برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 15.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{15.1}$$

کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \tag{15.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

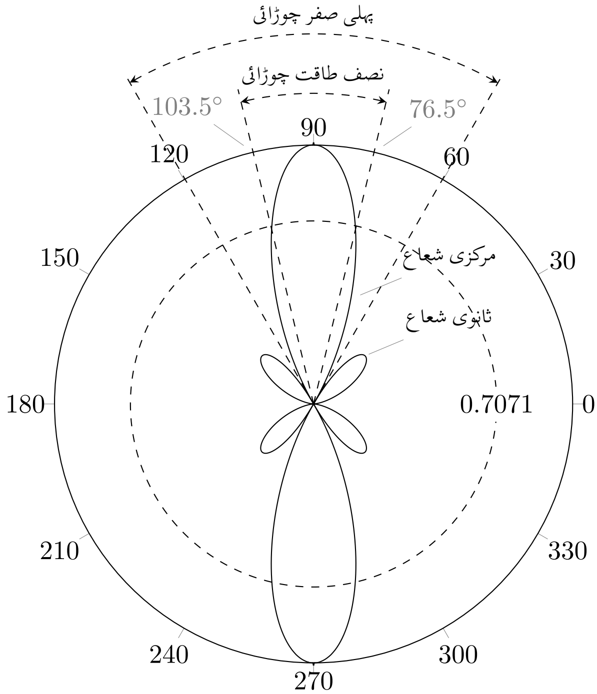
مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

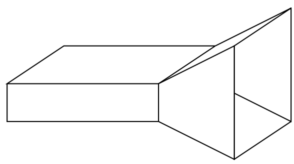
$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \tag{15.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

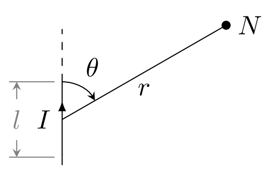
[1] retarded current



شکل 15.1: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 15.2: پیپا اینٹینا



شکل 15.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{15.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{15.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r} \, \mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \tag{15.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

15.3 تکمل

شکل 15.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔اس رقبے کو K کہتے ہوئے

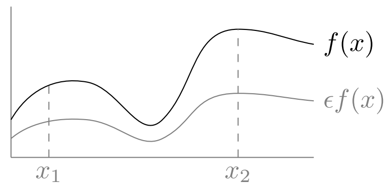
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x = K \tag{15.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہٰذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہٰذا

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{K}{2} = \epsilon K \tag{15.10}$$

لکھا جائے گا۔اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x) f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہٰذا $\epsilon(x) f(x)$ کا تکمل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x) \, \mathrm{d}x \leq \epsilon K \tag{15.11}$$



شکل 15.4: تفاعل کا تکمل

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔ اگر $\epsilon \to 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x) \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\epsilon \to 0) \tag{15.12}$$

ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} \,\mathrm{d}x \tag{15.13}$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \to 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots \tag{15.14}$$

لکھ سکتے ہیں لہٰذا تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x) \,\mathrm{d}x \tag{15.15}$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \to 0$ کی صورت میں اسے

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} \,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x) \,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x) \,\mathrm{d}x \tag{15.16}$$

لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

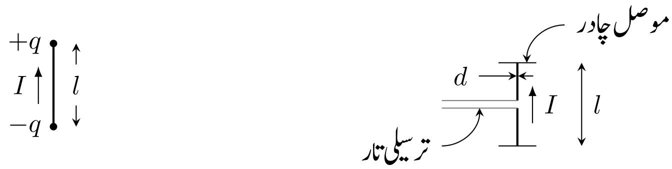
15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔ لامحدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

---

[2] short dipole
[3] infinitesimal



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 15.5: جفت قطب

آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے *مختصر* جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $\lambda \gg d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.5-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{15.17}$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15.18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{15.19}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{15.20}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{15.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.22}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.23}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.20 اور مساوات 15.21 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 15.23 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.22 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.20 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.21 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے للہذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{15.24}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے[4] اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{15.25}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\cos\theta\\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0
\end{aligned} \tag{15.26}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\left(\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{15.27}$$

---

[4] جیسے حصہ 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے للٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{15.28}$$

ہو گا جہاں مساوات 15.17 کے تحت

$$q = \int I \,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{15.29}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}$$
$$q = q_0 e^{j(\omega t-\beta s)}$$

ہیں۔مساوات 15.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{15.30}$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$
$$s_2 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r+\frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r-\frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{15.31}$$

ملتا ہے۔چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔مسئلہ ڈی موے ور[5] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[&\left(r+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ &- \left(r-\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{15.32}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ $\lambda \gg l$ ہے للٰذا

$$\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} = \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l$$
$$\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} \approx \frac{\beta l\cos\theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.32 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{15.33}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

