برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ . . . 1

1.2 سمتی الجبرا . . . 2

1.3 کارتیسی محدد . . . 3

1.4 اکائی سمتیات . . . 5

1.5 میدانی سمتیہ . . . 9

1.6 سمتی رقبہ . . . 9

1.7 غیر سمتی ضرب . . . 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . 14

1.9 گول نلکی محدد . . . 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . 25

1.10 کروی محدد . . . 27

2 کولومب کا قانون 37

2.1 قوت کشش یا دفع . . . 37

2.2 برقی میدان کی شدت . . . 41

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . 44

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . 49

2.5 چارج بردار حجم . . . 53

2.6 مزید مثال . . . 54

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط . . . 61

2.8 سوالات . . . 63

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 65
3.1 ساکن چارج 65
3.2 فیراڈے کا تجربہ 65
3.3 گاؤس کا قانون 66
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 68
3.4.1 نقطہ چارج 68
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 70
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 70
3.5 ہم محوری تار 71
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 73
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 73
3.8 پھیلاو 76
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 78
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 80
3.11 مسئلہ پھیلاو 82

4 توانائی اور برقی دباو 85
4.1 توانائی اور کام 85
4.2 لکیری تکملہ 86
4.3 برقی دباو 91
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 92
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 93
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 94
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 94
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 98
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 102
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 103
4.6 جفت قطب 104
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 106
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 109

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 115

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو . . . 115

5.2 استمراری مساوات . . . 117

5.3 موصل . . . 119

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط . . . 124

5.5 عکس کی ترکیب . . . 127

5.6 نیم موصل . . . 130

5.7 ذو برق . . . 131

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط . . . 136

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط . . . 140

5.10 کپیسٹر . . . 140

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر . . . 142

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر . . . 143

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر . . . 143

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر . . . 145

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس . . . 146

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 155

6.1 مسئلہ یکتائی . . . 157

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے . . . 158

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات . . . 159

6.4 لاپلاس مساوات کے حل . . . 160

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال . . . 166

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل . . . 169

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ . . . 176

7 ساکن مقناطیسی میدان 183
7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون . . . 183
7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 187
7.3 گردش . . . 191
7.3.1 نلکی محدد میں گردش . . . 198
7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات . . . 204
7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات . . . 205
7.4 مسئلہ سٹوکس . . . 206
7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو . . . 210
7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو . . . 216
7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول . . . 221
7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو . . . 222
7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 223

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 227
8.1 متحرک چارج پر قوت . . . 227
8.2 تفرقی چارج پر قوت . . . 228
8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت . . . 231
8.4 قوت اور مروڑ . . . 232
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے . . . 237
8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل . . . 238
8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط . . . 241
8.8 مقناطیسی دور . . . 242
8.9 مقناطیسی مخفی توانائی . . . 245
8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ . . . 246
8.11 مشترکہ امالہ . . . 250

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 253

9.1 فیراڈے کا قانون 253

9.2 انتقالی برقی رو 259

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 263

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 264

9.5 تاخیری دباو 266

10 مستوی امواج 271

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 271

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 272

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 279

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 281

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 283

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 286

10.4 موصل میں امواج 290

10.5 انعکاس مستوی موج 296

10.6 شرح ساکن موج 302

11 ترسیلی تار 309

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 309

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 313

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 314

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 317

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 318

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 319

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 324

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 331

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 332

12 تقطیب موج 337

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 337

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 340

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 343

13.1 ترچھی آمد 343

13.2 ترسیم ہائی گن 354

14 مویج اور گھمکیا 357

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 357

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 358

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج 364

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 373

15 سوالات 379

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمٹر)[1] اور اینٹینا[2] یا پھر ڈیم میں نسب جنریٹر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباو اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیمی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

11.1 ترسیلی تار کے مساوات

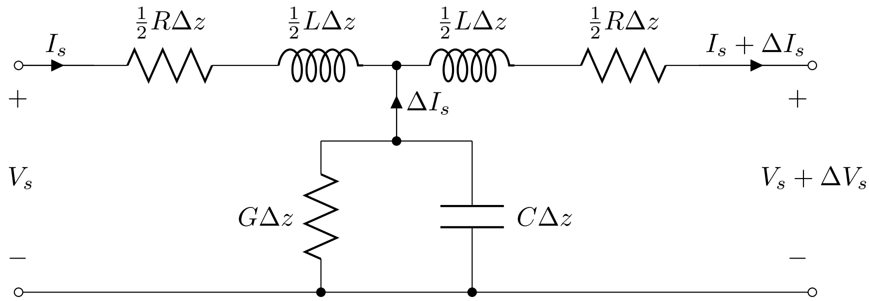
ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ، μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R، L، C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت a_{z} جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$، امالہ $L\Delta z$، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہٰذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباو

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

[1] transmitter
[2] antenna



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R، L، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔ یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔ یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں $_{\text{حقیقی}}$ کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباو کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s - \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\Delta I_s$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہو گا۔ یوں $\Delta z \;\to\; 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s \tag{11.1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباو

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s\right]\left(G\Delta z + j\omega C\Delta z\right)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s + \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) I_s \Delta z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta z \to 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یوں

$$\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s \tag{11.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

میں $\boldsymbol{E}_s = E_{xs}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{H}_{ys} = H_{ys}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}E_{xs}}{\mathrm{d}z} = -j\omega\mu H_{ys} \tag{11.3}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s$$

سے

$$\frac{\mathrm{d}H_{ys}}{\mathrm{d}z} = -\left(\sigma + j\omega\epsilon\right) E_{xs} \tag{11.4}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہٰذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$V_s = V_0 e^{-\gamma z} \tag{11.5}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباو کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا حیطہ V_0 ہے۔ حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{11.6}$$

ہو جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

ہو گا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.8}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہٰذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.9}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{11.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہو گی۔ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{11.12}$$

ہو گی۔انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{11.13}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta = \eta_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \tag{11.14}$$

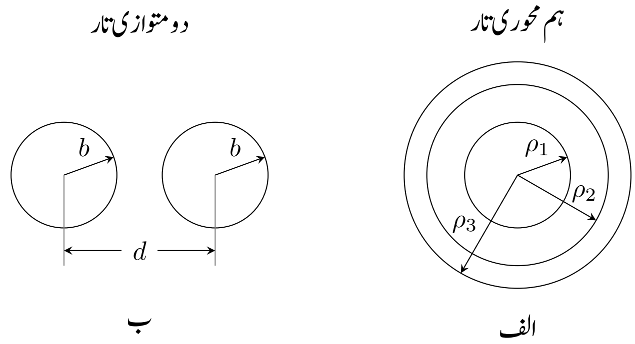
لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو $\omega = 5 \times 10^8 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر کام کرتی ہے کے مستقل $R = 0.15 \, \frac{\Omega}{\text{m}}$، $L = 0.25 \, \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$، $G = 8 \, \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80 \, \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔اس کے α، β، λ، v اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \, \frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $2.236 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $2.81 \, \text{m}$، $2.23 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9\underline{/-0.029^\circ} \, \Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ صفحہ 143 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1\,\mathrm{m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 247 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.16}$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \tag{11.17}$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{11.18}$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رو یکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظر انداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہو گی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی

باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہے اور چونکہ $\boldsymbol{J}_s = \sigma_c \boldsymbol{E}_s$ ہوتا ہے لہٰذا تار کی سطح پر $\boldsymbol{E}_s$ کا مماثل جزو بھی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو گا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \tag{11.19}$$

ہو گی۔ اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہو گی۔ اگرچہ ہم نلکی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\delta \ll \rho_1$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں صفحہ 293 پر مساوات 10.65 سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{H_{ys}}\right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{\sigma_c\delta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباو ہے لہٰذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \tag{11.20}$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہو گی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہو گی۔ صفحہ 291 پر مساوات 10.62 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f\mu\delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \qquad (\delta \ll \rho_1) \tag{11.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \qquad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right] \qquad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.23}$$

ہو گا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \qquad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ بے پناہ[3] تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

---

[3] unshielded

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے [4]استعمال ہوتے ہیں۔یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.25}$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی یک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباو صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 120 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ایک تار سے دوسرے تار تک $\boldsymbol{E}$ کی لکیری تکمل سے برقی دباو V حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 125 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاو کے برابر ہوتی ہے، یعنی $\rho_S = D_{\text{عمودی}}$۔یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \epsilon\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S}{V} \tag{11.27}$$

ہو گا۔اب موصل کے سطح پر $E_{\text{عمودی}}$ جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو $J = \sigma E_{\text{عمودی}}$ لکھی جا سکتی ہے لہٰذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S$$

[4] Bessel functions

ہو گی۔یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$G=\frac{I}{V}=\frac{\sigma\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S}{V} \tag{11.28}$$

ہو گی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$G=\frac{\sigma}{\epsilon}C \tag{11.29}$$

لکھا جا سکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1=1\,\mathrm{mm}$، $\rho_2=3.49\,\mathrm{mm}$ اور $\sigma_c=3.82\times10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں کے ذو برق کے مستقل $\mu_R=1$، $\epsilon_R=2.25$ اور $\sigma=10\,\frac{\mathrm{\mu S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ترسیلی تار کے α، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1\,\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}}$، $0.25\,\frac{\mathrm{\mu H}}{\mathrm{m}}$، $1.29\,\frac{\mathrm{nH}}{\mathrm{m}}$، $0.014\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$، $15.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ اور $50\underline{/0.055^\circ}\,\Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔تار کا رداس b، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔تاروں کے گرد ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 149 پر مساوات 5.75 کی نصف ہو گی۔اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$C=\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.30}$$

ہو گی۔اگر $b\ll d$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C=\frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{d}{b}}\qquad(b\ll d)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

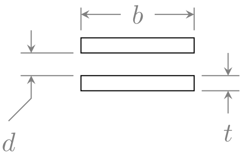
$$L_{\text{بیرونی}}=\frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}}=\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{b}\qquad(b\ll d)$$

لکھی جا سکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}}=\frac{\mu}{\pi}\left(\frac{\delta}{2b}+\cosh^{-1}\frac{d}{2b}\right)\qquad(\delta\ll b) \tag{11.31}$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

ہے۔تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزارتی ہے۔اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S=2\pi b\delta$ ہے لہٰذا فی میٹر مزاحمت

$$R=\frac{l}{\sigma_c S}=\frac{1}{\pi b\delta\sigma_c} \tag{11.32}$$

ہو گی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$G=\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.33}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$Z_0=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\cosh^{-1}\frac{d}{2b} \tag{11.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار[5] دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔

اگر $d \ll b$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C=\frac{\epsilon\,\text{رقبہ}}{\text{فاصلہ}}=\frac{\epsilon b}{d} \tag{11.35}$$

ہو گی۔یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}}=\frac{\mu\epsilon}{C}=\frac{\mu d}{b} \tag{11.36}$$

ہو گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔یوں کل امالہ

$$L=\frac{\mu d}{b}+\frac{2}{\sigma_c\delta b w}=\frac{\mu}{b}(d+\delta)\quad(\delta\ll t) \tag{11.37}$$

