برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدان یعنی میدانوں پر غور کیا گیا۔ یہاں سے آگے اس کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

دو نئے اصول پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ قانون فیراڈے[1] کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی بند راہ سے گزرتی مقناطیس بہاو میں تبدیلی اس راہ پر برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباو روایتی طور پر محرک برقی دباو[2] پکاری جاتی ہے۔ محرک برقی دباو[3] کی قیمت وقت کے ساتھ بند راہ سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے تبدیلی کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباو کی اکائی وولٹ V ہے۔ ضروری نہیں کہ بند راہ موصل مادے کی ہی ہو، یہ فرضی بند لکیر بھی ہو سکتی ہے۔

محرک برقی دباو مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، بند راہ میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی جس کی سمت، راہ میں پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے سمت، کی الٹ ہوتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے کہ بند راہ میں محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو ایسا مقناطیسی بہاو پیدا کرتی ہے جو پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے الٹ سمت رکھتی ہے۔ اس اصول کو لینز[5][4] کا اصول کہا جاتا ہے۔

کسی بھی بند راہ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

---

[1] Faraday's law
[2] electromotive force, emf
[3] محرک برقی دباو کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباو کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔
[4] یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔
[5] Lenz's law

- وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی کثافت مقناطیسی بہاو جو ساکن بند راہ سے گزرتی ہو۔
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند راہ کا آپس میں اضافی حرکت۔
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند راہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$\text{محرک برقی دباو} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی دباو کے طرز پر محرک برقی دباو کی تعریف

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.3}$$

لکھی جاتی ہے جہاں تکمل پورے بند راہ پر لینا لازم ہے۔ برقی دباو کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت $(-)$ لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباو بند راہ پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 97 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل اس راہ پر پیدا محرک برقی دباو دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کا سطحی تکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند راہ کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں راہ پر چلنے کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا راہ سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہو گا۔ مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباو سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند راہ میں محرک برقی دباو پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے راہ کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباو پر غور کریں۔

ساکن راہ کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر $\boldsymbol{B}$ ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ سطح S ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند راہ ہو۔یوں ہم دونوں جانب مختلف سطحیں لے سکتے ہیں جب تک دونوں سطحوں کے سرحد یہی بند راہ ہو۔اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب تکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی سطح $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے لئے بھی درست ہے۔تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔میکس ویل کے پہلی مساوات کی تکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.7}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نلکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{kt} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \qquad (\rho < \rho_2) \tag{9.8}$$

کثافت مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کی گول راہ لیتے ہیں۔مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے راہ پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہٰذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi \rho_1^2$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \boldsymbol{a}_\phi \tag{9.9}$$

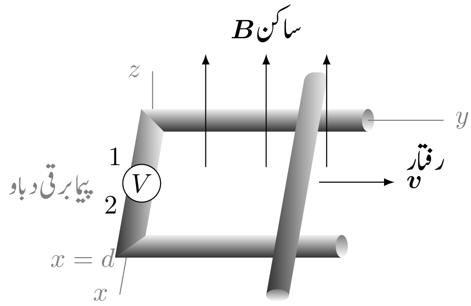
لکھی جا سکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جزو پایا جاتا ہے لہٰذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہٰذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

یعنی

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \boldsymbol{a}_{\phi} \tag{9.10}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس راہ پر $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند راہ حرکت کر رہی ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباو ناپنے کی آلہ[6] یعنی پیما برقی دباو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند راہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیما برقی دباو نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ بند راہ کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}$ کی سمت ہی بند راہ سے گھیری گئی سطح کی سمت ہو گی اور بند راہ کی سمت گھڑی کے الٹ ہو گی۔ یوں راہ کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdvt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bdv$$

محرک برقی دباو e پیدا کرے گا۔

[6] وولٹ میٹر
[7] voltmeter

اب محرک برقی دباو $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو کہتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا جواب راہ پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔پیما برقی دباو کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہٰذا تکمل کی قیمت پیما برقی دباو پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیما برقی دباو کی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=-Bdv$ ہونا ہو گا۔چونکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}L\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{E}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ ہو گی۔یوں پیما برقی دباو پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت پیما کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیما پر برقی دباو کا مثبت سرا پیما کا دوسرا سرا ہے۔

پیما کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباو تصور کرتے ہوئے حل کریں۔مقناطیسی میدان میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$\boldsymbol{F}=Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

یا حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}=\frac{\boldsymbol{F}}{Q}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9.11}$$

عمل کرتی ہے۔حرکی شدت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہے۔حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ پیدا کرے گا۔الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ برابر ہو جائیں۔ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکی برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو}=\oint\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.12}$$

