

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

4	1	سمتیات	1
5	1	مقداری اور سمتیہ	1.1
6	2	سمتی الجبرا	1.2
7	3	کارتیسی محدد	1.3
8	5	اکائی سمتیات	1.4
9	9	میدانی سمتیہ	1.5
10	9	سمتی رقبہ	1.6
11	10	غیر سمتی ضرب	1.7
12	14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
13	17	گول نلکی محدد	1.9
14	20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
15	20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
16	25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
17	27	1.10 کروی محدد	
18	37	کولومب کا قانون	2
19	37	2.1 قوت کشش یا دفع	
20	41	2.2 برقی میدان کی شدت	
21	44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
22	49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
23	53	2.5 چارج بردار حجم	
24	54	2.6 مزید مثال	
25	61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
26	63	2.8 سوالات	

27	65	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
28	65	ساکن چارج	3.1
29	65	فیراڈے کا تجربہ	3.2
30	66	گاؤس کا قانون	3.3
31	68	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
32	68	نقطہ چارج	3.4.1
33	70	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
34	70	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
35	71	ہم محوری تار	3.5
36	73	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
37	73	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
38	76	پھیلاؤ	3.8
39	78	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
40	80	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
41	82	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
42	85	توانائی اور برقی دباؤ	4
43	85	توانائی اور کام	4.1
44	86	لکیری تکملہ	4.2
45	91	برقی دباؤ	4.3
46	92	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
47	93	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
48	94	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
49	94	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
50	98	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
51	102	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
52	103	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
53	104	جفت قطب	4.6
54	106	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
55	109	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

56	115	موصول، ذو برق اور کیپسٹر	5
57	115	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
58	117	استمراری مساوات	5.2
59	119	موصول	5.3
60	124	موصول کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
61	127	عکس کی ترکیب	5.5
62	130	نیم موصول	5.6
63	131	ذو برق	5.7
64	136	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
65	140	موصول اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
66	140	کیپسٹر	5.10
67	142	متوازی چادر کیپسٹر	5.10.1
68	143	ہم محوری کیپسٹر	5.10.2
69	143	ہم کوہ کیپسٹر	5.10.3
70	145	سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	5.11
71	146	دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	5.12
72	155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
73	157	مسئلہ یکنائی	6.1
74	158	لاپلاس مساوات خطی ہے	6.2
75	159	نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	6.3
76	160	لاپلاس مساوات کے حل	6.4
77	166	پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	6.5
78	169	لاپلاس مساوات کا ضربی حل	6.6
79	176	عددی دہرائے کا طریقہ	6.7

80	183	ساکن مقناطیسی میدان	7
81	183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
82	187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
83	192	گردش	7.3
84	199	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
85	204	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
86	206	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
87	207	مسئلہ سٹوکس	7.4
88	210	مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	7.5
89	217	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
90	222	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
91	222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
92	224	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
93	229	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
94	229	متحرک چارج پر قوت	8.1
95	230	تفرقی چارج پر قوت	8.2
96	233	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
97	234	قوت اور مروڑ	8.4
98	239	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
99	240	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
100	243	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
101	244	مقناطیسی دور	8.8
102	247	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
103	248	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
104	252	مشترکہ امالہ	8.11

105	255	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
106	255	فیراڈے کا قانون	9.1
107	261	انتقالی برقی رو	9.2
108	265	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
109	266	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل	9.4
110	268	تاخیری دباؤ	9.5
111	273	مستوی امواج	10
112	273	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
113	274	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
114	281	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
115	283	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
116	285	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
117	288	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
118	292	10.4 موصل میں امواج	
119	298	10.5 انعکاس مستوی موج	
120	304	10.6 شرح ساکن موج	
121	311	11 ترسیلی تار	
122	311	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
123	315	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
124	316	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
125	319	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
126	320	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
127	321	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
128	326	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
129	333	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
130	334	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

131	339	12 تقطیب موج
132	339	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
133	342	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ
134	345	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
135	345	13.1 ترچھی آمد
136	356	13.2 ترسیم بائی گن
137	359	14 موج اور گھمکیا
138	359	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ
139	360	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
140	366	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
141	375	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
142	382	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
143	386	14.5 کھوکھلی نالی موج
144	393	14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
145	395	14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
146	397	14.8 سطحی موج
147	402	14.9 ذو برق تختی موج
148	405	14.10 شیش ریشہ
149	408	14.11 پردہ بصارت
150	410	14.12 گھمکی خلاء
151	413	14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

152	421	
153	421	15.1 تعارف
154	421	15.2 تاخیری دباو
155	423	15.3 تکمل
156	424	15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا
157	432	15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
158	436	15.6 ٹھوس زاویہ
159	437	15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افرائش
160	444	15.8 قطاری ترتیب
161	444	15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
162	445	15.8.2 ضرب نقش
163	446	15.8.3 ثنائی قطار
164	448	15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
165	450	15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
166	450	15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
167	454	15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا
168	455	15.9 تداخل پیمہ
169	456	15.10 مسلسل خطی اینٹینا
170	457	15.11 مستطیل سطحی اینٹینا
171	460	15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں
172	460	15.13 خطی اینٹینا
173	465	15.14 چلتے موج اینٹینا
174	466	15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا
175	467	15.16 پیچ دار اینٹینا
176	469	15.17 دو طرفہ کردار
177	471	15.18 جھری اینٹینا
178	472	15.19 بیبا اینٹینا
179	474	15.20 فرانس ریڈار مساوات
180	477	15.21 ریڈیائی دورین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی
181	479	15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید

