

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ . . . . .	1.1
2	سمتی الجبرا . . . . .	1.2
3	کارتیسی محدود . . . . .	1.3
5	اکائی سمتیات . . . . .	1.4
9	میدانی سمتیہ . . . . .	1.5
9	سمتی رقبہ . . . . .	1.6
10	غیر سمتی ضرب . . . . .	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . . .	1.8
17	گول نلکی محدود . . . . .	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . . .	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . . .	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . . .	
27	1.10 کروی محدود . . . . .	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع . . . . .	
41	2.2 برقی میدان کی شدت . . . . .	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . . .	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .	
53	2.5 چارج بردار حجم . . . . .	
54	2.6 مزید مثال . . . . .	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط . . . . .	
63	2.8 سوالات . . . . .	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج . . . . .
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ . . . . .
66	3.3	گاؤس کا قانون . . . . .
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال . . . . .
68	3.4.1	نقطہ چارج . . . . .
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح . . . . .
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . . .
71	3.5	ہم محوری تار . . . . .
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . . .
76	3.8	پھیلاؤ . . . . .
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات . . . . .
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات . . . . .
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ . . . . .
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام . . . . .
86	4.2	لکیری تکملہ . . . . .
91	4.3	برقی دباؤ . . . . .
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ . . . . .
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ . . . . .
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ . . . . .
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ . . . . .
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان . . . . .
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان . . . . .
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان . . . . .
104	4.6	جفت قطب . . . . .
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط . . . . .
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . . .

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
187	7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
191	7.3 گردش	
198	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
204	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
205	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
206	7.4 مسئلہ سٹوکس	
210	7.5 مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	
216	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
221	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
222	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
223	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
227	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
227	8.1 متحرک چارج پر قوت	
228	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
231	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
232	8.4 قوت اور مروڑ	
237	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
238	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
241	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
242	8.8 مقناطیسی دور	
245	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
246	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
250	8.11 مشترکہ امالہ	

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
290	10.4	موصل میں امواج
296	10.5	انعکاس مستوی موج
302	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
331	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
332	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

- 12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب . . . . . 337
- 12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئٹنگ سمتیہ . . . . . 340

### 13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 343

- 13.1 ترچھی آمد . . . . . 343
- 13.2 ترسیم بائی گن . . . . . 354

### 14 موج اور گھمکیا 357

- 14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ . . . . . 357
- 14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج . . . . . 358
- 14.3 کھوکھلا مستطیلی موج . . . . . 364
- 14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور . . . . . 373
- 14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی  $TM_{mn}$  موج . . . . . 379
- 14.5 کھوکھلی نالی موج . . . . . 384
- 14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف . . . . . 391
- 14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف . . . . . 392
- 14.8 سطحی موج . . . . . 395
- 14.9 دو برق تختے کا موج . . . . . 399
- 14.10 گھمکی خلاء . . . . . 401
- 14.11 میکس ویل مساوات کا عمومی حل . . . . . 404

### 15 سوالات 411





## باب 13

### ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔ اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہو بہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔ یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

#### 13.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج  $E_{\perp}$

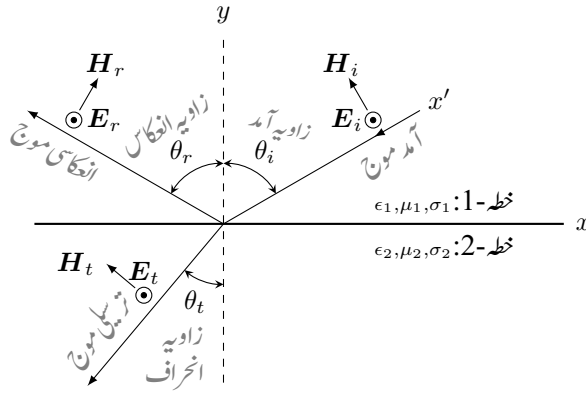
شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمدی موج دکھائی گئی ہے۔ سرحد  $y = 0$  پر پایا جاتا ہے لہذا  $y$  محدود، سرحد کے عمودی ہے۔ پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_i$  زاویہ آمد<sup>1</sup> بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_r$  زاویہ انعکاس<sup>2</sup> بناتی ہے۔ ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی  $y$  محدود کے ساتھ  $\theta_t$  زاویہ بناتی ہے۔ ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہذا  $\theta_t$  اصطلاحاً زاویہ انحراف<sup>3</sup> کہلاتی ہے۔ پہلے خطے کے مستقل  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  جبکہ دوسرے خطے کے مستقل  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$  ہیں۔

ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی  $xy$  سطح) کے عمودی ہوگی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہوگی۔ ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج<sup>4</sup> اور متوازی قطب موج<sup>5</sup> کہلائیں گے۔ شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

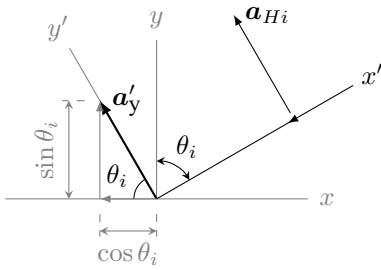
منفی  $z$  سمت میں حرکت کرتی  $a_x$  میدان کی برقی موج

$$E_i = E_0 a_x e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

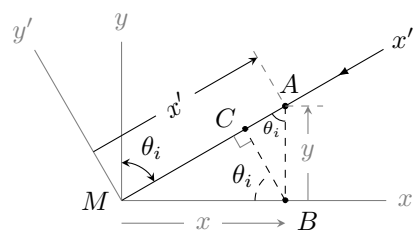
incidence angle<sup>1</sup>  
reflection angle<sup>2</sup>  
refraction angle<sup>3</sup>  
perpendicular polarized<sup>4</sup>  
parallel polarized<sup>5</sup>



شکل 13.1: ترجہی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔ برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔



(ل) فاصلے کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدود میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جاتی ہے۔ اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات  $a_x$  سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ  $z$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب  $a_x$  اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ  $a$  سمت کا میدان جو  $z$  محدود کی بجائے لکیر  $l$  پر گھٹے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$E_i = E_0 a e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔ اب شکل 13.1 میں  $E_i$  پر دوبارہ غور کریں۔ یہ برقی میدان  $a_z$  سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر  $x'$  پر حرکت کر رہی ہے لہذا اس موج کو

$$(13.1) \quad E_i = E_0 a_z e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود  $x, y$  کے مرکز سے لکیر  $x'$  پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔ آئیں مساوات 13.1 میں لکیر  $x'$  پر فاصلے کو کارتیسی محدود  $x, y$  کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

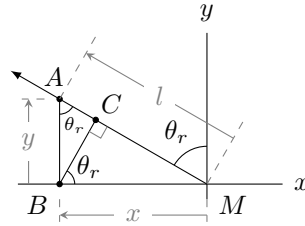
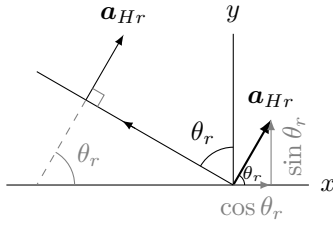
شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدود دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں لکیر  $x'$  کو کارتیسی محدود  $x', y'$  کا حصہ دکھایا گیا ہے۔ لکیر  $x'$  پر نقطہ  $A$  کا مرکز سے فاصلہ  $MA$  کو  $x'$  لکھا گیا ہے۔ اب  $MA = MC + CA$  کے برابر ہے جہاں  $MC = x \sin \theta_i$  اور  $CA = y \cos \theta_i$  برابر ہیں لہذا

$$(13.2) \quad x' = x \sin \theta_i + y \cos \theta_i$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$(13.3) \quad E_i = E_0 a_z e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اس مساوات میں موج گھٹے  $x'$  کی طرف رواں ہے۔