[5] stripline

ہو گی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہو گی۔یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b\delta}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R=\frac{2}{\sigma_c b\delta} \quad (\delta \ll t) \tag{11.38}$$

ہو گی۔

مساوات 11.29 سے

$$G=\frac{\sigma b}{d} \tag{11.39}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}}=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{d}{b} \tag{11.40}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

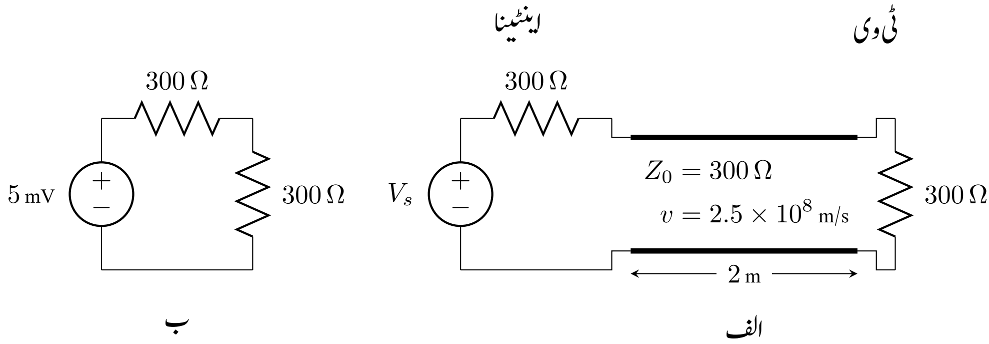
مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ان میں طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ہم محوری تار کا $\rho_1=0.5\,\text{mm}$، $\rho_2=2.8\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b=0.5\,\text{mm}$، $d=9\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=5$ ہیں۔ مستوی سطح کے $d=0.2\,\text{mm}$، $b=5\,\text{mm}$، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=2.2$ ہیں۔

جوابات: 42.6 cm، 0.26، 33.5 cm، −0.215، 50.6 cm، 0.816

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ ہے۔ ایسی تار ٹی وی[6] کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[7] مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباو V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی $300\,\Omega$ کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ٹی وی اسٹیشن سے



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہٰذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہٰذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5\,\mathrm{m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہیں۔ ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi\,\mathrm{rad}$$

یا $288°$ ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت 300 Ω ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی 300 Ω ہے لہٰذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5\,\mathrm{mV}$$

TV, television[6]
Thevenin[7]

پیدا کرے گا۔اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہٰذا منبع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا 2.5 mV کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچے گا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈیئن پیچھے ہو گا۔یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5\cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{بار}} = 2.5\cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33\cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{بار}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33\cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہٰذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{بار}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5\times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33\times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41\,\text{nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباو اور برقی رو کے موثر[8] قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی $300\,\Omega$ ہے۔یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل $150\,\Omega$ کا بار پایا جاتا ہے۔اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 = 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$\Gamma = \frac{1}{3}\underline{/\pi} \tag{11.41}$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب $300\,\Omega$ کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_L \tan\beta l} = 300\frac{150 + j300\tan 288^\circ}{300 + j150\tan 288^\circ} \\ &= 509.7\underline{/-23.79^\circ} = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

---

[8] RMS, effective

ہو گی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔ کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s,\text{داخلی}} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013\underline{/15.017^\circ} \quad \mu\text{A}$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{\text{داخلی}} = \frac{1}{2}\left(6.3013 \times 10^{-6}\right)^2 \times 466.39 = 9.2593\,\text{nW}$$

طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہٰذا $150\,\Omega$ کے بار کو $9.2593\,\text{nW}$ حاصل ہو گا جو گزشتہ جواب یعنی $10.41\,\text{nW}$ سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہو گا لہٰذا ہر ٹی وی کو صرف $4.6297\,\text{nW}$ طاقت مہیا ہو گا۔ چونکہ ایک ٹی وی $300\,\Omega$ مزاحمت رکھتا ہے لہٰذا ٹی وی پر پیدا برقی دباو

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{\left|V_{s,\text{بار}}\right|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$\left|V_{s,\text{بار}}\right| = 1.666\,67\,\text{mV}$$

ہو گا۔ یہ قیمت $2.5\,\text{mV}$ سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباو کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباو کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کار آمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباو موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.87

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

دیتا ہے۔ اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلند تر}} &= \frac{1}{-0.8\pi}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ &= -1.25\left(\frac{1}{2} + n\right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.875\,\text{m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو $z_{\text{بلند تر}} = -3.125\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہٰذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے $z_{\text{بلند تر}} = 0.625\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محدد پر پائی جاتی ہے لہٰذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہٰذا ان کے مقامات

$$z_{\text{کمتر}} = 0\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.25\,\text{m}$$

ہوں گے۔آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباو کا نشیب پایا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر $1.66\,\mathrm{mV}$ ہے لہٰذا دباو کی کمتر قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباو کی چوٹی اس کے دگنا یعنی $3.32\,\mathrm{mV}$ حاصل ہوتی ہے۔ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو

$$V_{s,\text{داخلی}} = I_{s,\text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left(6.3013 \times 10^{-6} \underline{/15.017^\circ}\right) \left(509.7 \underline{/-23.79^\circ}\right) = 0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہٰذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباو یوں

$$V_{s,\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباو اور بار پر برقی دباو کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔اگرچہ ہم دونوں برقی دباو کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔مساوات 10.86 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) V_0^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباو معلوم ہے لہٰذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s,\text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 \underline{/-8.77^\circ}}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3} e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 \underline{/-72^\circ}$$

اور یوں بار یعنی $z = 0$ پر برقی دباو اب حاصل کی جا سکتی ہے

$$V_{s,\text{بار}} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 \underline{/-72^\circ} = 0.001666 \underline{/-288^\circ}$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباو کی حتمی قیمت برابر ہیں۔تار کے داخلی سرے پر دباو کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباو کا زاویہ 72° ہے۔یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی -279.23° ہے۔انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کپیسٹر $Z_L = -j300\,\Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔کپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 \underline{/-90^\circ}$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیطہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$

ہو گا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

ہو گی جو خیالی عدد ہے لہٰذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جا سکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیمی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ان میں سمتھ نقشہ[9] زیادہ اہم ہے۔اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔اس نقشے میں بار بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں z کارتیسی محدد کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

اور

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.42}$$

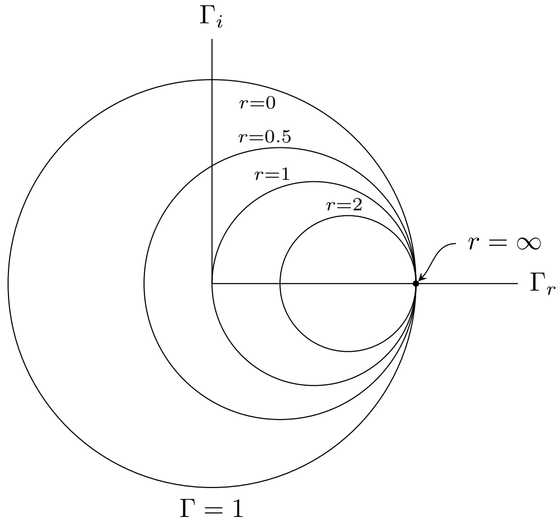
لکھے جا سکتے ہیں۔شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$

[9] Smith chart



شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$r=\frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.43}$$

$$x=\frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.44}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

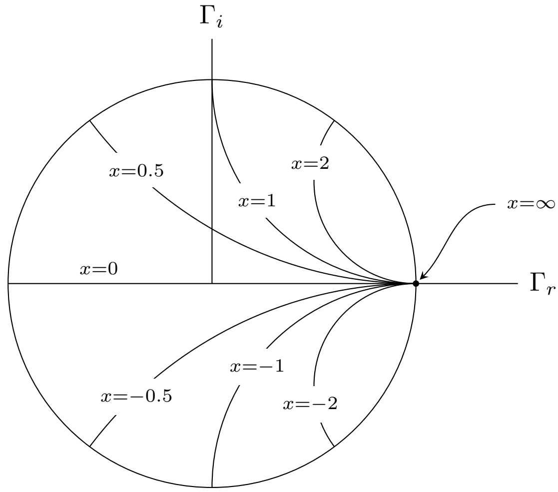
$$\left(\Gamma_r-\frac{r}{1+r}\right)^2+\Gamma_i^2=\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{11.45}$$

$$(\Gamma_r-1)^2+\left(\Gamma_i-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{11.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر $r=0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے $(0,0)$ پر ہے۔ خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح $r=\infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر $(1,0)$ ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma=1$ تک محدود ہے۔ اب $r=\infty$ سے مراد $Z_L-\infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma=1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال $r=1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5,0)$ ہے۔ شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ $r=0.5$ اور $r=2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مراکز $(1,\frac{1}{x})$ ہیں۔ لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z=\infty$ اور $\Gamma=1+j0$ ہوں گے۔ مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1,0)$ ہے لہٰذا یہ $\Gamma=1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔ اگر $x=1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1,1)$ ہوں گے۔ جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma|=1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x=-1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔ شکل میں $x=0.5$، $x=-0.5$، $x=2$ اور $x=-2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں $x=0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدد پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔اگر نقشے پر درکار r اور (یا) x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔نقشے کے مرکز $(0,0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدد یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔یوں محدد کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدد کے مرکز $(0,0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جا سکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔اب مثال کے طور پر $Z_0=50\,\Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L=25+j50\,\Omega$ کا بار $z=0.5+j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r=0.5$ اور $x=1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔شرح انعکاس تقریباً $0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s=V_0^+\left(e^{-j\beta z}+\Gamma e^{j\beta z}\right)$$

کو برقی رو

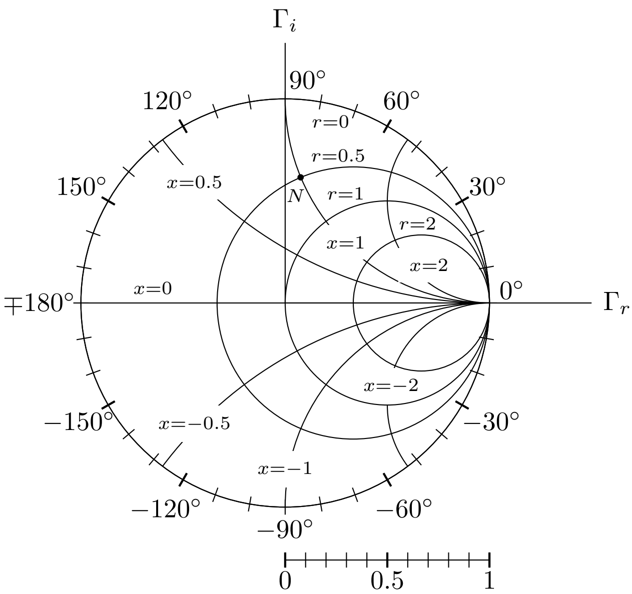
$$I_s=\frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z}-\Gamma e^{j\beta z}\right)$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{داخلی}}=\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0}=\frac{V_s}{Z_0 I_s}=\frac{e^{-j\beta z}+\Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z}-\Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جا سکتی ہے جس میں $z=-l$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{داخلی}}=\frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{j2\beta l}} \tag{11.47}$$