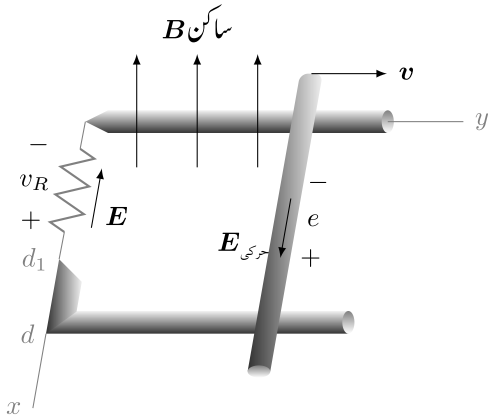
سے حاصل ہو گی۔مساوات کے دائیں ہاتھ بند راہ کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا محرک برقی دباو صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

$$\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_d^0 vB\,\mathrm{d}x=-Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{B}$ از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہٰذا یہی کل محرک برقی دباو ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند راہ میں محرک برقی دباو حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ کے استعمال سے محرک برقی دباو یوں

$$\text{محرک برقی دباو}=\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\oint\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.13}$$



شکل 9.2: محرک برقی دباو اور برقی دباو کا موازنہ۔

حاصل کی جا سکتی ہے۔البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباو کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.14}$$

سے حاصل ہو گی۔یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیدا برقی دباو کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباو کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 9.11 محرک سلاخ پر پیدا $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُرلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباو v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پرلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

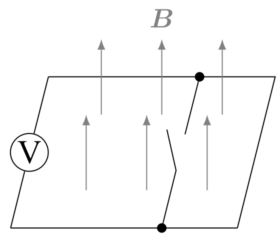
آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے برقی دباو v_R یوں

$$v_R = -\int_0^{d_1} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d_1} E\,\mathrm{d}x = Ed_1 \tag{9.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = E_{\text{حرکی}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے حرکی دباو e یوں

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d E_{\text{حرکی}}\,\mathrm{d}x = E_{\text{حرکی}}d \tag{9.16}$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباو کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہٰذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔حرکی دباو کے بند تکمل میں راہ کے بقایا اطراف پر تکمل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمل لیا گیا ہے۔



شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند راہ سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند راہ کا کوئی حصہ متحرک ہے۔البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند راہ میں مقناطیسی بہاو کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند راہ کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $\boldsymbol{B} = 0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ٹسلا، رفتار $100y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21}،
- پیما برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $4.017\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $100\,\mathrm{V}$، $10\,\mu\mathrm{A}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.17}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{9.18}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔اس مساوات کی پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاو ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.19}$$

ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.18 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہٰذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.18 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔تصور کریں کہ مساوات 9.18 میں نا معلوم جزو $\boldsymbol{G}$ کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 9.18 یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

لکھی جائے گی۔آئیں دوبارہ اس کی پھیلاو حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \left(\nabla \cdot \boldsymbol{D}\right)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.20}$$

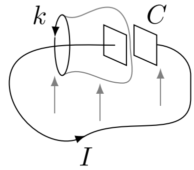
ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.20 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو[8] کا نام دیا اور $\boldsymbol{J}_d$ سے ظاہر کیا یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d$$
$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

---

[8] displacement current density



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.21}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.22}$$

شامل ہیں۔ مساوات 9.20 میں $\boldsymbol{J}$ سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج $\boldsymbol{H}$ کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\boldsymbol{J} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر موصل میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{9.23}$$

ہو گا۔ مساوات 9.23 اور مساوات 9.17 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ اور برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو $\boldsymbol{D}$ اور کثافت بہاو $\boldsymbol{B}$ بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$I_d = \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.24}$$

سے حاصل ہو گی۔ مساوات 9.20 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.25}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دو سرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ محرک برقی دباو

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔ یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں ϵ، S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔ آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند راہ k پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_k$$

اب بند راہ k اور اس راہ پر $\boldsymbol{H}$ حقیقی مقدار ہیں اور تکمل سے حاصل رو I_k اس راہ سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔ یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔ کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہٰذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہٰذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔ اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مشق 9.2: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔ اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔ پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $\frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.26}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.27}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{9.28}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.29}$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.28 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند راہ پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا نا تو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.29 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاو کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاو نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا یک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاو اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{9.30}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9.31}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.33}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کی جگہ

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right) \tag{9.35}$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E} \tag{9.36}$$

اور

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{9.37}$$

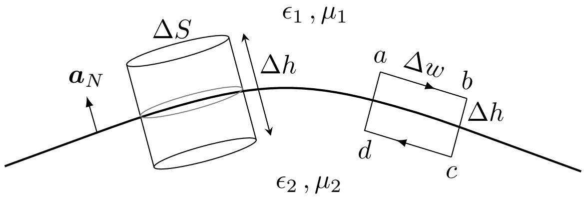
لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$\boldsymbol{F} = \rho_h \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{9.38}$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباو V اور سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل

مساوات 9.26 کے سطحی تکمل پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کرتے ہوئے فیراڈے کا قانون

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{S} \tag{9.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 9.27 اسی طریقہ کار سے ایمپیئر کا دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=I+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے لئے گاؤس کے قوانین مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کے تمام حجم پر حجمی تکمل اور مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{9.41}$$