(ا) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدود میں اظہار۔ (ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدود میں اظہار۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان  $x'$  کے عمودی ہیں۔ برقی میدان کی سمت  $a_z$  (یا  $a'_z$ ) ہے جہاں  $a_z$  اور  $a'_z$  دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان  $H_i$  کی اکائی سمتیہ  $a_{Hi}$  محدود  $y'$  کی سمت میں ہے۔ یوں  $a'_{Hi} = a'_{yi}$  لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں  $a'_{yi}$  کو کارتیسی محدود  $x, y$  کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔ اکائی سمتیہ  $a'_{yi}$  کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہذا شکل میں متکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔ یوں متکون کا قاعدہ  $\cos \theta_i$  اور اس کا عمود  $\sin \theta_i$  کے برابر ہوں گے جس سے

$$(13.4) \quad a'_{yi} = -\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$H_i = \frac{E_0}{\eta_1} a'_{yi} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$(13.5) \quad H_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)]}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(13.6) \quad E_{si} = a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(13.7) \quad H_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔ عین سرحد پر عمودی ( $\perp$ ) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$(13.8) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔ مرکز  $M$  سے موج کا فاصلہ  $l$  لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اب  $MA = MC + CA$  کے برابر ہے جہاں  $MC = -x \sin \theta_r$  اور  $CA = y \cos \theta_r$  کے برابر ہیں لہذا

$$(13.9) \quad l = -x \sin \theta_r + y \cos \theta_r$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ منفی محدود پر  $x$  کی قیمت منفی ہوگی لہذا  $MC$  حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہوگی۔ یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned} E_{sr} &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 l} \\ &= a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \end{aligned} \quad (13.10)$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے  $l$  کی جانب حرکت کی بنا پر  $e$  کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت  $a_z$  ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔ شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ  $a_H$  دکھائی گئی ہے جو  $x$  محدود کے ساتھ  $\theta_r$  زاویہ بناتی ہے۔ اکائی سمتیہ کو محدود کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$a_{Hr} = \cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y \quad (13.11)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$H_{sr} = (\cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y) \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + y \cos \theta_r)} \quad (13.12)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جاسکتے ہیں

$$E_{st} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)} \quad (13.13)$$

$$H_{st} = (-\cos \theta_t a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)} \quad (13.14)$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدود کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔ یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل  $\beta_2$  اور  $\eta_2$  استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 264 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں  $y = 0$  پر کرتے ہوئے یوں

$$a_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\perp} E_0 e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r + 0 \cos \theta_r)} = a_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\perp} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (13.15)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی  $x$  کے لئے درست ہے لہذا یہ  $x = 0$  کے لئے بھی درست ہوگی۔ اس میں  $x = 0$  پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (13.16)$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.15 میں  $x$  کی قیمت تبدیل کرنے سے  $e$  کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔ یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت  $x$  کے ہر قیمت کے لئے درست ہوگی جب مساوات میں تینوں  $e$  کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} = e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \quad (13.17)$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \quad (13.18)$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$(13.19) \quad \beta_2 \sin \theta_t = \beta_1 \sin \theta_r$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

اور صفحہ 281 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$(13.20) \quad \sin \theta_t = \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i$$

یعنی

$$\begin{aligned} \sin \theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \mu_0 \epsilon_{r1} \epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2} \mu_0 \epsilon_{r2} \epsilon_0}} \sin \theta_i \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \end{aligned}$$

یا

$$(13.21) \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(13.22) \quad \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}} \\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}} \end{aligned}$$

انحرافی مستقل<sup>6</sup> کہلاتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل  $n$  اور قدرتی رکاوٹ  $\eta$  میں فرق کر پائیں گے۔

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔ مساوات 13.21 جسے ابن سہل<sup>7</sup> کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل<sup>8</sup> سے جانا جاتا ہے۔ بصریات<sup>9</sup> کے میدان میں قانون ابن سہل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے  $\theta_i = 30^\circ$  زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔ پانی میں انحرافی موج کا زاویہ  $\theta_t$  حاصل کریں۔ اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب  $\theta_t$  کیا ہو گا۔ شیشے کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 2.3$  لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 1$  لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}} \sin 30^\circ = 0.32969$$

<sup>6</sup>index of refraction

<sup>7</sup>بغداد کے ابو سعد العلاء ابن سہل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔

<sup>8</sup>Snell's law

<sup>9</sup>optics

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin \theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 265 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان  $a_x$  اور  $a_y$  اجزاء پر مشتمل ہیں۔ ان میں صرف  $a_x$  اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے  $a_x$  اجزاء میں  $y = 0$  پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos \theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (-x \sin \theta_r)} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t)}$$

یا

$$-\cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos \theta_i + \cos \theta_r \Gamma_{\perp} = -\cos \theta_t \tau_{\perp} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس میں مساوات 13.16 سے  $\tau_{\perp}$  کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$(13.23) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 298 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں  $\theta_i = 0^\circ$  پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب  $\eta_2 = 0$  ہو گا جس سے  $\Gamma_{\perp} = -1$  حاصل ہوتا ہے۔ اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$(13.24) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت ( $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ) میں  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$  ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہذا  $\sin^2 \theta_i \leq 1$  ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے  $\Gamma_{\perp}$  حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برعکس  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  کی صورت میں اگر  $\sin^2 \theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہذا  $\Gamma_{\perp}$  خیالی عدد ہو گا۔ ایسی صورت میں  $|\Gamma_{\perp}| = 1$  ہوتا ہے اور

سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس<sup>10</sup> سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر  $\Gamma_{\perp} = 1$  ہو اسے زاویہ فاصل<sup>11</sup> پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$(13.25) \quad \theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل  $\mu_0$  لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے  $(\theta_i > \theta_{i,ف})$  کی صورت میں مساوات 13.20 سے  $\sin \theta_t > 1$  حاصل ہوتا ہے جس سے  $\cos \theta_t$  خیالی عدد حاصل ہوگا

$$(13.26) \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i} = jA$$

جہاں  $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$  حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned} E_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + yjA)} \\ &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \end{aligned}$$

یا

$$(13.27) \quad E_{st} = \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(13.28) \quad \alpha = \beta_2 A = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں  $x$  - جانب بے نیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر  $E_{\perp}$  کی مقدار  $\tau_{\perp} E_0$  ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے  $e^{-\alpha y}$  کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج<sup>12</sup> کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج  $\theta_i = 55^\circ$  زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان  $E_i = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہے۔ پانی کے مستقل  $\epsilon_r = 80$  اور  $\mu_r = 1$  لیں۔  $\sigma = 0$  لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,ف} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 13.20 سے

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}} \sin 55^\circ = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos \theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$



حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

ہو گا۔ مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544 \angle -54.746^\circ$$