شکل 11.7: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $l = 0$ پر کرنے سے

$$z_{\text{داخلی}}\Big|_{l=0} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} = z \tag{11.48}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین بار پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| \, e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| \, e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

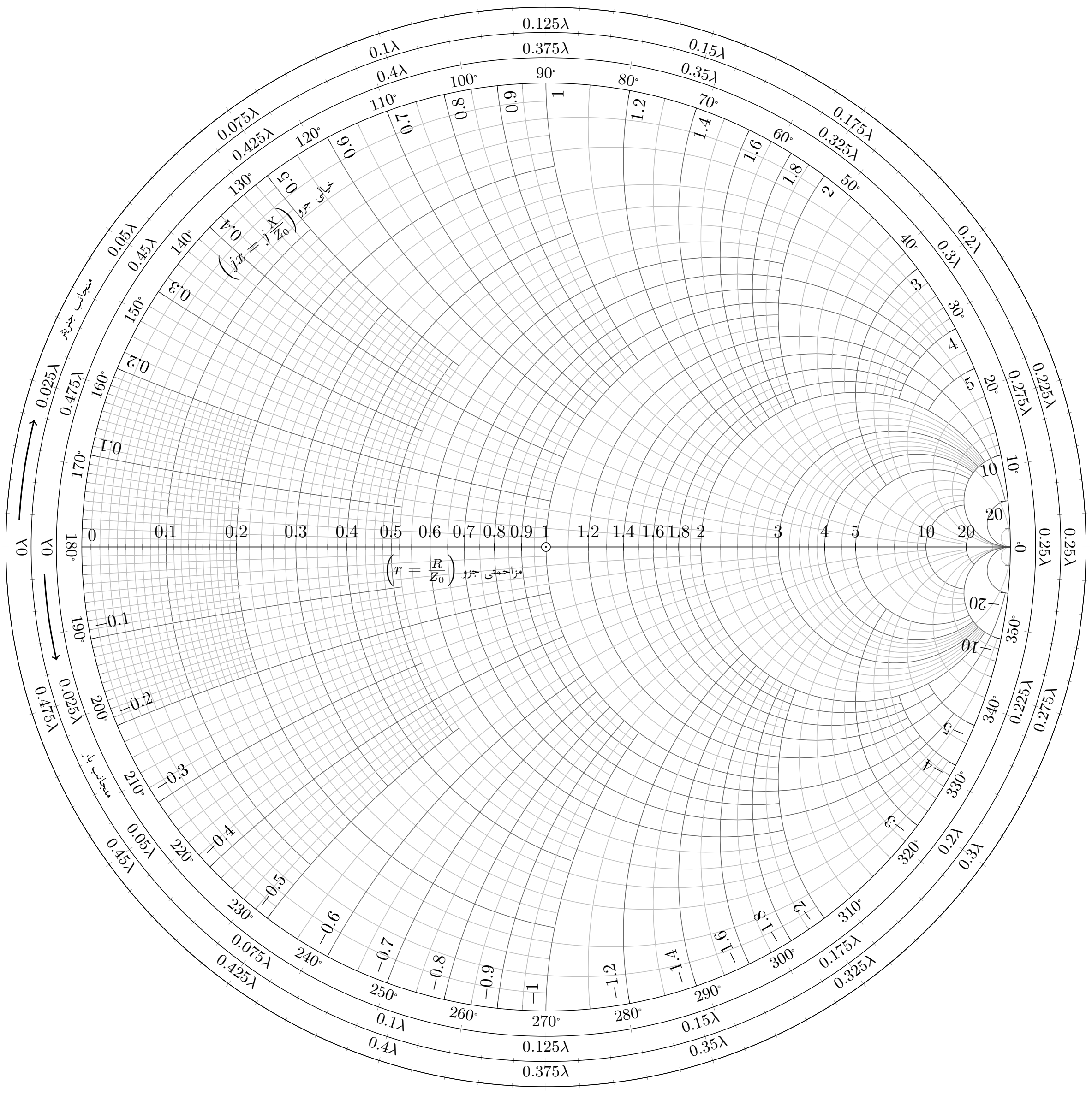
حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیا زاویہ $(\phi - 2\beta l)$ ہے۔یوں سمتھ نقشے میں نقطہ z یعنی

$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.49}$$

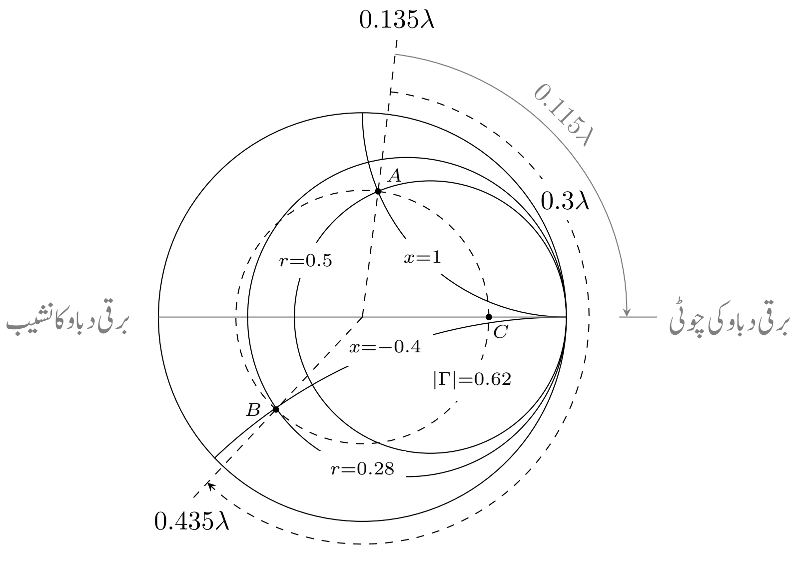
کی نشاندہی کرتے ہوئے $|\Gamma| \underline{/\phi}$ ناپیں۔اب $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi - 2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے $z_{\text{داخلی}}$ ناپیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بار سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں بار z سے دور $z_{\text{داخلی}}$ کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جنریٹر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi - 2\beta l$ ہوتا ہے لہٰذا نقشے پر ہم گھڑی کے سمت چلتے ہیں۔یوں $\beta l = \pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین بار کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔جیسے شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جنریٹر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی



شکل 11.8: مکمل سمتھ نقشہ۔



شکل 11.9: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ان فیتوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباو کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔یوں $50\,\Omega$ کے ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کے بار پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ شکل 11.9 میں $z = 0.5 + j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔اگر تار کی لمبائی $60\,\mathrm{cm}$ ہو اور اشارے کی تعداد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج $2\,\mathrm{m}$ ہو، تب $\frac{l}{\lambda} = 0.3$ ہو گا لہٰذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$ سے مرکز تک لکیر اور $|\Gamma|$ رداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z_{\text{داخلی}} = 0.28 - j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $Z_{\text{داخلی}} = 14 - j20$ ہو گا۔ تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{\text{داخلی}} = 13.7 - j20.2$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔کسی بھی $\Gamma = |\Gamma|\underline{/\phi}$ کے لئے $z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$
\begin{aligned}
V_s &= V_0^+\left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right)\\
&= V_0^+ e^{j\beta l}\left[1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right]
\end{aligned}
$$

کی حتمی قیمت

$$
\begin{aligned}
|V_s| &= V_0^+\left|e^{j\beta l}\right|\left[\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|\right]\\
&= V_0^+\left|1 + |\Gamma|\, e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|
\end{aligned}
$$

ہے جہاں $\left|e^{j\beta l}\right| = 1$ کے برابر[10] ہے۔اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+\left(1 - |\Gamma|\right)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n+1)\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت

[10] $\left|e^{j\beta l}\right| = \left|\cos\beta l + j\sin\beta l\right| = \sqrt{\cos^2\beta l + \sin^2\beta l} = 1$

$V_0^+(1+|\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \ldots$ ہے۔عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں بار پر V_s کی کم سے کم قیمت ہو گی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں بار پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔آئیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی بار R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0^\circ}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $R_L < Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ کی صورت میں بار پر کمتر V_s ہو گا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ کی صورت میں بار پر بلند تر V_s ہو گا۔سمتھ نقشے پر افقی محدد حقیقی Γ دیتا ہے۔منفی افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/\pi}$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر کمتر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں منفی افقی محدد پر پایا جائے گا۔اسی طرح مثبت افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \underline{/0}$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر بلند تر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں مثبت افقی محدد پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔کسی بھی مخلوط بار $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمتھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمتھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = (2n+1)\pi$ ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔اب $2n\pi$ سے مراد سمتھ نقشے کے افقی محدد کا مثبت حصہ جبکہ $(2n+1)\pi$ سے مراد افقی محدد کا منفی حصہ ہے۔یوں شکل 11.9 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔یوں بار سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی $0.115 \times 200 = 23\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے۔اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب بار سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہٰذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l}\right)$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔اسی طرح جس نقطے پر برقی دباو کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں سمتھ نقشے کے افقی محدد کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی بار R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا۔اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہو گا۔یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہو گا۔یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\frac{R_L}{R_0}$ اور $\frac{R_0}{R_L}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہو گا۔یوں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے اور مثبت افقی محدد سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔شکل 11.9 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہٰذا $s = 4.2$ ہے۔مثبت افقی محدد پر $r > 1$ ہوتا ہے لہٰذا محدد کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔ اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90°$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں $Z_{\text{داخلی}}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90°$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90°}{Z_0 + jZ_L \tan 90°} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = \frac{1}{z} \tag{11.50}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} &= z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} \\ \frac{Z_L}{Z_0} &= z \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 11.50 کے تحت بار سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہٰذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$y = \frac{1}{z} = z_{\underset{0.25\lambda}{\text{منجانب جنریٹر}}} \tag{11.51}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

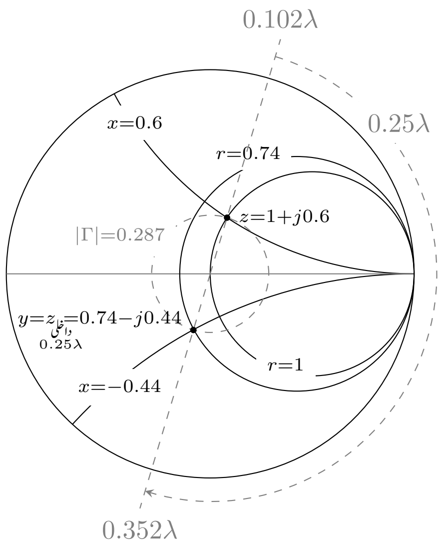
شکل 11.10 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جنریٹر 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287\underline{/73.7°}$ دیتا ہے۔ چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جنریٹر 0.25λ چلتے ہوئے 0.352λ سے مرکز تک لکیر اور 0.287 رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z_{\text{داخلی}} = 0.74 - j0.44$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{z}$ یعنی y کے عین برابر ہے۔