اور

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{9.42}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا چار مساوات سے $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{H}$، $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہٰذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل راہ پر مساوات 9.39 کے اطلاق سے

$$\left(E_{m1}-E_{m2}\right)\Delta w=-\frac{\partial B_n}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد راہ کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$E_{m1}=E_{m2} \tag{9.43}$$

یعنی

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{9.44}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی رو کو $I = \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں شکل 9.5 میں مستطیل راہ پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2})\,\Delta w = K_{\perp}\Delta w + \frac{\partial D}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے لہٰذا اس جزو کو نظرانداز کرتے ہوئے

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{9.45}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{9.46}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ صفر ہوتی ہے۔لہٰذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$H_{m1} = H_{m2} \tag{9.47}$$

ہو گا۔صفحہ 241 پر شکل 8.8 میں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.41 اور مساوات 9.42 سے سرحدی عمودی شرائط

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{9.48}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{9.49}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر $\boldsymbol{J}$ محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.50}$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.51}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود $\boldsymbol{J}$ کی قیمت

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{9.52}$$

حاصل ہوتی ہے لہٰذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ ممکن ہے۔یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.43 تا مساوات 9.49 سے

$$E_{m1} = 0 \tag{9.53}$$
$$H_{m1} = 0 \tag{9.54}$$
$$D_{n1} = \rho_S \tag{9.55}$$
$$B_{n1} = 0 \tag{9.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.53 تا مساوات 9.56 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت بغیر سرحد کے خطے میں لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔میکس ویل مساوات کا یہ سب سے آسان استعمال ہے چونکہ ان میں کسی قسم کے سرحدی شرائط لاگو نہیں ہوتے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں تاخیری دباو[9] کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج[10] کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$V = \int_h \frac{\rho_h \,\mathrm{d}h}{4\pi\epsilon R} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.57}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}h}{4\pi R} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.58}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.59}$$

اور

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.60}$$

ہیں۔

---

[9] retarded potentials
[10] radiation

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.61}$$

اور گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.62}$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو گا۔ صفحہ 209 پر مساوات 7.62 کے تحت گردش کی پھیلاو لازماً صفر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 9.62 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.62 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 218 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.61 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.26 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.61 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.61 کے دائیں جانب متغیرہ $\boldsymbol{N}$ جمع کریں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V + \boldsymbol{N}$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال $\boldsymbol{N}$ ایک نامعلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times \boldsymbol{N} \\ &= 0 + \nabla \times \boldsymbol{N}\end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.62 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

یا

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

ہے لہٰذا اب ہم

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.63}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.28

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{J} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

یا

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \right) \tag{9.64}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.63 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.28 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) = \rho_h$$

یا

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{9.65}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 سے بالترتیب مساوات 9.60 اور مساوات 9.59 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباو کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ ان سے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{E}$ بذریعہ مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 حاصل کئے جا سکتے ہوں۔ البتہ $\boldsymbol{A}$ اور V کو مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر $\boldsymbol{A}$ اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباو ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.62 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباو سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے $\boldsymbol{A}$ کے حصول کے وقت تکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لا محدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لا محدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاو سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں $\boldsymbol{A}$ کی پھیلاو بیان کریں۔ ہم مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.66}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.64

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{9.67}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.65

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9.68}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.69}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.70}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.71}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{9.72}$$

کے برابر ہوتی ہے۔خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔اس سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطے N_2 پر دباو کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہٰذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.57 کی نئی شکل

$$V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} \,\mathrm{d}h \tag{9.73}$$

ہو گی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباو کا حصول درکار ہو۔

اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.58 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباو کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu [\boldsymbol{J}]}{4\pi R} \, \mathrm{d}h \tag{9.74}$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباو کو تاخیری دباو[11] کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباو کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔یوں اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.73 اور مساوات 9.74 سے V اور $\boldsymbol{A}$ حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.69 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.71 حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباو، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔

[11] retarded potential

باب 10

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہٰذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ایسے امواج کی تعدد[2] کا دارومدار چارج یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔یوں ω زاویائی تعدد[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی[4] کہلاتی ہے۔سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ہم $380\,\mathrm{nm}$ تا $750\,\mathrm{nm}$ کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس[6]، شعاعی انحراف[7] اور انکسار امواج[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار جسم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے

electromagnetic[1]
frequency[2]
angular frequency[3]
light[4]
time period[5]
reflection[6]
refraction[7]
diffraction[8]

ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہٰذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 263 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔خالی خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہٰذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ϕ زاویائی فاصلہ[11] ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x، y، z اور ω کا تابع تفاعل[12] ہو سکتا ہے۔تعدد f کی اکائی ہرٹز[13] ہے۔یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