182	481	
183	481	16.1 اینٹینا اور شعاعی اخراج

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ¹ کا قانون²

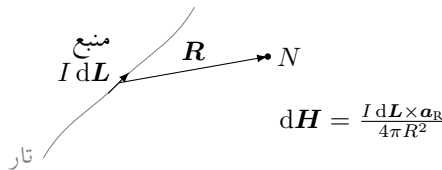
$$(7.1) \quad d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت H کی اکائی ایمپیر فی میٹر ($\frac{A}{m}$) حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

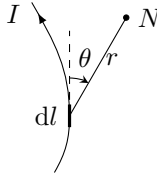
یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے dL جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا اسمتی برقی میدان H دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے R فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نکلی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔ چھوٹے لمبائی dL کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I dL$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

¹Biot-Savart law

²یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب R اور dL کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} dH_2 &= \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \\ dE_2 &= \frac{dQ_1 a_{R21}}{4\pi \epsilon_0 R_{21}^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہا ہے۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے dl سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$dH = \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^4} \quad (7.3)$$

ہوگا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہوگا لہذا صفحہ 119 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

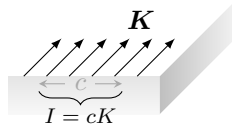
سے

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.4)$$

حاصل ہوگا جسے مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہوگا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

یوں بايوٹ-سيوارٹ قانون کی مکمل شکل

$$(7.5) \quad H = \oint \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

ہی تجرباتی طور ثابت کی جاسکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جاسکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں مکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جاسکتا ہے جس کا بند مکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہذا مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔ اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احمقانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو K دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیر فی کانٹی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی تو بذریعہ مکمل

$$I = \int K dc$$

حاصل ہوگی جہاں dc چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں dL کو سطحی کثافت برقی رو K یا حجمی کثافت برقی رو J کی صورت میں

$$(7.6) \quad I dL = K dS = J dv$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بايوٹ-سيوارٹ کے قانون کو

$$(7.7) \quad H = \int_S \frac{K \times a_R dS}{4\pi R^2}$$

یا

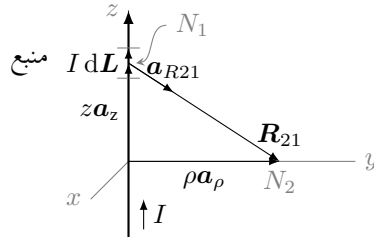
$$(7.8) \quad H = \int_h \frac{J \times a_R dh}{4\pi R^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لا محدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بايوٹ-سيوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لا محدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لا محدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے dL میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جاسکتی ہے۔ چونکہ

$$R_{21} = \rho a_\rho - z a_z$$



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

کے برابر ہے لہذا

$$R_{21} = |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ نکلی محدود میں چھوٹی لمبائی

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $d\rho = 0$ اور $d\phi = 0$ ہیں لہذا $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے مکمل سے حاصل ہوگا جہاں مکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$ لکھے گئے ہیں۔

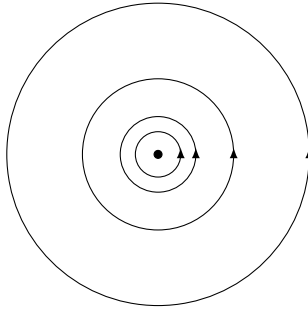
مندرجہ بالا مساوات میں مکمل کے اندر \mathbf{a}_ϕ پر نظر رکھنا ہوگا۔ اگرچہ \mathbf{a}_ϕ اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا مکمل کا متغیر یعنی z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\mathbf{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y$$

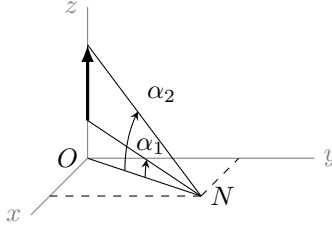
لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہذا \mathbf{a}_ϕ کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

سے

$$(7.10) \quad H_2 = \frac{I}{2\pi\rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.5 میں برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان z اور n کی سمت میں ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

اگر شکل 7.4 میں تار لا محدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمیل کے محدود حد وپر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$(7.11) \quad H = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) a_\phi$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہوگی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے متناقل چارج سے پیدا ہونے والے برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متناقل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی انتہائی طریقہ موجود ہے جسے ایمپیٹر کا دوری قانون³ کہتے ہیں۔ اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی

الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔ اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔ یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ H کا لکیری بند مکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint H \cdot dL = I \quad (7.12)$$

لکیری بند مکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ H کے لکیری مکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں dL میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر H کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $H \cdot dL$ حاصل کر کے تمام $H \cdot dL$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ مقناطیسی شدت H کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہوگی۔ یوں کسی ایک نقطے پر $H \cdot dL$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $H \cdot dL$ سے مختلف ہوگی۔ ایمپیر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $H \cdot dL$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔ اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔ یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ ایمپیر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

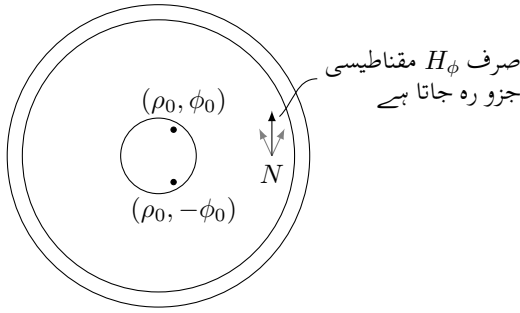
آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتے ہیں کہ اس پر H اور dL یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا H کی قیمت قطعی اور اس کی سمت dL کے متوازی ہو۔ پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ کو $H dL$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو مکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں راہ کے اس راستے پر مکمل کی قیمت HL کے برابر ہوگی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدود z پر منحصر ہے۔ تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔ اسی طرح باپوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت α_ϕ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔ یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ H کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہوگی۔ ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $dL = \rho d\phi \alpha_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہذا ایمپیر کے دوری قانون سے