• اس طرح ہوا میں سرحد پر  $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہو گا۔

• ہوا میں سرحد سے  $\frac{\lambda}{4}$  فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{4}} = 12.9 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔ سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یاد رہے کہ  $\sin \theta_t$  حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ  $\cos \theta_t$  خیالی عدد ہے۔ مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st} &= \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ \mathbf{H}_{st} &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{\eta_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ &= (-jA \mathbf{a}_x + \sin \theta_t \mathbf{a}_y) \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(j\beta_2 x \sin \theta_t - j\theta_\eta)} \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں  $\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$  کا استعمال کیا گیا۔ ہوا میں سرحد سے دور  $\mathbf{a}_y$  سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔ مقناطیسی میدان کا  $\mathbf{a}_y$  جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہذا اس کا صرف  $\mathbf{a}_x$  جزو لیا جائے گا۔ جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان  $\mathbf{H}_s^*$  لکھتے ہوئے  $\mathbf{H}_s$  میں تمام مقامات پر  $z$  کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{a}_z \tau_{\perp} E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t} \right] \times \left[ jA \mathbf{a}_x \tau_{\perp} \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{(-j\beta_2 x \sin \theta_t + j\theta_\eta)} \right] \\ &= \mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} [j \cos \theta_\eta - \sin \theta_\eta] \end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{وسط}} = -\mathbf{a}_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin \theta_\eta$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہوا میں  $\eta$  حقیقی عدد ہے لہذا  $\theta_\eta = 0$  ہو گا اور چونکہ  $\sin 0 = 0$  ہوتا ہے لہذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = -a_y \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔ یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ ایسی امواج کو فنا پذیر امواج<sup>13</sup> کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا  $a_y$  جزو اور برقی  $a_z$  اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع  $a_x$  سمت میں حرکت کریں گے۔ ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{پانی میں رفتار موج} = \frac{\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار}}{\sin \theta_i}$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج  $E_{\parallel}$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔ یاد رہے کہ موج کی سمت پونٹنگ سمتیہ  $H \times E$  کی سمت ہی ہوتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پونٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔ متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 13.4 میں  $E_i$  کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔ یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج  $E_r$  کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔ برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 13.2 اور مساوات 13.4 کی مدد سے شکل 13.4 کے لئے

$$(13.29) \quad E_{si} = (-\cos \theta_i a_x + \sin \theta_i a_y) E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

$$(13.30) \quad H_{si} = -a_z \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)}$$

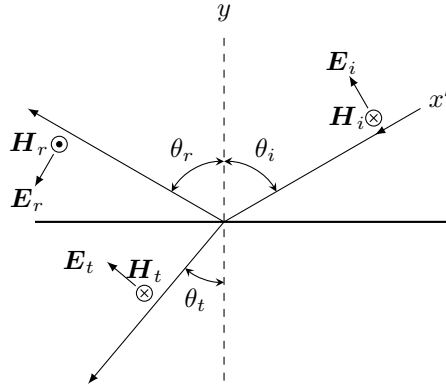
لکھ جا سکتے ہیں۔ اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$(13.31) \quad E_{sr} = -(\cos \theta_r a_x + \sin \theta_r a_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(13.32) \quad H_{sr} = a_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$(13.33) \quad E_{st} = (-\cos \theta_t a_x + \sin \theta_t a_y) \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$

$$(13.34) \quad H_{st} = -a_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2 (x \sin \theta_t + y \cos \theta_t)}$$



شکل 13.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

لکھے جاسکتے ہیں۔ سرحد ( $y = 0$ ) پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔ یوں  $a_y$  جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ  $a_x$  جزو کو استعمال کیا جائے گا لہذا

$$-\cos \theta_i a_x E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} - \cos \theta_r a_x \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} = -\cos \theta_t a_x \tau_{\parallel} E_0 e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یعنی

$$(13.35) \quad \cos \theta_i e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} + \cos \theta_r \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \cos \theta_t \tau_{\parallel} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $x$  کی قیمت تبدیل کرنے سے  $e$  کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں  $e$  کے طاقت،  $x$  کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$(13.36) \quad j\beta_1 x \sin \theta_i = j\beta_1 x \sin \theta_r = j\beta_2 x \sin \theta_t$$

ہو۔ اس مساوات سے

$$(13.37) \quad \theta_i = \theta_r$$

اور

$$(13.38) \quad \sin \theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔ مساوات 13.35 میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$(13.39) \quad 1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tau_{\parallel}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔ اس طرح

$$-a_z \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_i + 0 \cos \theta_i)} + a_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x \sin \theta_r - 0 \cos \theta_r)} = -a_z \tau_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x \sin \theta_t + 0 \cos \theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin \theta_i} - \Gamma_{\parallel} e^{j\beta_1 x \sin \theta_r} = \tau_{\parallel} \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$(13.40) \quad 1 - \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 حل کرتے ہوئے

$$(13.41) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$(13.42) \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب  $\Gamma_{\parallel} = -1$  حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر  $\Gamma_{\parallel} = 0$  حاصل ہو لہذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔ اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ<sup>14</sup> کہتے ہیں۔ مساوات 13.42 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$(13.43) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔ عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔ عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہذا انحرافی موج غیر قطبی ہو گی۔ زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت<sup>16</sup> بھی کہتے ہیں۔

مثال 13.3: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔ زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔ پانی کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_r = 80$  لیں۔

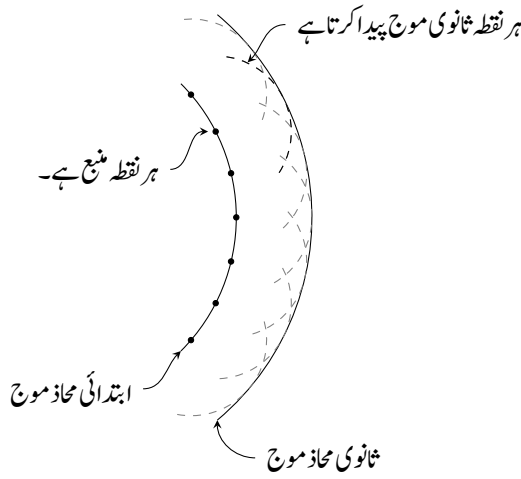
حل:

$$(13.44) \quad \theta_{i, \text{بریوسٹر}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ$$

<sup>14</sup>Brewster angle

<sup>15</sup> یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

<sup>16</sup>polarizing angle



شکل 13.5: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

مشق 13.1: شکل 13.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس  $\Gamma_{\parallel}$  حاصل کریں۔ چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ  $\Gamma_{\parallel}$  کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہوگی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{E}_{sr} = (\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_y) \Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

$$\mathbf{H}_{sr} = -\mathbf{a}_z \Gamma_{\parallel} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin \theta_r - y \cos \theta_r)}$$

شرح انعکاس  $\frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$  حاصل ہو گا۔

## 13.2 ترسیم ہائی گن

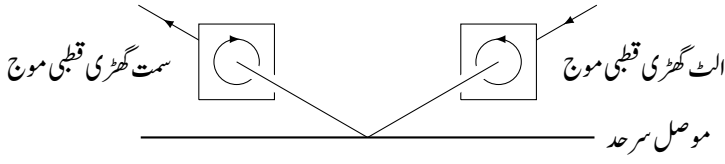
ہائی گن<sup>17</sup> کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل 13.5 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائے گئے ہیں۔ یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جاسکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انحراف کے زمرے میں آتا ہے۔

شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int dE \quad (13.45)$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدود پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان dE کے برابر ہے۔

$$dE = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)} dx \quad (13.46)$$



شکل 13.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

سے

$$(13.47) \quad E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^\infty e^{-j\beta \delta} dx$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $r \gg \delta$  ہو تب

$$(13.48) \quad \delta = \frac{x^2}{2r}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں  $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$  اور  $u = kx$  لیتے ہوئے

$$(13.49) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du$$

لکھا جاسکتا ہے جسے

$$(13.50) \quad E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left( \int_0^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} du \right)$$

لکھ سکتے ہیں۔

بائی گن  
بہتر بنائیں  
الٹ گھڑی  
گھڑی  
شکل پ  
ہے۔



## مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی<sup>1</sup> TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔ وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں مینوج<sup>2</sup> کہلاتے ہیں۔

دو لا محدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مینوج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نکلی مینوج تک بات بڑھائی جائے گی۔ ان مینوج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔ اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مینوج پر غور کیا جائے گا۔ آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

### 14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

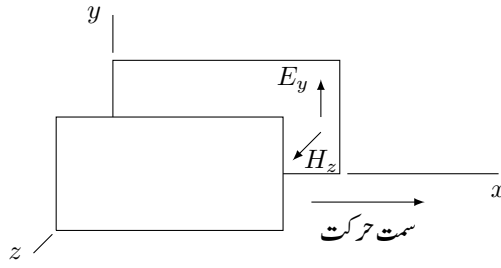
کم تعدد پر برقی دباؤ، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاؤٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔ یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباؤ لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جاسکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نکلی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔ کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔ البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نکلی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد ( $10^{16}$  Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

<sup>1</sup>transverse electromagnetic, TEM  
<sup>2</sup>waveguide





شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہوگی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد<sup>3</sup> کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پونٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے تاکہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباؤ اور برقی رواں منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

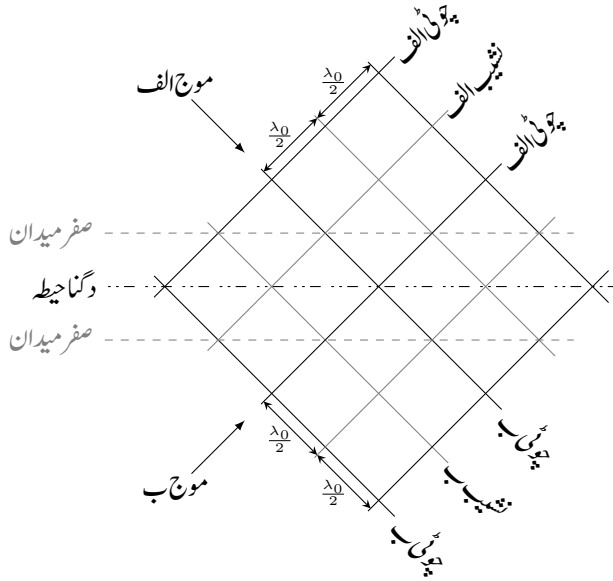
## 14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو  $y$  سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز<sup>4</sup> کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے موج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر  $y$  سمتی ہے جبکہ سمت حرکت  $x$  ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہذا اس انداز کو عرضی برقی انداز<sup>5</sup> (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہوگا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

low cutoff frequency<sup>3</sup>  
higher order mode<sup>4</sup>  
transverse electric mode, TE mode<sup>5</sup>



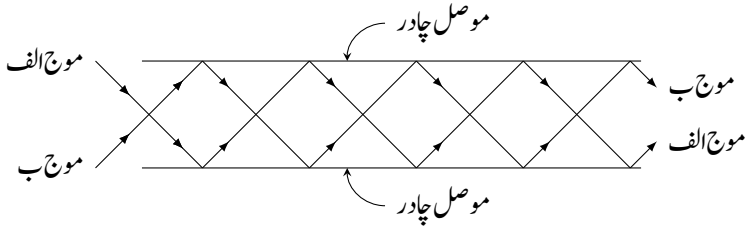
شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ  $\frac{\lambda_0}{2}$  کے برابر ہے۔

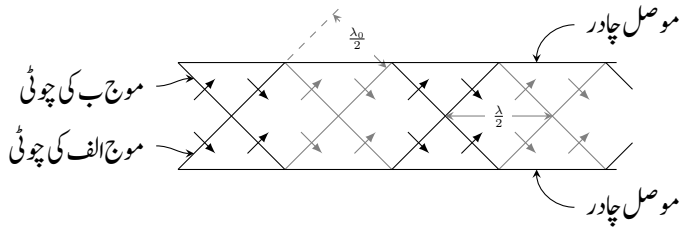
جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطے دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جاسکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں موج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور موج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو بہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر  $E$  کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

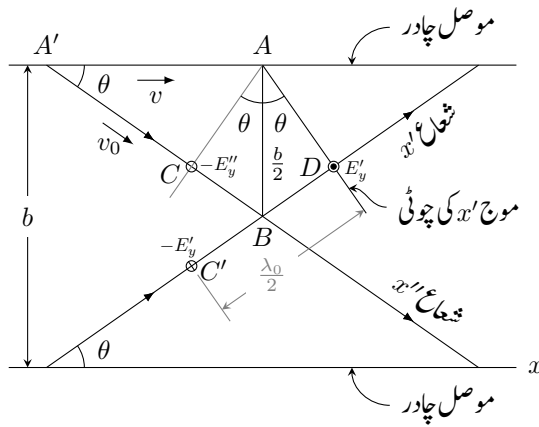
اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ موج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول<sup>6</sup> پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور موج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے موج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو  $x'$  اور  $x''$  سمت میں گامزن ہیں۔ دونوں جزو موصل چادر یعنی  $x$  محدود کے ساتھ  $\theta$  زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی  $y$  محدود کی سمت میں ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ  $b$  ہے۔ نقطہ  $D$  پر موج  $x'$  کی چوٹی ہے لہذا یہاں برقی میدان  $E_y$  مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر  $AD$  لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ  $C$  پر موج  $x''$  کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر  $AC$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ  $A$  پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔ اس نقطے کو شکل میں  $B$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں موج  $x''$  کا نشیب  $C$  پر جبکہ اس کی چوٹی  $B$  پر ہے۔ اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔ اسی طرح  $BD$  اور  $C'B$  بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$(14.1) \quad BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج  $\lambda_0$  ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔ موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$(14.2) \quad BC = \frac{n\lambda_0}{4}$$

ہے جہاں  $n = 1, 2, 3, \dots$  ہو سکتے ہیں۔ جفت  $n$  کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق  $n$  کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔ شکل 14.5 میں متکون  $ABC$  سے

$$AB \sin \theta = \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$(14.3) \quad \lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی  $BC$  کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔ اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج  $\lambda_{0c}$  کی قیمت  $\sin \theta = 1$  یعنی  $\theta = 90^\circ$  پر

$$(14.4) \quad \lambda_{0c} = \frac{2b}{n}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے  $n$  کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انتظامی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔ جب  $n = 1$  ہو تب

$$(14.5) \quad \lambda_{0c} = 2b$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم تردد رے کی TE موج کا انتظامی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

