمل حاصل کریں۔

• کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہذا

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

اور

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

چونکہ بہاؤ کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$D_S = \mathbf{D} \Big|_{x=d} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\mathbf{a}_N = -\mathbf{a}_x$$

ہے لہذا برقی بہاؤ چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon \frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int \epsilon \frac{V_0}{d} dS = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 140 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدود پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہذا کارتیسی محدود کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نکلی محدود میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدود کے مثال کی طرح ہی ہے لہذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

یا

$$(6.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

ہو گا جس سے

$$(6.18) \quad \rho = \infty$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ہو گا۔ اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمیل لے کر حل کرتے ہیں۔ پہلی بار تکمیل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

یا

$$dV = A \frac{d\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$V = A \ln \rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہم قوہ سطحیں نکلی شکل کے ہیں۔ یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباؤ دیتی ہے۔ ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho = b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho = a$ کو V_0 برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے

$$(6.20) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباؤ صفر ہی ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔ یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$E = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} a \rho$$

اور

$$D_n = D \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 141 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔ یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین⁶ ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad \rho \neq 0 \quad (6.22)$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباؤ نکلی محدود کے متغیر ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباؤ ممکن نہ ہو گا۔ یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباؤ کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \quad \rho \neq 0 \quad (6.23)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$E = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کمپیشننس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.4: کروی محدب میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباؤ کی مساوات

$$(6.24) \quad V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

اور پتیشنس کی مساوات

$$(6.25) \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباؤ ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدب میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.26) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر $r \neq 0$ اور $\sin \theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin \theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(6.27) \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ $\sin \theta$ اس صورت صفر کے برابر ہوگا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔ اس کے پہلی بار تکمیل سے

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

یا

$$dV = \frac{A d\theta}{\sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$(6.28) \quad V = A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + B = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم توہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔ اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ہے تب ہمیں

$$(6.29) \quad V = V_0 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کیپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔ پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.30) \quad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \mathbf{a}_\theta$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_s = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r \sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta_0 d\phi dr}{r}$$

ہو گا۔ مکمل میں رداس کا محدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی محدود حاصل ہوتی ہے جس سے محدود کیپیسٹنس حاصل ہو گا۔ حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہذا ہم رداس کے حدود r_1 تا r_2 لیتے ہیں۔ ایسی صورت میں

$$(6.31) \quad C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln \left(\cot \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے محدود سطح سے شروع کیا تھا لہذا چارج کی مساوات بھی صرف محدود سطح کے لئے درست ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کیپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی ناکہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال

پوٹنسن مساوات تب حل کیا جاسکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔ حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباؤ وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ ہم پوٹنسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان⁷ کی پتہری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی سلیکان پتہری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ⁸ کو جنم دیتے ہیں۔ x محدود پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n

قسم کا ہے۔ مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ از خود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول⁹ اور n خطے میں آزاد الیکٹران¹⁰ پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ¹¹ کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔ یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $E = -Ea_x$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان E چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے E بڑھتی رہے گی۔ آخر کار E کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ انہیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$(6.32) \quad \rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔ انہیں اس چارج کثافت کے لئے پونسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جاسکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا $x \rightarrow \pm\infty$ پر $E_x \rightarrow 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا

$$(6.33) \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

کے برابر ہے۔ دوسری بار مکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.34) \quad V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب جہی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباؤ دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباؤ V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.35) \quad V_0 = V_{x \rightarrow +\infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کل مثبت چارج

$$(6.36) \quad Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش S^{12} ہے۔ مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$(6.37) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جاسکتی البتہ

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

سے

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہوگی۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔ یوں برقی دباؤ سے کپیسٹنس کے گٹھنے کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔ اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباؤ ایک سے زیادہ محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ تصور کریں کہ V کارٹیزی محدود کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.38) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔ یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ ایسا ہی ایک سادہ حل $V = x + y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V = G(x) + H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ ہم $V = x + y$ کو $V = V_1 + V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$V_1 = X_1(x)Y_1(y) = 1x$$

$$V_2 = X_2(x)Y_2(y) = 1y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $Y_1(y) = 1$ اور $X_2(x) = 1$ کے برابر ہیں۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x + y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V = x + y$ جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V = G(x) + H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔ اگر $V = XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$(6.39) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔ یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔ اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ m^2 کو علیحدگی مستقل¹³ کہا جاتا ہے۔

$$(6.40) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = m^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -m^2$$

یا

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔ اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$(6.42) \quad X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$(6.43) \quad Y(y) = C \cos my + D \sin my$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$(6.44) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔ البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے¹⁴

$$(6.45) \quad X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0, a_1, a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

اور

$$(6.46) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = m^2 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)$$

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔ یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ¹⁵ عین برابر ہوں یعنی جب

$$2 \times 1a_2 = m^2 a_0$$

$$3 \times 2a_3 = m^2 a_1$$

$$4 \times 3a_4 = m^2 a_2$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔ جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$a_2 = \frac{m^2}{2 \times 1} a_0$$

$$a_4 = \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0$$

$$a_6 = \frac{m^6}{6!} a_0$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$a_3 = \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}$$

$$a_5 = \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \quad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔ انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots$$