[9] phasor
[10] angular frequency
[11] phase angle
[12] dependent function
[13] Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل[14] کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد[15] ہے۔آزاد متغیرہ $\omega t + \psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t+\psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جا سکتا ہے جو حقیقی[16] اور خیالی[17] اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل[18] ہے۔یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد[19] ہے۔ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t-0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)\right] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi)\\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

[14] Euler's identity
[15] imaginary number
[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_s = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s\right) - \nabla^2\boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_s = j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s = \gamma^2\boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)} \tag{10.12}$$

حر کی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21][22] کہلاتی ہے۔کارتیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

[20] propagation constant
[21] vector Helmholtz equation
[22] ہرمن لڈوگ فرڈیناڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2}=\gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}=0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}=0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2}=\gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs}=Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

اور

$$E_{xs}=Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma=\alpha+j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔مساوات 10.18 در حقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned}E_x&=\left[Ae^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z}\right]_{\text{حقیقی}}\\&=\left[Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x=Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)$$

لیتے ہیں۔مساوات کے مستقل A کی جگہ $t=0$ اور $z=0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x=E_0e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مستوی موج[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x=E_0e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z) \tag{10.21}$$

حاصل ہوتی۔

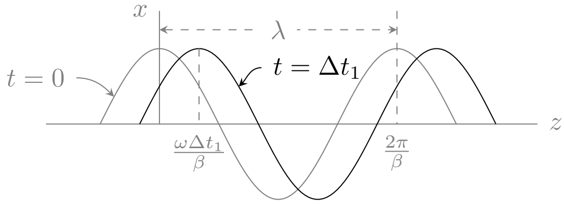
مساوات 10.18 میں $A=E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s=E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{10.22}$$

لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو پر مشتمل ہے۔آئیں مساوات 10.20 میں دیے متحرک موج[24] پر اب غور کریں۔

---

[23] plane wave
[24] travelling wave



شکل 10.1: وقت $t=0$ اور $t=t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α تقلیلی مستقل[25] کہلاتا ہے۔تقلیلی مستقل کو نیپر[26] فی میٹر $\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا[27] جاتا ہے۔یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد[28] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کے مساوات میں $-\beta z$ زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[29] کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha=0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t=0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t=0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z=0$ اور $z=\frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[30] پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

ہے جس سے

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t=\Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega\Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کے رفتار کو

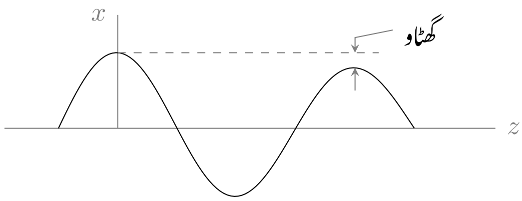
$$v=\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega\Delta t_1}{\beta}\frac{1}{\Delta t_1}=\frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v=f\lambda \tag{10.26}$$

[25] attenuation constant
[26] neper
[27] تقلیلی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[28] dimensionless
[29] phase constant
[30] wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega \, \mathrm{d}t - \beta \, \mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\alpha = 0.001\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $1\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $0.368 = \frac{e^{-1}}{e^{-0}}$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج $\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s=\frac{\gamma}{j\omega\mu}E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_s&=\sqrt{\frac{\sigma+j\omega\epsilon}{j\omega\mu}}E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&=\frac{E_0}{\eta}e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned}\tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}}\tag{10.31}$$

لکھی[31] گئی[32] ہے۔اس مساوات کو

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}}\tag{10.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs}=E_0e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys}=\frac{E_0}{\eta}e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}}=\eta\tag{10.33}$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔منبع برقی دباو $V_0\cos(\omega t-\psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=R+jX=\left|Z\right|e^{j\theta_Z}=\left|Z\right|\underline{/\theta_Z}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L>\frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L<\frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔مزید $\omega L=\frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z=0$ ہو گا۔اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s=\frac{V_s}{Z_s}=\frac{V_0e^{-j\psi}}{\left|Z\right|e^{j\theta_Z}}=\frac{V_0}{\left|Z\right|}e^{-j(\psi+\theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i=\frac{V_0}{\left|Z\right|}\cos\left(\omega t-\psi-\theta_Z\right)$$

[31] یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔
[32] eta η

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| \, e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباو کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہوبہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η، قدرتی رکاوٹ[33] کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta| \, e^{j\theta_\eta} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج[34] کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \end{aligned}$$

---

[33] intrinsic impedance
[34] transverse waves

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377 \, \Omega \tag{10.37}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \\ H_y &= \frac{E_0}{120\pi} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[35] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

---

[35] wireless

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.38}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہو گی۔خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.39}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔چونکہ $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$E_x = E_0\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.40}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.41}$$

ہیں۔

مثال 10.1: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظرانداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29 \, \mathrm{cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1 \, \mathrm{m}$ ہے۔بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7 \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58 \, \Omega$$