آئیں کسر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ کسر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} \\ &= jZ_0 \tan \beta l \end{aligned} \tag{11.52}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کسر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = jZ_0 \tan 90° = \infty \qquad (\text{کسرے دور}) \tag{11.53}$$



شکل 11.10: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برقی فراوانی کے برابر ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کسے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j\infty \tan \beta l} \\ &= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \end{aligned} \tag{11.54}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\underset{0.25\lambda}{\text{داخلی}}} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \qquad (\text{کھلے دور}) \tag{11.55}$$

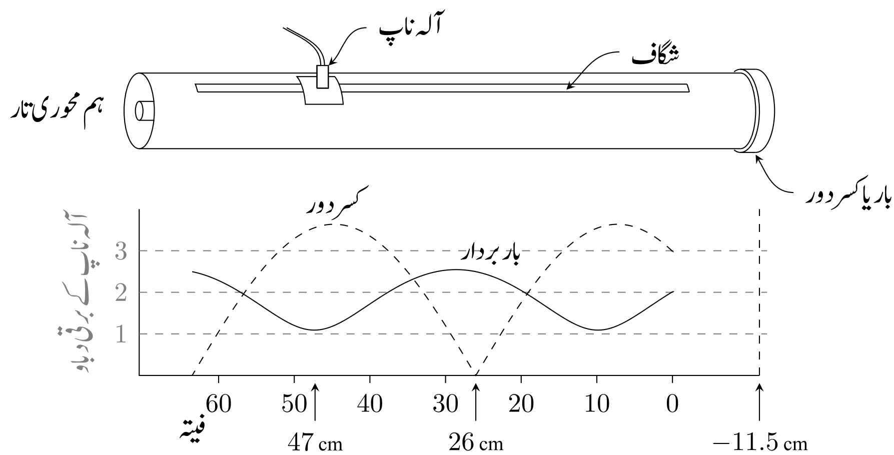
حاصل ہوتی ہے۔یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور کسر دور کردار ادا کرتی ہے۔

سمتھ مزاحمتی نقشے[11] کا متبادل سمتھ فراوانی[12] نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ان میں $y = \frac{Y_L}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباو کی کمتر قیمت حاصل ہو گی۔ ایصالی سمتھ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہو گا۔

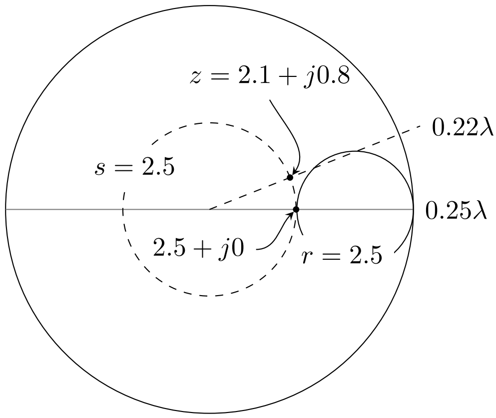
11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے بار کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں بار کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔

[11] Smith impedance chart
[12] Smith admittance chart



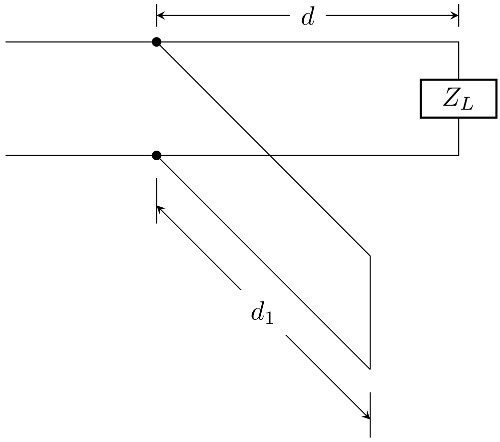
شکل 11.11: ہم محوری تار میں شگاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔



شکل 11.12: اگر 0.03λ لمبی تار پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5 + j0$ ہو تب $z = 2.1 + j0.8$ ہو گا۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔ شکل 11.11 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جا سکتا ہے لہٰذا اسے بار کا مقام تصور نہیں کریں۔ کمتر برقی دباو فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔ سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔ اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہٰذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔ اشارے کی تعدد 400 MHz ہے لہٰذا طول موج 75 cm ہے۔ بار کا مقام تعین کرنے کی خاطر بار کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو کسر دور کیا جاتا ہے۔ کسر دور تار پر کمتر دباو فیتے پر 26 cm کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کسر دور نقطے سے کمتر دباو کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباو کسر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ ایسی صورت میں کسر دور کا مقام فیتے پر $26 - 37.5 = -11.5\,\text{cm}$ نشان کے ساتھ ہو گا۔ چونکہ بار کے مقام پر ہی کسر دور پیدا کیا گیا تھا لہٰذا بار بھی فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ کے نشان کے ساتھ ہو گا۔ یوں حاصل نتائج کے تحت بار سے کم تر دباو کا نقطہ $47 - (-11.5) = 58.5\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے بار سے کمتر دباو کا فاصلہ 21 cm حاصل ہوتا ہے۔ بلند تر دباو کا بار سے فاصلہ یوں $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25\,\text{cm}$ ہو گا جو $\frac{2.25}{75} = 0.03$ طول موج کے برابر ہے۔



شکل 11.13: بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے کسرے دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے بار اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

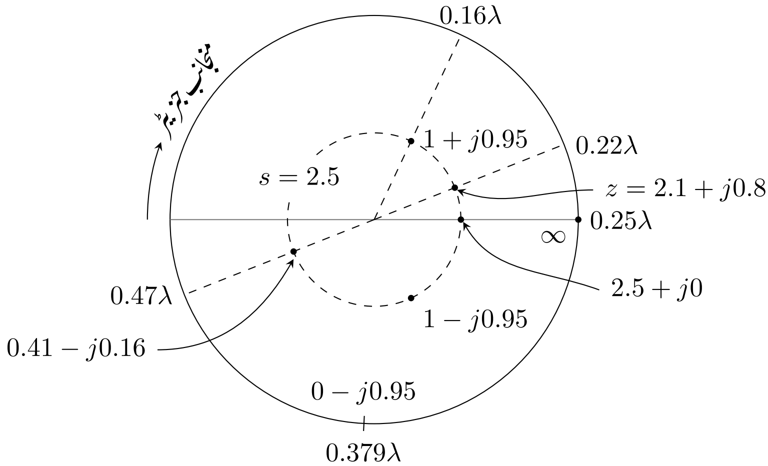
ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.12 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔بلند تر برقی دباو کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہٰذا ایسے نقطے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ ہو گا۔ہم یوں سمتھ نقشے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جنریٹر فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔اس سے 0.03λ منفی کرتے ہوئے بار تک پہنچتے ہیں، لہٰذا 0.22λ سے مرکز تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.429$ رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔یوں $Z_L = 105 + j40\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے بار کو فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔چونکہ بار کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہٰذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے بار کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس بار کو $50\,\Omega$ ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ایسا d_1 لمبائی کے کسر دور تار کے ٹکڑے کو بار سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ایسا شکل 11.13 میں دکھایا گیا ہے۔بار سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی کسرے دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔کسر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ کے برابر ہے۔

برقی بار اور کسر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہٰذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ہم d اتنا رکھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $y_{\text{داخلی}} = 1 + jb$ ہو۔اب اگر $y_{\text{داخلی}}$ کے متوازی $-jb$ برقی تاثریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔یوں d_1 لمبی کسر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثریت $-jb$ درکار ہے۔ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔شکل 11.14 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جنریٹر 0.22λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔یہاں سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جنریٹر گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہٰذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔بار سے اس نقطے تک $(0.5\lambda - 0.47\lambda) + 0.16\lambda = 0.19\lambda$ تار درکار ہو گی لہٰذا $d = 0.19\lambda$ یعنی $14.25\,\text{cm}$ بنتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $y_{\text{ٹکڑا}} = -j0.95$ برقی تاثریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہو گا۔مساوات 11.54 کے تحت کسرے دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہٰذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔عین کسر دور پر



شکل 11.14: بار $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا کسر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

$y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جنریٹر 0.25λ پر پایا جاتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $y_{\text{داخلی}} = -j0.95$ نقشے پر منجانب جنریٹر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔یوں کسرے دور ٹکڑے کی لمبائی $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$ یعنی 9.67 cm حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع $50\,\Omega$ ترسیلی تار کو کسرے دور کرنے سے برقی دباو کے دو آپس میں قریبی نشیب 12 cm اور 27 cm پر پائے جاتے ہیں۔ کسرے دور ختم کرتے ہوئے یہاں بار نسب کرنے سے 0.4 V حیطے کے نشیب اور 0.72 V حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب 9 cm پر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، f، s، Γ اور Z_L

جوابات: 0.3 m، 1 GHz، 1.8، $0.286\underline{/108^\circ}$ اور $36.5 + j21.6\,\Omega$

مشق 11.5: بے ضیاع $50\,\Omega$ کے ساتھ $Z_L = 100 + j100\,\Omega$ کا بار نسب ہے۔بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا کسرے دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد 10 MHz ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d

جوابات: 20 m، 1.8 m اور 4.4 m

باب 12

تقطیب موج

اس باب میں تقطیب موج[1] پر غور کیا جائے گا۔ خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت کا میدان

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) \tag{12.1}$$

لکھا گیا۔ یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔ عموماً $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتے موج میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو بھی پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں موج کے اجزاء

$$\begin{aligned} E_x &= E_1\cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned} \tag{12.2}$$

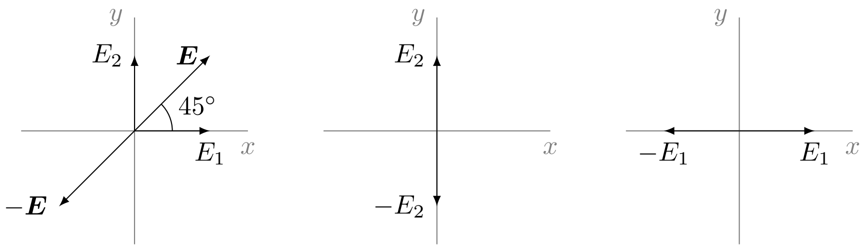
ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ δ بھی پایا جا سکتا ہے۔ ان اجزاء کا مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = E_1\cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{12.3}$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔ یہ مساوات غور طلب ہے۔ آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسی میدان پر غور کریں۔ ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کے تبدیلی سے میدان کی قیمت $-E_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ تا $+E_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ تبدیل ہوتی ہے۔ اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 12.1-الف میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $-E_1$ تا $+E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔ اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت[2] کہتے ہیں۔ یہ موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس اگر مساوات 12.3 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ خطی قطبیت کی موج ہو گی جسے شکل 12.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محدد کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 12.1-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔

[1] wave polarization
[2] linear polarization



پ: $45°$ خطی قطبیت   ب: $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ خطی قطبیت   الف: $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ خطی قطبیت

شکل 12.1: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

آئیں اب ذرہ دلچسپ صورت حال دیکھیں۔نقطہ $z = 0$ پر مساوات 12.2

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos \omega t \\
E_y &= E_2 \cos(\omega t - \delta)
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$E_y = E_2 \left(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta \right)$$

لکھنا ممکن ہے۔اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے، $\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$ اور $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$ پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1} \right)^2} \sin \delta \right]$$

ملتا ہے جسے

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta \tag{12.5}$$

یا

$$a E_x^2 - b E_x E_y + c E_y^2 = 1 \tag{12.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \qquad b = \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \qquad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta} \tag{12.7}$$

لئے گئے ہیں۔مساوات 12.6 بیضوی قطبیت[3] کی عمومی مساوات ہے۔

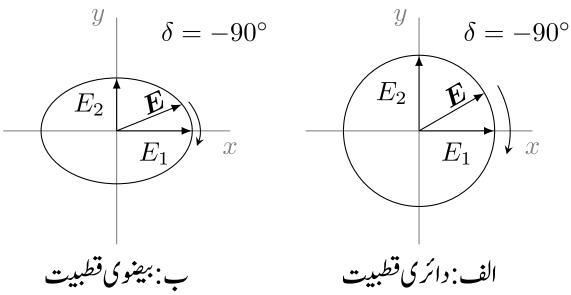
مساوات 12.5 میں $E_1 = E_2 = E_0$ اور $\delta = \mp 90°$ کی صورت میں

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{12.8}$$

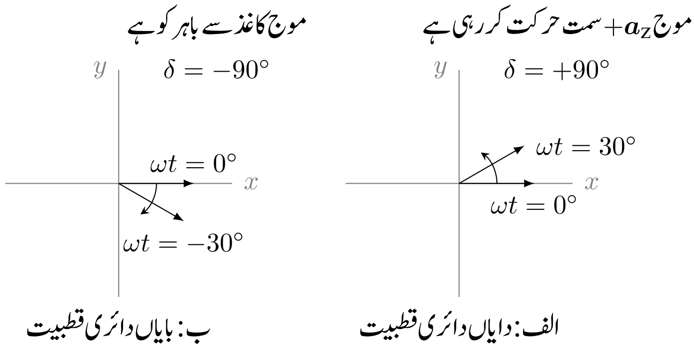
حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔مساوات 12.4 سے $\delta = +90°$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_0 \cos 0 = E_0 \\
E_y &= E_0 \cos(0 - 90°) = 0 \qquad (\delta = +90°)
\end{aligned}
$$

[3] elliptic polarization



شکل 12.2: دائری اور بیضوی قطبیت۔



شکل 12.3: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30°$ کی صورت میں

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_0 \cos 30° = 0.866 E_0 \\
E_y &= E_0 \cos(30° - 90°) = 0.5 E_0 \qquad (\delta = +90°)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 12.3-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت a_z کاغذ سے باہر کو ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کے حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کا سمت دیتی ہیں۔ یوں $\delta = +90°$ کی صورت میں مساوات 12.8 دائیں دائری قطبیت[4] کی موج کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح $\delta = -90°$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت[5] حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔

دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتے ہوئے آپ کو دائیں ہاتھ گھومتی نظر آئے۔ کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہو گی۔

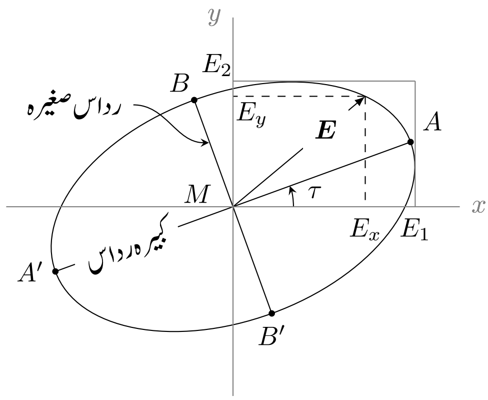
جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 12.5 میں $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.2-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.4 میں مساوات 12.6 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں ترخیم[6] افقی محدد کے ساتھ τ زاویہ بناتا ہے لہٰذا یہ τ زاویے کی بیضوی قطبیت کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[4] right circular polarization
[5] left circular polarization
[6] ellipse



شکل 12.4: عمومی بیضوی قطبیت۔

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_{s} \times \boldsymbol{H}_{s}^{*}\right]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ شکل 12.4 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے x اور y اجزاء

$$E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t-\beta z)} \tag{12.9}$$

$$E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t-\beta z+\delta)} \tag{12.10}$$

میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z=0$ پر

$$\boldsymbol{E}_{s} = \boldsymbol{a}_{\text{X}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} E_2 e^{j(\omega t+\delta)} \tag{12.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = \eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

ہوتا ہے لہٰذا مساوات 12.9 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|\eta|} e^{-j\theta_\eta} = \frac{E_1}{|\eta|} e^{j(\omega t-\beta z-\theta_\eta)} = H_1 e^{j(\omega t-\beta z-\theta_\eta)}$$

ہو گی۔ اسی طرح مساوات 12.10 کی جوڑی

$$H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t-\beta z+\delta-\theta_\eta)} \tag{12.12}$$

ہو گی۔ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z=0$ پر

$$\boldsymbol{H}_{s} = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{j(\omega t+\delta-\theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{j(\omega t-\theta_\eta)} \tag{12.13}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہو گا۔ جوڑی دار مخلوط $\boldsymbol{H}_{s}$ کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت j کو منفی اور منفی j کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_{s}^{*} = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{-j(\omega t+\delta-\theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{-j(\omega t-\theta_\eta)} \tag{12.14}$$

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}E_1e^{j\omega t}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}E_2e^{j(\omega t+\delta)}\right)\times\left(-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}H_2e^{-j(\omega t+\delta-\theta_\eta)}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}H_1e^{-j(\omega t-\theta_\eta)}\right)\right]_{\text{حقیقی}}\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\left[E_1H_1e^{j\theta_\eta}+E_2H_2e^{j\theta_\eta}\right]_{\text{حقیقی}}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\left(E_1H_1+E_2H_2\right)\cos\theta_\eta \tag{12.15}
$$

حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت δ پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ان میں $\frac{E_1}{H_1}=\frac{E_2}{H_2}=\eta_0$ کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ $\theta_\eta=0$ ہے۔ایسے خطے میں

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\left(E_1H_1+E_2H_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\left(H_1^2+H_2^2\right)\eta_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}H^2\eta_0
\end{aligned} \tag{12.16}
$$

ہو گا جہاں $H=\sqrt{H_1^2+H_2^2}$ کے برابر ہے۔اس مساوات کو

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\left(E_1H_1+E_2H_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\frac{E_1^2+E_2^2}{\eta_0}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\frac{E^2}{\eta_0}
\end{aligned} \tag{12.17}
$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $E=\sqrt{E_1^2+E_2^2}$ کے برابر ہے۔

مثال 12.1: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$
\begin{aligned}
E_x &= 2\cos(\omega t-\beta z)\\
E_y &= 3\cos(\omega t-\beta z+75^\circ)
\end{aligned}
$$

وولٹ فی میٹر ہیں۔موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $\eta=120\pi$ لیتے ہوئے مساوات 12.17 سے

$$
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{2^2+3^2}{120\pi}=17.24\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

باب 13

ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہوبہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

13.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_\perp$

شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمد موج دکھائی گئی ہے۔ سرحد $y=0$ سطح پر پایا جاتا ہے لہٰذا y محدد، سرحد کے عمودی ہے۔پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_i زاویہ آمد[1] بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_r زاویہ انعکاس[2] بناتی ہے۔ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدد کے ساتھ θ_t زاویہ بناتی ہے۔ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہٰذا θ_t اصطلاحاً زاویہ انحراف[3] کہلاتی ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

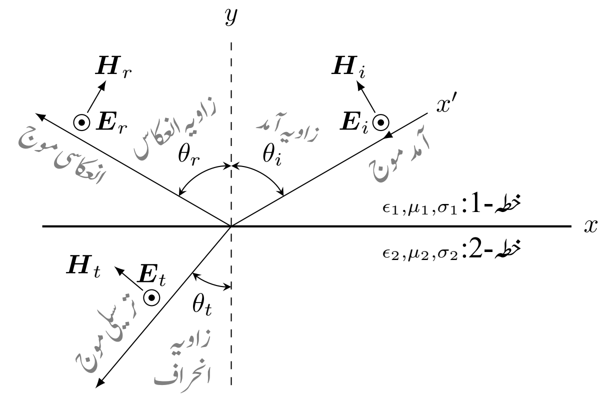
ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہو گی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہو گی۔ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج[4] اور متوازی قطب موج[5] کہلائیں گے۔ شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

منفی z سمت میں حرکت کرتی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ میدان کی برقی موج

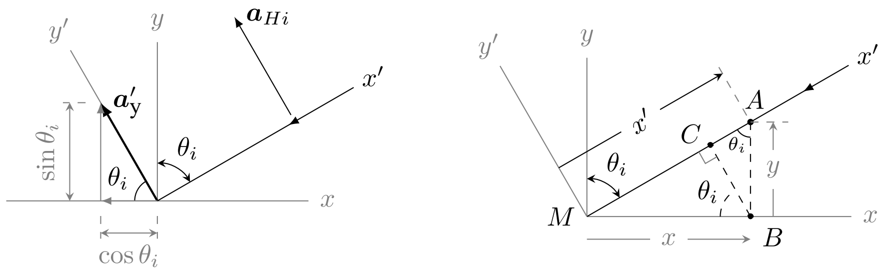
$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} e^{j(\omega t+\beta_1 z)}$$

---

[1] incidence angle
[2] reflection angle
[3] refraction angle
[4] perpendicular polarized
[5] parallel polarized



شکل 13.1: ترچھی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ا) فاصلے کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدد میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جاتی ہے۔اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اب $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ سمت کا میدان جو z محدد کی بجائے لکیر l پر گھٹتے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a} e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔اب شکل 13.1 میں $\boldsymbol{E}_i$ پر دوبارہ غور کریں۔یہ برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر x' پر حرکت کر رہی ہے لہٰذا اس موج کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} e^{j(\omega t + \beta_1 x')} \tag{13.1}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد x, y کے مرکز سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔آئیں مساوات 13.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

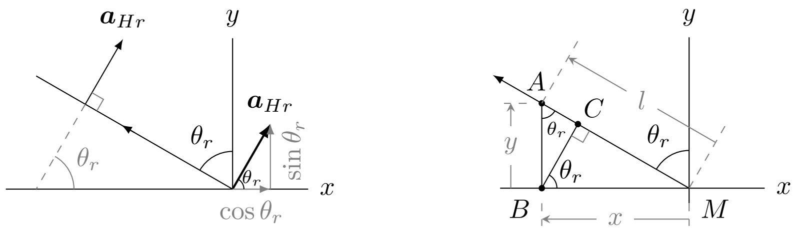
شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدد دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔اس شکل میں لکیر x' کو کارتیسی محدد x', y' کا حصہ دکھایا گیا ہے۔لکیر x' پر نقطہ A کا مرکز سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x \sin\theta_i$ اور $CA = y \cos\theta_i$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$x' = x \sin\theta_i + y \cos\theta_i \tag{13.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin\theta_i + y \cos\theta_i)]} \tag{13.3}$$