---

[5] de Moivre's theorem $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$

I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد $(\omega = 2\pi f)$، اکائی $\mathrm{rad/s}$۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$، اکائی $\mathrm{rad/m}$

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، $8.854\,\mathrm{pF/m}$

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $l \ll \lambda$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.27 سمتی دباو اور مساوات 15.33 مقداری دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$
\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2}+\frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r}+\frac{c\sin\theta}{j\omega r^2}\right)\boldsymbol{a}_{\theta}\right]
\end{aligned} \tag{15.34}
$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.21 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta \\
E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{15.35}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.20 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{15.36}$$

میں مساوات 15.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{15.37}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان} \end{aligned} \tag{15.38}$$

ہوں گے۔ مساوات 15.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega \tag{15.39}$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0°$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90°$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندرسہ[6] شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \end{aligned}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.40}$$

---

[6] doughnut

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j\frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.41}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad (\text{دور میدان}) \tag{15.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔یوں مساوات 15.35 اور مساوات 15.37 میں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{15.43}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})} \tag{15.44}$$

ہو گا۔مساوات 15.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t - \beta r)}$ پایا جاتا ہے۔یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں $45°$ کا زاویہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2}\sin^2\theta \boldsymbol{a}_\text{r} \qquad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[\left(E_r\boldsymbol{a}_\text{r} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\text{r}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{15.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[7] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 105 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 184 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[8] کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \gg l$ اور $\lambda \gg l$، کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

[7] quasi stationary fields
[8] radiation fields

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	0	$\frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	$\frac{j60\pi I_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	$\frac{jI_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}$

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباو V کا کوئی کردار نہیں۔یوں مساوات 15.21 اور مساوات 15.26 سے

$$E_\theta=-j\omega A_\theta=-j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right)=j\frac{30 I_0\beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 15.20 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi=\frac{E_\theta}{Z_0}=j\frac{30 I_0\beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}=j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.47}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.38 میں $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta=j\quad\underset{\text{مقدار}}{60\pi}\quad\underset{\text{رو}}{I_0}\quad\underset{\text{لمبائی}}{\frac{l}{\lambda}}\quad\underset{\text{فاصلہ}}{\frac{1}{r}}\quad\underset{\text{شکل}}{\sin\theta}\quad\underset{\text{زاویہ}}{e^{j(\omega t-\beta r)}} \tag{15.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s\times\boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{15.49}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \mathscr{P}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{15.50}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{15.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[9] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[E_\theta H_\phi^* \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{15.52}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0 \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s = \frac{Z_0}{2} \int_S \left| H_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.53}$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0} \int_S \left| E_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.54}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $\mathrm{d}s = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

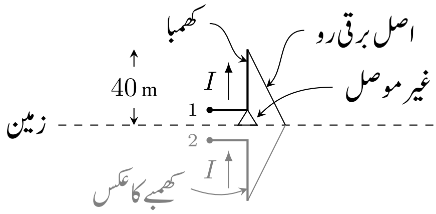
جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.24 سے مساوات 15.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.38 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \tag{15.55}$$

[9] radiation resistance



شکل 15.6: کھمبا اینٹینا

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 15.53 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta I l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 15.53 یا مساوات 15.54 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔یوں اوسط اخراجی طاقت

$$
P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \tag{15.56}
$$

ہو گی۔مساوات 15.51 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$
R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{I}{I_0} \right)^2 \qquad (\Omega) \tag{15.57}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$
R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 \,\mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 \,\mathrm{d}s \tag{15.58}
$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔اس کھمبے کو شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے۔کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے

زیادہ ہو گی۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔یوں اوسطاً برقی رو $\frac{I_0}{2} = I_{\text{اوسط}}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.57 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{15.59}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیاعی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}} \tag{15.60}$$

ہو گی۔مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیاعی}} = 0.63\,\Omega$ ہو تا تب اینٹینا کی کارکزاری[10] k

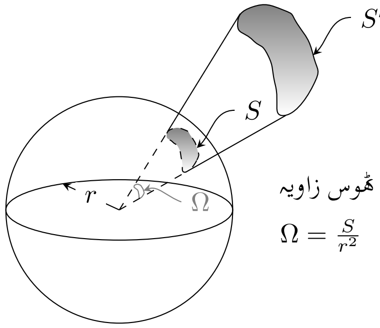
$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{15.61}$$

پچاس فی صد ہو گی۔اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارکزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

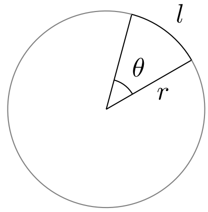
اگر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا تکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[10] efficiency