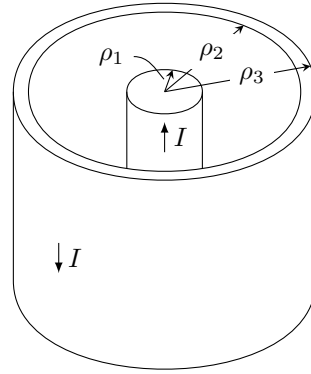
$$\oint H \cdot dL = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیٹر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محور پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارٹیزی x محور پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔ اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیٹر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2) \quad (7.13)$$

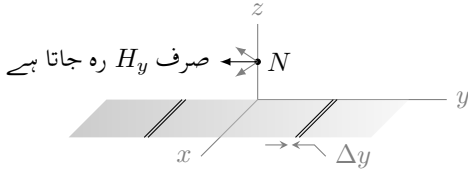
لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہوگی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

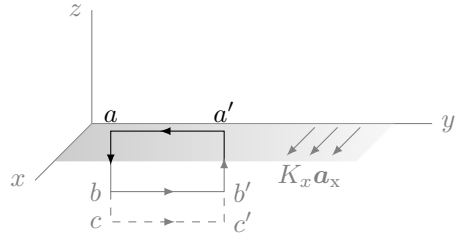
$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2} \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہذا ایمپیٹر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \quad (\rho < \rho_1)$$



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $I + I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہذا

$$H_\phi = 0 \quad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرے}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \quad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x a_x$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔ اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y a_x$ برقی رو گزارے گی۔ لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دو گنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $a'b'bb'a'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔ اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا مکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔ راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب

z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بائوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}a_y$ جبکہ اس کے نیچے جانب $H_{yb}a_y$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$(7.14) \quad H_{ya} + H_{yb} = K_x$$

ہوگا۔ اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دار و مدار سطح سے فاصلے پر ہرگز نہیں ہے۔ اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہوگا۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہوگا یعنی $|H_{ya}| = |H_{yb}|$ ہوگا۔ اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} H_y &= -\frac{1}{2}K_x a_x & (z > 0) \\ H_y &= +\frac{1}{2}K_x a_x & (z < 0) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$(7.15) \quad H = \frac{1}{2}K \times a_N$$

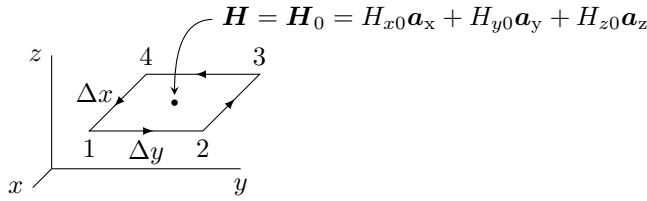
لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $h = -z$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x a_x$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$(7.16) \quad \begin{aligned} H &= K \times a_N & (-h < z < 0) \\ H &= 0 & (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned}$$

ہوگا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بائوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہوگا۔



شکل 7.9: گردش کی تعریف۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش کی مساوات حاصل کریں گے۔

کار تیزی محدود میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.9 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔ یہ راہ مقناطیسی میدان $H = H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z$ میں پائی جاتی ہے۔ شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} H_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0) a_x + H_y(x_0, y_0, z_0) a_y + H_z(x_0, y_0, z_0) a_z \\ &= H_{x0} a_x + H_{y0} a_y + H_{z0} a_z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا مکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔ آئیں اس مکمل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کار تیزی محدود میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.9 میں 1 تا 2 پر $dx = 0$ اور $dz = 0$ ہیں لہذا اس چھوٹے فاصلے کو $dL = dy a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔ یوں چکور کا 1 کو $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کو $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو گا۔ یوں راہ کے پہلے حصے 2 تا 1 پر لکیری مکمل

$$\int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z) \cdot dy a_y = \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} H_y dy = H_{y21} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy = H_{y21} \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جایا گیا۔ ہمیں اس طرح کے مکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہذا اس پورے عمل کو ہم

$$(7.17) \quad (H \cdot dL)_{21} = H_{y21} \Delta y$$

لکھیں گے۔ ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل⁵ بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x + \frac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$(7.18) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

لکھ کر مساوات 7.17 کو

$$(7.19) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.18 کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہوگی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔ اب رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہذا یہاں

$$(7.20) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

ہوگا جو عین مساوات 7.18 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 بھی کچھ کرتے ہوئے

$$(7.21) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq - \left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

جگہ 3 تا 4 پر

$$(7.22) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq - \left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

اور 1 تا 4 پر

$$(7.23) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.19، مساوات 7.21، مساوات 7.22 اور مساوات 7.23 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا مکمل

$$(7.24) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z \Delta x \Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا مکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ $\Delta x \rightarrow 0$ اور $\Delta y \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$(7.25) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارٹیزی محدد کے بقایادو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$(7.26) \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

اور

$$(7.27) \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.26 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.27 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δx اور Δz ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.25، مساوات 7.26 اور مساوات 7.27 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند مکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند مکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش⁶ کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے

رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدود پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$H_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint H \cdot dL}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں H کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد H کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کار تیزی محدود میں گردش H کے x, y اور z اجزاء مساوات 7.26، مساوات 7.27 اور مساوات 7.25 بالترتیب دیتے ہیں لہذا

$$(7.28) \quad H_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) a_z = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت⁷ کی شکل میں

$$(7.29) \quad H_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$(7.30) \quad H_{\text{گردش}} = \nabla \times H$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کار تیزی محدود میں ہی گردش ∇ اور H کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کے باوجود کسی بھی محدود میں گردش کو $\nabla \times H$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں کار تیزی محدود میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$(7.31) \quad \nabla \times H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) a_z$$

ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.32) \quad \nabla \times H = J$$

لکھی جاسکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔ یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint E \cdot dL$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times E = 0 \quad (7.33)$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوگی۔ یوں $\oint E \cdot dL$ صفر کے برابر ہوگا جس سے E کا گردش بھی صفر ہوگا۔ مساوات 7.33 یہی کہتا ہے۔ اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہوگی۔ اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہوگا۔ مساوات 7.32 یہی کہتا ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times H$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \times (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.28 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $H = (x^2 y + 2z) a_x + (xz - y) a_y + (e^x yz) a_z$ تب $\nabla \times H$ کیا ہوگا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہوگی۔

جوابات: $\nabla \times H = (e^x z - x) a_x + (2 - e^x yz) a_y + (z - x^2) a_z$ گردش کی قیمت $2a_x + 2a_z$ ہوگی۔

مثال 7.1: سمتیہ $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times A$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.31 سے

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) a_z \quad (7.34)$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.31 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ ، دوسرے جزو میں $\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right] \mathbf{a}_y - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z\end{aligned}\tag{7.35}$$

یہاں رک کر \mathbf{A} کے پھیلاؤ کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}\tag{7.36}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} \equiv & \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \\ = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}\tag{7.37}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.35 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.38) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

مساوات 7.37 سمتیہ کی لاپلاسی⁸ ہے۔

مثال 7.2: سمتیہ \mathbf{S} اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$(7.39) \quad \nabla \times (M\mathbf{S}) \equiv (\nabla M) \times \mathbf{S} + M(\nabla \times \mathbf{S})$$

کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$M\mathbf{S} = M(S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z) = MS_x \mathbf{a}_x + MS_y \mathbf{a}_y + MS_z \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.31 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times M\mathbf{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times M\mathbf{S} &= \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z + M \frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} S_y - M \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x + M \frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} S_z - M \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y + M \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} S_x - M \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} \nabla \times M\mathbf{S} &= \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &+ M \left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \mathbf{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \mathbf{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial M}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

7.3.1 نلکی محدود میں گردش

نلکی محدود میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.10 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اس رقبے کے وسط میں

$$H_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + H_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + H_{z 0} \mathbf{a}_z$$

ہوگا۔ کارٹیزی محدود میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محدود میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\Delta\phi(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\Delta\phi(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})$ ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

ہوگی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر مکمل

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} &\doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} \right) \left(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\phi \\ &\doteq \left[H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \right] \Delta\phi \end{aligned}$$

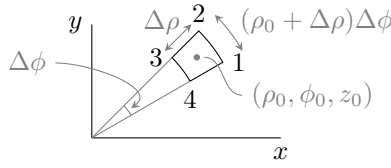
اور

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} \right) \left[- \left(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\phi \right] \\ &\doteq \left[-H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \right] \Delta\phi \end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$



شکل 7.10: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر مکمل

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) (-\Delta \rho)$$

اور

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) \Delta \rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا مکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$(7.40) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi$$

ہو گا۔ اس چھوٹے رقبے سے $J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$ برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi \doteq J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \doteq J_z$$

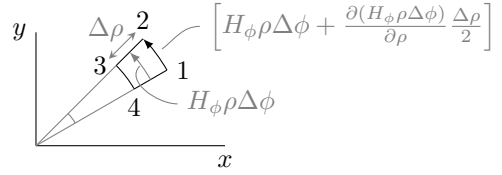
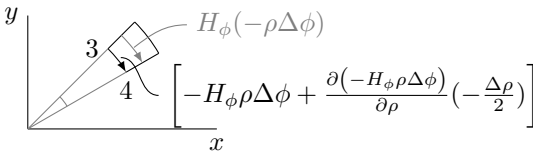
لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta \rho$ اور $\Delta \phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گا اور تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$(7.41) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta \phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) = J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.40 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.11-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho \Delta \phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر مکمل تقریباً

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{\phi} \rho \Delta \phi$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

کے برابر ہو گا۔ اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi \rho \Delta \phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $\frac{\Delta \rho}{2} +$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(H \cdot dL) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_\phi \rho_0 \Delta \phi$ کے برابر ہے لہذا وسط سے $\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$(7.42) \quad H \cdot dL_{21} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

ہو گی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$H \cdot dL = H_\phi(-\rho \Delta \phi)$$

کے برابر ہو گا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$(7.43) \quad \begin{aligned} H \cdot dL_{43} &= -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2}\right) \\ &= -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta \rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta \rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho \Delta \rho$ ہو گی۔ اس نقطے سے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

