برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ[1] کا قانون[2]

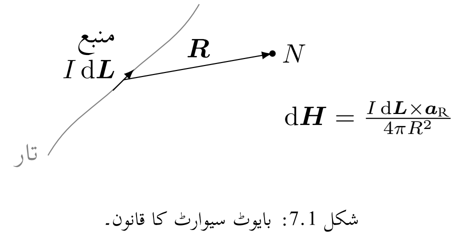
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

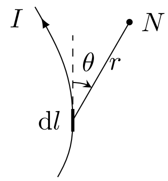
یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔ چھوٹے لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{R}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{\mathrm{d}Q_1 \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}\end{aligned} \tag{7.2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}l$ سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^4} \tag{7.3}$$

ہو گا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 119 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial\rho_h}{\partial t}$$

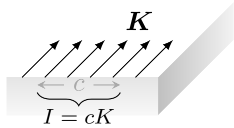
سے

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{7.4}$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R}}{4\pi R^2} \tag{7.5}$$

ہی تجرباتی طور ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جا سکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔ اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احمقانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی رو بذریعہ تکمل

$$I = \int K \,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

$$I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K} \,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}v \tag{7.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R} \,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.7}$$

یا

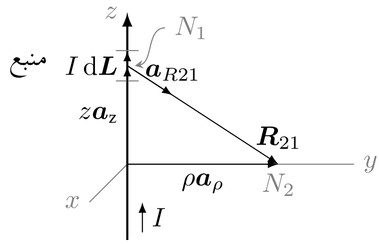
$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R} \,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظرانداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جا سکتی ہے۔ چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

کے برابر ہے لہٰذا

$$R_{21} = |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\boldsymbol{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi \,\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

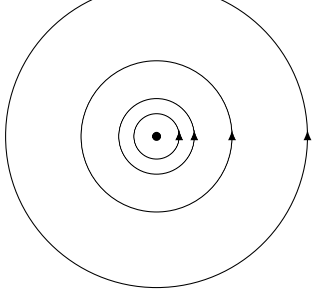
1574 لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنا ہو گا۔ اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

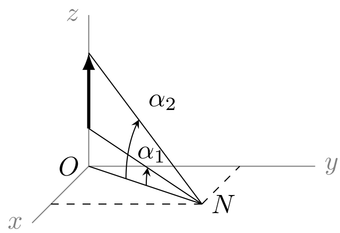
$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \tag{7.9}$$



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

سے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.5 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z اور نا ہی زاویہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

اگر شکل 7.4 میں تار لا محدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.11}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z=0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے تشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ تشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون[3] کہتے ہیں۔ اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی

[3] Ampere's circuital law

الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.12}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی رو ان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

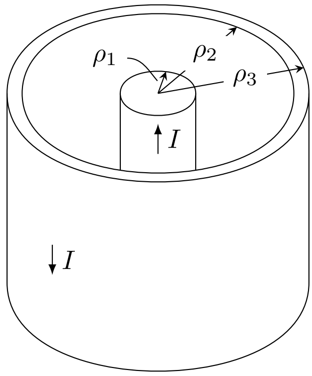
آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتے ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H\,\mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ اور $H_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

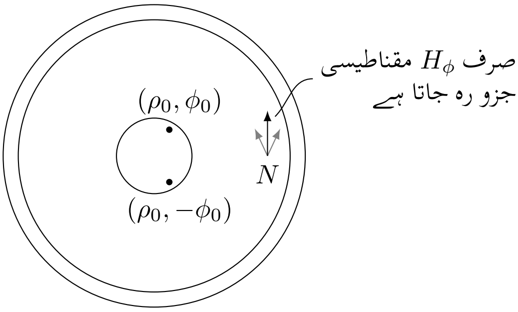
$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔ اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہٰذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2) \tag{7.13}$$

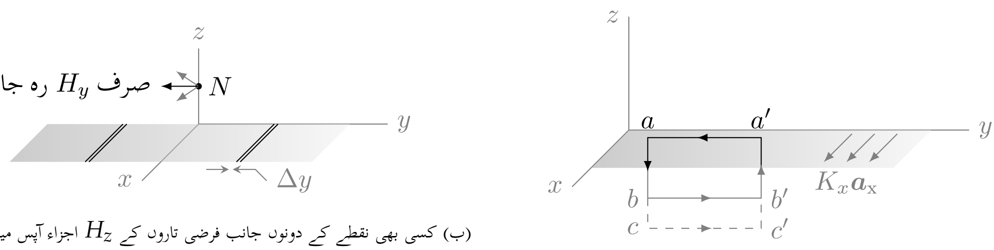
لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہٰذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $I+$ اور بیرونی تار کے $I-$ کو گھیرے گی لہٰذا یہ کل $I-I=0$ برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2-\rho_2^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہٰذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو $I-$ دونوں کو گھیرتا ہے۔یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z=0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔سطح کے $x=+\infty$ سرے سے $x=-\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔یہ سطحیں $z=+\infty$ اور $z=-\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x\Delta y\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ برقی رو گزارے گی۔لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب

z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.14}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $\left|\boldsymbol{H}_{ya}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{yb}\right|$ ہو گا۔اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_y = -\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} \qquad (z > 0)$$
$$\boldsymbol{H}_y = +\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} \qquad (z < 0)$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \tag{7.15}$$

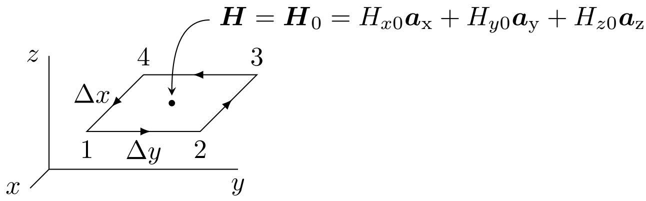
لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \qquad (-h < z < 0) \\ \boldsymbol{H} &= 0 \qquad\qquad\quad (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned} \tag{7.16}$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔



