

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
187	7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
191	7.3 گردش	
198	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
204	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
205	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
206	7.4 مسئلہ سٹوکس	
210	7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	
216	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
221	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
222	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
223	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
227	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
227	8.1 متحرک چارج پر قوت	
228	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
231	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
232	8.4 قوت اور مروڑ	
237	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
238	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
241	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
242	8.8 مقناطیسی دور	
245	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
246	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
250	8.11 مشترکہ امالہ	

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوٹیننگ سمتیہ
290	10.4	موصل میں امواج
296	10.5	انعکاس مستوی موج
302	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
331	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
332	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال
337	12	تقطیب موج
337	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
341	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انعکاس
341	13.1	ترچھی آمد
351	14	سوالات

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔ بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔ یہ مرسل (ٹرانسمیٹر)¹ اور لینڈینا² یا پھر ڈیم میں نسب جزیر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباؤ اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

اس باب میں ترسیلی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہوگا۔

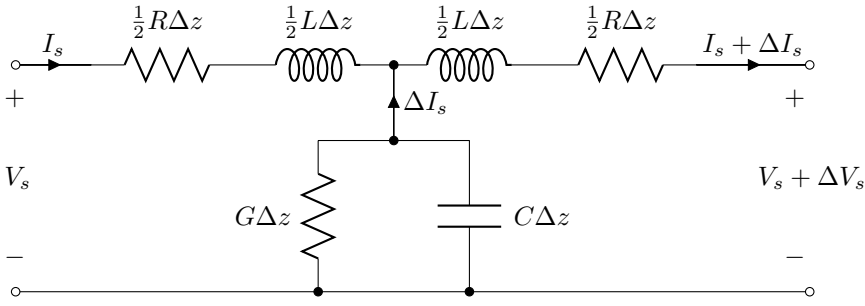
11.1 ترسیلی تار کے مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔ یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل μ, ϵ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل C, L, R اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت a_z جانب تصور کرتے ہیں۔ یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$ ، امالہ $L\Delta z$ ، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔ شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباؤ

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R ، L ، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

پائی جاتی ہے۔ یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔ یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} \right] \text{ حقیقی}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباؤ کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) (I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = - (R + j\omega L) I_s - \frac{1}{2} (R + j\omega L) \Delta I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر Δz کو صفر کے قریب کر لیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہوگا۔ یوں $0 \rightarrow \Delta z$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں اسے

$$(11.1) \quad \frac{dV_s}{dz} = - (R + j\omega L) I_s$$

لکھا جاسکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباؤ

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j \frac{\omega L\Delta z}{2} \right) I_s \right] (G\Delta z + j\omega C\Delta z)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = - (G + j\omega C) V_s + \frac{1}{2} (R + j\omega L) (G + j\omega C) I_s \Delta z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta z \rightarrow 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور یوں

$$(11.2) \quad \frac{dI_s}{dz} = - (G + j\omega C) V_s$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

میں $\mathbf{H}_{ys} = H_{ys}\mathbf{a}_y$ اور $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$ سے

$$(11.3) \quad \frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

سے

$$(11.4) \quad \frac{dH_{ys}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_{xs}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔ یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لا محدود یکساں مستوی امواج اور لا محدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔ دونوں میں سرحد پایابی نہیں جاتا لہذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$(11.5) \quad V_s = V_0e^{-\gamma z}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔ یہ برقی دباؤ کے موج کی مساوات ہے۔ یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z = 0$ پر اس کا جیٹہ V_0 ہے۔ حرکت مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$(11.6) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

ہو جائے گا۔ طول موج اب بھی

$$(11.7) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہوگا۔ موج کی رفتار اب بھی

$$(11.8) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$(11.9) \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$(11.10) \quad I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$(11.11) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔ اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔ اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہوگی۔ ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$(11.12) \quad \Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

ہوگی۔ انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$(11.13) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta_2 = -l$ ہو تب $\eta = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{داخلی} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔ اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$(11.14) \quad Z_{داخلی} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l}$$

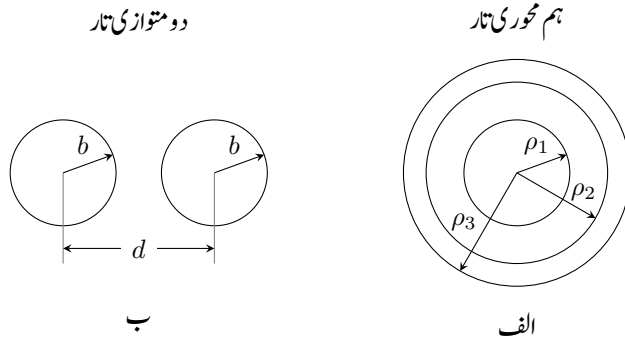
لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو $\omega = 5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر کام کرتی ہے کے مستقل $R = 0.15 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ، $L = 0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ ، $G = 8 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس کے α ، β ، λ ، v اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $2.236 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 2.81 m ، $2.23 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9 / -0.029^\circ \Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہوگا۔ سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکٹھے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔ بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔ تاروں کے درمیان ذوبرق کے مستقل μ, ϵ اور σ ہیں۔ صفحہ 143 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1 \text{ m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (11.15)$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 247 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.16)$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔ بلند تعدد پر تار میں برقی روصرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاوپایا جاتا ہے اوریوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \quad (11.17)$$

درست ثابت ہوتا ہے۔ یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذوبرق کا ϵ اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi (\rho_3^2 - \rho_2^2)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2 \right) \quad (11.18)$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔ یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رویکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر روصرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظر انداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہوگی۔ اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی

باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔ برقی رو a_z سمت میں ہے اور چونکہ $J_s = \sigma_c E_s$ ہوتا ہے لہذا تار کی سطح پر E_s کا مماثل جزو بھی a_x سمت میں ہوگا۔ موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \quad (11.19)$$

ہوگی۔ اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہوگی۔ اگرچہ ہم نکلی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\rho_1 \ll \delta$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو دو موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں صفحہ 293 پر مساوات 10.65 سے

$$\left|_{\rho_1} \frac{E_{zs}}{H_{ys}} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}\right.$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left|_{\rho_1} \frac{E_{zs}}{I_s} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}\right.$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباؤ ہے لہذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left|_{\rho_1} \frac{E_{zs}}{I_s} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \quad (11.20)$$

کے برابر ہے۔ یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہوگی۔ یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہوگی۔ صفحہ 291 پر مساوات 10.62 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1) \quad (11.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2, \text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.22)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right] \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.23)$$

ہوگا۔ مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\delta \ll \rho_1, \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \quad (11.24)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جاسکتا ہے۔ بے پناہ³ تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے⁴ استعمال ہوتے ہیں۔ یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (11.25)$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذوق میں سے گزرتی ایک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔ اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر ρ_L - کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباؤ صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔ تاروں کے درمیان ذوق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذوق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 120 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔ اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی ٹکلی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔ یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (11.26)$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ ایک تار سے دوسرے تار تک E کی لکیری ٹکمل سے برقی دباؤ V حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 125 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاؤ کے برابر ہوتی ہے، یعنی عمودی $\rho_S = D$ ۔ یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S dS = \epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔ یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V} \quad (11.27)$$