ہیں۔امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$
$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے، $5.6 \, \mathrm{GHz}$ اور $10 \, \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $23 \, \mathrm{cm}$، $272.6 \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $162.1 \, \Omega$ اور $1.62 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 286 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2\times\pi\times 20\times 10^9 \times \frac{\sqrt{1\times 41}}{3\times 10^8}\sqrt{1-j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^\circ}\\ &= 1005 + j2864 \quad \mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تقلیلی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[36] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}}\frac{1}{\sqrt{1-j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

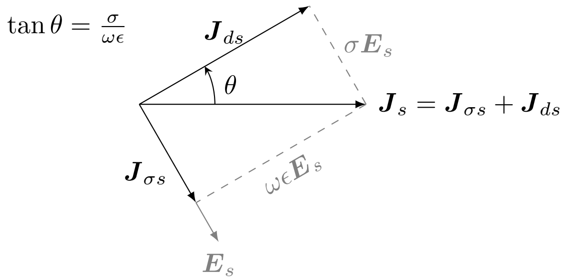
میکس ویل کے مساوات

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s} + \boldsymbol{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی

---

[36] radar



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

رو سے $90°$ آگے رہتی ہے۔مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.42}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجنٹ[37] یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی[38]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.43}$$

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.44}$$

---

[37] loss tangent
[38] binomial theorem

حاصل ہوتے ہیں۔اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.45}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.46}$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل $20\,\mathrm{GHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.43 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے کافی قریب ہے۔مساوات 10.44 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ کے بہت قریب ہے۔مساوات 10.45 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔قدرتی رکاوٹ مساوات 10.46 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

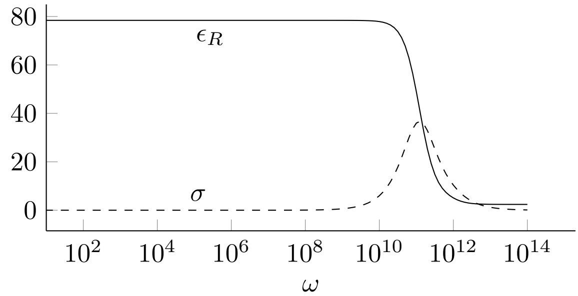
حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.47 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $0.1 > \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔افقی محدد تعدد کا لاگ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\mathrm{Grad}}{\mathrm{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تقلیلی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642، $1.13 \times 10^{-3}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4}\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کا تقلیلی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، 6.9 m، $0.095\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، 2.3 m

---

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ[39] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[40] حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

[39] Poynting theorem
[40] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ باآسانی کارتیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2}\right)$$

اور

$$\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}h=\int_h\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h+\frac{\partial}{\partial t}\int_h\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\mathrm{d}h$$

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h+\frac{\partial}{\partial t}\int_h\left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\mathrm{d}h \tag{10.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔سمتی ضرب $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ پوئنٹنگ سمتیہ[41] $\mathscr{P}$ پکارا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{10.49}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہٰذا طاقت کی بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گی۔ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لہٰذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔مزید کامل ذو برق میں

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\
H_y &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)
\end{aligned}$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \mathscr{P} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} \left[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}}
\end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{10.50}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاو دیتا ہے۔اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad \mathrm{W}$$

[41] Poynting vector

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos(\theta_\eta) \tag{10.51}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

لیا گیا ہے۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z = 0$ اور $z = 5\,\mathrm{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 27.1 W، 26.4 W، 24.7 W، 12.48 W، 23.7 W، 14.31 W

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔ نائیکروم[42] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع $100\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

---

[42] nichrome

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.52}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.53}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔مساوات 10.54 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0\cos\omega t \qquad (z = 0) \tag{10.55}$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.55 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.54 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{10.56}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.54 اور مساوات 10.57 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$ جزو پر غور کریں۔سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔یہ فاصلہ گہرائی جلد[43] کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.58}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد[44] کہا جاتا ہے۔یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \tag{10.59}$$

ہو گا۔اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف 1.8 % رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.368^2 = 0.135$ گنا کم ہو گی۔ خرد امواج[45] کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد 0.661 µm یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظرانداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر 0.661 µm موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.59 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

[43] skin depth
[44] skin effect
[45] microwave

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح مساوات 10.25

$$v=\frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v=\omega\delta \tag{10.60}$$

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8\,\mathrm{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ یا $10.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔میں تقریباً $6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000\,\mathrm{km}$ اور رفتار $3\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہو گی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔مساوات 10.31

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\gg1$ کی وجہ سے

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$\eta=\frac{\sqrt{2}\underline{/45^\circ}}{\sigma\delta}=\frac{1}{\sigma\delta}+j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 10.55 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x=E_0e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right) \tag{10.62}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y=\frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{10.63}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

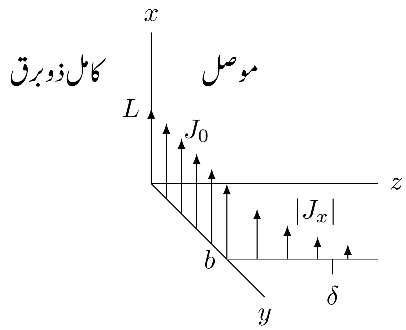
مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2z}{\delta}}\cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{\sigma\delta E_0^2}{4}e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2}=0.135$ گنا رہ گئی ہے۔