شکل 7.9: گردش کی تعریف۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[4] کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔شکل 7.9 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔یہ راہ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ میں پائی جاتی ہے۔شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔آئیں اس تکمل کو حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.9 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو گا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y \,\mathrm{d}y = H_{y21} \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y = H_{y21}\Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظرانداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21}\Delta y \tag{7.17}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل[5] بروئے کار لانا ہو گا۔

---

[4] curl
[5] Taylor series

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x)=f(x)+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2+\cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x=\frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2})=f(x)+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2+\cdots$$

1639 حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0,y_0,z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned}H_y(x_0+\tfrac{\Delta x}{2},y_0,z_0)&=H_y(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}+\cdots\\&=H_{y0}+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}+\cdots\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21}\doteq H_{y0}+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.18}$$

لکھ کر مساوات 7.17 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21}\doteq\left(H_{y0}+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.19}$$

1640 لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.18 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y+\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہٰذا یہاں

$$H_{y21}\doteq H_{y0}+\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.20}$$

1641 ہو گا جو عین مساوات 7.18 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32}=H_{x32}(-\Delta x)\doteq-\left(H_{x0}+\frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.21}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43}=H_{43}(-\Delta y)\doteq-\left(H_{y0}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.22}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14}=H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.23}$$

حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 7.19، مساوات 7.21، مساوات 7.22 اور مساوات 7.23 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{7.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J}=J_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+J_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+J_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \doteq J_z\Delta x\Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتٰی کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.25}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y\Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.26}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta x\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z\Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.27}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.26 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x\Delta y\Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔اسی طرح مساوات 7.27 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y\Delta z\Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.25، مساوات 7.26 اور مساوات 7.27 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[6] کہتے ہیں۔انتہائی چھوٹے

[6] curl

رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جا سکتی ہے۔اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔اس تعریف کی حسابی شکل

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.26، مساوات 7.27 اور مساوات 7.25 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت[7] کی شکل میں

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.29}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.30}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.31}$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.32}$$

---

[7] determinant

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔ یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{7.33}$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہٰذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔ یوں $q\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔ مساوات 7.33 یہی کہتا ہے۔ اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔ اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہو گا۔ مساوات 7.32 یہی کہتا ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\times\left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.28 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H}=(x^2y+2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(xz-y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0,1,2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla\times\boldsymbol{H}=(e^xz-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(2-e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z-x^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو گی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.31 سے

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.34}$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.31 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\mp \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$، دوسرے جزو میں $\mp \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\mp \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{7.35}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

یہاں رک کر $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{7.36}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{A} &\equiv \nabla^2 A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2 A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \nabla^2 A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{7.37}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.35 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \equiv \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{7.38}$$

1667 مساوات 7.37 سمتیہ کی لاپلاسی[8] ہے۔

1668

1669

مثال 7.2: سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla \times \left(M\boldsymbol{S}\right) \equiv \left(\nabla M\right) \times \boldsymbol{S} + M\left(\nabla \times \boldsymbol{S}\right) \tag{7.39}$$

1670 کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$M\boldsymbol{S} = M\left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) = MS_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + MS_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + MS_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.31 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times M\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z + M\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}S_y - M\frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&+ \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x + M\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x}S_z - M\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \\
&+ \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y + M\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}S_x - M\frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}
\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left[\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right] \\
&+ M\left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]
\end{aligned}$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \boldsymbol{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \boldsymbol{S}$ کے برابر ہے جسے

$$\left(\nabla M\right) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial M}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial M}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \times \left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

---

[8] vector Laplacian

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M)\times \boldsymbol{S}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z-\frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x-\frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y-\frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

1671 حاصل کیا جا سکتا ہے۔

1672

1673 7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.10 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0,\phi_0,z_0)=H_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho+H_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi+H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو گا۔کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi$ ہے۔انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21}\doteq H_{\phi 0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43}\doteq H_{\phi 0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21}&\doteq\left(H_{\phi 0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\\&\doteq\left[H_{\phi 0}\rho_0+H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

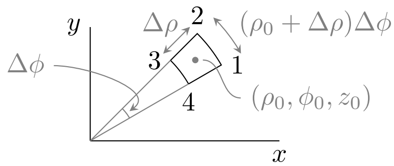
اور

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43}&\doteq\left(H_{\phi 0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right]\\&\doteq\left[-H_{\phi 0}\rho_0+H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

1674 ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32}\doteq H_{\rho 0}+\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$



شکل 7.10: نلکی محدد میں چھوتا رقبہ۔

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$

اور

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

1675 ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.40}$$

ہو گا۔اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right) \doteq J_z$$

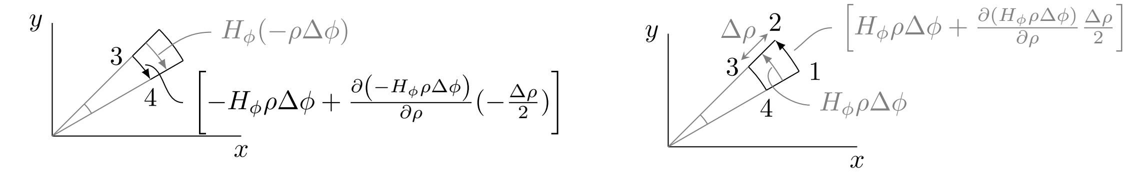
لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گا اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right) = J_z \tag{7.41}$$

1676 لکھا جا سکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.40 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.11-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi\rho\Delta\phi$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

کے برابر ہو گا۔اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g=H_\phi\rho\Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})=\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}=\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi0}\rho_0\Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}=H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\tag{7.42}$$