ہو گا۔ اب موصل کے سطح پر عمودی E جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو عمودی $J = \sigma E$ لکھی جاسکتی ہے لہذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS$$

ہوگی۔ یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$(11.28) \quad G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}} dS}{V}$$

ہوگی۔ مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$(11.29) \quad G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$

لکھا جاسکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 3.49 \text{ mm}$ اور $\frac{S}{m} = 3.82 \times 10^7$ ہیں کے ذریعہ کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\frac{\mu_S}{m} = 10$ ہیں۔ اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ ترسیلی تار کے α ، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1 \frac{nF}{m}$ ، $0.25 \frac{\mu H}{m}$ ، $1.29 \frac{nH}{m}$ ، $0.014 \frac{NP}{m}$ ، $15.1 \frac{rad}{m}$ اور $50/0.055^\circ \Omega$

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔ تار کا رداس b ، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔ تاروں کے گرد ذریعہ کے مستقل ϵ ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 149 پر مساوات 5.75 کی نصف ہوگی۔ اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔ یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$(11.30) \quad C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

ہوگی۔ اگر $d \gg b$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

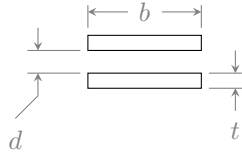
$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جاسکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$(11.31) \quad L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1} \frac{d}{2b} \right) \quad (\delta \ll b)$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

ہے۔ تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزارتی ہے۔ اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہذا فی میٹر مزاحمت

$$(11.32) \quad R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c}$$

ہوگی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔ مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$(11.33) \quad G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2b}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$(11.34) \quad Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2b}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار⁵ دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔ موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ ارد گرد کے ذوبق کے مستقل μ, ϵ اور σ ہیں۔

اگر $d \gg b$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کپیسٹنس

$$(11.35) \quad C = \frac{\epsilon \text{ رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d}$$

ہوگی۔ یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$(11.36) \quad L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu \epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b}$$

ہوگی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں کل امالہ

$$(11.37) \quad L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t)$$

ہوگی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہوگی۔ یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b \delta}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R = \frac{2}{\sigma_c b \delta} \quad (\delta \ll t) \quad (11.38)$$

ہوگی۔

مساوات 11.29 سے

$$G = \frac{\sigma b}{d} \quad (11.39)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{d}{b}} \quad (11.40)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

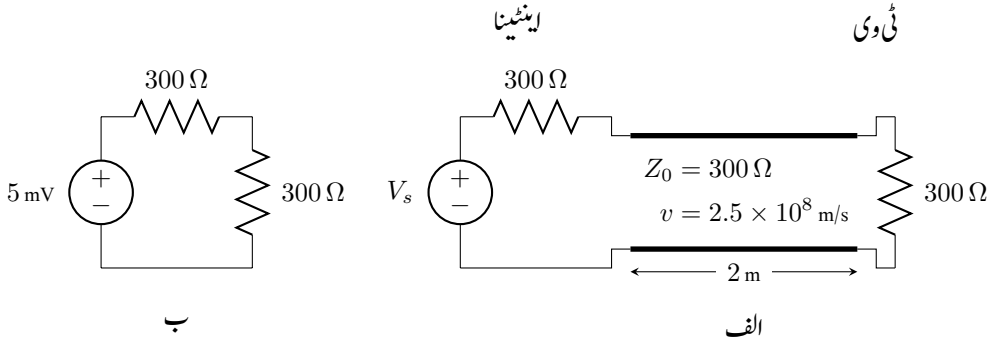
مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ ان میں طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ ہم محوری تار کا $\rho_1 = 0.5 \text{ mm}$ ، $\rho_2 = 2.8 \text{ mm}$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b = 0.5 \text{ mm}$ ، $d = 9 \text{ mm}$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ مستوی سطح کے $d = 0.2 \text{ mm}$ ، $b = 5 \text{ mm}$ اور $\epsilon_R = 2.2$ ہیں۔

جوابات: $0.816, 50.6 \text{ cm}$ ، $-0.215, 33.5 \text{ cm}$ ، $0.26, 42.6 \text{ cm}$

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔ یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ 300Ω ہے۔ ایسی تار ٹی وی⁶ کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔ شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھون⁷ مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباؤ V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی 300Ω کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت 300Ω ہے۔ ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ ٹی وی اسٹیشن سے



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

خارج 100 MHz کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں 5 mV کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔ اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5 \text{ m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہیں۔ ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \text{ rad}$$

یا 288° ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔ داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت 300 Ω ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی 300 Ω ہے لہذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔ اینٹینا میں پیدا 5 mV کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5 \text{ mV}$$

پیدا کرے گا۔ اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہذا منع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا 2.5 mV کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچنے کا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈین پیچھے ہو گا۔ یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{ب}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔ داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{ب}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔ چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{ب}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41 \text{ nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباؤ اور برقی رو کے موثر⁸ قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔ دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی 300Ω ہے۔ یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل 150Ω کا بار پایا جاتا ہے۔ اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

یا

$$(11.41) \quad \Gamma = \frac{1}{3} \angle \pi$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب 300Ω کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7 \angle -23.79^\circ = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

ہوگی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔ کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔ داخلی رو

$$I_{s, داخلی} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013/15.017^\circ \mu A$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{داخلی} = \frac{1}{2} (6.3013 \times 10^{-6})^2 \times 466.39 = 9.2593 \text{ nW}$$

طاقت فراہم کی جارہی ہے۔ بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہذا 150Ω کے بار کو 9.2593 nW حاصل ہوگا جو گزشتہ جواب یعنی 10.41 nW سے قدر کم ہے۔ یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔ یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہوگا لہذا ہر ٹی وی کو صرف 4.6297 nW طاقت مہیا ہوگا۔ چونکہ ایک ٹی وی 300 MHz مزاحمت رکھتا ہے لہذا ٹی وی پر پیدا برقی دباؤ

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{|V_{s, بار}|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$|V_{s, بار}| = 1.66667 \text{ mV}$$

ہوگا۔ یہ قیمت 2.5 mV سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔ اگر ہم برقی دباؤ کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔ گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔ برقی دباؤ موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.87

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

دیتا ہے۔ اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} z_{\text{بلند تر}} &= \frac{1}{-0.8\pi} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \\ &= -1.25 \left(\frac{1}{2} + n \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.875 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔ اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو -3.125 m بلند تر z حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔ اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے 0.625 m بلند تر z حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محد پر پائی جاتی ہے لہذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہذا ان کے مقامات

$$z_{\text{نمبر}} = 0 \text{ m} \quad \text{اور} \quad -1.25 \text{ m}$$

ہوں گے۔ آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباؤ کا نشیب پایا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_0 < Z_L$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر 1.66 mV ہے لہذا دباؤ کی کمترین قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباؤ کی چوٹی اس کے دگنا یعنی 3.32 mV حاصل ہوتی ہے۔ ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباؤ

$$V_{s, \text{داخلی}} = I_{s, \text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left(6.3013 \times 10^{-6} / 15.017^\circ \right) (509.7 / -23.79^\circ) = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