اور دوسرا طاقی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \dots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.47) \quad Y = C \cos my + D \sin my$$

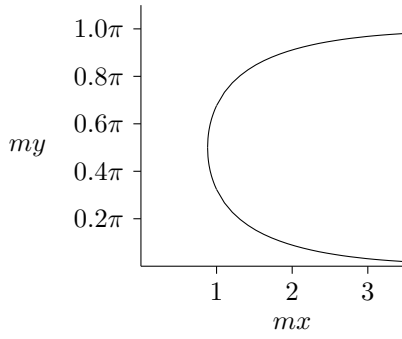
لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$(6.48) \quad V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx) (C \cos my + D \sin my)$$

یا

$$(6.49) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sinh mx} \right)$ کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ان میں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔ پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً برقی دباؤ کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ ان میں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \quad (6.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔ چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2} (e^{mx} - e^{-mx})$$

ہے لہذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔ $\sin my$ کی قیمت $y = 0$ ، $y = \frac{2\pi}{m}$ ، $y = \frac{\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہوگی۔ یوں صفر برقی دباؤ کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جاسکتی ہیں جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہو سکتا ہے۔ ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

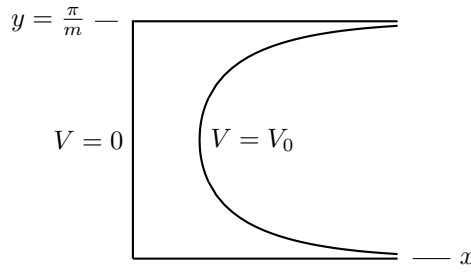
یا

$$my = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh mx}$$

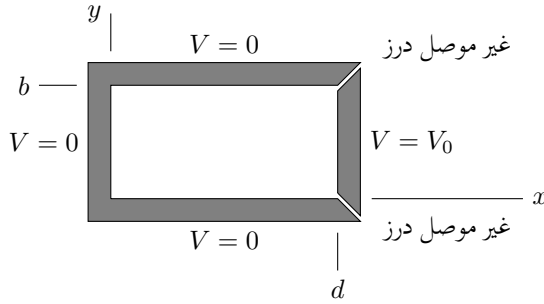
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصول ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔ یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباؤ مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباؤ پیدا کرے گی۔ حقیقت میں عموماً موصول ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباؤ درکار ہو گا۔ ان میں ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوه سطحیں اور ان پر برقی دباؤ۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباؤ دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباؤ حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔ $x=0$ ، $y=0$ اور $y=b$ پر برقی دباؤ صفر ہے جبکہ $x=d$ پر برقی دباؤ V_0 ہے۔ دونوں ہم قوه سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباؤ مختلف ہو سکتے ہیں۔ انس درز کے اثر کو نظر انداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباؤ صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں $x=0$ پر برقی دباؤ صفر پر کرنے سے

$$0 = (A \cosh 0 + B \sinh 0) (C \cos my + D \sin my)$$

$$0 = A (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ $y=0$ پر صفر برقی دباؤ پر کرنے سے

$$0 = B \sinh mx (C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$0 = BC \sinh mx$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC=0$ کی صورت میں درست ہو گا۔ اب چونکہ $A=0$ ہے لہذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباؤ صفر حاصل ہو گا۔ یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباؤ کے بارے میں علم حاصل ہو۔ اس لئے $C=0$ کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD \sinh mx \sin my$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباؤ پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔ یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔ اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$(6.52) \quad V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔ مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباؤ کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔ البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔ گھبرائیں نہیں۔ ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$(6.53) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \dots)$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو پورا کیا جائے۔ اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$(6.54) \quad V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

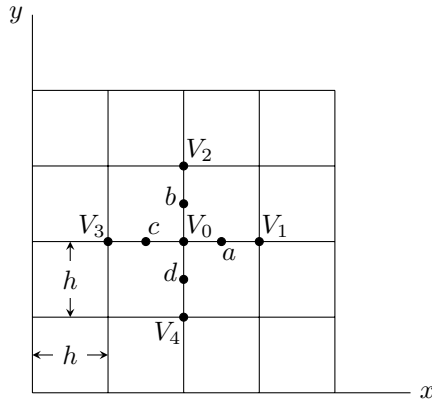
ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریر تسلسل¹⁶ ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباؤ سے کوئی غرض نہیں۔ ایسی صورت میں ہم فوریر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بھایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباؤ کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 & (0 < y < b) \\ V &= -V_0 & (b < y < 2b) \end{aligned}$$



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ قریبی نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

اسی صورت میں فوریر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b} \left[\int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right]$$

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$c_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$(6.55) \quad V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1, \text{مطلق}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباؤ $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباؤ رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہوگی۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔ کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے¹⁷ کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔ انہیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباؤ V_0, V_1, V_2, V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot D = 0$ اور $\nabla \cdot E = 0$ ہوں گے جس سے دو محدود میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_b - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