لکھ سکتے ہیں۔اس مساوات میں موج گھٹتے x' کی طرف رواں ہے۔



(ا) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدد میں اظہار۔ (ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ (یا $\boldsymbol{a}'_{\mathrm{Z}}$) ہے جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{a}'_{\mathrm{Z}}$ دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_i$ کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{Hi}$ محدد y' کی سمت میں ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{Hi} = \boldsymbol{a}'_y$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں $\boldsymbol{a}'_{\mathrm{y}}$ کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_{\mathrm{y}}$ کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہٰذا شکل میں تکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں تکون کا قاعدہ $\cos\theta_i$ اور اس کا عمود $\sin\theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$\boldsymbol{a}'_{\mathrm{y}} = -\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{13.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1}\boldsymbol{a}'_{\mathrm{y}} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1}(-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) e^{j[\omega t + \beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)]} \tag{13.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_{si} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.7}$$

مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی ($\perp$) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= \frac{E_r}{E_i} \\ \tau_{\perp} &= \frac{E_t}{E_i} \end{aligned} \tag{13.8}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔ مرکز M سے موج کا فاصلہ l لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = -x\sin\theta_r$ اور $CA = y\cos\theta_r$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$l = -x\sin\theta_r + y\cos\theta_r \tag{13.9}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ منفی محدد پر x کی قیمت منفی ہو گی لہٰذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہو گی۔یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{sr} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1 l} \\ &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r + y\cos\theta_r)}\end{aligned} \tag{13.10}$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے l کی جانب حرکت کی بنا پر e کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_H$ دکھائی گئی ہے جو x محدد کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔اکائی سمتیہ کو محدد کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$\boldsymbol{a}_{Hr} = \cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{13.11}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_{sr} = (\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\Gamma_{\perp}\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r + y\cos\theta_r)} \tag{13.12}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جا سکتے ہیں

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.13}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = (-\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\tau_{\perp}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.14}$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدد کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل β_2 اور η_2 استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 264 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + 0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r + 0\cos\theta_r)} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + 0\cos\theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \Gamma_{\perp}e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau_{\perp}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.15}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی x کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $x = 0$ کے لئے بھی درست ہو گی۔اس میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \tag{13.16}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.15 میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے درست ہو گی جب مساوات میں تینوں e کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} = e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.17}$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.18}$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$\beta_2 \sin\theta_t = \beta_1 \sin\theta_r \tag{13.19}$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i$$

اور صفحہ 281 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i \tag{13.20}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\sin\theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\mu_0\epsilon_{r1}\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2}\mu_0\epsilon_{r2}\epsilon_0}}\sin\theta_i\\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}\sin\theta_i\end{aligned}$$

یا

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \tag{13.21}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}n_1 &= \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}\\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}\end{aligned} \tag{13.22}$$

انحرافی مستقل[6] کہلاتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل n اور قدرتی رکاوٹ η میں فرق کر پائیں گے۔

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔مساوات 13.21 جسے ابن سھل[7] کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل[8] سے جانا جاتا ہے۔بصریات[9] کے میدان میں قانون ابن سھل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے $\theta_i = 30°$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔پانی میں انحرافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہو گا۔شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}}\sin 30° = 0.32969$$

---

[6] index of refraction
[7] بغداد کے أبو سعد العلاء ابن سہل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔
[8] Snell's law
[9] optics

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}}\sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 265 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء پر مشتمل ہیں۔ان میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہٰذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos\theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r)} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t)}$$

یا

$$-\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos\theta_i + \cos\theta_i \Gamma_\perp = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس میں مساوات 13.16 سے $\tau_\perp$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{13.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 298 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_\perp = -1$ حاصل ہوتا ہے۔اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت $(\epsilon_2 > \epsilon_1)$ میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہٰذا $\sin^2\theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے $\Gamma_\perp$ حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2\theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہٰذا $\Gamma_\perp$ خیالی عدد ہو گا۔ایسی صورت میں $|\Gamma_\perp| = 1$ ہوتا ہے اور

سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس[10] سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر $\Gamma_\perp = 1$ ہو اسے زاویہ فاصل[11] پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.25}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے $(\theta_i > \theta_{i,\text{ف}})$ کی صورت میں مساوات 13.20 سے $\sin\theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos\theta_t$ خیالی عدد حاصل ہو گا

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i} = jA \tag{13.26}$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + yjA)}\\ &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 Ay} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\end{aligned}$$

یا

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.27}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\alpha = \beta_2 A = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{13.28}$$

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں $x-$ جانب بے ضیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر $E_\perp$ کی مقدار $\tau_\perp E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج[12] کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55°$ زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$، $\mu_r = 1$ اور $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42°$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہٰذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 13.20 سے

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0\times 80\times\epsilon_0}{\mu_0\times 1\times\epsilon_0}}\sin 55° = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos\theta_t = jA = \sqrt{1-7.327^2} = j7.258$$

---

total internal reflection[10]
critical angle[11]
surface wave[12]

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0} \, \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544 \underline{/-54.746^\circ}$$

- اس طرح ہوا میں سرحد پر $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔
- ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \, \frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔یاد رہے کہ $\sin\theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos\theta_t$ خیالی عدد ہے۔مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \\
\boldsymbol{H}_{st} &= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) \tau_\perp \frac{E_0}{\eta_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \\
&= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) \tau_\perp \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{\left(j\beta_2 x \sin\theta_t - j\theta_\eta\right)}
\end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\eta = |\eta| \, e^{j\theta_\eta}$ کا استعمال کیا گیا۔ہوا میں سرحد سے دور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اس کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو لیا جائے گا۔جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_s^*$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{H}_s$ میں تمام مقامات پر j کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t}\right] \times \left[jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tau_\perp \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{\left(-j\beta_2 x \sin\theta_t + j\theta_\eta\right)}\right] \\
&= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \left[j\cos\theta_\eta - \sin\theta_\eta\right]
\end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin\theta_\eta$$

حاصل ہوتا ہے۔ہوا میں η حقیقی عدد ہے لہٰذا $\theta_\eta = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ایسی امواج کو فنا پذیر امواج[13] کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو اور برقی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-$ سمت میں حرکت کریں گے۔ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار} = \frac{\text{پانی میں رفتار موج}}{\sin\theta_i}$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_\parallel$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔یاد رہے کہ موج کی سمت پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ کی سمت ہی ہوتی ہے۔برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پوئنٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 13.4 میں $\boldsymbol{E}_i$ کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج $\boldsymbol{E}_r$ کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 13.2 اور مساوات 13.4 کی مدد سے شکل 13.4 کے لئے

$$\boldsymbol{E}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.29}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.30}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}_{sr} = -(\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \Gamma_\parallel E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{13.31}$$

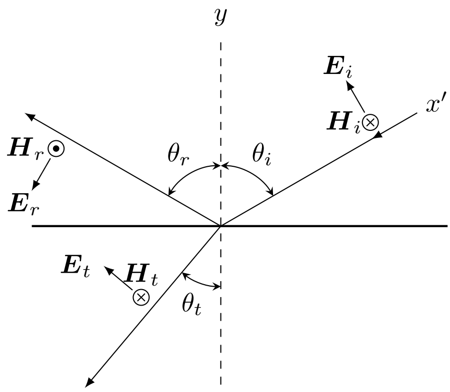
$$\boldsymbol{H}_{sr} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \Gamma_\parallel \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{13.32}$$

$$\boldsymbol{E}_{st} = (-\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \tau_\parallel E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.33}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tau_\parallel \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.34}$$

---

[13] evanescent wave



شکل 13.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

لکھے جا سکتے ہیں۔ سرحد $(y=0)$ پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جزو کو استعمال کیا جائے گا لہٰذا

$$-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} - \cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)} = -\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \cos\theta_t \tau_{\parallel} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں e کے طاقت، x کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$j\beta_1 x\sin\theta_i = j\beta_1 x\sin\theta_r = j\beta_2 x\sin\theta_t \tag{13.36}$$

ہو۔ اس مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.37}$$

اور

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i \tag{13.38}$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔ مساوات 13.35 میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1+\Gamma_{\parallel} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_{\parallel} \tag{13.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہٰذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔ اس طرح

$$-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\parallel}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} - \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau_{\parallel}\frac{\eta_1}{\eta_2}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1 - \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{\eta_1}{\eta_2} \tag{13.40}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 حل کرتے ہوئے

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} \tag{13.41}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{13.42}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\Gamma_{\parallel} = -1$ حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر $\Gamma_{\parallel} = 0$ حاصل ہو لہٰذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ[14] کہتے[15] ہیں۔مساوات 13.42 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہٰذا انحرافی موج غیر قطبی ہو گی۔زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت[16] بھی کہتے ہیں۔

مثال 13.3: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔پانی کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 80$ لیں۔

حل:

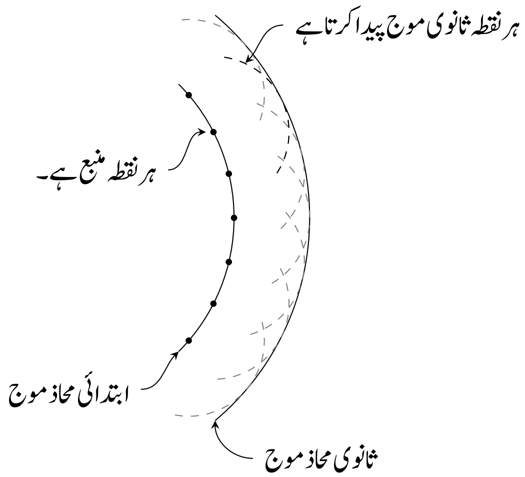
$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ \tag{13.44}$$

---

[14] Brewster angle

[15] یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

[16] polarizing angle



شکل 13.5: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

مشق 13.1: شکل 13.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس $\Gamma_{\parallel}$ حاصل کریں۔ چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\Gamma_{\parallel}$ کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہو گی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{sr} &= (\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \\
\boldsymbol{H}_{sr} &= -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}
\end{aligned}$$

شرح انعکاس $\frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$ حاصل ہو گا۔

13.2 ترسیم ہائی گن

ہائی گن [17] کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 13.5 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائے گئے ہیں۔ یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جا سکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انحراف کے زمرے میں آتا ہے۔

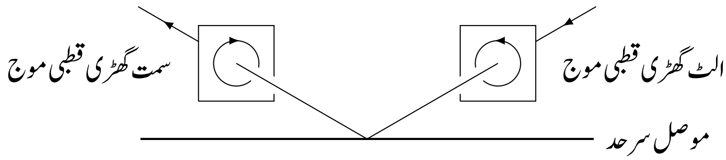
شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int \mathrm{d}E \tag{13.45}$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدد پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان $\mathrm{d}E$ کے برابر ہے۔