ہوگی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہوگی لہذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔ آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباؤ یوں

$$V_{s, \text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175 / -8.77^\circ$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباؤ اور بار پر برقی دباؤ کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔ اگرچہ ہم دونوں برقی دباؤ کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔ مساوات 10.86 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right) V_0^+$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباؤ معلوم ہے لہذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s, \text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l} \right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s, \text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175 / -8.77^\circ}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3} e^{-j1.6\pi}} = 0.0025 / -72^\circ$$

اور یوں بار یعنی $z = 0$ پر برقی دباؤ حاصل کی جاسکتی ہے

$$V_{s, \text{بار}} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 0.001666 / -72^\circ = 0.001666 / -288^\circ$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباؤ کی حتمی قیمت برابر ہیں۔ تار کے داخلی سرے پر دباؤ کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباؤ کا زاویہ 72° ہے۔ یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی 279.23° ہے۔ انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کمپیسٹر $Z_L = -j300 \Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔ کمپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1 / -90^\circ$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیثہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔ شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1 + |-j|}{1 - |-j|} = \infty$$

ہوگا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

ہوگی جو خیالی عدد ہے لہذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جاسکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیبی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ ان میں سمتھ نقشہ⁹ زیادہ اہم ہے۔ اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔ اس نقشے میں بار بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں z کار تیزی محدود کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

اور

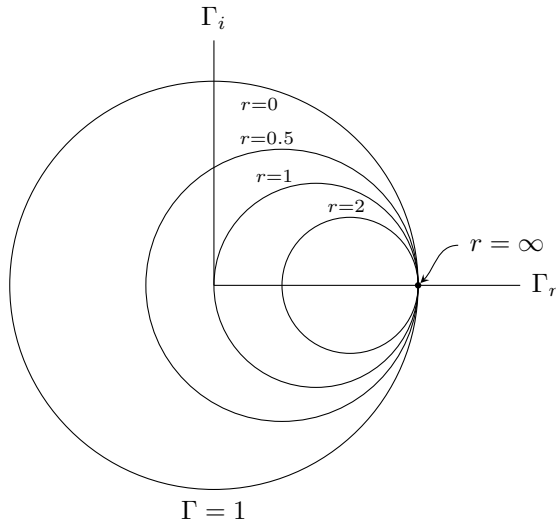
$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (11.42)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$



شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$(11.43) \quad r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$(11.44) \quad x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

لکھ جا سکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

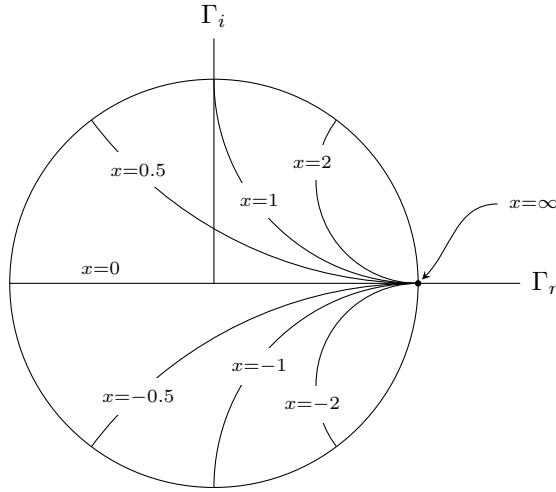
$$(11.45) \quad \left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

$$(11.46) \quad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگر $r = 0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے $(0, 0)$ پر ہے۔ خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔ اسی طرح $r = \infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر $(1, 0)$ ہے۔ یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma = 1$ تک محدود ہے۔ اب $r = \infty$ سے مراد $Z_L - \infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma = 1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ ایک آخری مثال $r = 1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5, 0)$ ہے۔ شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ $r = 0.5$ اور $r = 2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مرکز $(1, \frac{1}{x})$ ہیں۔ لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z = \infty$ اور $\Gamma = 1 + j0$ ہوں گے۔ مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1, 0)$ ہے لہذا یہ $\Gamma = 1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔ اگر $x = 1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1, 1)$ ہوں گے۔ جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma| = 1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = -1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔ شکل میں $x = 0.5$ ، $x = -0.5$ ، $x = 2$ اور $x = -2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں $x = 0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدود پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔ یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔ اگر نقشے پر درکار r اور x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔ جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔ نقشے کے مرکز $(0,0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدود یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔ اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔ یوں محدود کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدود کے مرکز $(0,0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جاسکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔ آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔ اب مثال کے طور پر $Z_0 = 50 \Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50 \Omega$ کا بار $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔ شرح انعکاس تقریباً $0.62/83^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔ اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جاسکتا ہے۔ آپس دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

کو برقی رو

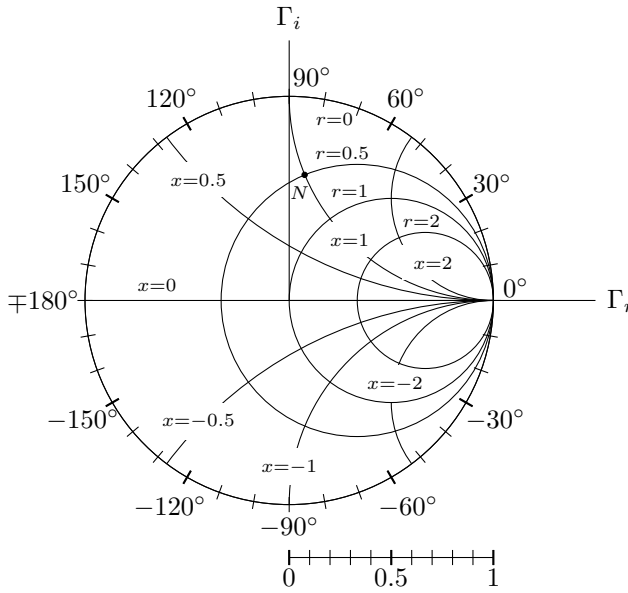
$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{Z_{\text{دغلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جاسکتی ہے جس میں $l = -z$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{دغلی}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{j2\beta l}} \quad (11.47)$$



شکل 11.7: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $l = 0$ پر کرنے سے

$$(11.48) \quad z_{\text{داخلی}} \Big|_{l=0} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = z$$