ب: سٹریڈیئن کی تعریف



الف: ریڈیئن کی تعریف

شکل 15.7: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

15.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[11] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 15.7-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta=\frac{l}{r} \qquad (\text{rad}) \tag{15.62}$$

زاویہ θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[12] (rad) ہے۔یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔اگرچہ مساوات 15.62 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega=\frac{S}{r^2} \qquad (\text{sr}) \tag{15.63}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[13] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 15.7-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ٹھوس زاویے

$$\Omega=\frac{S}{r^2} \tag{15.64}$$

[11] solid angle
[12] radian
[13] steradian

کے برابر ہو گا۔اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 15.7-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح شکل 15.7-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.7-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔اس کے برعکس شکل 15.7-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\text{sr} = 1\,\text{rad}^2 \tag{15.65}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{15.66}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \qquad (\text{sr}) \tag{15.67}$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.38 میں پیش کیا گیا ہے۔کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 \boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 \boldsymbol{a}_\text{r} \tag{15.68}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta, \phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2 \mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 r^2 \qquad (\text{W/sr}) \tag{15.69}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta, \phi)$ اخراجی شدت[14] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 15.63 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو قابل پذیر[15] بنانے کی خاطر $P(\theta, \phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r^2 \mathscr{P}_{\text{بلند تر}} = P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.70}$$

---

[14] radiation intensity
[15] normalized

بے بُعد[16] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابل پذیر نقش طاقت[17] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{15.71}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{15.72}$$

ہو گا۔اس میں مساوات 15.63 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathscr{P} r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ[18] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[19] پر تکمل

$$\Omega_M = \iint_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.74}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ[20] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ثانوی شعاع[21] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m = \Omega_A - \Omega_M \tag{15.75}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی[22] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت[23] ہے۔اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.76}$$

---

dimensionless[16]
normalized power pattern[17]
beam solid angle[18]
main lobe[19]
major lobe solid angle[20]
minor lobe[21]
isotropic[22]
directivity[23]

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔یوں

$$\begin{aligned} D = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} &= \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint\limits_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \end{aligned} \tag{15.77}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 15.73 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 15.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{15.79}$$

حاصل ہو گا۔کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 15.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} = \sin^2\theta \tag{15.80}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 15.73 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3} \tag{15.81}$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \tag{15.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کار گزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کار گزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش[24] پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش} = G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{15.83}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \tag{15.84}$$

ہو گا جہاں

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

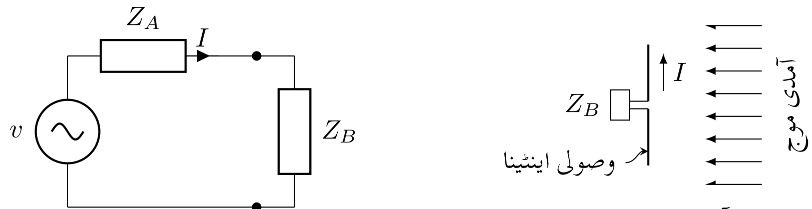
ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کار گزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 15.61 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{15.85}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\,\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 &\le D \le \infty \\ 0 &\le G \le \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

شکل 15.8: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا[25] شعاعی اخراج کرتی ہے۔اس کے برعکس وصولی اینٹینا[26] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{15.86}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[27] کہا جاتا ہے۔یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{15.87}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، $\mathrm{m^2}$

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 15.8-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[28] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

[24] gain
[25] transmitting antenna
[26] receiving antenna
[27] antenna aperture
[28] Thevenin equivalent circuit

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$\left|I\right|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2} \tag{15.88}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2\right]} \tag{15.89}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{15.90}$$

$$X_B = -X_A \tag{15.91}$$

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P}R_r} \tag{15.92}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا اخراجی رقبہ[29] $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا اخراجی رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 15.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.92 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{15.93}$$

[29] effective aperture

برقی دباو پیدا ہو گی۔ آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{15.94}$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 15.57 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{15.95}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 15.92 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{E^2 l^2}{4\frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{15.96}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}} + R_{\text{اخراجی}}$ ہو گی۔ یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{اخراجی}} \tag{15.97}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \tag{15.98}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 15.158 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = S_{\text{اخراجی}} \Omega_A \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{15.99}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.78 میں مساوات 15.99 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \tag{15.100}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta, \phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}} \\ D &= \frac{4\pi}{\Omega} \\ D &= \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \end{aligned} \tag{15.101}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

15.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[30] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{15.102}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos\theta \tag{15.103}$$