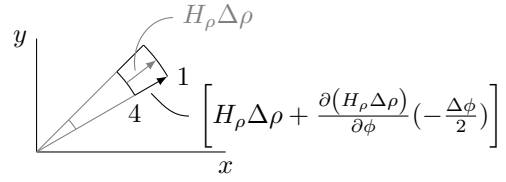
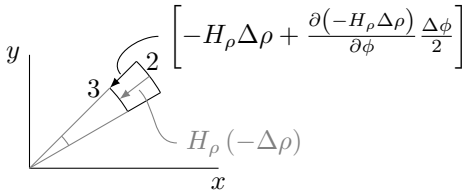
$$\Delta(H \cdot dL) = \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \left(-\frac{\Delta \phi}{2}\right)$$

لکھا جاسکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

$$H \cdot dL = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہو گی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

$$(7.44) \quad H \cdot dL_{14} = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$



(۱) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.12: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہوگی۔ اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی عمل

$$(7.45) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\rho \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.42، مساوات 7.43، مساوات 7.44 اور مساوات 7.45 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$(7.46) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial\rho} \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi} \Delta\phi \\ = \left[\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

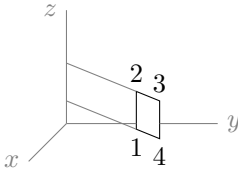
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.40 ہی ہے۔ یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔ یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔ مساوات 7.46 سے گردش

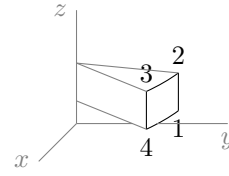
$$(7.47) \quad \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta\rho \Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] = J_z$$

آئیں اب تکلی محدود میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔ گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0 \Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔ اس رقبے کو شکل 7.13-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔ مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z \Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial\phi} \left(+\frac{\Delta\phi}{2} \right)$$



(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.13: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $-H_z \Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ زاویہ پر

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \phi} \left(-\frac{\Delta \phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبہ کے z اطراف کا مکمل

$$(7.48) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = + \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $-H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(+\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا مکمل

$$(7.49) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -\rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.48 اور مساوات 7.49 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل مکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $I_\rho \rho \Delta \phi \Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \Delta z \Delta \phi = I_\rho \rho \Delta \phi \Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$(7.50) \quad \lim_{\substack{\Delta \phi \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho \Delta \phi \Delta z} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] = I_\rho$$

ملتا ہے۔

شکل 7.13- ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے H کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} &= H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(+\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} &= H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} &= -H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(-H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned}$$

اور یوں امپیر کے دوری قانون سے

$$(7.51) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta \rho \Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = J_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.51، مساوات 7.50 اور مساوات 7.47 کا مجموعہ نکلی محدود میں گردش دیتا ہے یعنی

$$(7.52) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نکلی محدود میں ∇ اور \mathbf{H} کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔ اس کے باوجود \mathbf{H} کے گردش کو $\nabla \times \mathbf{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\mathbf{H} = (3\rho \cos \phi + 5)\mathbf{a}_\rho + 6 \sin \phi \mathbf{a}_\phi + 2\mathbf{a}_z$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{6}{\rho} + 3 \right) \sin \phi \mathbf{a}_z$

7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات

صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$\begin{aligned} dL_u &= k_1 du \\ dL_v &= k_2 dv \\ dL_w &= k_3 dw \end{aligned}$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2 \Delta v$ اور $k_3 \Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2 \Delta v$ کے برابر ہے لہذا اس پر چلتے ہوئے مکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ سے $\frac{\Delta w}{2}$ تک مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$H \cdot dL_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک مکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ سے $-\frac{\Delta w}{2}$ تک مکمل

$$H \cdot dL_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)$$

ہو گا۔ یوں ان اطراف پر کل مکمل

$$(7.53) \quad H \cdot dL_{21} + H \cdot dL_{43} = -\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$H \cdot dL_{32} = H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right)$$

$$H \cdot dL_{14} = -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(7.54) \quad H \cdot dL_{32} + H \cdot dL_{14} = \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} \Delta v \Delta w$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل مکمل

$$(7.55) \quad \oint H \cdot dL = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w$$

لکھتے ہوئے ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint H \cdot dL = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$(7.56) \quad \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint H \cdot dL}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] = J_u$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$(7.57) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint H \cdot dL}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] = J_v$$

اور

$$(7.58) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\oint H \cdot dL}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] = J_w$$

لکھ سکتے ہیں۔ عمومی محدود میں گردش کے ان اجزاء کو

$$(7.59) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] \mathbf{a}_v + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] \mathbf{a}_w$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$(7.60) \quad \mathbf{H} \text{ گردش} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\mathbf{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\mathbf{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدود میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

اور \mathbf{a}_u کی جگہ \mathbf{a}_r ، \mathbf{a}_v کی جگہ \mathbf{a}_θ اور \mathbf{a}_w کی جگہ \mathbf{a}_ϕ پر کرنے سے کروی محدود حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.59 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدود میں گردش کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(H_\theta r)}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

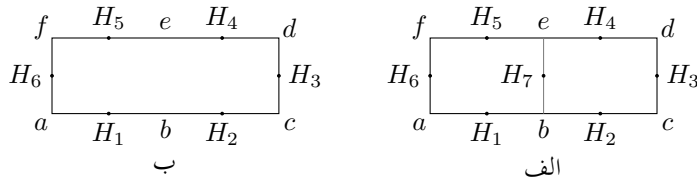
یا

$$(7.61) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: اگر $\mathbf{H} = 2r \cos \theta \mathbf{a}_r - 3r \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = -4 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$



شکل 7.14: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمیل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمیل کے برابر ہے۔