ہو گی۔اسی طرح، جیسا شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}&=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\&=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned}\tag{7.43}$$

1677 ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

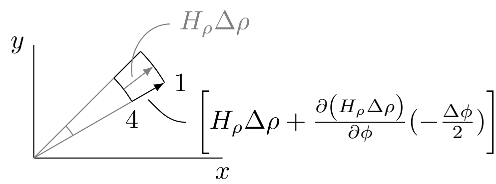
$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})=\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

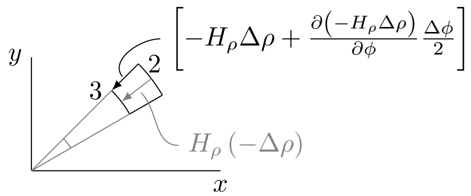
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\tag{7.44}$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔



(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.12: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.45}$$

1678 کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.42، مساوات 7.43، مساوات 7.44 اور مساوات 7.45 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi\\ &= \left[\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi\end{aligned} \tag{7.46}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

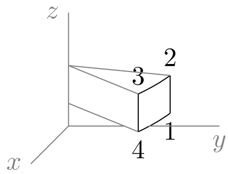
$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[H_{\phi0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.40 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi0}$ کے برابر ہوں گے۔مساوات 7.46 سے گردش

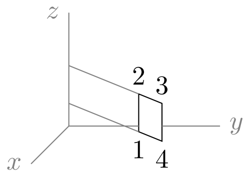
$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to0\\ \Delta\phi\to0}}\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right] = J_z \tag{7.47}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0\Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔اس رقبے کو شکل 7.13-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z\Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_z\Delta z + \frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$



(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.13: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-H_z\Delta z+\frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=+\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}+\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.49}$$

1679 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.48 اور مساوات 7.49 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\Delta z\Delta\phi=J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi\to0\\ \Delta z\to0}}\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]=J_\rho \tag{7.50}$$

1680 ملتا ہے۔

شکل 7.13-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} &= H_z\Delta z + \frac{\partial (H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_z\Delta z + \frac{\partial (-H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_\rho\Delta \rho + \frac{\partial (H_\rho\Delta \rho)}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_\rho\Delta \rho + \frac{\partial (-H_\rho\Delta \rho)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)
\end{aligned}
$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$
\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) = J_\phi \tag{7.51}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.51، مساوات 7.50 اور مساوات 7.47 کا مجموعہ نلکی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$
\nabla\times\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi\rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{7.52}
$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نلکی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کے گردش کو $\nabla\times\boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho\cos\phi + 5)\boldsymbol{a}_\rho + 6\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho}+3)\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدد کے متغیرات (u,v,w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u,\boldsymbol{a}_v,\boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ان میں تین اطراف

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_u &= k_1\,\mathrm{d}u\\
\mathrm{d}L_v &= k_2\,\mathrm{d}v\\
\mathrm{d}L_w &= k_3\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2\Delta v$ اور $k_3\Delta w$ ہوں گے۔اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2\Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(H_v k_2 \Delta v)}{\partial w}\left(-\frac{\Delta w}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w}\left(\frac{\Delta w}{2}\right)$$

ہو گا۔یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\Delta v \Delta w \tag{7.53}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(H_w k_3 \Delta w)}{\partial v}\left(\frac{\Delta v}{2}\right)$$
$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v}\left(-\frac{\Delta v}{2}\right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} + \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}\Delta v \Delta w \tag{7.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v \Delta w \tag{7.55}$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right] = J_u \tag{7.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u}\right] = J_v \tag{7.57}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v}\right] = J_w \tag{7.58}$$

لکھ سکتے ہیں۔ عموی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(H_wk_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_vk_2)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u+\frac{1}{k_1k_3}\left[\frac{\partial(H_uk_1)}{\partial w}-\frac{\partial(H_wk_3)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v+\frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(H_vk_2)}{\partial u}-\frac{\partial(H_uk_1)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \tag{7.59}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1k_2}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ k_1H_u & k_2H_v & k_3H_w\end{vmatrix} \tag{7.60}$$

1689 لکھا جا سکتا ہے۔

1690 7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$\begin{aligned}k_1&=1\\k_2&=r\\k_3&=r\sin\theta\end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\text{r}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.59 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\text{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi$$

یا

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\text{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.61}$$

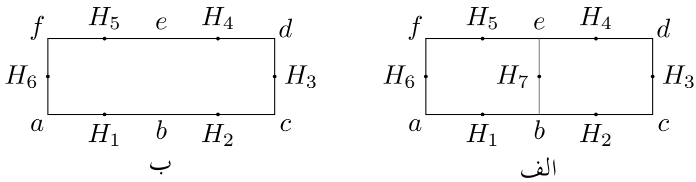
1691 حاصل ہوتی ہے۔

1692

1693 مشق 7.4: اگر $\boldsymbol{H}=2r\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{r}-3r\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

1694 جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H}=-4\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$

1695



شکل 7.14: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔

1696
7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.14-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)_N$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N$$

یا

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \boldsymbol{H})\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}$$

1697 لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D$$

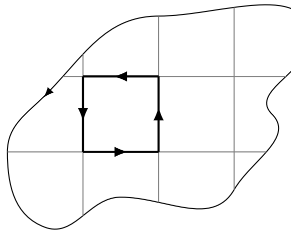
اور

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be}$$

1698 لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}\\ &\doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B + (\nabla \times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$



شکل 7.15: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.14-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.14-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔شکل 7.15 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.62 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[9] بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

---

[9] Stokes theorem

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔کسی بھی عمومی سمتیہ میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}) \, \mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔صفر لمبائی کے راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T \, \mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T \, \mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.63}$$

1707 حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.63 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔اس ثبوت کو
1708 مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

1709 مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے
1710 ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.63 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.64}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.64 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.65}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[10] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل[11] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.66}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