ہے۔ان مساوات میں

[30] reciprocity

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \tag{15.104}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{15.105}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2} \tag{15.106}$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

15.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 15.104 (یا مساوات 15.106) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[31] جبکہ $\cos \frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[32] کہا جائے گا۔ یوں

$$E = E(\theta) \cos \frac{\psi}{2} \tag{15.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 15.107 ضرب نقش[33] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

[31] primary pattern
[32] array pattern
[33] pattern multiplication

15.8.3 ثنائی قطار

مساوات 15.106 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.108}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.109}$$

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1:2:1)$ نسبت سے ہے۔اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1:3:3:1)$ نسبت سے ہے۔اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.110}$$

ہے۔اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[34] کے ثنائی سر[35] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[36] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.111}$$

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 15.5: مساوات 15.109 کو ثابت کریں۔

---

[34] binomial series
[35] binomial coefficient
[36] Pascal triangle

حل: مساوات 15.105 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi} \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}
$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2}\cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2}\right) e^{j\frac{\psi}{2}}\right]^2 = \cos^2\frac{\psi}{2} \underline{/\psi}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کا حیطہ $\cos^2\frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 15.6: مساوات 15.111 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{15.112}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{15.113}$$

کے سر کی نسبت $1:2:1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{15.114}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2\frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکھٹے کرتے ہوئے

$$E = E_0\left(1 + e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{15.115}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi\cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.116}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔یوں

$$\psi = \beta d \cos\theta + \delta \tag{15.117}$$

ہو گا۔قطار کا دور میدان

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{15.118}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

- d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،
- δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور
- ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos\theta + \delta$

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 15.118 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E e^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{jn\psi}\right) \tag{15.119}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 15.118 سے مساوات 15.119 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \underline{/ (n-1)\tfrac{\lambda}{2}} \tag{15.120}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/ (n-1)\tfrac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{15.121}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[37] ہے لہٰذا ہمیں ال ہوس پٹل[38] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \to 0} \\
&= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \to 0}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E = nE_0 \tag{15.122}
$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$
\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{15.123}
$$

ہو جس سے

$$
\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{15.124}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 15.121 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$
\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{15.125}
$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$
\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{15.126}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 15.121 کو مساوات 15.122 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$
E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{15.127}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

---

indeterminate[37]
L Hospital's rule[38]

15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d\cos\theta = -\delta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب ($\theta = 90^\circ$) زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ[39] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{15.128}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{15.129}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 15.129 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda} \tag{15.130}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی[40]، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار[41] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی[42] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \tag{15.131}$$

ہو گی۔

شکل 15.9 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہٰذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہے۔

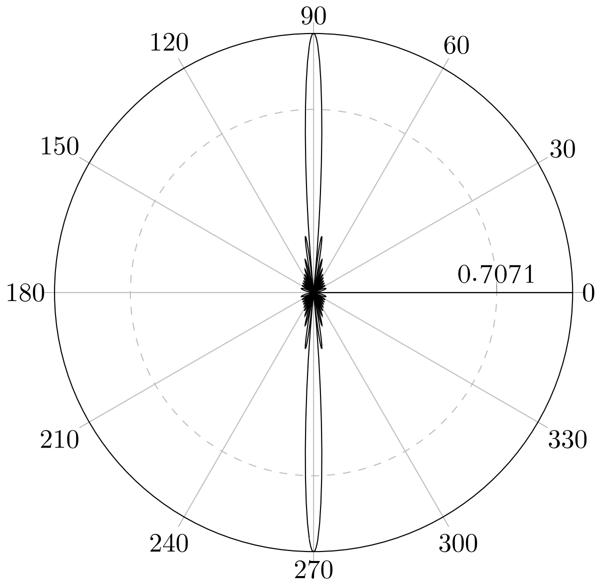
15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 15.123

$$\beta d\cos\theta + \delta = 0 \tag{15.132}$$

---

[39] complementary angle
[40] half power beam width, HPBW
[41] broadside array
[42] beam width between first nulls, BWFN



شکل 15.9: چوڑائی جانب اخراجی قطار

سے حاصل ہوتا ہے۔قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے ($\theta = 0$) لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \tag{15.133}$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 15.125 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0 - 1\right) = \mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0 - 1 = \mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{15.134}$$