بھی لکھ سکتے ہیں۔ ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

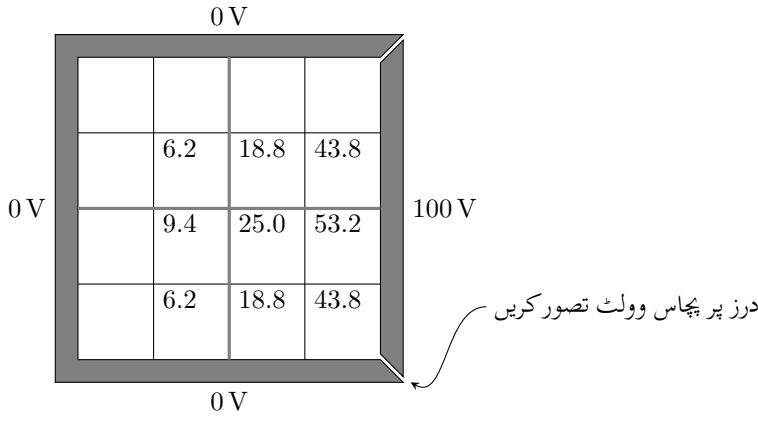
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \quad (6.56)$$

حاصل ہوتا ہے۔ h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔ h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباؤ حاصل کی جاتی ہے حتیٰ کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے۔



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کا اوسط برقی دباؤ ہو گا۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ اس کے چار اطراف صفر برقی دباؤ پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف سو وولٹ پر ہے۔ اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جاسکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔ اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباؤ صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔ قلم کا غذا استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباؤ زیر استعمال آئے گی۔ اب دو کونوں پر صفر برقی دباؤ ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔ درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب سو وولٹ ہیں، لہذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پچاس وولٹ برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{0 + 0 + 50 + 50}{4} = 25.0 \text{ V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔ اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباؤ زیر استعمال لائے جائیں گے۔ یوں درز پر پچاس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{100 + 50 + 0 + 25}{4} = 43.8 \text{ V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{50 + 100 + 25 + 0}{4} = 43.8 \text{ V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نیچا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباؤ ہو گا۔ اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔ اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہذا دونوں کے وسط میں

$$V = \frac{25 + 0 + 0 + 0}{4} = 6.2 \text{ V}$$

0 V			
	7.0 7.1 7.1 7.1	18.6 18.6 18.7 18.7	43.0 42.6 42.8 42.8
0 V			100 V
	9.7 9.8 9.8 9.8	24.8 24.8 25.0 25.0	52.8 52.5 52.6 52.6
	7.0 7.1 7.1 7.1	18.6 18.6 18.7 18.7	43.0 42.6 42.8 42.8
0 V			

شکل 6.6: چار بار دہرائے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔ یہی اصل جواب ہیں۔

حاصل ہوتے ہیں۔ بتایا کونوں پر برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتیٰ کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ ہر کونے پر برقی دباؤ مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباؤ کو استعمال کیا جائے گا۔ یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباؤ ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہذا ان پر برقی دباؤ حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 43.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{100 + 0 + 18.8 + 53.2}{4} = 43 \text{ V}$$

ہو جائے گی۔ اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 53.2 V کی نئی قیمت

$$\frac{100 + 43 + 25 + 43}{4} = 52.8 \text{ V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 18.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{43 + 0 + 6.2 + 25}{4} = 18.6 \text{ V}$$

ہوگی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{52.8 + 18.6 + 9.4 + 18.6}{4} = 24.8 \text{ V}$$

ہوگی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح چار بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔ اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباؤ حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ با آسانی سمجھا جاسکے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔

باب 7

سوالات

7.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 7.1:

سوال 7.2: برقی میدان $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میں -0.1 C کے چارج کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0.2 J ، -0.2 J اور 0 J

سوال 7.3: مثال 4.7 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ جواب}$$

7.2 کیپسٹر

سوال 7.4: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی کیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5, 3, 1)$ پر D حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \text{ جواب}$$

سوال 7.5: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \text{ جواب:}$$

سوال 7.6: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محور کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5, 3, 0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{nC}{m^2}$$

سوال 7.7: مشق 5.3 میں $300 K$ درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 15×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{S}{m}$$

سوال 7.8: صفحہ 127 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی کثافت سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -Q$$

سوال 7.9: صفحہ 118 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپئیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

$$\text{جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔}$$

$$\text{سوال 7.10: مساوات 5.71 میں } \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b} \text{ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔}$$

سوال 7.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نکلی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نکلی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نکلی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 12 m, 3.46 \frac{nC}{m}, 13.4 m, 18 m, 1.65 \frac{pF}{m^2} \text{ اور } 0.73 \frac{pF}{m^2}$$

7.3 لاپلاس

سوال 7.12: صفحہ 155 پر مساوات 6.13 عمومی محدود میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 7.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کیپٹنسنس حاصل کریں۔

سوال 7.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 7.15: مساوات 6.28 کے مکمل کو حل کریں۔

سوال 7.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 7.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 7.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

جدول 7.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 7.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عمیر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	تقطیر شدہ پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 7.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلیئم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 7.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