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^L \left.\frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right|_{z=0} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta b L J_0^2 \tag{10.64}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned}
J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\
&= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}
\end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty}\int_0^{b} J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{J_0 b\delta}{1+j}
\end{aligned}
$$

اس سے

$$
I = \frac{J_0 b\delta}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$
J_x' = \frac{J_0}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$
P_L = \frac{1}{\sigma}\left(J_x'\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta\cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گا۔ مربع کوسائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$
P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.65}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.64 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لا محدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$
R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r\delta} \tag{10.66}
$$

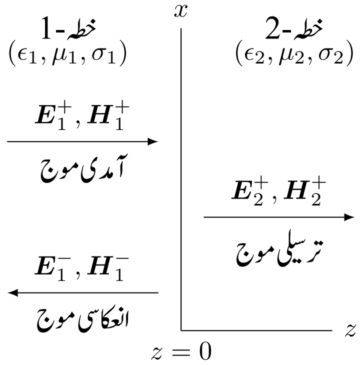
ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$
R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8\times 10^7\times\pi\times 0.001^2} = 54.88\,\mathrm{m\Omega}
$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mathrm{\mu m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$
R = \frac{10}{5.8\times 10^7\times 2\times\pi\times 0.001\times 6.61\times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega
$$

ہو گی۔



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس $5\,\mathrm{mm}$ اور جس کی لمبائی $2.5\,\mathrm{m}$ ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رو مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09\,\mathrm{m\Omega}$، $62\,\mathrm{\mu m}$، $1.25\,\Omega$ اور $2.49\,\mathrm{W}$

10.5 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج ترسیلی تاروں[46] اور رہبر موج[47] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

[46] transmission lines
[47] waveguide

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^{+} = E_{x10}^{+} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.67}$$

آتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^{+} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.68}$$

بھی ہو گی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج[48] کہا جاتا ہے۔چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہٰذا اس کے حرکت کو عمودی آمد[49] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج[50] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلتے جائے گا۔ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^{+} = E_{x20}^{+} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.69}$$

$$H_{ys2}^{+} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.70}$$

ہیں۔سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔صفحہ 264 پر مساوات 9.43 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.45 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔یوں $K_\perp = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned}
E_{m1} &= E_{m2} \\
H_{m1} &= H_{m2} \quad (K_\perp = 0)
\end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.67 اور مساوات 10.69 برابر ہوں گے۔یوں $E_{x10}^{+} = E_{x20}^{+}$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.68 اور مساوات 10.70 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$E_{xs1}^{-} = E_{x10}^{-} e^{\gamma_1 z} \tag{10.71}$$

$$H_{ys1}^{-} = -\frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \tag{10.72}$$

---

[48] incident wave
[49] normal incidence
[50] transmitted wave

بھی پائے جائیں جنہیں انعکاسی امواج[51] کہا جاتا ہے۔انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔انعکاسی موج میں E^-_{x10} مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E^-_{xs1} = -\eta_1 H^-_{ys1}$ ہو گا تاکہ $\boldsymbol{E}^-_1 \times \boldsymbol{H}^-_1$ کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E^+_{x10} کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E^+_{xs1} + E^-_{xs1} = E^+_{xs2} \quad (z = 0)$$

یا

$$E^+_{x10} + E^-_{x10} = E^+_{x20} \tag{10.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یعنی

$$H^+_{ys1} + H^-_{ys1} = H^+_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یا

$$\frac{E^+_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x20}}{\eta_2} \tag{10.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 کو E^-_{x10} کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.73 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E^+_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x10} + E^-_{x10}}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E^-_{x10} = E^+_{x10} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس[52] پکارا اور Γ سے ظاہر[53] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E^-_{x10}}{E^+_{x10}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.75}$$

---

[51] reflected wave
[52] reflection coefficient
[53] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.76}$$

اسی طرح مساوات 10.73 اور مساوات 10.74 سے E_{x10}^{-} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E_{x20}^{+}}{E_{x10}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل[54] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مساوات 10.75 اور مساوات 10.77 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہٰذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔یوں مساوات 10.77 سے

$$E_{x20}^{+} = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.75 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^{-} = -E_{x10}^{+}$$

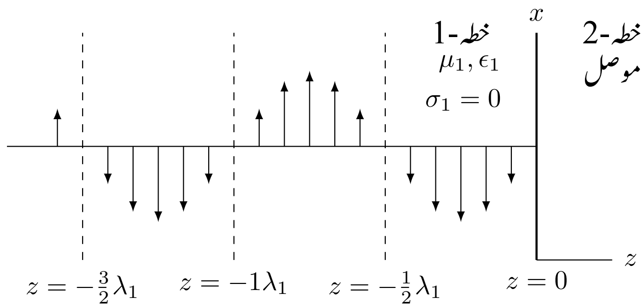
حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں 180° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+}\left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}\right) \\ &= -j2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