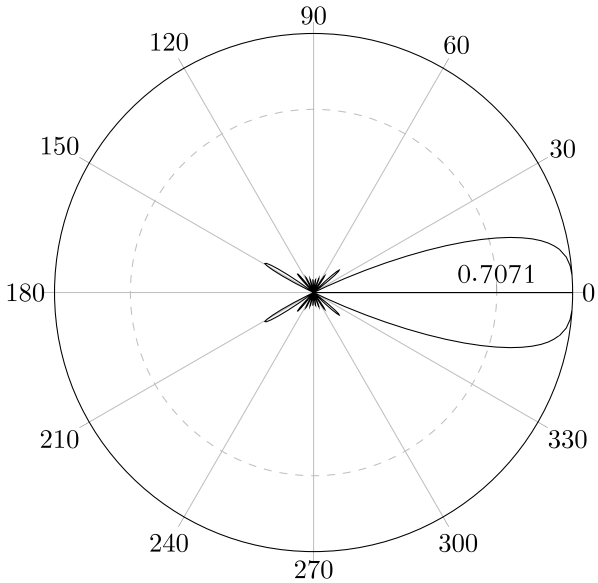
لکھا جا سکتا ہے۔لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{15.135}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں $L \approx= nd$ لکھا گیا ہے۔پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{15.136}$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 15.10: لمبائی جانب اخراجی قطار

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا قابل پذیر اخراجی نقش شکل 15.10 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 15.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 15.127 سے پہلی صفر چوڑائی $52°$ اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^{\circ} = 34°$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^{\circ} = 34°$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 15.7 اور مثال 15.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 15.78 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{15.137}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 15.73 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظرانداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.73 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{15.138}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi\,\mathrm{sr} = 4\pi\,\mathrm{rad}^2 = 4\pi\left(\frac{180}{\pi}\right)^2\ \mathrm{deg}^2 = 41\,253\,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^{\circ}\phi_{HP}^{\circ}} \tag{15.139}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 15.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = 5.1^{\circ}$ اور $\phi^{\circ}_{HP} = 360^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.139 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = \phi^{\circ}_{HP} = 34^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

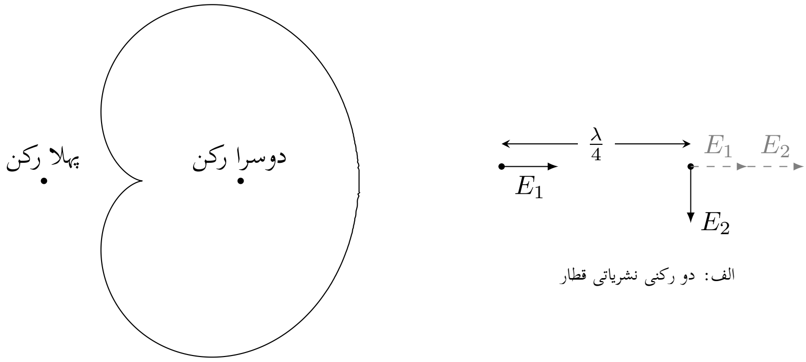
حل: مساوات 15.139 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $E = |E_2| = |E_1|$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان -90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 15.11-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا دوسرے رکن میں برقی رو $90^{\circ} = 360^{\circ} \times \frac{1}{4}$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 15.11-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔



الف: دو رکنی نشریاتی قطار

دو رکنی قطار کا نقش

شکل 15.11: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو $0°$ پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو $90°$ پر ہو گی۔اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان $0°$ پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان $90°$ پر ہو گا۔اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید $90°$ آگے بڑھ کر $180°$ پر پہنچ چکا ہو گا۔یوں دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔شکل 15.11 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہٰذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2+E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔شکل 15.11-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہٰذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

15.9 تداخُل پیما

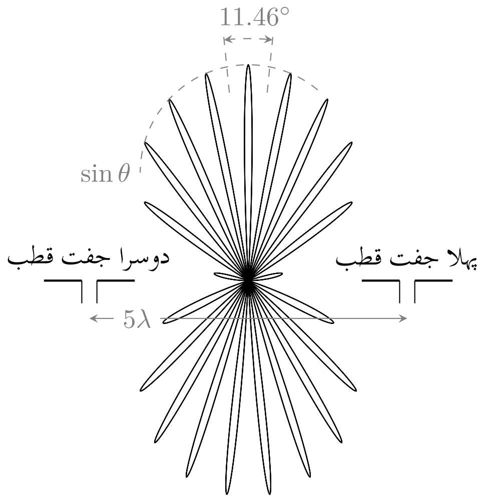
فلکیات[43] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ریڈیائی فلکیات[44] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیما[45] اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 15.12 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{15.140}$$

---

[43] astronomy
[44] radio astronomy
[45] interferometer



شکل 15.12: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos\theta$ کے برابر ہے۔ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔مساوات 15.48 سے مختصر جفت قطب کا نقش $\sin\theta$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta \cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{15.141}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔شکل 15.12 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{15.142}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