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.14-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B)_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $d\mathbf{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ \mathbf{H}_B سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N$$

یا

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta S_B$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{L}_{ba} + \mathbf{H}_7 \cdot \Delta \mathbf{L}_{eb} + \mathbf{H}_5 \cdot \Delta \mathbf{L}_{fe} + \mathbf{H}_6 \cdot \Delta \mathbf{L}_{af}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta S_D$$

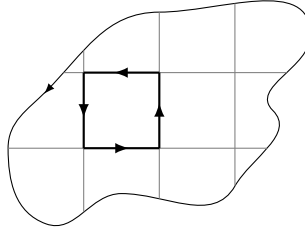
اور

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{L}_{cb} + \mathbf{H}_3 \cdot \Delta \mathbf{L}_{dc} + \mathbf{H}_4 \cdot \Delta \mathbf{L}_{ed} + \mathbf{H}_7 \cdot \Delta \mathbf{L}_{be}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمیل میں $\mathbf{H}_7 \cdot \Delta \mathbf{L}_{be} = -\mathbf{H}_7 \cdot \Delta \mathbf{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمیل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B + \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D &\doteq \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{L}_{ba} + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{L}_{cb} + \mathbf{H}_3 \cdot \Delta \mathbf{L}_{dc} + \mathbf{H}_4 \cdot \Delta \mathbf{L}_{ed} + \mathbf{H}_5 \cdot \Delta \mathbf{L}_{fe} + \mathbf{H}_6 \cdot \Delta \mathbf{L}_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta S_B + (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta S_D \end{aligned}$$



شکل 7.15: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.14-ب کو دیکھ کر لکھی جاسکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.14-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔ شکل 7.15 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو بڑے چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta S$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot d\mathbf{S} \quad (7.62)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $d\mathbf{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.62 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات مسئلہ سٹوکس⁹ بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ کے دونوں اطراف کا $d\mathbf{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاؤ حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \mathbf{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں \mathbf{A} کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاؤ کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔ کسی بھی عمومی سمتیہ میدان \mathbf{A} کا گردش $\nabla \times \mathbf{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاؤ $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی مکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dh = \int_{\text{حجم}} T dh$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاؤ لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{حجم}} T dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \mathbf{A}$ کا مکمل ہے۔ مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی مکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری مکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری مکمل لیا جائے گا۔ جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔ صفر لمبائی کے راہ پر مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی حجم dh کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T dh = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (7.63)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.63 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کا گردش اور گردش کا پھیلاؤ کارتیسی محدود میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

جس کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.63 کے تحت گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(7.64) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ہوگا۔ اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.64 درست ہو۔ یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاؤ B کی تعریف

$$(7.65) \quad B = \mu_0 H$$

ہے جہاں B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر Wb/m^2 ہے جسے ٹسلا¹⁰ پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل¹¹ ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\text{H}}{\text{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ خالی خلاء میں

$$(7.66) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ H کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد ولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جاسکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاؤ D اور برقی میدان کی شدت E کا تعلق

$$D = \epsilon_0 E$$

ہو بہو مساوات 7.65 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہاؤ کا سطحی مکمل برقی بہاؤ ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔ یوں برقی بہاؤ کا منبع برقی چارج ہے۔ مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔ آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔ یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاؤ اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاؤ کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ ناتو مقناطیسی بہاؤ اس برقی رو سے خارج اور ناہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہاؤ کا سطحی مکمل مقناطیسی بہاؤ Φ^{12} دیتا ہے جسے ویبر¹³ Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad Wb \quad (7.67)$$

چونکہ مقناطیسی بہاؤ بند دائرہ بناتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاؤ داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاؤ اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاؤ کا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.68)$$

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.69)$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.68 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔ اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔ فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.69 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.69 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (7.70)$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (7.71)$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباؤ کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (7.72)$$

مساوات 7.70 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاؤ اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔ انہیں کی مکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h dh \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (7.73)$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباؤ پر بھی غور کریں گے۔ ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب P کی صورت میں شامل کیا۔ ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔ اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاؤ کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاؤ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہو گا۔ اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاؤ وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔ تار کو z محور پر تصور کرتے ہوئے $z = d$ تا $z = 0$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ

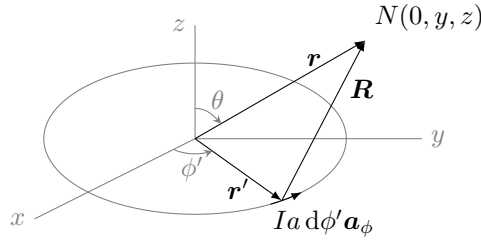
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot (d\rho dz \mathbf{a}_\phi)$$

یعنی

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (7.74)$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جاسکتی ہے۔ ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا ایک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین H اور B حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔



شکل 7.16: گول بند دائرے میں ایک سمتی برقی رو سے محور پر ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 109 \mu Wb$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 56.6 \mu Wb$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446 \mu Wb$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدود کے $(0, 0, 0)$ پر ہے۔ اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ ہائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں H حاصل کریں۔

$$H = \frac{I}{2\rho} a_z \text{ جواب}$$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل¹⁴ حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 7.4: شکل 7.16 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0, y, z)$ پر گول بند دائرے میں ایک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $a'_{\phi} d\phi' = a d\phi' a'_{\phi}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ a'_{ϕ} کو کارٹیزی محدود میں

$$a'_{\phi} = -\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$d\mathbf{L}' = a d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{a}_x + \cos \phi' \mathbf{a}_y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ چھوٹی لمبائی خود $(a \cos \phi', a \sin \phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}'_\rho = a \cos \phi' \mathbf{a}_x + a \sin \phi' \mathbf{a}_y$$