حاصل ہوتا ہے جو عین بار پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

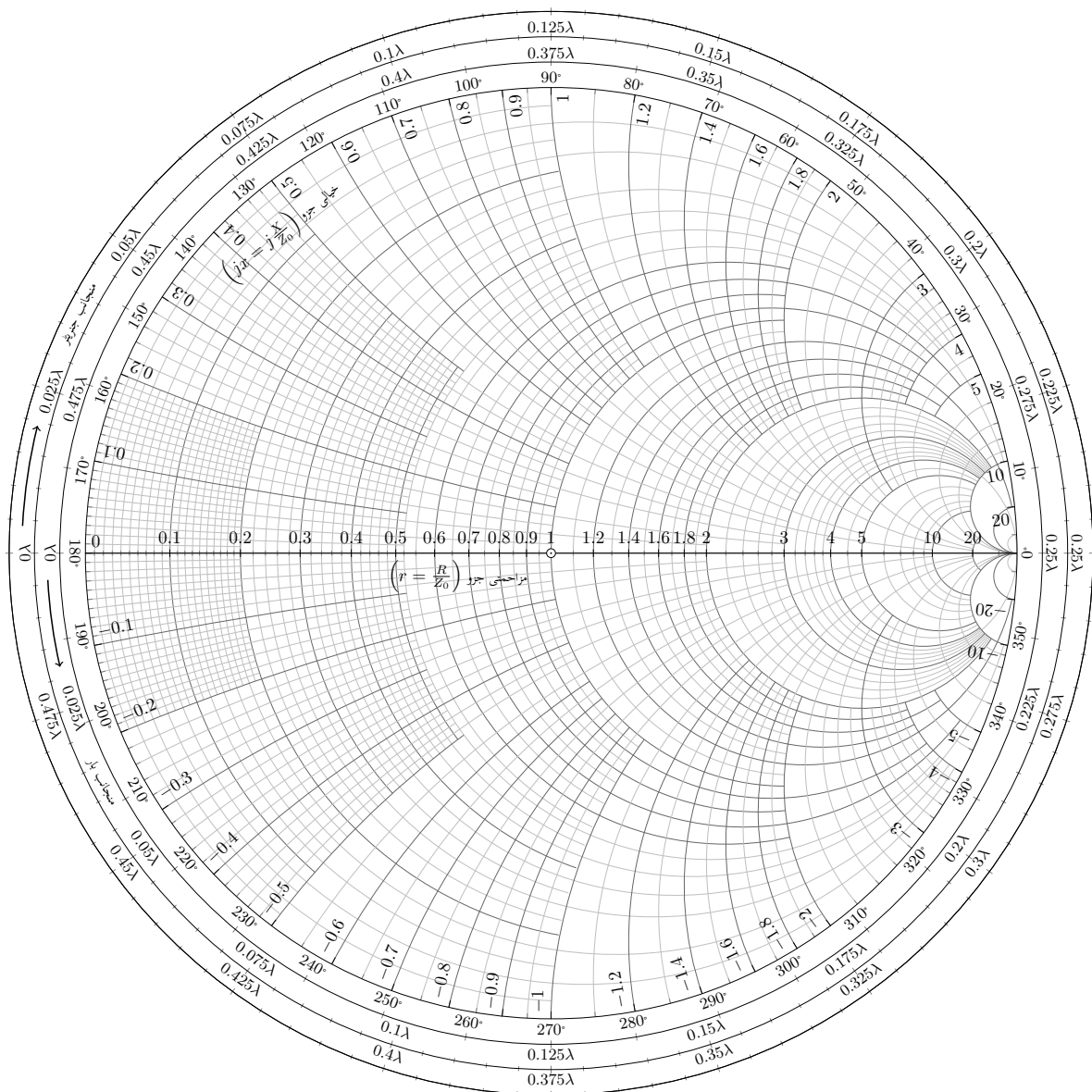
حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیازاویہ $(\phi - 2\beta l)$ ہے۔ یوں سمتھ نقشے میں نقطہ z یعنی

$$(11.49) \quad z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

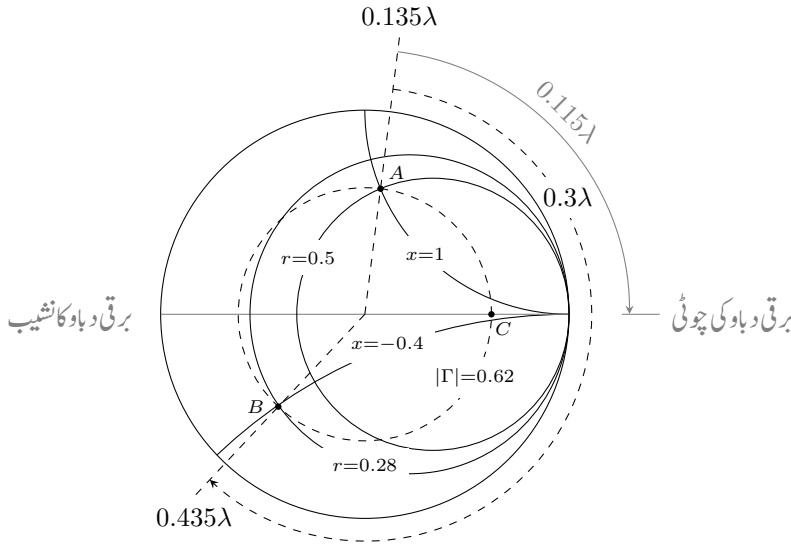
کی نشاندہی کرتے ہوئے ϕ / $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi - 2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے z داخلی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بار سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یوں بار z سے دور داخلی z کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جزیئر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi - 2\beta l$ ہوتا ہے لہذا نقشے پر ہم گھڑی کی سمت چلتے ہیں۔ یوں $\beta l = \pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔ اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین بار کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔ جیسے شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جزیئر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی



شکل 11.8: مکمل سمتھ نقشه.



شکل 11.9: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان فیٹوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباؤ کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے۔ یوں 50Ω کے ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50 \Omega$ کے بار پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ شکل 11.9 میں $z = 0.5 + j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62/83^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔ اگر تار کی لمبائی 60 cm ہو اور اشارے کی تعداد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج 2 m ہو، تب $\frac{l}{\lambda} = 0.3$ ہو گا لہذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔ یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda + 0.3\lambda = 0.435\lambda$ سے مرکز تک لکیر اور $|\Gamma|$ رداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z = 0.28 - j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $Z_{in} = 14 - j20 \Omega$ ہو گا۔ تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{in} = 13.7 - j20.2 \Omega$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔ کسی بھی ϕ کے $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$ کے لئے $z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$\begin{aligned} V_s &= V_0^+ (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) \\ &= V_0^+ e^{j\beta l} \left[1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right] \end{aligned}$$

کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} |V_s| &= V_0^+ |e^{j\beta l}| \left| 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right| \\ &= V_0^+ \left| 1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)} \right| \end{aligned}$$

ہے جہاں $|e^{j\beta l}| = 1$ کے برابر¹⁰ ہے۔ اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+ (1 - |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n + 1)\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$|e^{j\beta l}| = |\cos \beta l + j \sin \beta l| = \sqrt{\cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l} = 1^{10}$$