---

[10] Tesla
[11] magnetic constant, permeability

ہو بہو مساوات 7.65 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل مقناطیسی بہاو[12] Φ دیتا ہے جسے ویبر[13] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \mathrm{Wb} \tag{7.67}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.68}$$

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.68 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.69 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.69 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \tag{7.70}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{7.71}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{7.72}$$

---

magnetic flux[12]
Weber[13]

مساوات 7.70 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔انہیں کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
&\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q=\int_{\text{حجم}} \rho_h \,\mathrm{d}h\\
&\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=0\\
&\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0
\end{aligned}
\tag{7.73}
$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$
H_\phi=\frac{I}{2\pi\rho}\qquad (\rho_1<\rho<\rho_2)
$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$
\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi
$$

ہو گا۔اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z=0$ تا $z=d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

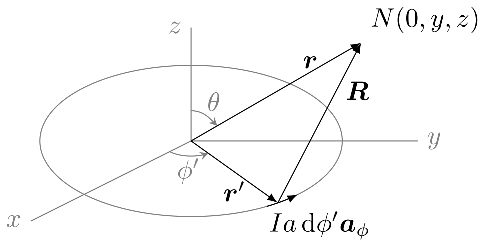
$$
\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^d\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi\cdot(\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\phi)
$$

یعنی

$$
\Phi=\frac{\mu_0 I d}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}
\tag{7.74}
$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔



شکل 7.16: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mathrm{\mu Wb}$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mathrm{\mu Wb}$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mathrm{\mu Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے $(0,0,0)$ پر ہے۔ اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل[14] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.4: شکل 7.16 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0,y,z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi'\boldsymbol{a}'_\phi$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_\phi$ کو کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}'_\phi = -\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

[14] numerical solution

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi', a\sin\phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}'_\rho = a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + a\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

کے برابر ہے۔نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}| = R &= \sqrt{(-a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}\end{aligned}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

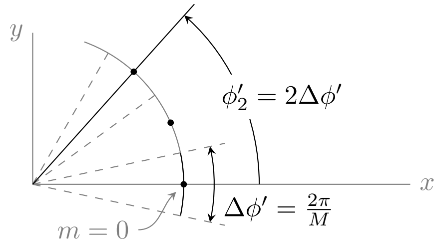
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R} &= a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right) \times \left[-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right] \\ &= a\,\mathrm{d}\phi' \left[z\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right]\end{aligned}$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi'$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'$ پر کرتے ہوئے تکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$



شکل 7.17: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ہی ہے۔بقایا دو اجزاء

$$
\begin{aligned}
H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\
H_z &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(a-y\sin\phi'\right)\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
\tag{7.75}
$$

ہیں۔یہ دونوں بیضوی تکمل[15] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل[16] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔نقطہ $N(0,a,a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

حل:اس نقطے پر

$$
\begin{aligned}
H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+a^2+a^2-2a^2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(3-2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا۔اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.17 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi_0' = 0$ ہو گا۔شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi_1' = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi_2' = 2\Delta\phi' = \frac{2\times 2\pi}{M}$ ہو گا۔یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi_m' = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

---

[15] elliptic integral
[16] numerical solution

$\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
−0.06889	6
−0.08763	7
−0.08763	8
−0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\begin{aligned}\Delta H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\phi'_m\Delta\phi'}{\left(3-2\sin\phi'_m\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin(\frac{2m\pi}{M})\frac{2\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

کے برابر ہو گا۔یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔جدول 7.1 میں $M=10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\,(0.00000+0.23852+0.82674+0.82674+0.23852+0.00000\\ &\qquad -0.06889-0.08763-0.08763-0.06889)\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{10}(1.8175)\\ &= 1.1420\left(\frac{I}{4\pi a}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔اگر $M=100$ کر دیا جائے تب $H_y=\frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m=0$ اور $m=5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔اسی طرح $m=1$ اور $m=4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔در حقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433-1.1420}{1.1433}\right)\times 100 = 0.11\,\%$$

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو[17] بیان کیا جا سکتا ہے۔البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباو[18] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔سمتی مقناطیسی دباو اینٹینا[19]، موج نما[20] اور مائیکروویو چولھے (خرد موج چولھے)[21] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 100 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.76}$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J} = 0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.77}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.78}$$

---

[17] scalar magnetic potential
[18] vector magnetic potential
[19] antenna
[20] waveguide
[21] microwave oven

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J} = 0$ ہے

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.77 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial\phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial\phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تا کہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے نا کہ صفر۔تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ساکن برقی میدان میں

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لہٰذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کے راہ پر $\boldsymbol{J}=0$ ہے۔یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab}=-\int_b^a \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \tag{7.79}$$

بیان کی جاتی ہے۔ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m=-\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi<\phi\leq\pi) \tag{7.80}$$

کی صورت میں $\phi=0$ پر $V_m=0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi=\pi$ تک پہنچا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi=\pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔یوں $\phi=\pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہو گی یعنی

$$\nabla\times(\nabla V)=0 \tag{7.81}$$

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{7.82}$$

سے کرتے ہیں۔سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔مساوات 7.63 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ A کا گردش

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{7.83}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

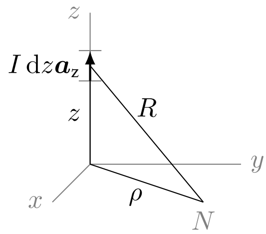
$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

ہی ہو گا۔ہم مساوات 7.83 میں دئے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.82 کے ہم آہنگ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}$$

اور

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$



شکل 7.18: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 198 پر مساوات 7.38 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A}=\oint\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.84}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا $\boldsymbol{H}$ کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباو کے مساوات

$$V=\int\frac{\rho_L\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.84 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری تکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.84 کی تفرق شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.85}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.18 میں z محدد پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}\,,\quad \mathrm{d}A_\rho=0,\quad \mathrm{d}A_\phi=0 \tag{7.86}$$