کے برابر ہے۔ نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

ہے۔ یوں

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}| = R &= \sqrt{(-a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'} \end{aligned}$$

اور

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{-a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بائوٹ سیوارٹ قانون میں $\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں پہلے $d\mathbf{L}' \times \mathbf{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

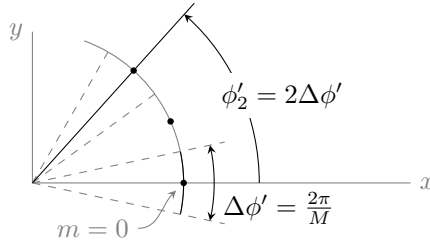
$$\begin{aligned} d\mathbf{L}' \times \mathbf{R} &= a d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{a}_x + \cos \phi' \mathbf{a}_y) \times [-a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z] \\ &= a d\phi' [z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z] \end{aligned}$$

یوں بائوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\mathbf{H} = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} d\phi'$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\phi' - \pi$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'$ پر کرتے ہوئے مکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} = 0$$



شکل 7.17: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ہی ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} \quad (7.75)$$

$$H_z = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - y \sin \phi') d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل¹⁵ ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل¹⁶ بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

حل: اس نقطے پر

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(3 - 2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جائے گا۔ اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.17 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M - 1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi'_0 = 0$ ہو گا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi'_1 = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi'_2 = 2\Delta\phi' = \frac{2 \times 2\pi}{M}$ ہو گا۔ یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi'_m = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

$\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3-2\sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
-0.06889	6
-0.08763	7
-0.08763	8
-0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر مکمل تقریباً

$$\Delta H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin \phi'_m \Delta \phi'}{(3 - 2 \sin \phi'_m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin(\frac{2m\pi}{M}) \frac{2\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔ جدول 7.1 میں $M = 10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ ان تمام کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} (0.00000 + 0.23852 + 0.82674 + 0.82674 + 0.23852 + 0.00000$$

$$- 0.06889 - 0.08763 - 0.08763 - 0.06889)$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{10} (1.8175)$$

$$= 1.1420 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ ان تعلق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔ درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔ موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ دس سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433 - 1.1420}{1.1433} \right) \times 100 = 0.11 \%$$

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ

برقی میدان کے مسائل برقی دباؤ کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔ گھریلو 220 V کے برقی دباؤ سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ اگرچہ برقی دباؤ سے ہمیں روزمرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباؤ کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباؤ اور پھر برقی دباؤ سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباؤ غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباؤ کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ¹⁷ بیان کیا جاسکتا ہے۔ البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔ یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباؤ¹⁸ بھی بیان کیا جاسکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ سمتی مقناطیسی دباؤ¹⁹ اینٹینا، موج²⁰ اور مائکروویو چولھے (خرد موج چولھے)²¹ پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔ آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباؤ دیکھیں۔

برقی دباؤ اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 100 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔ اس طرح

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \quad (7.76)$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیر کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\mathbf{J} = 0$ ہو یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (7.77)$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباؤ پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔ اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہوگی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (7.78)$$

scalar magnetic potential¹⁷
vector magnetic potential¹⁸
antenna¹⁹
waveguide²⁰
microwave oven²¹

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہوگی۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباؤ اٹل قیمت رکھتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محور پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں a_z جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ ایسی تار کے گرد جہاں $J = 0$ ہے

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.77 اور نکلی محدود میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تاکہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔ اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے تاکہ صفر۔ تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چنے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباؤ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ہوتا ہے لہذا دو نقطوں کے مابین لکیری مکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

کا دار و مدار مکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ مکمل کے راہ پر $J = 0$ ہے۔ یوں مکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، مکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ ہاں اگر مکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباؤ بھی ایک قیمت رکھے گا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباؤ

$$V_{ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \quad (7.79)$$

بیان کی جاتی ہے۔ ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔ اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔ یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = - \frac{I}{2\pi} \phi \quad (-\pi < \phi \leq \pi) \quad (7.80)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔ صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔ یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہوگی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوگی یعنی

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (7.81)$$

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ہم شروع

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.82)$$

سے کرتے ہیں۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔ مساوات 7.63 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا اگر \mathbf{B} سمتی متغیرہ \mathbf{A} کا گردش

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.83)$$

ہو تب بھی \mathbf{B} کا پھیلاؤ

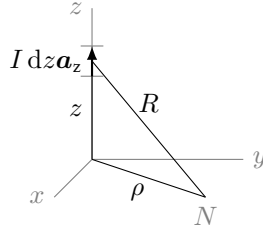
$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ ہم مساوات 7.83 میں دئے \mathbf{A} کو سمتی مقناطیسی دباؤ کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں سمتی مقناطیسی دباؤ خود بخود مساوات 7.82 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$



شکل 7.18: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباؤ۔

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباؤ A کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{Wb}{m}$ ہے۔ گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 198 پر مساوات 7.38 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ B اور A کے تعریف اور ہائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$A = \oint \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R} \quad (7.84)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم نے A کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے B یا H کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباؤ کے مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.84 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ A واقع سمتی مقناطیسی دباؤ ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری مکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی روا اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری مکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے dL کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.84 کی تفرق شکل

$$dA = \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R} \quad (7.85)$$

بھی لکھی جاسکتی ہے جب تک dL سے حاصل dA کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند مکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل A کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.18 میں z محدود پر لا محدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ dL دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$dA = \frac{\mu_0 I dz a_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