[54] transmission coefficient



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t \tag{10.79}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.79 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.79 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔مساوات 10.79 کو ساکن موج[55] کہا جاتا ہے۔برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E_{xs1}^{+} = \eta_1 H_{ys1}^{+}$ اور $E_{xs1}^{-} = -\eta_1 H_{ys1}^{-}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} \left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z} \right)$$

---

[55] standing wave

یا

$$H_{y1}=2\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t \tag{10.80}$$

ہو گا۔یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں $90°$ کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1=0$ اور $\alpha_2=0$ ہوں گے۔عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔فرض کریں کہ

$$\begin{aligned}\eta_1&=50\,\Omega\\ \eta_2&=377\,\Omega\\ E_{x10}^{+}&=10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

ہیں۔یوں

$$\Gamma=\frac{377-50}{377+50}=0.7658$$

ہے لہٰذا

$$E_{x10}^{-}=0.7658\times 10=7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned}H_{y10}^{+}&=\frac{10}{50}=0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\\ H_{y10}^{-}&=-\frac{7.658}{50}=-0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

ہیں۔آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.51 سے

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+}=\frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{\left|\eta_1\right|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1}=1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

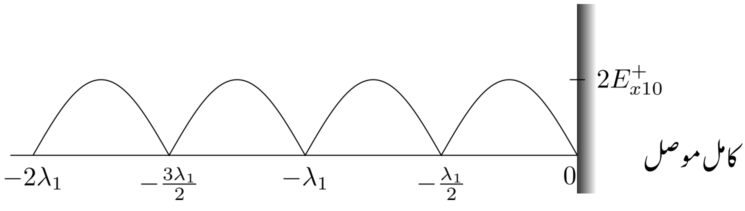
جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1,\text{اوسط}}^{-}=\frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{\left|\eta_1\right|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1}=0.5864\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1=0$ اور $\eta_1=50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}}=\left|\Gamma\right|^2 \tag{10.81}$$

کے برابر ہے۔



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^{+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} E_{x10}^{+} = 17.658\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$
$$H_{y20}^{+} = \frac{17.658}{377} = 0.046\,84\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ہیں لہٰذا

$$P_{2,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x20}^{+}\right)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z}\cos\theta_{\eta 2} = 0.4135\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = P_{1,\text{اوسط}}^{-} + P_{2,\text{اوسط}}^{+}$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار[56] سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر[57] رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin\beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

[56] rectifier
[57] tuned

مثال 10.2: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E_{xs1}^{-} = -E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو شرح ساکن موج[58] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^{+} &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^{-} &= \Gamma E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہٰذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^{-} = |\Gamma| E_{x10}^{+} e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

---

[58] standing wave ratio

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)}\right) E^{+}_{x10} \tag{10.82}$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لہٰذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+1$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.82 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)}\right) e^{-j\beta_1 z} E^{+}_{x10}$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} - \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} + \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} - 2\pi\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.83}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں

$$\left|E_{xs1}\right|_{\text{بلند تر}} = (1 + |\Gamma|) \, E^{+}_{x10} \tag{10.84}$$

ہو گا۔اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.85}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$\left|E_{xs1}\right|_{\text{کمتر}} = (1 - |\Gamma|) \, E^{+}_{x10} \tag{10.86}$$

ہو گا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z = 0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔اگر $\eta_1 > \eta_2$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z = 0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔اس کے برعکس اگر $\eta_1 < \eta_2$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $1\,\text{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 3$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 6$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول $30\,\text{cm}$ ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32\,\text{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25\,\text{cm}$ ہیں۔قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66\,\Omega$ اور $\eta_2 = 153.91\,\Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_1 > \eta_2$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر $8.66\,\text{cm}$ فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔مساوات 10.86 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $|Exs1|_{\text{کمتر}} = 8.3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، $\cdots$ سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج[59] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{10.87}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

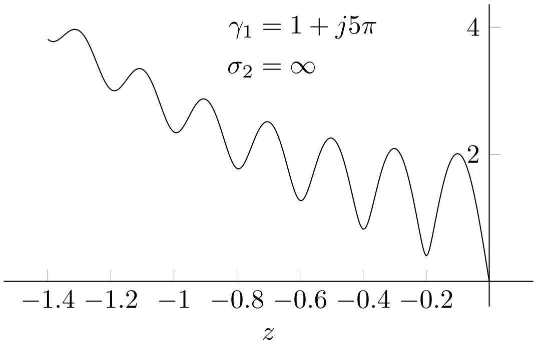
$$s \geq 1 \tag{10.88}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گا۔پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $\eta_1 = \eta_2$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^+ = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تقلیلی مستقل زیادہ کارآمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