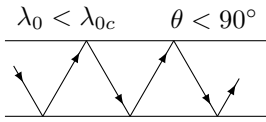
$n = 1$  کو بلند درجی TE امواج کا کم تردد رے کہا جاتا ہے۔  $n = 2$  اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انتظامی طول

$$(14.6) \quad \lambda_{0c} = b$$

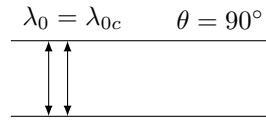
ہو گا۔ یوں  $n = 2$  درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصلہ موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔ اسی طرح  $n = 3$  کے لئے  $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$  حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

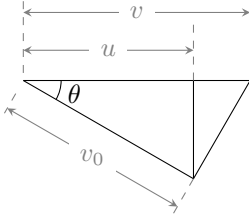
$$(14.7) \quad \lambda_0 = \lambda_{0c} \sin \theta$$



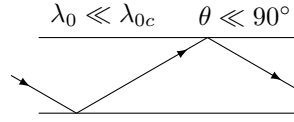
(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(c) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$(14.8) \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ  $\theta = 90^\circ$  حاصل ہوتا ہے۔ اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین،  $x$  تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔ یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو  $x$  سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔ اگر طول موج  $\lambda_0$  انقطاعی طول موج  $\lambda_{0c}$  سے قدر کم ہو تب  $\theta$  کی قیمت  $90^\circ$  سے کم ہوگی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان  $x$  سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔ آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار  $v_0$  لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$(14.9) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

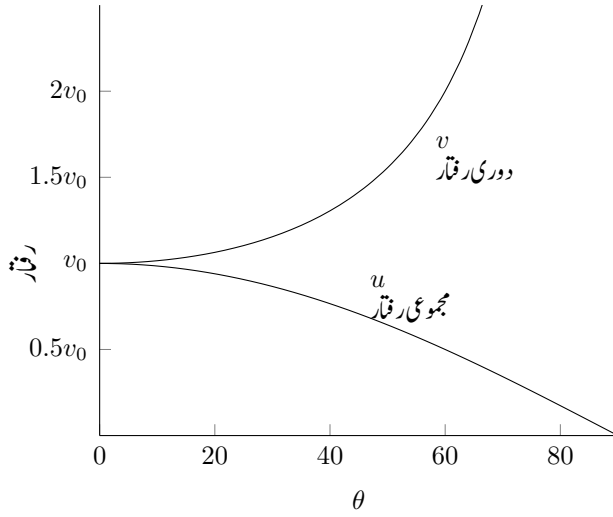
ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل  $\mu$  اور اس کا برقی مستقل  $\epsilon$  ہیں۔ شکل 14.6-د میں TE موج کی  $x$  سمت میں دوری رفتار  $v$  ہے۔ TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور ذاتی نقطہ اس رفتار سے  $x$  سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

$$(14.10) \quad \frac{v_0}{v} = \cos \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(14.11) \quad v = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon \cos \theta}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ عین  $\lambda_{0c}$  پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے  $\theta$  کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہوگی حتیٰ کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت  $v_0$  کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار<sup>8</sup> سے ہوتی ہے جسے شکل میں  $u$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos \theta \quad (14.12)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہذا اس کی قیمت  $v_0$  سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \quad (14.13)$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہذا مساوات 14.11 کو

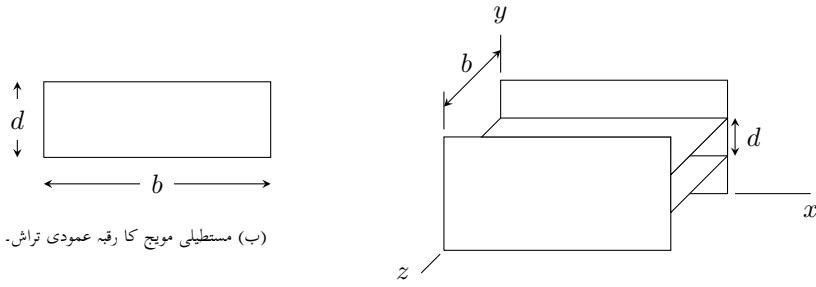
$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول  $\lambda$  اور آزاد موج کے طول  $\lambda_0$  کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے  $\theta$  کی قیمت  $90^\circ$  کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔



(ا) لامحدود متوازی چادر موج سے مستطیلی موج کا حصول۔

شکل 14.8: مستطیلی موج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت<sup>9</sup> کے چادروں پر مبنی موج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی موج عموماً گھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ  $b$  ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی موج بننا دکھایا گیا ہے جہاں  $d$  فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل موج کے لئے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی  $d$  لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل موج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

### 14.3 کھوکھلا مستطیلی موج

مستطیل موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدود میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جاسکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی موج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ موج کو  $x$  محدود رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان  $E$  کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی  $TE^{10}$  موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی  $TM^{11}$  موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں  $E_x = 0$  ہوگا لہذا ایسی صورت میں  $H_x$  صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر  $H_x$  بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہوگی ناکہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو  $H_x$  کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے  $H_x$  کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل  $H_x$  کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے  $E_y$ ،  $E_z$ ،  $H_y$  اور  $H_z$  حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی موج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

<sup>9</sup> حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔  
transverse electric,  $TE^{10}$   
transverse magnetic,  $TM^{11}$

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
  - موج کو وقت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کا پابند بنائیں۔
  - موج کو  $x$  سمت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کے لئے حرکتی مستقل بروئے کار لائیں۔
  - بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے  $E_x = 0$  اور  $H_x \neq 0$  رکھیں گے۔
  - بقایا چار اجزاء یعنی  $E_y, E_z, H_y$  اور  $H_z$  کے مساوات  $H_x$  کی صورت میں لکھیں۔
  - موج کی مساوات  $H_x$  کی صورت میں حاصل کریں۔
  - مستطیلی موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو  $H_x$  کے لئے حل کریں۔
  - $E_y, E_z, H_y$  اور  $H_z$  کے مساوات میں حاصل  $H_x$  پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔
- ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$(14.14) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(14.15) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کارتیسی محدود میں

$$(14.16) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.17) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.18) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

اور

$$(14.19) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.20) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.21) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

لکھے جائیں گے جہاں  $B = \mu H$  اور  $D = \epsilon E$  کا استعمال کیا گیا ہے۔ اسی طرح خالی خلاء میں  $\rho_h = 0$  لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

کارتیسی محدود میں

$$(14.22) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.23) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$



لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج  $x$  فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ  $x$  سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔ یوں  $E_y$  اور  $H_x$  کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \quad (14.24)$$

لکھے جائیں گے جہاں

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{حرکی مستقل} = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \text{تضعیفی مستقل} \\ \beta &= \text{زاویائی مستقل} \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.16

$$\left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x \right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \quad (14.25)$$

لکھا جائے۔ اسی طرح مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.17 تا مساوات 14.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \quad (14.26)$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \quad (14.27)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0 \quad (14.28)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0 \quad (14.29)$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0 \quad (14.30)$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (14.31)$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (14.32)$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں تریسلی تار کے برقی رکاوٹ  $Z$  اور برقی فراوانی  $Y$  کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/\text{m}) \quad (14.33)$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (\text{S}/\text{m}) \quad (14.34)$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$(14.35) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.36) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.37) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0$$

$$(14.38) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0$$

$$(14.39) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.40) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.41) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.42) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