یا

$$dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad dA_\rho = 0, \quad dA_\phi = 0 \quad (7.86)$$

سمتی مقناطیسی دباؤ پیدا کرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباؤ تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت تکلی محدود میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho \mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔ یہی مساوات شکل 7.18 کو دیکھتے ہوئے باؤٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جاسکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباؤ \mathbf{A} کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جاسکتے ہیں۔ یوں سطحی کثافت برقی رو \mathbf{K} کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{K} d\mathbf{S}$$

اور حجمی کثافت برقی رو \mathbf{J} کے لئے

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{J} dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I d\mathbf{L}$ لکھا جاتا ہے۔ یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔ اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $d\mathbf{S}$ اور تفرقی حجم dh کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔ یوں \mathbf{A} کے دیگر کلیے

$$(7.87) \quad \mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} d\mathbf{S}}{4\pi R}$$

اور

$$(7.88) \quad \mathbf{A} = \int_h \frac{\mu_0 \mathbf{J} dh}{4\pi R}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباؤ مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباؤ کی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \rightarrow 0$ پر $\mathbf{A} \rightarrow 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \rightarrow \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباؤ پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر \mathbf{B} حاصل کرتے ہوئے \mathbf{A} بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدود پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہذا اس دائرے پر $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{B} کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں \mathbf{A} کے گردش کو مساوات 7.52 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی رو a_z سمت میں ہے لہذا A کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M مکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بائوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$(7.89) \quad H = \oint \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

سمتی مقناطیسی دباؤ کے تعریف

$$(7.90) \quad B = \nabla \times A$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کشافیت مقناطیسی بہاؤ کے تعلق

$$(7.91) \quad B = \mu_0 H$$

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ

سمتی مقناطیسی دباؤ A کی مساوات

$$(7.92) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بائوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.89 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.88 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباؤ دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارنا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو dh_1 لکھیں گے جو $dx_1 dy_1 dz_1$ کے برابر ہو گا۔ تکمیل کے متغیرات x_1, y_1, z_1 اور z_1 ہیں۔ یوں

$$A_2 = \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}} \quad (7.93)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times A_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہذا گردش کے متغیرات بھی x_2, y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 100 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2, y_2, z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.93 سے A_2 پر کرتے ہوئے

$$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں تکمیل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ تکمیل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا ہم تفرق کے عمل کو تکمیل کے اندر لے جاسکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمیل کے باہر لایا جاسکتا ہے۔ یوں

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{J_1 dh_1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں $dh_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ اس کے علاوہ اس کا x_2, y_2, z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{J_1}{R_{21}} \right) dh_1 \quad (7.94)$$

یہاں سمتیہ J ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ S اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (MS) \equiv (\nabla M) \times S + M(\nabla \times S) \quad (7.95)$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.94 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ J_1 اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times J_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times J_1) \right] dh_1 \quad (7.96)$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں J_1 صرف x_1, y_1, z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہذا J_1 کے تمام تفرق جو x_2, y_2, z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times J_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 101 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$H_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{a_{R_{21}} \times J_1}{R_{21}^2} dh_1$$

یا

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس میں $J_1 dh_1$ کی جگہ کیری انداز میں $I_1 dL_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بائیوٹ سیوارٹ مساوات

$$\mathbf{H}_2 = \oint_h \frac{I d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.93 درست ہے اور یہ مساوات، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.97)$$

کو بائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.90 اور مساوات 7.91 سے جن سے

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.98)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 198 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \right] \quad (7.99)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاؤ اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاؤ کو پہلے حل کرتے ہیں۔ مساوات 7.93 کی پھیلاؤ

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} dh_1 \quad (7.100)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ صفحہ 112 پر مثال 4.7 میں سمتیہ \mathbf{D} اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ \mathbf{J}_1 جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہذا اس مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right) \quad (7.101)$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1 \quad (7.102)$$

1814

1815

1816

1817

ہو گا۔

چونکہ J_1 صرف متغیرات x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہذا اس کے x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہذا $\nabla_2 \cdot J_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 101 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.103) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-J_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.101 کے دوبارہ استعمال سے

$$(7.104) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot J_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{J_1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.64 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot J = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$(7.105) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{J_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی مکمل کو سطحی مکمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.106) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{J_1}{R_{21}} \cdot dS_1$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی مکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی مکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم مکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تاکہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے مکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر مکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی مکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.107) \quad \nabla \cdot A = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباؤ کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاؤ بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.99 حل کرنے کی خاطر پھیلاؤ اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاؤ حاصل ہو چکا ہے انہیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباؤ اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 R} dh$$

$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x}{4\pi R} dh$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$(7.108) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.99 میں مساوات 7.107 اور مساوات 7.108 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.109) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباؤ کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباؤ کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور \mathbf{A} کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور \mathbf{A} کی تعریف

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 198 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.107 کی مدد سے

$$(7.110) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.2: شکل 7.8 کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بائوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.3: مساوات 7.20 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.9 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}(-\frac{\Delta x}{2})$ تبدیلی رونما ہوگی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔

سوال 7.4: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.5: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے تکلی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.6: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.75 میں دئے بیضوی مکمل حاصل کئے گئے۔ ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔ بالکل اسی طرز پر مکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0, a, a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)$