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)}\,\mathrm{d}x \tag{13.46}$$

Huygen's principle[17]



شکل 13.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

سے

$$E=\frac{E_0}{r}e^{-j\beta r}\int_a^{\infty} e^{-j\beta\delta}\,\mathrm{d}x \tag{13.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $r \gg \delta$ ہو تب

$$\delta=\frac{x^2}{2r} \tag{13.48}$$

کے برابر ہو گا۔یوں $k^2=\frac{2}{r\lambda}$ اور $u=kx$ لیتے ہوئے

$$E=\frac{E_0}{kr}e^{-j\beta r}\int_{ka}^{\infty} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \tag{13.49}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے

$$E=\frac{E_0}{kr}e^{-j\beta r}\left(\int_0^{\infty} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u-\int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right) \tag{13.50}$$

لکھ سکتے ہیں۔

بائی گن
بہتر بنائی
الٹ گھڑ
گھڑی
شکل پ
ہے۔

باب 14

مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی[1] TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں مویج[2] کہلاتے ہیں۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مویج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی مویج تک بات بڑھائی جائے گی۔ان مویج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تقلیلی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مویج پر غور کیا جائے گا۔آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

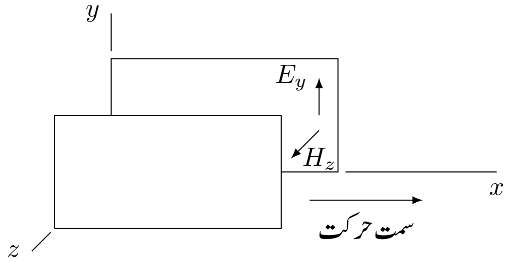
کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد (10^{16} Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

[1] transverse electromagnetic, TEM

[2] waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے نا کہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

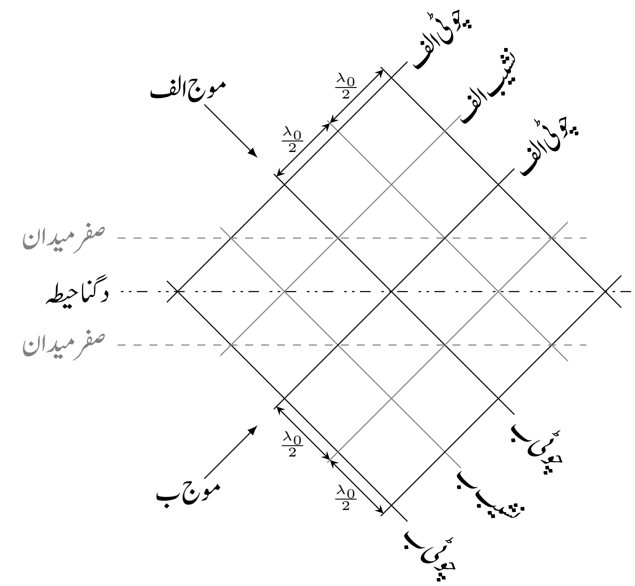
14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز[4] کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے مویج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو عرضی برقی انداز[5] (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

[3] low cutoff frequency
[4] higher order mode
[5] transverse electric mode, TE mode



شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

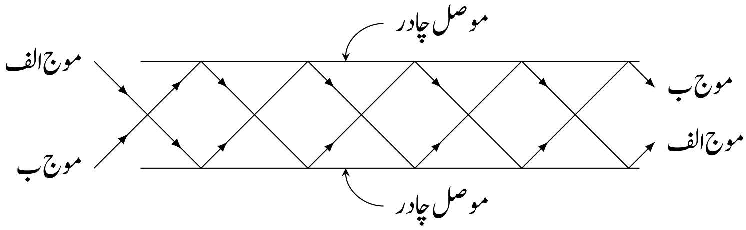
عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

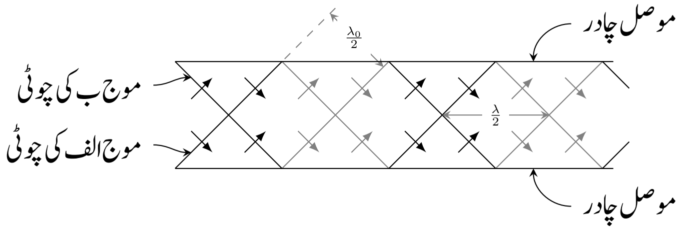
صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں مویج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور مویج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہوبہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ مویج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول[6] پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

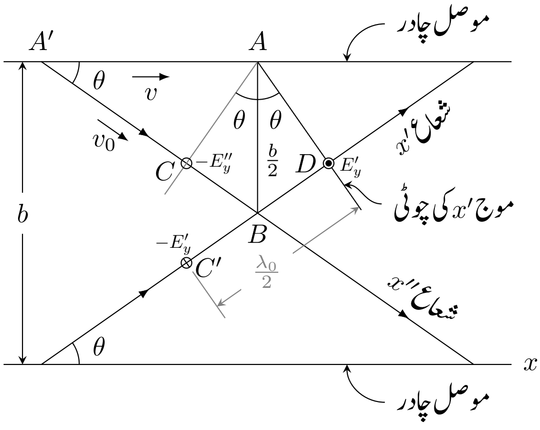
[6] cutoff wavelength



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور مویج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے مویج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E'_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{14.1}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{14.2}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ان حقائق پر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔شکل 14.5 میں تکون ABC سے

$$AB\sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n}\sin\theta \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90°$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{14.4}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{14.5}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ کم تر درجے کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

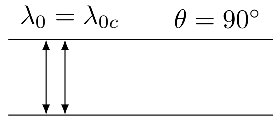
$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔$n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

$$\lambda_{0c} = b \tag{14.6}$$

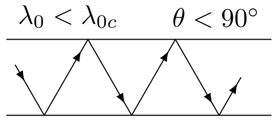
ہو گا۔یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کے لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصلہ موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

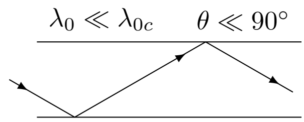
$$\lambda_0 = \lambda_{0c}\sin\theta \tag{14.7}$$



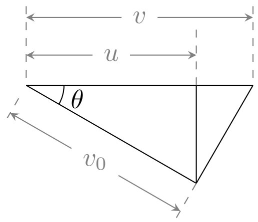
(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{14.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90°$ حاصل ہوتا ہے۔اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت $90°$ سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{14.9}$$

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔شکل 14.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

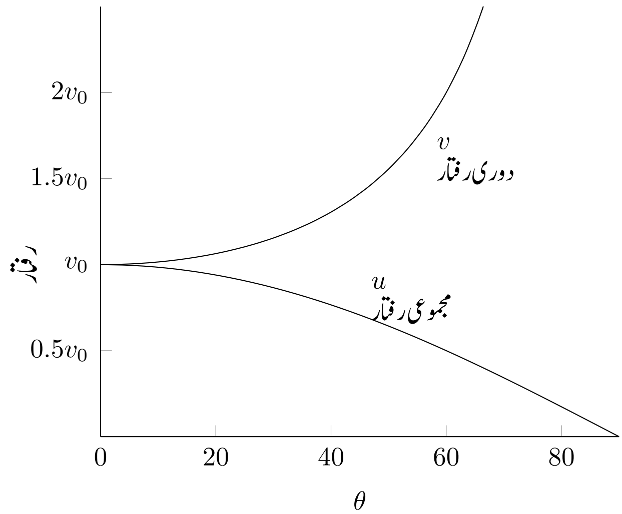
$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{14.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتیٰ کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی

[7] phase velocity



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں مویج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos\theta \tag{14.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار در حقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \tag{14.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

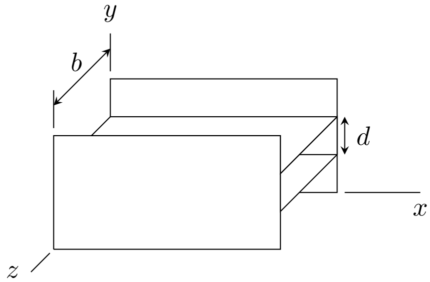
لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

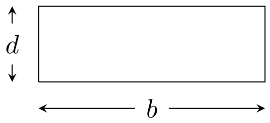
حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت $90°$ کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

[8] group velocity



(ا) لامحدود متوازی چادر مویج سے مستطیلی مویج کا حصول۔



(ب) مستطیلی مویج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 14.8: مستطیلی مویج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی مویج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی مویج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہٰذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی مویج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا مویج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل مویج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے مویج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل مویج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج

مستطیل مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی مویج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ مویج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی TE[10] موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی TM[11] موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی نا کہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

[9] حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔
[10] transverse electric, TE
[11] transverse magnetic, TM

اس طریقے کو مستطیلی مویج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل اقدامات سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان اقدامات سے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{14.14}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{14.15}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{14.16}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{14.17}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{14.18}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{14.19}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.20}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.21}$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t-\gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t-\gamma x} \end{aligned} \tag{14.22}$$

لکھے جائیں گے جہاں

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{حرکی مستقل} = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \text{تقلیلی مستقل} \\ \beta &= \text{زاویائی مستقل} \end{aligned}$$

ہیں۔مساوات 14.22 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.14

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t-\gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{14.23}$$

لکھا جائے۔اسی طرح مساوات 14.22 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.15 تا مساوات 14.21 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{14.24}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{14.25}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \tag{14.26}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \tag{14.27}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \tag{14.28}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.29}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.30}$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{14.31}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{14.32}$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.33}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.34}$$
$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0 \tag{14.35}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0 \tag{14.36}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.37}$$
$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.38}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.39}$$
$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.40}$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو مویج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.41}$$
$$\gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.42}$$
$$-\gamma E_y - ZH_z = 0 \tag{14.43}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \tag{14.44}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.45}$$
$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.46}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.47}$$
$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.48}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.42 اور 14.43 سے

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma} \tag{14.49}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔چونکہ مساوات 14.49 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں للذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ[12] Z_{yz} کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{14.50}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.50 کو مساوات 14.46 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.50 کو مساوات 14.45 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 14.51 کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.53}$$

اور مساوات 14.52 کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.54}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.51 تا مساوات 14.54 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.51 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.52 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

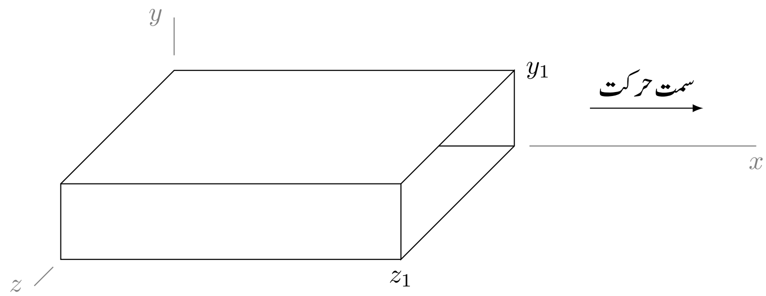
$$k^2 = \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) \tag{14.55}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \tag{14.56}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.56 مویج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔مویج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