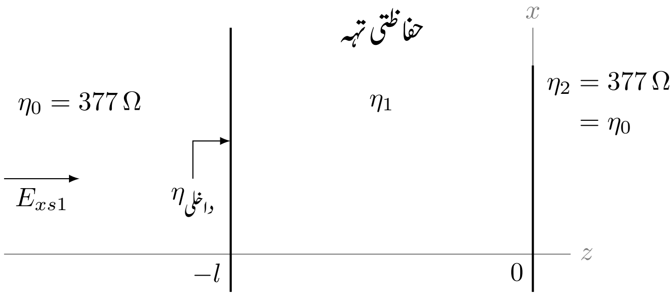
آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\mp\eta_1$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$
\begin{aligned}
E_{xs1} &= \left(e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) E_{x10}^+ \\
H_{ys1} &= \left(e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}
\end{aligned}
$$

ہیں۔ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے اور $\eta_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$
\eta_{\text{داخلی}} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}
$$

[59] standing wave ration



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل[60] استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) + (\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) - (\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan\beta_1 l} \tag{10.89}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی[61] کہلاتا ہے۔ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں

$$\eta_{\text{داخلی}} = j\eta_1 \tan\beta_1 l \qquad (\eta_2 = 0) \tag{10.90}$$

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.89 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا پر چڑھائی گئی ایسی حفاظتی تہہ پر غور کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔یہ تہہ اینٹینا کو موسمی اثرات سے تحفظ مہیا کرتی ہے۔شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جس پر l موٹی حفاظتی تہہ چڑھائی گئی ہے۔یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے اور خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہے۔ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ایسا تب ہو گا جب $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2$ ہو یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan\beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan\beta_1 l = j\eta_1^2 \tan\beta_1 l$$

[60] $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$
[61] matched

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $\eta_1 < 377$ ہے لٰہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار $10\,\mathrm{GHz}$ کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1\,\mathrm{cm}$$

رکھنی ہو گی۔

اگر $10\,\mathrm{GHz}$ پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی $0.5\,\mathrm{cm}$ کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\eta_{\text{داخلی}} &= 251.33 \times \frac{377 + j251.33\tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377\tan(314.2 \times 0.005)}\\ &\approx 167.6\,\Omega\end{aligned}$$

ہو گی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}} \times 100 = \left|\Gamma\right|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

ہو گی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ سرحد کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6\,\mathrm{cm}$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: 5 ، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمٹر)[1] اور اینٹینا[2] یا پھر ڈیم میں نسب جنریٹر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباو اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیمی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

11.1 ترسیلی تار کے مساوات

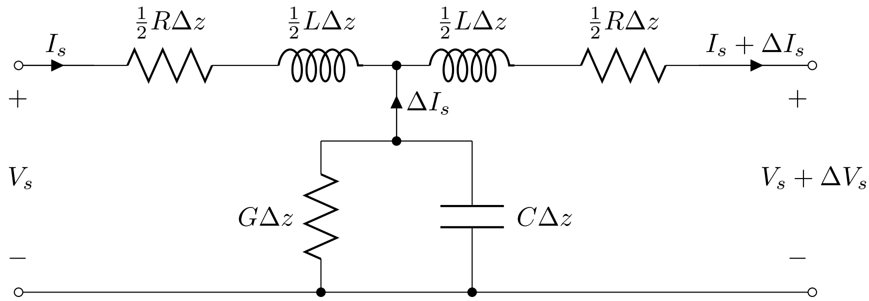
ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ، μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R، L، C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$، امالہ $L\Delta z$، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہٰذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑون میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباو

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

[1] transmitter
[2] antenna



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R، L، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباو کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s - \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\Delta I_s$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہو گا۔یوں $\Delta z \to 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اسے

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s \tag{11.1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباو

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s\right]\left(G\Delta z + j\omega C\Delta z\right)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z}=-\left(G+j\omega C\right)V_s+\frac{1}{2}\left(R+j\omega L\right)\left(G+j\omega C\right)I_s\Delta z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta z \to 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یوں

$$\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}z}=-\left(G+j\omega C\right)V_s \tag{11.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_s=-j\omega\mu\boldsymbol{H}_s$$

میں $\boldsymbol{E}_s=E_{xs}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{H}_{ys}=H_{ys}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}E_{xs}}{\mathrm{d}z}=-j\omega\mu H_{ys} \tag{11.3}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\left(\sigma+j\omega\epsilon\right)\boldsymbol{E}_s$$

سے

$$\frac{\mathrm{d}H_{ys}}{\mathrm{d}z}=-\left(\sigma+j\omega\epsilon\right)E_{xs} \tag{11.4}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنا کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R+j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہٰذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs}=E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$V_s=V_0e^{-\gamma z} \tag{11.5}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباو کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z=0$ پر اس کا حیطہ V_0 ہے۔ حرکی مستقل

$$\gamma=\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)}$$

اب

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{11.6}$$

ہو جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

ہو گا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.8}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہٰذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.9}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{11.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^{-}}{E_{x0}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہو گی۔ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{11.12}$$

ہو گی۔انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{11.13}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta = \eta_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \tag{11.14}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

باب 12

سوالات

جدول 12.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 12.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 12.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 12.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$