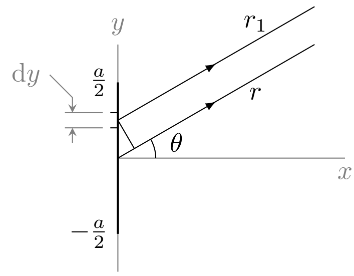
$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{15.143}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات 15.130 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 15.143 سے پہلی صفر چوڑائی $11.46°$ حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 15.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔



شکل 15.13: مسلسل اینٹینا

جواب: $2.865°$

15.10 مسلسل خطی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔اگر متعدد نقطہ منبع کی قطار میں منبع کے درمیان فاصلہ اتنا کم کر دیا جائے کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل لکیر نظر آئے تو ایسی صورت میں مسلسل خطی اینٹینا حاصل ہو گا۔ شکل 15.13 میں ایسا ہی اینٹینا دکھایا گیا ہے جس میں تمام نقطہ منبع کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔اس اینٹینے کی کل لمبائی a کے برابر ہے۔اینٹینا y محدد پر پایا جاتا ہے۔

اینٹینا کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}y$ کا دور میدان $\mathrm{d}E$

$$\mathrm{d}E=\frac{A}{r_1}e^{j\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)}\,\mathrm{d}y=\frac{A}{r_1}e^{j(\omega t-\beta r_1)}\,\mathrm{d}y \tag{15.144}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں A برقی رو پر منحصر مستقل ہے۔یوں مکمل اینٹینا کا میدان

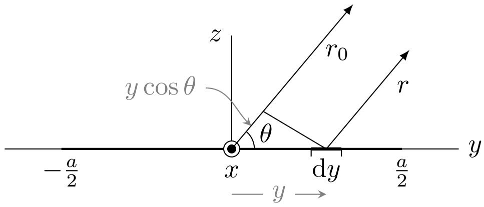
$$E=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{A}{r_1}e^{j(\omega t-\beta r_1)}\,\mathrm{d}y \tag{15.145}$$

ہو گا۔ شکل سے $r_1=r-y\sin\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$E=e^{j(\omega t-\beta r)}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{A}{r_1}e^{j\beta y\sin\theta}\,\mathrm{d}y \tag{15.146}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر $a\gg r_1$ ہو تب تکمل کے $e^{j\beta y\sin\theta}$ جزو کی قیمت y تبدیل ہونے سے اتنی تبدیل ہوتی ہے کہ اس تبدیلی کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔اس کے برعکس، جیسے حصہ 15.3 میں دکھایا گیا ہے، $a\gg r_1$ کی صورت میں $\frac{A}{r_1}\approx\frac{A}{r}$ لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے اسے تکمل کے باہر

$$E=\frac{A}{r}e^{j(\omega t-\beta r)}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{j\beta y\sin\theta}\,\mathrm{d}y \tag{15.147}$$



شکل 15.14: مستطیل سطحی اینٹینا

لکھا جا سکتا ہے۔ تکمل لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{A}{r}e^{j(\omega t-\beta r)}\left[\frac{e^{j\beta\frac{a}{2}\sin\theta}}{j\beta\sin\theta}-\frac{e^{-j\beta\frac{a}{2}\sin\theta}}{j\beta\sin\theta}\right] \\
&= A'\frac{\sin\left(\frac{\beta a}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\beta a}{2}\sin\theta}
\end{aligned} \tag{15.148}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\frac{aAe^{j(\omega t-\beta r)}}{r}=A'
$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 15.148 زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر A' دیتا ہے۔یوں مساوات 15.148 کو A' سے تقسیم کرنے سے مسلسل اینٹینا کی تقابل پذیر قیمت

$$
E_n=\frac{\sin\left(\frac{\beta a}{2}\sin\theta\right)}{\frac{\beta a}{2}\sin\theta} \tag{15.149}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

یہاں رک کر صفحہ 449 پر مساوات 15.127 کو دوبارہ دیکھیں۔

15.11 مستطیل سطحی اینٹینا

حصہ 15.10 کی ترکیب مستطیل سطحی اینٹینا پر بھی لاگو کی جا سکتی ہے۔اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں مسلسل سطحی اینٹینا حاصل ہو گا۔ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی x سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 15.14 میں دکھایا گیا ہے۔ سطح پر میدان x سمت میں ہے۔اس سطح پر میدان x کا تفاعل نہیں ہے البتہ یہ y پر منحصر ہے۔یوں میدان کو $E_x(y)$ لکھا جائے گا۔پورے سطح پر میدان ہم قدم ہے۔

ہائی گن [46] کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔یوں سطح پر چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ پر میدان $E_x(y)$ بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح پر برقی میدان $E_x(y)$ سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$
H_y=\frac{E_x(y)}{Z_0} \tag{15.150}
$$