[12] transverse-wave impedance



شکل 14.9: مستطیل مویج۔

ساتویں قدم میں مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی مویج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مویج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔یوں مویج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔اسی طرح مویج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.56 کا حل درکار ہے۔علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{14.57}$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔مساوات 14.57 کے استعمال سے مساوات 14.56

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \tag{14.58}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \tag{14.59}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو نا قابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \tag{14.60}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \tag{14.61}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 14.59 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \tag{14.62}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.60 اور مساوات 14.61 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔مساوات 14.60 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{14.63}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_2 ،m_1 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.63 کو واپس مساوات 14.60 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.60 کا حل

$$Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \tag{14.64}$$

ہے۔اسی طرح مساوات 14.61 کا حل

$$Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \tag{14.65}$$

ہے۔ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.57 کو

$$H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y\right)\left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right) \tag{14.66}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 14.53 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y\right)\left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہٰذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

یعنی

$$c_2 = 0 \tag{14.67}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی مویج سے، لہٰذا ہم

$$c_1 \neq 0 \tag{14.68}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.69}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1 \cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(c_3 \cos\sqrt{A_2}z + c_4 \sin\sqrt{A_2}z\right) \tag{14.70}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 14.54 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(-c_3 \sin\sqrt{A_2}z + c_4 \cos\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہٰذا

$$c_4 = 0 \tag{14.71}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\sqrt{A_2}z$$

ہو گا۔مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0\frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\sqrt{A_2}z_1$$

لکھا جائے گا۔اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہٰذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{14.72}$$

چنتے ہیں۔اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2}z_1 = m\pi \tag{14.73}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.74}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1} \tag{14.75}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.22 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہٰذا

$$H_x(x,y,z,t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.76}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 14.51 تا مساوات 14.54 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.77}$$

$$H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.78}$$

$$E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.79}$$

$$E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.80}$$

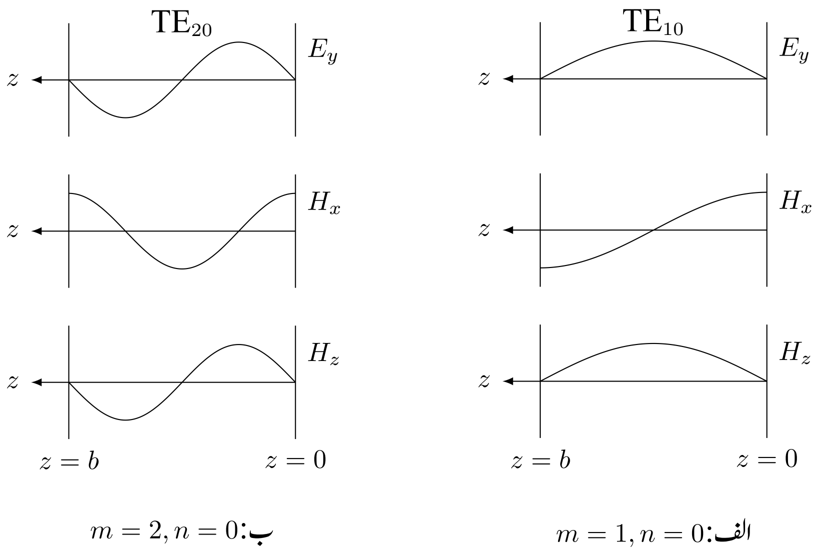
$$E_x = 0 \tag{14.81}$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 مستطیلی مویج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی مویج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں E_z، H_y اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔یوں موج میں صرف H_x، H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔شکل 14.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔شکل 14.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 14.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔یوں شکل 14.10-الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 14.10-ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔مستطیلی مویج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE10 موج:

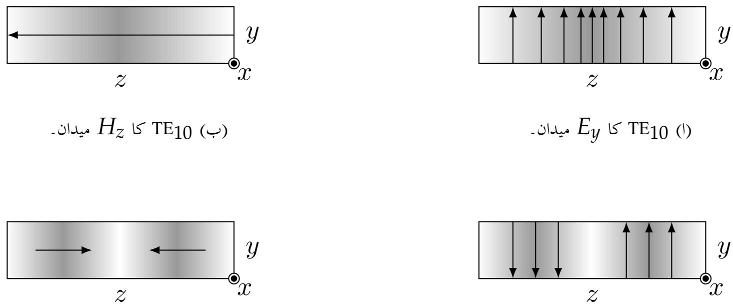
مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 میں $m = 1$ اور $n = 0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad \text{TE کا بنیادی شرط} \\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
H_y &= 0 \\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.82}
$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x = 0$، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ان امواج کو شکل 14.10-الف میں $t = 0$ اور $x = 0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔TE_{10} تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔شکل 14.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں $z = \frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE20 موج:

شکل 14.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔



(ا) TE_{10} کا E_y میدان۔

(ب) TE_{10} کا H_z میدان۔

(ج) TE_{20} کا E_y میدان۔

(د) TE_{20} کا H_z میدان۔

شکل 14.11: TE_{10} اور TE_{20} کے E_y اور H_z میدان۔

بلند درجی TE_{11} موج:

مساوات 14.76 تا مساوات 14.81 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{11} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{کا بنیادی شرط TE} \\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.83}
$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل مویج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی مویج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار مویج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور مویج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.62، مساوات 14.69 اور مساوات 14.74 کو ملا کر

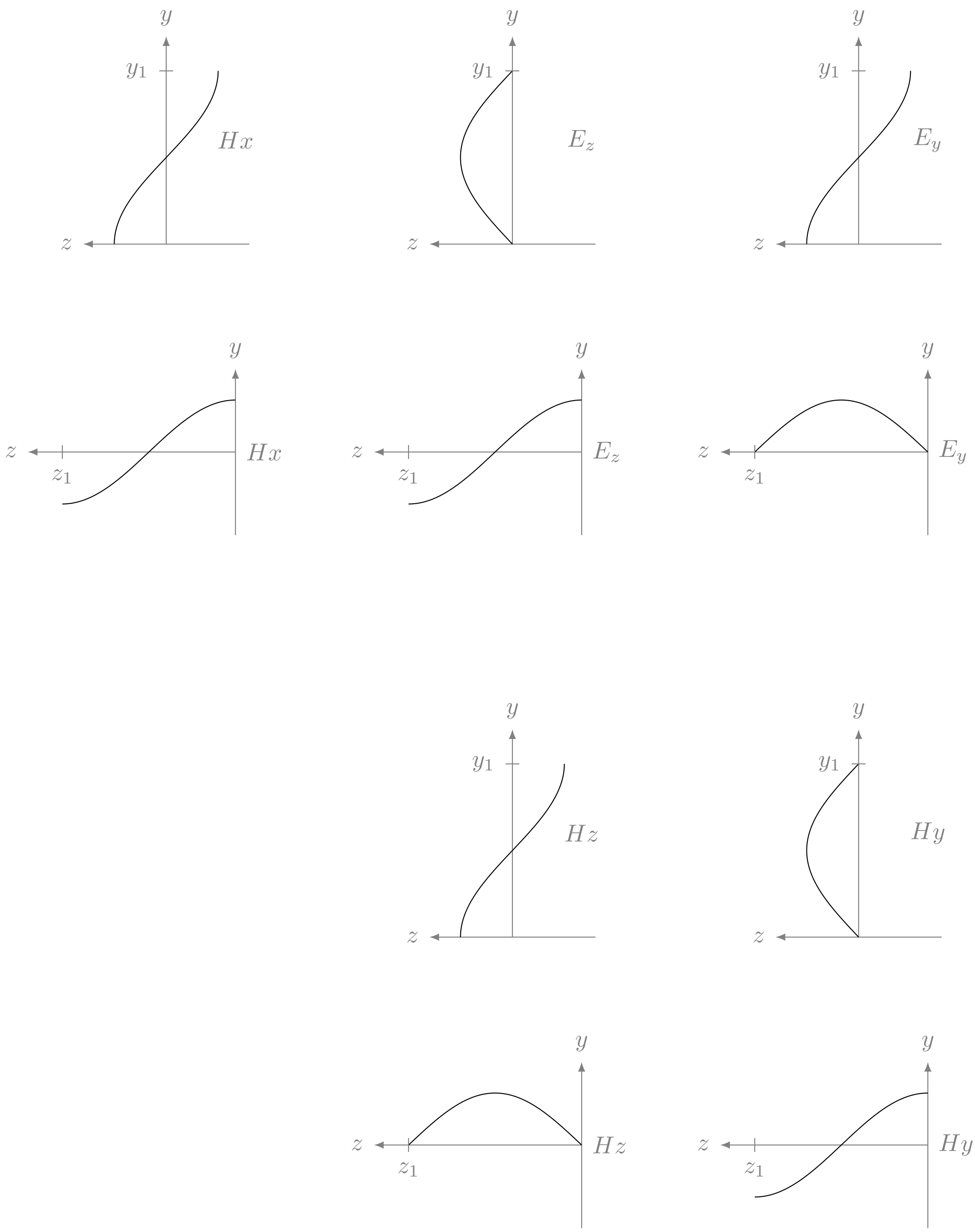
$$
k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.84}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 14.31، مساوات 14.50 اور مساوات 14.55 سے

$$
k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{14.85}
$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع ذو برق میں $\sigma = 0$ لیا جا سکتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$
\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.86}
$$



شکل 14.12: TE_{11} میدان.

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور اس کی ترسیل ممکن نہ ہو گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا موج کی ترسیل ممکن ہو گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو انقطاعی تعدد[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بے ضیاع مویج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس کے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ مویج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔مویج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔
- مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔یہ انقطاعی تعدد ہے۔
- زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔مویج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.86 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو مویج میں پایا جاتا ہے۔یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{14.87}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}\\
\lambda_0 &\quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}\\
k &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}
\end{aligned}$$

ہیں۔یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\beta_0 > k$ ہو گا لہٰذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{14.88}$$

ہو گا جہاں

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{مویج میں زاویائی مستقل}\\
\lambda &\quad \text{مویج میں طول موج}
\end{aligned}$$

ہیں۔کافی بلند تعدد پر $\beta_0 \gg k$ ہو گا اور یوں مویج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $\beta_0 < k$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{14.89}$$

[13] cutoff frequency

حاصل ہوتا ہے جہاں α تقلیلی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا لہٰذا تقلیلی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہٰذا $\gamma = 0$ ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.90}$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد[14]

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \qquad \text{(Hz)} \tag{14.91}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \qquad \text{(m)} \tag{14.92}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج[15] پکارا جاتا ہے۔ مساوات 14.91 اور مساوات 14.92 سے کھوکھلے مستطیلی مویج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = 2z_1 \tag{14.93}$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔

[14] cutoff frequency
[15] cutoff wavelength

باب 15

سوالات

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$