1795 سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نلکی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\,\mathrm{d}A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \frac{I\,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

1796 سے حاصل ہو گا۔یہی مساوات شکل 7.18 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جا سکتے ہیں۔یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A} = \int_S \frac{\mu_0\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.87}$$

اور

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.88}$$

1797 ہیں۔

1798 سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔برقی دباو کی طرح سمتی
1799 مقناطیسی دباو کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $\infty \to R$ پر $0 \to \boldsymbol{A}$ تصور کیا جاتا ہے۔لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $\infty \to R$
1800 کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

1801

1802 مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔تار کے اندر $\boldsymbol{B}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ بھی حاصل کریں۔

حل:تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہٰذا اس دائرے پر $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے گردش کو مساوات 7.52 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

1803 حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمل کا مستقل ہے۔

1804

1805 7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بایوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.89}$$

سمتی مقناطیسی دباو کے تعریف

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.90}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاو کے تعلق

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.91}$$

1806 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش
1807 کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

1808 7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.92}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.89 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.88 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباو دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارتا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}h_1$ لکھیں گے جو $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ کے برابر ہو گا۔ تکمل کے متغیرات x_1، y_1 اور z_1 ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{A}_2 = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}} \tag{7.93}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہٰذا گردش کے متغیرات بھی x_2، y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 100 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.93 سے $\boldsymbol{A}_2$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں تکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ تکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا ہم تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں $\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ اس کے علاوہ اس کا x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہٰذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.94}$$

یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}$ ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.95}$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.94 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times \boldsymbol{J}_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.96}$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں $\boldsymbol{J}_1$ صرف x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\boldsymbol{J}_1$ کے تمام تفرق جو x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 101 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \boldsymbol{J}_1}{R_{21}^2} \,\mathrm{d}h_1$$

یا

$$\boldsymbol{H}_2=\frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس میں $\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\boldsymbol{H}_2=\oint_h \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

1814 حاصل ہوتی ہے۔یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.93 درست ہے اور یہ مساوات ، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

1815 7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{7.97}$$

1816 کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.90 اور مساوات 7.91 سے جن سے

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{7.98}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 198 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A}\right] \tag{7.99}$$

1817 لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاو اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاو کو پہلے حل کرتے ہیں۔مساوات 7.93 کی پھیلاو

$$\nabla_2\cdot\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \nabla_2\cdot\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\,\mathrm{d}h_1 \tag{7.100}$$

لکھی جا سکتی ہے۔صفحہ 112 پر مثال 4.7 میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ اور مقداری V کے لئے

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})=V(\nabla\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہٰذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)=\frac{1}{R_{21}}(\nabla\cdot\boldsymbol{J}_1)+\boldsymbol{J}_1\cdot\left(\nabla\frac{1}{R_{21}}\right) \tag{7.101}$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2\cdot\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_h\left[\frac{1}{R_{21}}(\nabla_2\cdot\boldsymbol{J}_1)+\boldsymbol{J}_1\cdot\left(\nabla_2\frac{1}{R_{21}}\right)\right]\mathrm{d}h_1 \tag{7.102}$$

ہو گا۔

چونکہ $\boldsymbol{J}_1$ صرف متغیرات x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہٰذا اس کے x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا $\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 101 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.103}$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.101 کے دوبارہ استعمال سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot \boldsymbol{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.104}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.64 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.105}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.106}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہٰذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تا کہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.107}$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباو کا پھیلاو صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاو بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.99 حل کرنے کی خاطر پھیلاو اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاو حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباو اور سمتی مقناطیسی دباو کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho \,\mathrm{d}h}{4\pi\epsilon_0 R}$$
$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x \,\mathrm{d}h}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.108}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.99 میں مساوات 7.107 اور مساوات 7.108 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.109}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباو کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباو کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباو کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل:ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 198 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.107 کی مدد سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.110}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.2: شکل 7.8ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.3: مساوات 7.20 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.9 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$ تبدیلی رونما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 7.4: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.5: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.6: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.75 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0,a,a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525\left(\frac{I}{4\pi a}\right)$

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔اسی طرح قوت چارج کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی

رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔مساوات 8.3 لورنز مساوات قوت[21] کہلاتی ہے۔برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔(الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$،(ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$،(پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

8.2 تفرقی چارج پر قوت

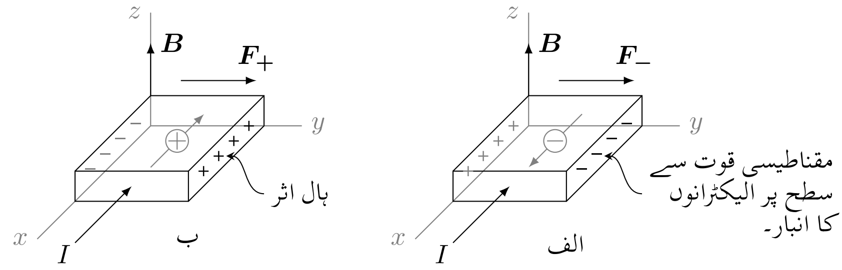
مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج $\mathrm{d}Q$ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔اب مثبت



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

اور منفی چارج کے مابین کولومب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے ہال اثر[3] کے نام[4] سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے لہٰذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند $-$ علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہٰذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں قوت $\boldsymbol{F}_-$ عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[5] ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباو[6] پایا جائے گا۔ تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول[7] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[8] وغیرہ۔

---

[1] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔
[2] Lorentz force equation
[3] Hall effect
[4] ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔
[5] uncovered
[6] Hall voltage
[7] free holes
[8] magnetic flux meter

سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔اس مساوات کو صفحہ 117 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے چارج کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{8.6}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \,\mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم مساوات 7.6 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

1898 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

1899 لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB \sin\alpha \tag{8.14}$$

1900 ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔دور کے بقایا حصوں
1901 پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ یہاں تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\
&= -108.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{nN}
\end{aligned}$$

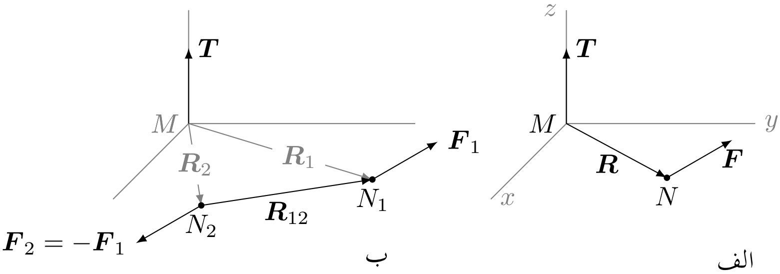
ہو گا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\
&= 54.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{nN}
\end{aligned}$$

قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right] \\
&= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2
\end{aligned} \tag{8.16}$$



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔

8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں $\boldsymbol{B}$ کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{B} \times \oint \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

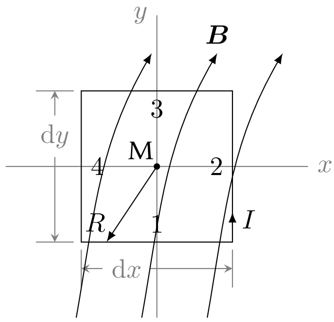
یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ[9] یعنی قوت کا معیار اثر[10] عموماً صفر نہیں ہوتا۔قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چُول[11] کا جاننا ضروری ہے۔شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کر رہا ہے۔ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}$ قوت کا بازو[12] کہلاتا ہے۔قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} \tag{8.17}$$

کے برابر ہے۔مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[9] torque
[10] moment of force
[11] pivot
[12] moment arm



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \\ &= \boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{F}_1\end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں مروڑ حاصل کریں۔تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔اس تار کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لٰہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

1923 ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکلارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

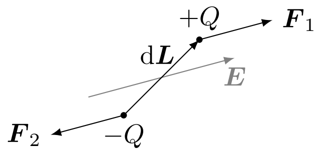
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہے لٰہذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

1924 ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

کے برابر ہے۔ بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{B}_0\right)$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.19}$$

1925 حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[13] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔ یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.20}$$

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.21}$$

1926 لکھے جا سکتے ہیں۔

1927 مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت
1928 کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

1929 غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہو گی۔

[13] differential magnetic dipole moment

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔مثبت چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{E}$ اور منفی چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_2 = -Q\boldsymbol{E}$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times Q\boldsymbol{E} \\
&= \mathrm{d}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ برقی جفت قطب ہے۔مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان $\boldsymbol{E}$ کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right)
\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right)
\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

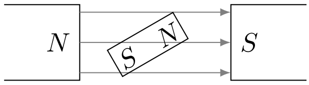
$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\right)$$



شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.22}$$

سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جا سکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔

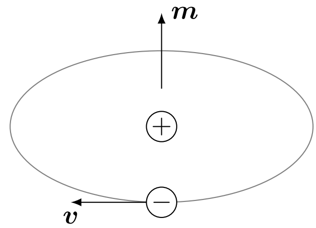
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو[14] I_m کہلائی جاتی ہے۔اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب $\boldsymbol{m}$ کو جنم دیتی ہے۔الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو $\boldsymbol{v}$ کے الٹ سمت میں ہو گی۔ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات[15] سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نِکل[16] اور کوبالٹ[17] ایسے عناصر ہیں جن کا $\boldsymbol{m}$ قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء[18] کہلاتے ہیں۔ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

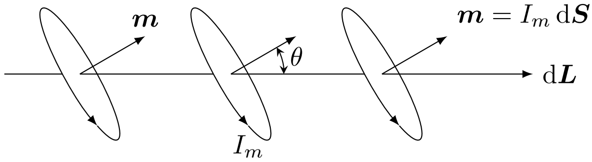
فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ایسے ہم صف[19] خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ان خطوں کو مقناطیسی خطے[20] کہتے ہیں۔مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔کسی بھی قدرتی مقناطیسی شہ میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ہاں بیرونی مقناطیسی میدان B_0 لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو B_0 کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال[21] کہلاتا ہے۔

---

[14] bound current
[15] quantum mechanics
[16] nickel
[17] cobolt
[18] ferromagnetic
[19] aligned
[20] magnetic domain
[21] hysteresis



شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔



شکل 8.7: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔ اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{m}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.23}$$

ہو گا۔ انفرادی $\boldsymbol{m}$ مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔ اجتماعی مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.24}$$

کو مقناطیسیت[22] پکارا اور $\boldsymbol{M}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقناطیسیت کی اکائی بالکل $\boldsymbol{H}$ کی اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 132 پر دئے مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔ مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

شکل 8.7 میں بند راہ کا کچھ حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔ چھوٹے رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $\boldsymbol{m} = I_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو جنم دیتی ہے۔ بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔ یوں چھوٹے حجم $\mathrm{d}S\cos\theta\,\mathrm{d}L$ یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہو گی۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رو نما ہوتی ہے۔ اگر بند راہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}$ جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہٰذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$\mathrm{d}I_m = nI_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.25}$$

[22]magnetization

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$I_m=\oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.26}$$

1960 ہو گا۔

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔یوں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ میں جفت قطب پر قوت اور مروڑ پر رہا ہے۔آئیں $\boldsymbol{B}$ کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$\oint \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=I_{\text{کل}} \tag{8.27}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$I_{\text{کل}}=I+I_m \tag{8.28}$$