$V_0^+ (1 + |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں بار پر V_s کی کم سے کم قیمت ہوگی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں بار پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہوگی۔ انہیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی بار R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہوگا جسے $|\Gamma|/\pi$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہوگا جسے $|\Gamma|/0$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $R_L < Z_0$ یعنی $|\Gamma|/0$ کی صورت میں بار پر کٹر V_s ہوگا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $|\Gamma|/\pi$ کی صورت میں بار پر بلند تر V_s ہوگا۔ سمٹھ نقشے پر افقی محدود حقیقی Γ دیتا ہے۔ منفی افقی محدود پر $|\Gamma|/\pi$ ہوتا ہے لہذا بار پر کٹر V_s ہر صورت سمٹھ نقشے میں منفی افقی محدود پر پایا جائے گا۔ اسی طرح مثبت افقی محدود پر $|\Gamma|/0$ ہوتا ہے لہذا بار پر بلند تر V_s ہر صورت سمٹھ نقشے میں مثبت افقی محدود پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔ کسی بھی مخلوط بار $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمٹھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمٹھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔ جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = (2n+1)\pi$ ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔ اب $2n\pi$ سے مراد سمٹھ نقشے کے افقی محدود کا مثبت حصہ جبکہ $(2n+1)\pi$ سے مراد افقی محدود کا منفی حصہ ہے۔ یوں شکل 11.9 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔ یوں بار سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی 23 cm یا $0.115 \times 200 = 23 \text{ cm}$ فاصلے پر ہے۔ اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب بار سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔ چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔ برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l})$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔ اسی طرح جس نقطے پر برقی دباؤ کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں سمٹھ نقشے کے افقی محدود کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی بار R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہوگا۔ اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہوگا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہوگا۔ یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1 - \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہوگا۔ یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہذا $\frac{R_L}{R_0}$ اور $\frac{R_0}{R_L}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہوگا۔ یوں $|\Gamma|$ ارداس کے دائرے اور مثبت افقی محدود سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔ شکل 11.9 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہذا $s = 4.2$ ہے۔ مثبت افقی محدود پر $r > 1$ ہوتا ہے لہذا محدود کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔ اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90^\circ$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{داخلی} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

میں $Z_{داخلی}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90^\circ$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{داخلی}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90^\circ}{Z_0 + jZ_L \tan 90^\circ} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$(11.50) \quad \frac{Z_{داخلی}}{0.25\lambda} = \frac{1}{z}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{داخلی}}{Z_0} = z_{داخلی, 0.25\lambda}$$

$$\frac{Z_L}{Z_0} = z$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 11.50 کے تحت بار سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(11.51) \quad y = \frac{1}{z} = z_{منجانب, جزیرہ, 0.25\lambda}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جزیرہ 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔ مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جزیرہ 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

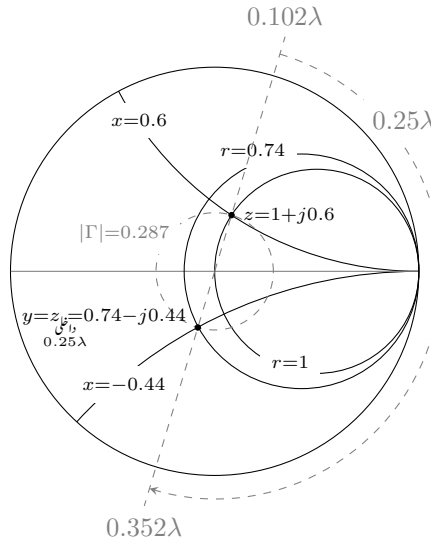
شکل 11.10 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جزیرہ 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287/73.7^\circ$ دیتا ہے۔ چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جزیرہ 0.25λ چلتے ہوئے 0.352λ سے مرکز تک لکیر اور 0.287 رداس کے دائرے کے ملاپ سے $0.74 - j0.44 = Z_{داخلی}$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{z}$ یعنی y کے عین برابر ہے۔

آئیں کسر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ کسر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$(11.52) \quad Z_{داخلی} = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} = jZ_0 \tan \beta l$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کسر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$(11.53) \quad \frac{Z_{داخلی}}{0.25\lambda} = jZ_0 \tan 90^\circ = \infty \quad (\text{کسرے دور})$$



شکل 11.10: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برفی فراوانی کے برابر ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{داخلی} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j \tan \beta l} \\ &= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \end{aligned} \quad (11.54)$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔ چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

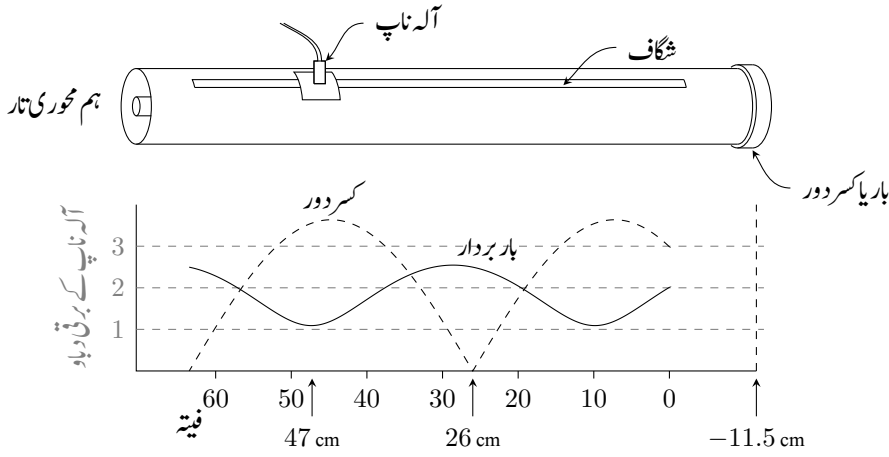
$$Z_{داخلی, 0.25\lambda} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \quad (\text{کھلے دور}) \quad (11.55)$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور کسر دور کردار ادا کرتی ہے۔

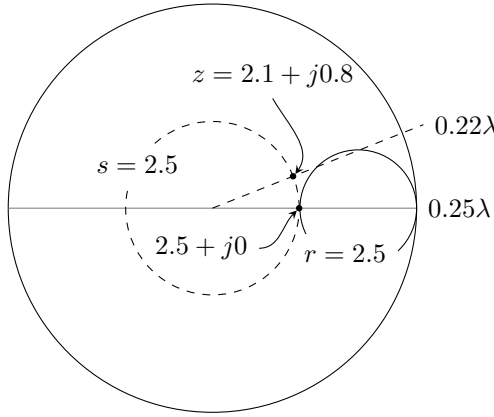
سمتہ مزاحمتی نقشے¹¹ کا متبادل سمتہ فراوانی¹² نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں $y = \frac{Y}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔ اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔ یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔ اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباؤ کی کمتر قیمت حاصل ہوگی۔ ایصالی سمتہ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہوگا۔

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے بار کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں بار کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔



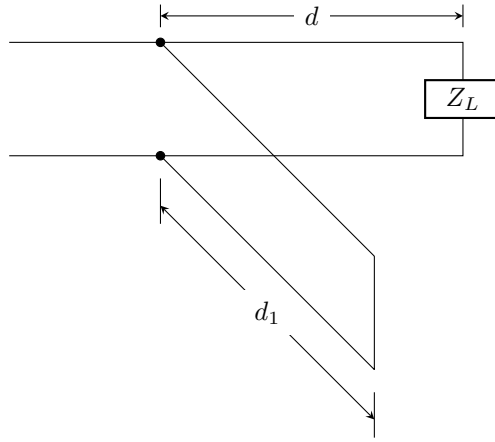
شکل 11.11: ہم محوری تار میں شگاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔



شکل 11.12: اگر 0.03λ لمبی تار پر $z = 2.1 + j0.8$ داخل ہو تب $z = 2.5 + j0$ ہو گا۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباؤ کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔ شکل 11.11 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جاسکتا ہے لہذا اسے بار کا مقام تصور نہیں کریں۔ کمتر برقی دباؤ فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔ سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔ اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ 50Ω ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔ اشارے کی تعدد 400 MHz ہے لہذا طول موج 75 cm ہے۔ بار کا مقام تعین کرنے کی خاطر بار کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو کسر دور پایا جاتا ہے۔ کسر دور تار پر کمتر دباؤ فیتے پر 26 cm کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کسر دور نقطے سے کمتر دباؤ کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباؤ کسر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ ایسی صورت میں کسر دور کا مقام فیتے پر $-11.5 \text{ cm} = 26 - 37.5$ نشان کے ساتھ ہو گا۔ چونکہ بار کے مقام پر ہی کسر دور پیدا کیا گیا تھا لہذا بار بھی فیتے پر -11.5 cm کے نشان کے ساتھ ہو گا۔ یوں حاصل نتائج کے تحت بار سے کم تر دباؤ کا نقطہ $47 - (-11.5) = 58.5 \text{ cm}$ فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے بار سے کمتر دباؤ کا فاصلہ 21 cm حاصل ہوتا ہے۔ بلند تر دباؤ کا بار سے فاصلہ یوں $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25 \text{ cm}$ ہو گا جو $\frac{2.25}{75} = 0.03$ طول موج کے برابر ہے۔



شکل 11.13: بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے کسرے دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے بار اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

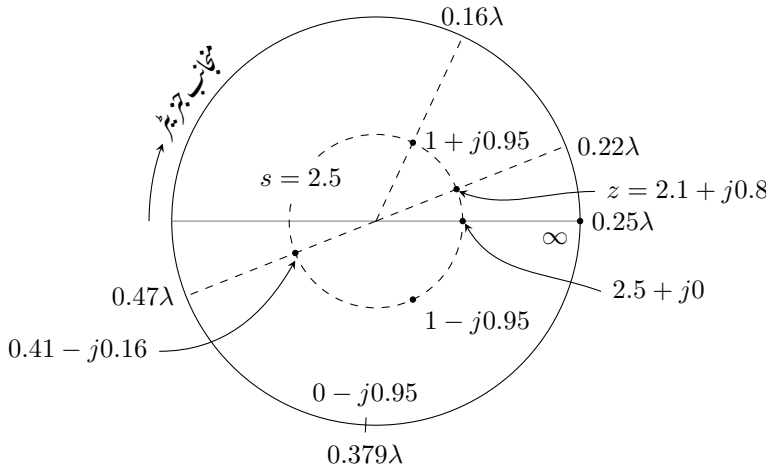
ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.12 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔ بلند تر برقی دباؤ کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہذا ایسے نقطے پر $z = 2.5$ داخلی ہو گا۔ ہم یوں سمتھ نقشے پر $z = 2.5$ داخلی نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جزئی فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔ اس سے 0.03λ منفی کرتے ہوئے بار تک پہنچتے ہیں، لہذا 0.22λ سے مرکز تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.429$ رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔ یوں $Z_L = 105 + j40 \Omega$ حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے بار کو فیتے پر 11.5 cm یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔ چونکہ بار کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے بار کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس بار کو 50Ω ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ ایسا d_1 لمبائی کے کسر دور تار کے ٹکڑے کو بار سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ ایسا شکل 11.13 میں دکھایا گیا ہے۔ بار سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی کسرے دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔ یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔ کسر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ 50Ω کے برابر ہے۔

برقی بار اور کسر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔ متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔ برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ ہم d اتار کھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $1 + jb$ داخلی ہو۔ اب اگر داخلی y کے متوازی $-jb$ برقی تاثیریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔ یوں d_1 لمبی کسر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثیریت $-jb$ درکار ہے۔ ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جزئی 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل 11.14 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جزئی 0.22λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔ یہاں سے منجانب جزئی 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔ اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جزئی گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ بار سے اس نقطے تک $d = 0.19\lambda$ (یعنی $0.16\lambda + (0.5\lambda - 0.47\lambda)$) تار درکار ہو گی لہذا $d = 0.19\lambda$ یعنی 14.25 cm بنتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $-j0.95$ برقی تاثیریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہو گا۔ مساوات 11.54 کے تحت کسرے دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔ عین کسر دور پر



شکل 11.14: بار $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا کسر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

$y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جزیر 0.25λ پر پایا جاتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $-j0.95$ ، داخلی y نقشے پر منجانب جزیر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔ یوں کہ دور ٹکڑے کی لمبائی $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$ یعنی 9.67 cm حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع 50Ω ترسیلی تار کو کسرے دور کرنے سے برقی دباؤ کے دو آپس میں قریبی نشیب 12 cm اور 27 cm پر پائے جاتے ہیں۔ کسرے دور ختم کرتے ہوئے یہاں بار نسب کرنے سے 0.4 V حیطے کے نشیب اور 0.72 V حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب 9 cm پر حاصل ہوتا ہے۔ ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ Z_L اور Γ ، s ، f ، λ ۔

جوابات: $36.5 + j21.6 \Omega$ اور $0.286/108^\circ$ ، $1.8 \times 1 \text{ GHz}$ ، 0.3 m ۔

مشق 11.5: بے ضیاع 50Ω کے ساتھ $Z_L = 100 + j100 \Omega$ کا بار نسب ہے۔ بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا کسرے دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔ اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد 10 MHz ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d ۔

جوابات: 4.4 m اور 1.8 m ، 20 m ۔

باب 12

تقطیب موج

اس باب میں تقطیب موج پر غور کیا جائے گا۔ خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔ یوں a_z جانب حرکت کرتا a_x سمت کا میدان

$$(12.1) \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا گیا۔ یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔ عموماً a_z جانب حرکت کرتے موج میں a_x کے علاوہ a_y جزو بھی پایا جائے گا۔ ایسی صورت میں موج کے اجزاء

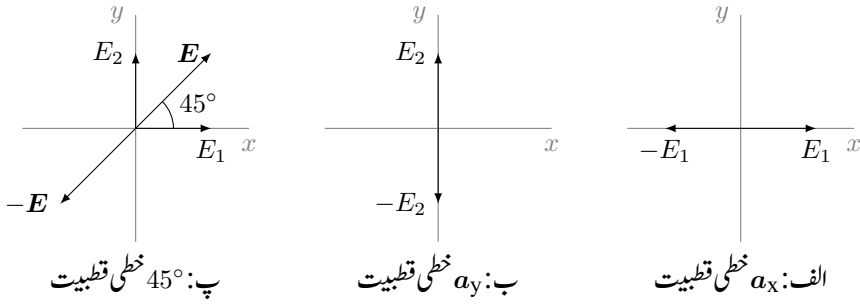
$$(12.2) \quad \begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned}$$

ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ δ بھی پایا جاسکتا ہے۔ ان اجزاء کا مجموعہ

$$(12.3) \quad \mathbf{E} = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \mathbf{a}_y$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔ یہ مساوات غور طلب ہے۔ آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسی میدان پر غور کریں۔ ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کے تبدیلی سے میدان کی قیمت $E_1 \mathbf{a}_x - E_1 \mathbf{a}_x + E_1 \mathbf{a}_x$ تبدیل ہوتی ہے۔ اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 12.1-الف میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $E_1 - E_1 + E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔ اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت² کہتے ہیں۔ یہ موج a_x سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس اگر مساوات 12.3 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ a_y خطی قطبیت کی موج ہوگی جسے شکل 12.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محور کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 12.1-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔



شکل 12.1: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

آئیں اب ذرہ دلچسپ صورت حال دیکھیں۔ نقطہ $z = 0$ پر مساوات 12.2

(12.4)

$$E_x = E_1 \cos \omega t$$

$$E_y = E_2 \cos(\omega t - \delta)$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$E_y = E_2 (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta)$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے، $\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$ اور $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$ پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta \right]$$

ملتا ہے جسے

(12.5)

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta$$

یا

(12.6)

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

(12.7)

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \quad b = \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \quad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta}$$

لئے گئے ہیں۔ مساوات 12.6 بیضوی قطبیت³ کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 12.5 میں $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = \mp 90^\circ$ کی صورت میں

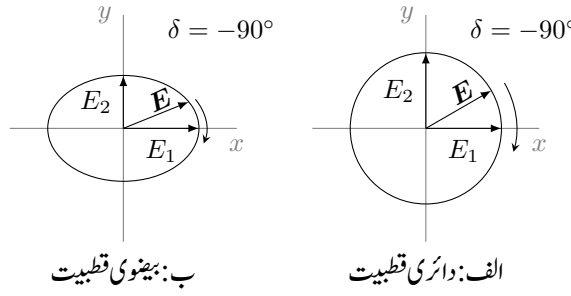
(12.8)

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{12}^2$$

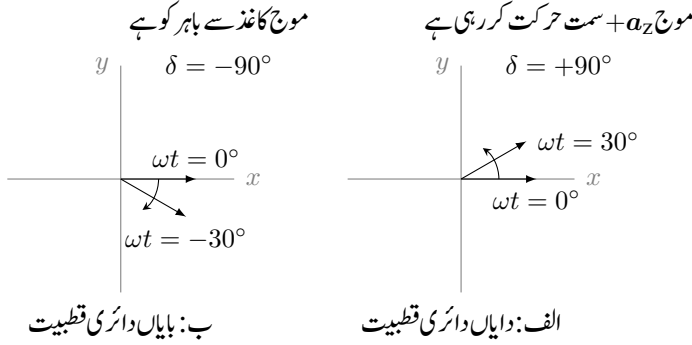
حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ مساوات 12.4 سے $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$E_x = E_{12} \cos 0 = E_{12}$$

$$E_y = E_{12} \cos(0 - 90^\circ) = 0 \quad (\delta = +90^\circ)$$



شکل 12.2: دائری اور بیضوی قطبیت۔



شکل 12.3: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30^\circ$ کی صورت میں

$$E_x = E_{12} \cos 30^\circ = 0.866 E_{12}$$

$$E_y = E_{12} \cos(30^\circ - 90^\circ) = 0.5 E_{12} \quad (\delta = +90^\circ)$$

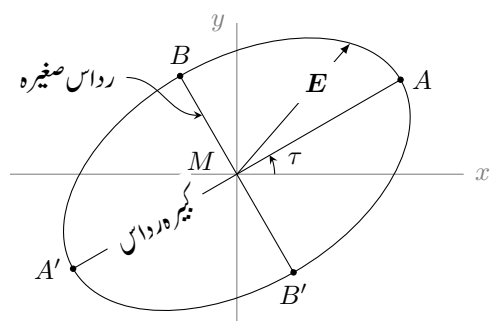
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 12.3-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت a_z کاغذ سے باہر کو ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کے حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگوٹھیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کا سمت دیتی ہیں۔ یوں $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں مساوات 12.8 دائیں دائری قطبیت⁴ کی موج کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح $\delta = -90^\circ$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت⁵ حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یاد رہے کہ بائیں یا دائیں ہاتھ کی قطبیت کا ذکر کرتے ہوئے موج کے حرکت کی سمت کا معلوم ہوتا ضروری ہے۔

مساوات 12.5 میں $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.2-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.4 میں مساوات 12.6 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں ترخیم⁶ افقی محدد کے ساتھ τ زاویہ بتاتا ہے لہذا یہ τ زاویے کی بیضوی قطبیت کو ظاہر کرتی ہے۔

right circular polarization⁴
left circular polarization⁵
ellipse⁶



شکل 12.4: عمومی بیضوی قطبیت.

باب 13

ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔ اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہو بہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔ یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

13.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج E_{\perp}

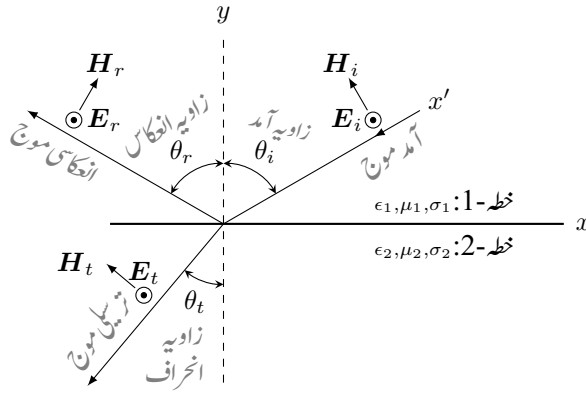
شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمد موج دکھائی گئی ہے۔ سرحد $y = 0$ پر پایا جاتا ہے لہذا y محدود، سرحد کے عمودی ہے۔ پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج y محدود کے ساتھ θ_i زاویہ آمد¹ بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج y محدود کے ساتھ θ_r زاویہ انعکاس² بناتی ہے۔ ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدود کے ساتھ θ_t زاویہ بناتی ہے۔ ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہذا θ_t اصطلاحاً زاویہ انحراف³ کہلاتی ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہوگی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہوگی۔ ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج⁴ اور متوازی قطب موج⁵ کہلائیں گے۔ شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

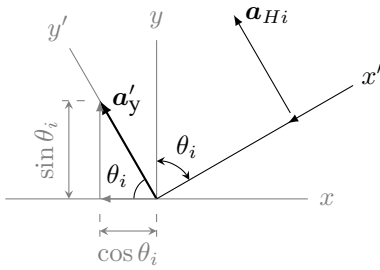
منفی z سمت میں حرکت کرتی a_x میدان کی برقی موج

$$E_i = E_0 a_x e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

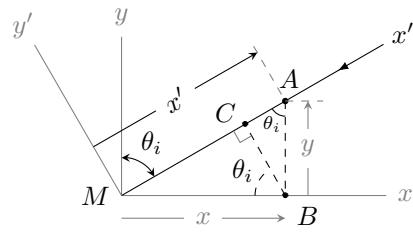
incidence angle¹
reflection angle²
refraction angle³
perpendicular polarized⁴
parallel polarized⁵



شکل 13.1: ترجہی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔ برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔



(ل) فاصلے کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدود میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جاتی ہے۔ اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات a_x سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب a_x اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ a سمت کا میدان جو z محدود کی بجائے لکیر l پر گھٹے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$E_i = E_0 a e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔ اب شکل 13.1 میں E_i پر دوبارہ غور کریں۔ یہ برقی میدان a_z سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر x' پر حرکت کر رہی ہے لہذا اس موج کو

$$(13.1) \quad E_i = E_0 a_z e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود x, y کے مرکز سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔ آئیں مساوات 13.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدود x, y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