یہ  $x$  سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ  $E_x = 0$  لیا جائے گا۔ ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$(14.43) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.44) \quad \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.45) \quad -\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$(14.46) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$(14.47) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.48) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.49) \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.50) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو  $H_x$  کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.44 اور 14.45 سے

$$(14.51) \quad \frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma}$$

لکھتے ہیں۔ اب  $\frac{E_y}{H_z}$  یا  $\frac{E_z}{H_y}$  کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔ چونکہ مساوات 14.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ  $Z_{yz}$ <sup>12</sup> کہا جائے گا جہاں

$$(14.52) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (\Omega)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.52 کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے  $H_y$  کے لئے حل کرنے سے

$$(14.53) \quad H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.52 کو مساوات 14.47 میں پر کرتے ہوئے  $H_z$  کے لئے حل کرنے سے

$$(14.54) \quad H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب مساوات 14.53 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.55) \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

اور مساوات 14.54 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.56) \quad E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 تمام اجزاء کو  $H_x$  کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.53 کا  $y$  کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.54 کا  $z$  کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma (\gamma - YZ_{yz}) H_x = 0$$

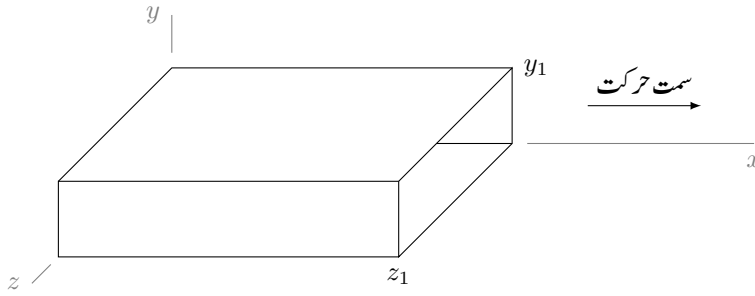
حاصل کرتے ہیں جس میں

$$(14.57) \quad k^2 = \gamma (\gamma - YZ_{yz})$$

پر کرتے ہوئے

$$(14.58) \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.58 موج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔ موج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔



شکل 14.9: مستطیل موج۔

ساتویں قدم میں موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔ شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی  $z_1$  اور اونچائی  $y_1$  ہے۔ موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا موج کے اطراف پر متوازی  $E$  صفر ہو گا۔ یوں موج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر  $E_z = 0$  ہو گا۔ اسی طرح موج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر  $E_y = 0$  ہو گا۔ اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.58 کا حل درکار ہے۔ علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں  $H_x$  کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \quad (14.59)$$

جہاں  $Y$  ایسا متغیر ہے جو صرف  $y$  پر منحصر ہے جبکہ  $Z$  ایسا متغیر ہے جو صرف  $z$  پر منحصر ہے۔ اصل میں ان متغیرات کو  $Y(y)$  اور  $Z(z)$  لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں  $Y$  اور  $Z$  ہی لکھا جائے گا۔ مساوات 14.59 کے استعمال سے مساوات 14.58

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \quad (14.60)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ دونوں اطراف کو  $YZ$  سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \quad (14.61)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف  $y$  پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف  $z$  پر منحصر ہے۔ یوں  $y$  کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔ اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں  $y$  کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو ناقابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم  $A_1$  - لکھتے ہیں۔ اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم  $A_2$  - لکھتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \quad (14.62)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \quad (14.63)$$

ہوں گے لہذا مساوات 14.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \quad (14.64)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.62 اور مساوات 14.63 ایک متغیرہ پر بنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔ مساوات 14.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \quad (14.65)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $m_1$ ،  $c_2$  اور  $b_1$  مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.65 کو واپس مساوات 14.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 14.62 کا حل

$$(14.66) \quad Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y$$

ہے۔ اسی طرح مساوات 14.63 کا حل

$$(14.67) \quad Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z$$

ہے۔ ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.59 کو

$$(14.68) \quad H_x = \left( c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \right) \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسے مساوات 14.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left( -c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y \right) \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر  $y = 0$  پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق،  $E_z = 0$  ہو گا لہذا  $y = 0$  پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

یعنی

$$(14.69) \quad c_2 = 0$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر  $y = y_1$  پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباؤ صفر کے برابر ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں  $y_1$  پر  $E_z = 0$  پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا ایک ممکنہ حل  $c_1$  مساوی صفر ہے جس سے  $H_x = 0$  حاصل ہو گا۔ اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے ناکہ ہر قسم کے میدان سے خالی موج سے، لہذا ہم

$$(14.70) \quad c_1 \neq 0$$

لیتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$(14.71) \quad \sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ یوں

$$(14.72) \quad H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left( c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

ہو گا۔ اس مساوات کو مساوات 14.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left( -c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر  $z = 0$  پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ  $c_1 \neq 0$  ہے لہذا

$$(14.73) \quad c_4 = 0$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بائیں کھڑا چادر  $z = z_1$  پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت  $E_y$  ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب  $c_1 \neq 0$  اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل  $c_3$  برابر صفر ہے جس سے  $H_x$  کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$(14.74) \quad c_3 \neq 0$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$(14.75) \quad \sqrt{A_2} z_1 = m\pi$$

یعنی

$$(14.76) \quad \sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $m = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ یوں  $c_1 c_3 = H_0$  لکھتے ہوئے

$$(14.77) \quad H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت  $t$  اور  $x$  سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہذا

$$(14.78) \quad H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں  $H_x$  کو مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$(14.79) \quad H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.80) \quad H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.81) \quad E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.82) \quad E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