کے برابر ہے۔مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$I=I_{\text{کل}}-I_m=\oint\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{8.30}$$

جسے یوں

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}\right) \tag{8.31}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ خالی خلاء میں $\boldsymbol{M}$ صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ ہی حاصل ہوتا ہے۔مساوات 8.29 میں $\boldsymbol{H}$ کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$I=\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.32}$$

1961 میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$\begin{aligned}
I_m&=\oint_S \boldsymbol{J}_m\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
I_{\text{کل}}&=\oint_S \boldsymbol{J}_{\text{کل}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
I&=\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.26، مساوات 8.32 اور مساوات 8.27 کے گردش

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{J}_m\\
\nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}&=\boldsymbol{J}_{\text{کل}}\\
\nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}
\end{aligned} \tag{8.33}$$

1962 لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.32 اور مساوات 8.33 سے غرض رہے گا۔ یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.31 کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$، مقناطیسی میدان کی شدت $\boldsymbol{H}$ اور مقناطیسیت $\boldsymbol{M}$ کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔ خطی[23] اور غیر سمتی خاصیت[24] کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.34}$$

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری[25] کہا جاتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}\right)\\ &= \mu_0 (1+\chi_m) \boldsymbol{H}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل[26] پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$\mu_R = 1 + \chi_m \tag{8.35}$$

یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_R \boldsymbol{H}$$

یا

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$\mu = \mu_0 \mu_R \tag{8.37}$$

1963 مقناطیسی مستقل[27] پکارا جاتا ہے۔ جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ
1964 ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ ایسے اشیاء مساوات 8.34 پر پورا اترتے ہیں۔

1965 فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت[28] کے اشیاء میں $\boldsymbol{H}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{B}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق تناوی شکل

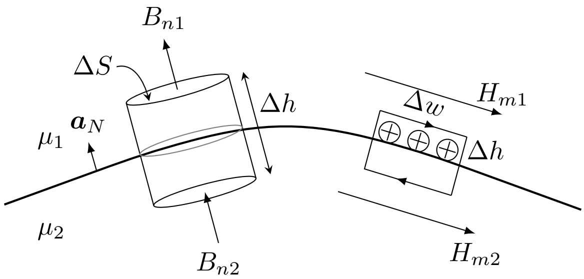
$$\begin{aligned}B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z\\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z\\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z\end{aligned} \tag{8.38}$$

1966 میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات صفحہ 135 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔ یوں سمتی خاصیت کے اشیاء میں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل
1967 ہے۔ مساوات $\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ اب بھی درست ہے اگرچہ $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{M}$ عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

1968 مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔ حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

---

[23] linear
[24] isotropic
[25] magnetic susceptibility
[26] relative magnetic constant, relative permeability
[27] magnetic constant, permeability
[28] anisotropic



شکل 8.8: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

1969

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ بالکل انہیں کی طرح شکل 8.8 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے نلکی ڈبے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$B_{n2} = B_{n1} \tag{8.39}$$

یا

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \tag{8.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں عمودی $\boldsymbol{B}$ سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی $\boldsymbol{H}$ سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.41}$$

$$\boldsymbol{a}_N \cdot \left(\boldsymbol{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1\right) = 0 \tag{8.42}$$

1970 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی $\boldsymbol{M}$ کا تعلق سرحد پر عمودی $\boldsymbol{H}$ کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} M_{n1} \tag{8.43}$$

1971 لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_{\perp}\Delta w$$

یعنی

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{8.44}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{8.45}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی $\boldsymbol{B}$ کے لئے یوں

$$\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_{\perp} \tag{8.46}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{8.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی $\boldsymbol{M}$ کے لئے

$$M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_{\perp} \tag{8.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔ کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔ برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8.49}$$

ہے۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \tag{8.50}$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔ منبع برقی دباو کو محرک برقی دباو پکارا جاتا ہے۔اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباو کو محرک مقناطیسی دباو پکارا جائے گا۔ متحرک مقناطیسی دباو کی اکائی ایمپیئر ہے۔ حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباو استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیئر-چکر[29] لی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباو کے فرق کو

$$V_{AB} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.51}$$

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباو کے فرق کو

$$V_{mAB} = -\int_B^A \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.52}$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 219 پر مساوات 7.80 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے دوران مندرجہ بالا تکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{8.53}$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔ یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔ مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.54}$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمل

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.55}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کل مقناطیسی بہاو بھی ایسے ہی تکمل سے حاصل ہو گا لہٰذا

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.56}$$

لکھا جائے گا۔ یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$V = IR \tag{8.57}$$

---

[29] ampere-turns

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباو اور مقناطیسی بہاو کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے $\Re$ سے ظاہر کیا جائے گا لہٰذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$V_m = \Phi\Re \tag{8.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیئر-چکر فی ویبر $(\mathrm{A \cdot t/Wb})$ ہے۔

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{8.59}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$\Re = \frac{d}{\mu S} \tag{8.60}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جا سکے۔

مثال 8.2: ایک سلاخ جس کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $1\,\mathrm{mm}$ ہے کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے پر $220\,\mathrm{V}$ برقی دباو لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8\,\Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5\,\mathrm{A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$$

مثال 8.3: ایک سلاخ کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $2\,\mathrm{cm}$ ہے کی جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔ اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں $0.5\,\mathrm{A}$ برقی رو ہو مقناطیسی دباو لاگو کرتا ہے۔ سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاو بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\Re = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94\,988\,\mathrm{A \cdot t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \frac{V_m}{\Re} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53\,\mathrm{mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاو ہو گی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42\,\mathrm{T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ چارج پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولومب کا قانون اخذ کیا۔اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h \tag{8.61}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جا سکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی،یعنی،ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمتیہ[30] سے حاصل کی جائے گی۔یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صرف پیش کرتے ہیں