[46] Huygen's principle

لکھا جا سکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔مقناطیسی میدان کا بُعد ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے لٰہذا اسے

$$H_y = J_x z_1 \tag{15.151}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں سطح کی موٹائی z_1 اور اس میں کثافت برقی رو J_x تصور کی گئی ہے۔اس طرح لکھنے سے اس حقیقت کی وضاحت ہوتی ہے کہ مقناطیسی میدان بالکل اسی طرح کردار ادا کرتا ہے جیسے کثافت برقی رو۔یوں مقناطیسی میدان کو منبع تصور کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.25 میں $I_0 = J_x z_1 \,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E &= -j\omega[\mathrm{d}A_x] \\ &= -j\omega \frac{\mu_0 I_0 \,\mathrm{d}l\, e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t-\beta r)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{15.152}$$

جہاں J_x کی وجہ سے A_x سمتی دباو لکھی گئی ہے۔پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی تکمل سے حاصل ہو گا۔رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

$$E(\theta) = -\frac{j\omega\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15.153}$$

ہو گا جہاں $r \approx r_0$ لیا[47] گیا ہے۔بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0} = \frac{1}{2\lambda}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0\lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta} \,\mathrm{d}y \tag{15.154}$$

حاصل ہوتی ہے۔پوری سطح پر یکساں میدان $E(y) = E_a$ کی صورت میں

$$E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2r_0\lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y\cos\theta} \,\mathrm{d}y \tag{15.155}$$

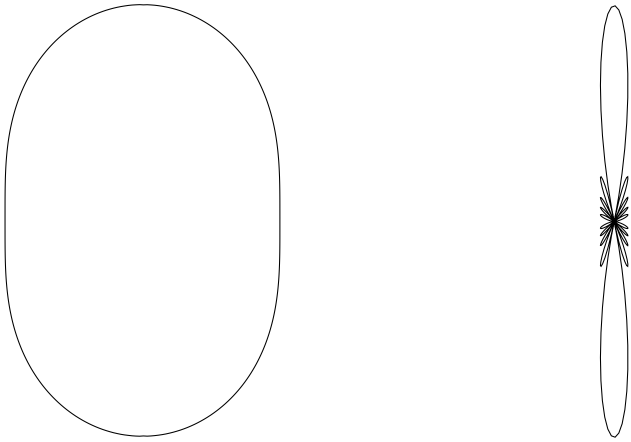
لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{x_1 a E_a}{2r_0\lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \\ &= \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \end{aligned} \tag{15.156}$$

حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda} \qquad \text{دورُخی اخراج} \tag{15.157}$$



الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 15.15: مستطیل سطحہ کے نقش

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\theta = 270^\circ$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta = 90^\circ$ جانب اخراج دگنی

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0 \lambda} \qquad \text{یک رُخی اخراج} \tag{15.158}$$

ہو گی۔ اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 15.15 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 448 پر مساوات 15.121

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos\theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/_2) \cos\theta]}{\sin[(\beta d/_2) \cos\theta]} \tag{15.159}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 15.159 کو

$$E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/_2) \cos\theta]}{(\beta a'/_2) \cos\theta} \tag{15.160}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 15.156 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $nE_0 = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

---

[47] جیسے حصہ 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔

15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں

یک بُعدی میدان $E(y)$ اور اس سے پیدا دور میدان $E(\theta)$ ایک دوسرے کے فوریئر بدل[48] ہوتے ہیں۔ محدود سطح کے لئے ان جڑواں فوریئر تسلسل میں سے ایک بدل کو

$$E(\theta) = \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y \cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{15.161}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کا مساوات 15.154 کے ساتھ موازنہ کریں۔ان میں صرف جزو ضربی $\frac{x_1}{2r_0\lambda}$ کا فرق پایا جاتا ہے۔

شکل میں کئی $E(y)$ اور اس سے پیدا $E(\theta)$ آمنے سامنے دکھائے گئے ہیں۔ سطح پر یکساں میدان اور اس کا پیدا کردہ دُور میدان شکل-الف میں دکھائے گئے ہیں جن کے حوالے سے بقایا پر تبصرہ کرتے ہیں۔ تکونی اور سائن نما سطحی تقسیم کے مرکزی شعاع کی چوڑائی زیادہ ہے البتہ ان کے ثانوی شعاعیں کمزور ہیں۔مربع کو سائن اور گاوسی تقسیم[49] کے مرکزی شعاع مزید زیادہ چوڑی ہے جبکہ ان میں ثانوی شعاع نہیں پائی جاتی۔اس کے برعکس منفی ڈھلوان کی تقسیم مثلاً شکل-ث کم چوڑائی کی مرکزی شعاع پیدا کرتی ہے البتہ اس کی ثانوی شعاعیں بھی زیادہ طاقتور ہوتی ہیں۔ منفی ڈھلوان کی انتہا شکل-ٹ میں دکھائی گئی ہے جو دور کنی تداخُل پیما ہی ہے۔اس کی چوڑائی شکل-الف کی آدھی ہے البتہ اس کے ثانوی شعاعیں عین مرکزی شعاع جتنی طاقتور ہیں۔