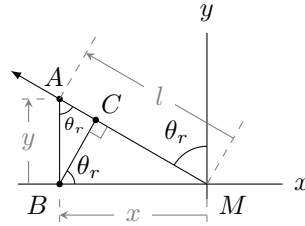
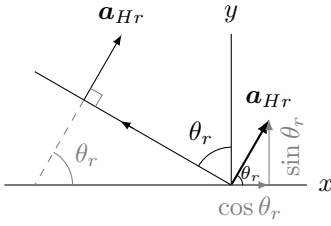
شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدود دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں لکیر x' کو کارتیسی محدود x', y کا حصہ دکھایا گیا ہے۔ لکیر x' پر نقطہ A کا مرکز سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x \sin \theta_i$ اور $CA = y \cos \theta_i$ برابر ہیں لہذا

$$(13.2) \quad x' = x \sin \theta_i + y \cos \theta_i$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$(13.3) \quad E_i = E_0 a_z e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اس مساوات میں موج گھٹے x' کی طرف رواں ہے۔



(ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔ (ل) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت a_z (یا a'_z) ہے جہاں a_z اور a'_z دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان H_i کی اکائی سمتیہ a_{Hi} محدود y' کی سمت میں ہے۔ یوں $a'_{Hi} = a'_{y'}$ لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں $a'_{y'}$ کو کارتیسی محدود x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ $a'_{y'}$ کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہذا شکل میں متکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں متکون کا قاعدہ $\cos \theta_i$ اور اس کا عمود $\sin \theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$(13.4) \quad a'_{y'} = -\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$H_i = \frac{E_0}{\eta_1} a'_{y'} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$(13.5) \quad H_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(13.6) \quad E_{si} = a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(13.7) \quad H_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی (\perp) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$(13.8) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔ مرکز M سے موج کا فاصلہ l لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = -x \sin \theta_r$ اور $CA = y \cos \theta_r$ کے برابر ہیں لہذا

$$(13.9) \quad l = -x \sin \theta_r + y \cos \theta_r$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ منفی محدود پر x کی قیمت منفی ہوگی لہذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہوگی۔ یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned} E_{sr} &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 l} \\ (13.10) \quad &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \end{aligned}$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے l کی جانب حرکت کی بنا پر e کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت a_z ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔ شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ a_H دکھائی گئی ہے جو x محدود کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔ اکائی سمتیہ کو محدود کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$(13.11) \quad a_{Hr} = \cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$(13.12) \quad H_{sr} = (\cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y) \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جاسکتے ہیں

$$(13.13) \quad E_{st} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

$$(13.14) \quad H_{st} = (-\cos \theta_t a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدود کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔ یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل β_2 اور استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 264 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + 0 \cos \theta_r)} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یا

$$(13.15) \quad e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\perp} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اسی سرحدی شرط کو مساوات 13.8 کی مدد سے

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \\ E_i + \Gamma_{\perp} E_i &= \tau_{\perp} E_i \end{aligned}$$

یا

$$(13.16) \quad 1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 13.16 کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ مساوات 13.15 میں

$$(13.17) \quad e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} = e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

ہوگا جہاں پہلے مساوات سے

$$(13.18) \quad \theta_i = \theta_r$$

اور دوسری مساوات سے

$$(13.19) \quad \beta_2 \sin \theta_t = \beta_1 \sin \theta_r$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

اور صفحہ 281 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$(13.20) \quad \sin \theta_t = \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i$$

یعنی

$$\begin{aligned} \sin \theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \mu_0 \epsilon_{r1} \epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2} \mu_0 \epsilon_{r2} \epsilon_0}} \sin \theta_i \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \end{aligned}$$

یا

$$(13.21) \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.22) \quad \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}} \\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}} \end{aligned}$$

انحرافی مستقل⁶ کہلاتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل n اور قدرتی رکاوٹ η میں فرق کر پائیں گے۔

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔ مساوات 13.21 جسے ابن سہل⁷ کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل⁸ سے جانا جاتا ہے۔ بصریات⁹ کے میدان میں قانون ابن سہل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے $\theta_i = 30^\circ$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔ پانی میں انحرافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔ اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہوگا۔ شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}} \sin 30^\circ = 0.32969$$

⁶ index of refraction

⁷ بغداد کے ابو سعد العلاء ابن سہل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔

⁸ Snell's law

⁹ optics

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 265 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان a_x اور a_y اجزاء پر مشتمل ہیں۔ ان میں صرف a_x اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے a_x اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos \theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r)} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t)}$$

یا

$$-\cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos \theta_i + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میں مساوات 13.16 سے τ_{\perp} کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$(13.23) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 298 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_{\perp} = -1$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$(13.24) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت ($\epsilon_2 > \epsilon_1$) میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہذا $\sin^2 \theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے Γ_{\perp} حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2 \theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہذا Γ_{\perp} خیالی عدد ہو گا۔ ایسی صورت میں $|\Gamma_{\perp}| = 1$ ہوتا ہے اور

سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس¹⁰ سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر $\Gamma_{\perp} = 1$ ہو اسے زاویہ فاصل¹¹ پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$(13.25) \quad \theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے $(\theta_i > \theta_{i,ف})$ کی صورت میں مساوات 13.20 سے $\sin \theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos \theta_t$ خیالی عدد حاصل ہوگا

$$(13.26) \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i} = jA$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned} E_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + yjA)} \\ &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \end{aligned}$$

یا

$$(13.27) \quad E_{st} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(13.28) \quad \alpha = \beta_2 A = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں x - جانب بے نیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر E_{\perp} کی مقدار $\tau_{\perp} E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج¹² کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55^\circ$ زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$ اور $\mu_r = 1$ لیں۔ $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 13.20 سے

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}} \sin 55^\circ = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos \theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

ہو گا۔ مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544 \angle -54.746^\circ$$

• اس طرح ہوا میں سرحد پر $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو گا۔

• ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔ سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یاد رہے کہ $\sin \theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos \theta_t$ خیالی عدد ہے۔ مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ \mathbf{H}_{st} &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(j\beta_2 x \sin \theta_t - j\theta_\eta)} \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$ کا استعمال کیا گیا۔ ہوا میں سرحد سے دور \mathbf{a}_y سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان کا \mathbf{a}_y جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اس کا صرف \mathbf{a}_x جزو لیا جائے گا۔ جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان \mathbf{H}_s^* لکھتے ہوئے \mathbf{H}_s میں تمام مقامات پر z کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \right] \times \left[jA \mathbf{a}_x \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(-j\beta_2 x \sin \theta_t + j\theta_\eta)} \right] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} [j \cos \theta_\eta - \sin \theta_\eta] \end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = -\mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin \theta_\eta$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہوا میں η حقیقی عدد ہے لہذا $\theta_\eta = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -a_y \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔ یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ ایسی امواج کو فنا پذیر امواج¹³ کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا a_y جزو اور برقی a_z اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع a_x سمت میں حرکت کریں گے۔ ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{پانی میں رفتار موج} = \frac{\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار}}{\sin \theta_i}$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج $E_{||}$

باب 14

سوالات

جدول 14.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 14.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 14.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 14.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