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \tag{8.62}$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ پر کرنے سے

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \tag{8.63}$$

اور

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \tag{8.64}$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے ناممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر $\mathrm{J/m^3}$ میں ناپا جائے گا۔

---

[30] Poynting vector

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، کپیسٹر اور امالہ کردار ادا کرتے ہیں۔ مزاحمت اور کپیسٹر پر ہم بات کر چکے ہیں۔ برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دارومدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔ اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر چارج کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباو کی شرح کو کپیسٹنس کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ کپیسٹر کے قیمت کا دارومدار کپیسٹر کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔ یوں مزاحمت اور کپیسٹر کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔ اس حصے میں ہم امالہ L پر غور کریں گے جس کی اکائی ہینری[31] H ہے۔ نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دارومدار امالہ کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاو[32] کا ذکر ضروری ہے۔ تصور کریں کہ N چکر لا لچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔ تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتی ہے۔ یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاو ہر چکر سے گزرتی ہے۔ یوں پہلے چکر سے Φ بہاو گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاو گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاو گزرتی ہے۔ ارتباط بہاو سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاو کا مجموعہ۔

ارتباط بہاو اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔ اگر ارتباط بہاو اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ[33] کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔ اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاو دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ[34] کہتے ہیں۔ اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔ اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{8.65}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاو تمام چکر سے گزرتی ہے۔ امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔ خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاو اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتا۔ ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔ صفحہ 189 پر مساوات 7.13

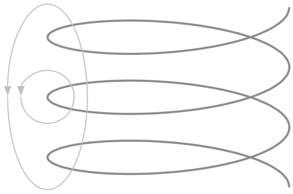
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاو

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S B_\phi \,\mathrm{d}S \\
&= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu I \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z}{2\pi\rho} \\
&= \frac{\mu I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}
\end{aligned}$$

---

[31] Henry
[32] flux linkage
[33] self inductance
[34] mutual inductance



شکل 8.9: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاو مختلف ہو سکتی ہے۔

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ مقناطیسی بہاو دونوں تاروں کے درمیانے خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔ یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{8.66}$$

2018 ہو گی۔ یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاو پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاو پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔ یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاو حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاو لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاو} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

2019 آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

پیدا ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مقناطیسی دباو ہے جسے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو Φ کو تکمل

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس تکمل میں $\boldsymbol{B}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ بایوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں بند تکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔اس مساوات میں $\boldsymbol{A}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.67}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دارومدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی تکمل لیا گیا۔ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرہ مشکل[35] سے بنتی ہے۔ سطحی تکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جا سکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بایوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہٰذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظرانداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.4: لامحدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کے تار کو z محدد پر تصور کرتے ہیں۔تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi \rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔رداس ρ پر $\mathrm{d}\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$\mathrm{d}\Phi = B_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho$$

بہاو گزرے گی۔اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاو صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہٰذا یہ تفرقی بہاو صرف

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho$$

---

[35] آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

دیتی ہے۔اگر تفرقی بہاو تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔یوں تکمل سے اندرونی ارتباط بہاو

$$\text{ارتباط بہاو} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یا فی میٹر امالہ

$$L_{\text{اندرونی فی میٹر}} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{8.68}$$

2032 حاصل ہوتی ہے۔

2033

2034

2035 مشق 8.2: صفحہ 189 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
I_{\text{گھیرا}} &= \left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I \\
H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) \\
\mathrm{d}\Phi &= \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ تفرقی بہاو ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تفرقی ارتباط بہاو

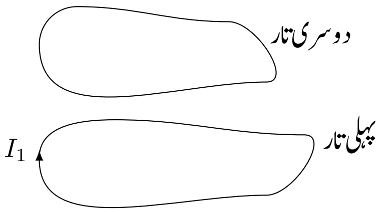
$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)^2 \mathrm{d}\rho$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.69}$$

2036 حاصل ہوتی ہے۔

2037



شکل 8.10: مشترکہ امالہ۔

مساوات 8.68 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔یوں کم تعدد پر مساوات 8.66، مساوات 8.68 اور مساوات 8.69 کا مجموعہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.70}$$

فی میٹر ہم محوری تار کا کل امالہ ہو گا۔ جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہو جاتی ہے۔یوں بلند تعدد پر مساوات 8.66 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{8.71}$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.62، مساوات 8.63 یا مساوات 8.64 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} L = \frac{2W}{I^2} &= \frac{1}{I^2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \end{aligned} \tag{8.72}$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.2 میں لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.3 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.10 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔آئیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاو کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین مشترکہ امالہ حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاو کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint\left(\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاو کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$M_{21}=\frac{\Phi_2}{I_1} \tag{8.73}$$

ہے جس سے

$$M_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\left(\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \tag{8.74}$$

2043 حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رو لی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاو حاصل کی جاتی تب

$$M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\left(\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \tag{8.75}$$

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دو درجی تکمل میں اندرونی تکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمل پہلی راہ پر ہے۔ تکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمل لیا جائے تو تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.74 ملتا ہے لٰہذا

$$M_{21}=M_{12} \tag{8.76}$$

2044 حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

2045 سوالات

2046 سوال 8.1: صفحہ 189 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں
2047 برقی رو I کے برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

2048 جواب: $\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left[\rho_2^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}+\frac{\rho_3^4-\rho_2^4}{4}-\rho_2^2\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)\right]$

2049 سوال 8.2: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.72 کی مدد سے حاصل کریں۔

2050 سوال 8.3: صفحہ 251 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔ اسی کو دوبارہ مساوات 8.72 کی مدد سے حاصل کریں۔

2051 جواب: بیرونی تار میں $H=\frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)$ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

2052