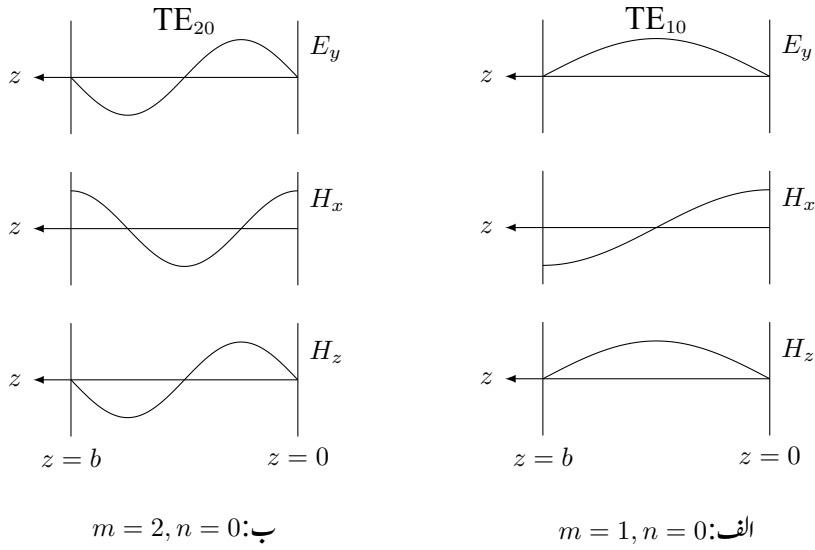
$$(14.83) \quad E_x = 0$$

جہاں آخر میں  $E_x = 0$  بھی شامل کیا گیا ہے۔ مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔ یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی موج میں  $m$  اور  $n$  مستقل پر غور کریں۔ اگر  $m = 1$  اور  $n = 0$  ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں  $H_y, E_z$  اور  $E_x$  صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ یوں موج میں صرف  $H_x, H_z$  اور  $E_y$  میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی  $z = 0$  پر  $E_y = 0$  پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان  $z = \frac{z_1}{2}$  پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 14.10-الف میں پہلا خط  $E_y$  ہی ہے۔ اگر  $H_x$  کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی  $z = 0$  پر  $H_x$  کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی  $z = z_1$  پر  $H_x$  کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان  $z = \frac{z_1}{2}$  پر  $H_x = 0$  پایا جاتا ہے۔ شکل 14.10-الف میں دوسرا خط  $H_x$  ہے۔ مقناطیسی میدان  $H_z$  بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں  $m = 1$  اور  $n = 0$  کی صورت میں میدان  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ  $y$  کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ  $z$  پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$  اور  $n = 0$  کی صورت میں میدان شکل 14.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔ اب بھی میدان  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ  $y$  کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ  $z$  پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $m$  کی قیمت  $z$  پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ  $n$  بالکل اسی طرح  $y$  پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو  $m$  اور  $n$  سے پہچانا جاتا ہے۔ یوں شکل 14.10-الف کے امواج  $TE_{10}$  جبکہ شکل 14.10-ب کے امواج  $TE_{20}$  کہلاتے ہیں۔ یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج  $TE_{mn}$  کہلائے گی جہاں  $z$  پر آدھے چکروں کی تعداد  $m$  ہے جبکہ  $y$  پر آدھے چکروں کی تعداد  $n$  ہے۔ مستطیلی موج میں عموماً  $z$  سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مقناطیسی امواج  $TM_{mn}$  کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

#### 14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE<sub>10</sub> موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں  $m = 1$  اور  $n = 0$  پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE<sub>10</sub> امواج حاصل ہوتے ہیں۔

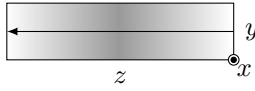
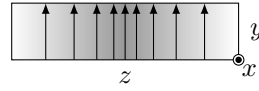
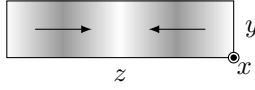
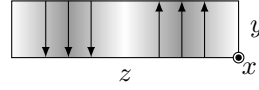
$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.84}$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی  $E_x = 0$ ، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ ان امواج کو شکل 14.10-الف میں  $t = 0$  اور  $x = 0$  کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں میدان بالقابل  $z$  دکھایا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی  $y$  پر منحصر نہیں ہے لہذا  $y$  کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔ TE<sub>10</sub> تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہذا اس کی انقطاعی تعداد سب سے کم ہے۔ شکل 14.11 میں  $E_y$  اور  $H_z$  کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں  $z = \frac{z_1}{2}$  پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE<sub>20</sub> موج:

شکل 14.11 میں TE<sub>20</sub> کے  $E_y$  اور  $H_z$  اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔



TE<sub>10</sub> کا  $H_z$  میدان۔TE<sub>10</sub> کا  $E_y$  میدان۔TE<sub>20</sub> کا  $H_z$  میدان۔TE<sub>20</sub> کا  $E_y$  میدان۔

شکل 14.11: TE<sub>10</sub> اور TE<sub>20</sub> کے  $E_y$  اور  $H_z$  میدان۔

بلند درجی TE<sub>11</sub> موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں  $m = 1$  اور  $n = 1$  پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE<sub>11</sub> امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.85}$$

اس بلند درجی انداز میں صرف  $E_x$  ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موج میں پائے جاسکتے ہیں۔ حقیقت میں کسی بھی موج میں پائے جانے والے امواج کا دار و مدار موج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موج میں ناہمواریوں پر ہے۔ کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.64، مساوات 14.71 اور مساوات 14.76 کو ملا کر

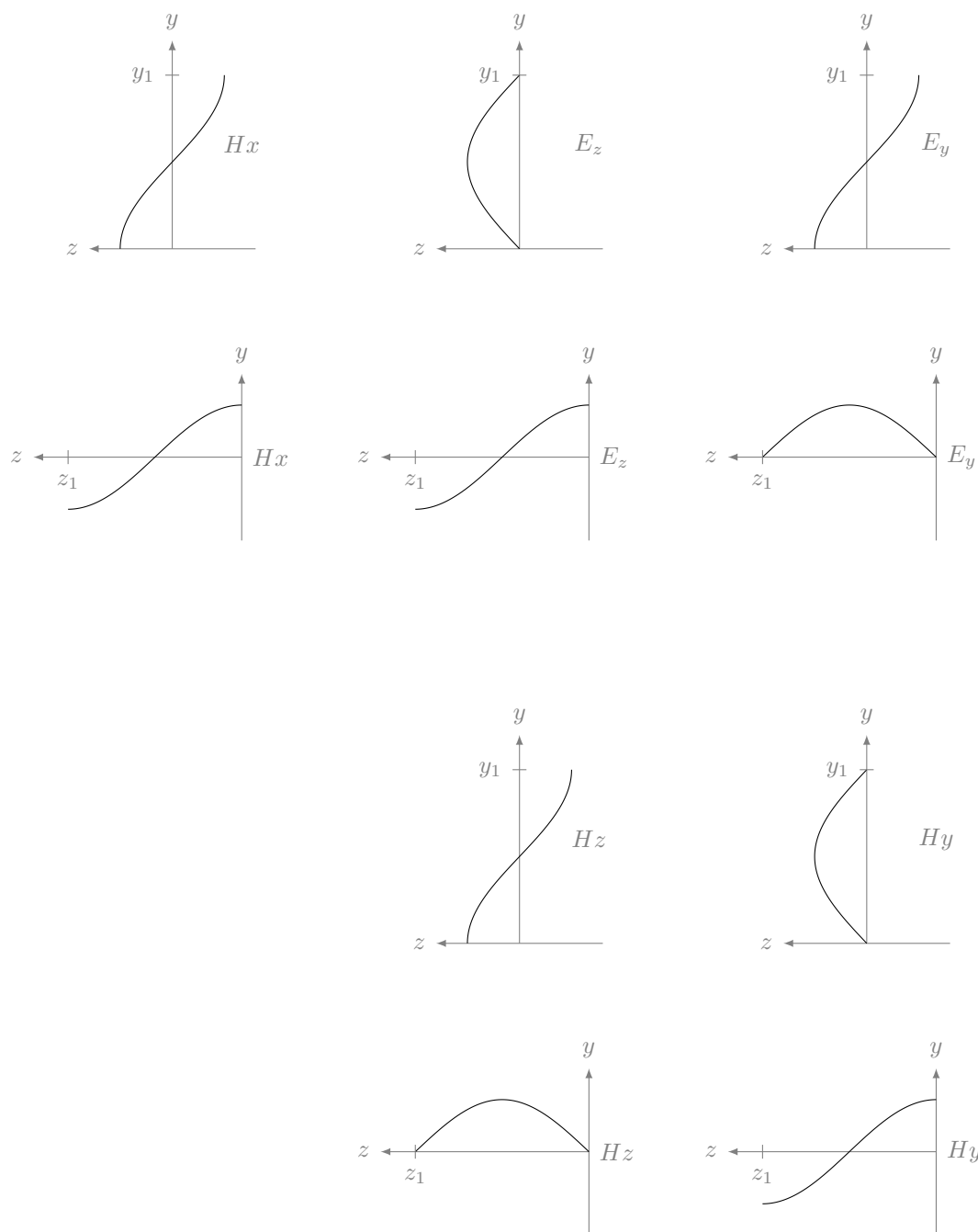
$$k^2 = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 \tag{14.86}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 14.33، مساوات 14.52 اور مساوات 14.57 سے

$$k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{14.87}$$

کے برابر ہے۔ بے ضیاع ذو برق میں  $\sigma = 0$  لیا جاسکتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.88}$$



شکل 14.12: TE<sub>11</sub> میدان.