15.13 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ تھی۔آئیں لمبی اینٹینا پر غور کریں۔اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل میں کل L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}y$ کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔ تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$I = \begin{cases} I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}+y\right)\right] & y<0 \\[2ex] I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}-y\right)\right] & y>0 \end{cases} \tag{15.162}$$

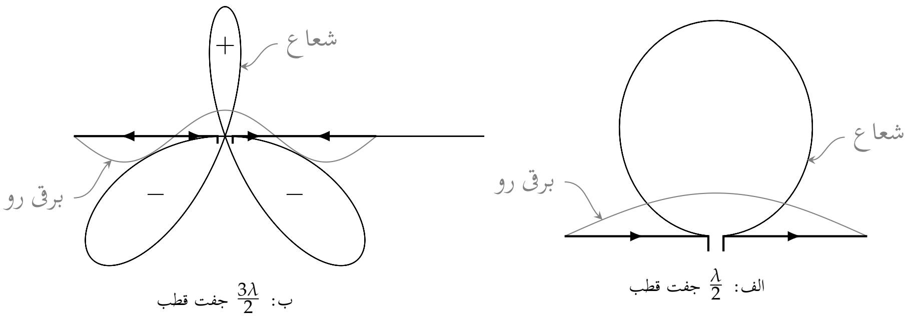
صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو $\mathrm{d}y$ اور اس کے دور میدان کو $\mathrm{d}E_\theta$ لکھتے ہوئے مساوات 15.38

$$\mathrm{d}E_\theta = j\frac{30 I\beta \, \mathrm{d}y}{r} \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{15.163}$$

یعنی

$$\mathrm{d}E_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{r_0 \lambda} \sin\theta I e^{j\beta y \cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{15.164}$$

[48] Fourier transform
[49] Gaussian distribution



شکل 15.16: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

دیتی ہے۔یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$E_\theta = k\sin\theta \int_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{15.165}$$

ہو گا جہاں

$$k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda} \tag{15.166}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 15.162 استعمال کرتے اور تکمل لیتے ہوئے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\left\{\frac{\cos[(\beta L\cos\theta)/2]-\cos(\beta L/2)}{\sin\theta}\right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات} \tag{15.167}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0] = I_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2} \tag{15.168}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 15.167 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2} \tag{15.169}$$

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{3\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \text{جفت قطب } \frac{3\lambda}{2} \tag{15.170}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 15.16 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔

شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں $180°$ کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

مثال 15.10: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.77 میں مساوات 15.169 پر کرتے ہوئے

$$D = \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta, \phi) \, \mathrm{d}\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin^2\theta} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta} = 1.64 \tag{15.171}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا تکمل کو عددی طریقے سے حل کیا گیا ہے۔

اوسط پوئنٹنگ سمتیہ کا بڑی جسامت کے کرہ پر سطحی تکمل

$$P = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{E_\theta^2}{Z} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{15.172}$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔اس مساوات میں E_θ کی قیمت مساوات 15.168 سے پر کی جائے گی۔اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے اینٹینا کا اخراجی مزاحمت

$$R = 73.129\,\Omega \tag{15.173}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔اینٹینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جا سکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر $70\,\Omega$ رہ جاتا ہے۔ $\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $100\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔

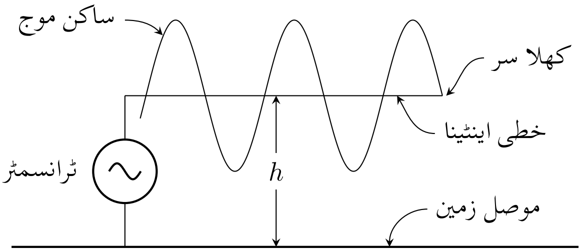
15.14 چلتے موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ایسی دبلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d < \frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے اوپر h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 15.17 میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمٹر[50] طاقت مہیا کرتا ہے۔ یہ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔تار کے کھلے سر پر ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

---

[50] transmitter



شکل 15.17: موصل زمین پر خطی اینٹینا میں برقی رو۔

باب 16

سوالات

موویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $0.00177°$

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $6.46°$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$