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہذا  $\gamma$  حقیقی ہو گا۔ حقیقی  $\gamma$  کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر  $\gamma$  خیالی عدد ہو گا لہذا موج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر  $\gamma = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اس تعدد کو انقطاعی تعدد<sup>13</sup> کہتے ہیں۔ انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہذا یہ موج میں صفر نہیں کر پاتے۔ ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• کم تعدد یعنی کم  $\omega$  پر  $\gamma$  حقیقی ہوتا ہے۔ موج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔

• مخصوص درمیانی تعدد پر  $\gamma = 0$  ہوتا ہے۔ یہ انقطاعی تعدد ہے۔

• زیادہ تعدد پر  $\gamma$  خیالی ہوتا ہے۔ موج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.88 میں  $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$  درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل  $\beta_0$  ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو موج میں پایا جاتا ہے۔ یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \quad (14.89)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔ یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر  $k > \beta_0$  ہو گا لہذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \quad (14.90)$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{موج میں زاویائی مستقل}$$

$$\lambda \quad \text{موج میں طول موج}$$

ہیں۔ کافی بلند تعدد پر  $k \gg \beta_0$  ہو گا اور یوں موج کے زاویائی مستقل  $\beta$  کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل  $\beta_0$  کے قیمت کے قریب ہو گی۔ اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر  $k < \beta_0$  ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \quad (14.91)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $\alpha$  تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر  $k \ll \beta_0$  ہو گا لہذا تضعیفی مستقل کی قیمت  $k$  کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر  $\beta_0 = k$  ہو گا لہذا  $\gamma = 0$  ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$(14.92) \quad \omega^2 \mu \epsilon = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد<sup>14</sup>

$$(14.93) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left( \frac{n}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m}{z_1} \right)^2} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(14.94) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left( \frac{n}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m}{z_1} \right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{m})$$

یا

$$(14.95) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں  $\lambda_{0c}$  لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج<sup>15</sup> پکارا جاتا ہے۔ مساوات 14.93 اور مساوات 14.94 سے کھوکھلے مستطیلی موج کے کسی بھی  $\text{TE}_{mn}$  موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر  $\text{TE}_{10}$  موج کا انقطاعی طول موج

$$(14.96) \quad \lambda_{0c} = 2z_1$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں  $z_1 = b$  کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد ( $\beta_0 > k$ ) پر

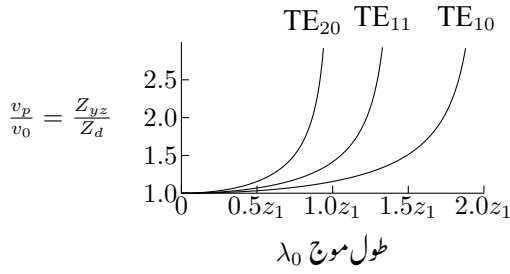
$$(14.97) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2}$$

کے برابر ہے۔ اب  $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  اور مساوات 14.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(14.98) \quad \beta = \sqrt{\left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \right)^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \right)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موج میں طول موج

$$(14.99) \quad \lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \right)^2}}$$



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی موج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج  $\lambda_0$ .

اور موج میں دوری رفتار  $v_p$ <sup>16</sup>

$$(14.100) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}}$$

یا

$$(14.101) \quad v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{لامحدود خطے میں دوری رفتار}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج  $\lambda_0$  دکھائے گئے ہیں۔ دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار  $v_0$  کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں مستطیلی موج کے دونوں اطراف برابر لمبائی ( $y_1 = z_1$ ) کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجزیے میں موج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔ اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موج میں صفر کرتے ہیں۔ حقیقت میں موج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے  $\gamma = \alpha + j\beta$  ہو گا لہذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے موج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ ایسے موج میں طاقت کا ضیاع صرف موج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔ موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب ہے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان  $E_m$  صفر نہیں ہو گا۔ اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں  $E_m$  کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی موج کے طول موج  $\lambda$ ، زاویائی مستقل  $\beta$  یا دوری رفتار  $v_p$  حاصل کرتے وقت موج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تضعیفی مستقل  $\alpha$  کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موج میں عرضی برقی موج کی رکاؤٹ  $Z_{yz}$  مساوات 14.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.102) \quad Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر  $\gamma = j\beta$  ہوتا ہے لہذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\Omega) \quad (14.103)$$

ہو گا جہاں

$$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{موتج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ ہوا کے لئے  $Z_z = 120\pi = 376.7 \Omega$  کے برابر ہے۔ چونکہ  $Z_{yz}$  اور  $Z_z$  کی شرح بالکل  $v_p$  اور  $v_0$  کی شرح کے برابر ہے لہذا شکل 14.13

$$\frac{Z_{yz}}{Z_z} \quad \text{بالمقابل } \lambda_0 \text{ بھی دیتا ہے۔}$$

مشق 14.1:  $TE_{10}$ ،  $TE_{20}$  اور  $TE_{11}$  امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی موتج کے لئے حاصل کریں۔

• ہوا سے بھرا موتج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔

• ہوا سے بھرا موتج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا موتج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا موتج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی  $TM_{mn}$  موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 364 پر بتلائے گئے۔ انہیں آٹھ قدم سے شکل 14.9 کے مستطیلی موتج میں عرضی مقناطیسی موج  $TM_{mn}$  بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں  $H_x = 0$  فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔  $TM_{mn}$  موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں  $H_x = 0$  ہو۔ آئیں  $TM_{mn}$  حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہذا مساوات 14.14 تا مساوات 14.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔ چوتھے قدم میں  $H_x = 0$  پر کرنے سے

$$(14.104) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(14.105) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0$$

$$(14.106) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0$$

$$(14.107) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0$$

$$(14.108) \quad \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$(14.109) \quad -\gamma H_y - Y E_z = 0$$

$$(14.110) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.111) \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.108 اور مساوات 14.109 سے

$$(14.112) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔ اگرچہ دونوں جگہ  $Z_{yz}$  کی تعریف  $\frac{E_y}{H_z}$  ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔ یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ  $TM_{mn}$  موج کی رکاوٹ  $TE_{mn}$  کے رکاوٹ سے مختلف ہوگی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان  $E_x$  کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔ مساوات 14.112 کو مساوات 14.105 میں پر کرتے ہوئے  $H_y$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.113) \quad H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

اور اسی طرح مساوات 14.112 کو مساوات 14.106 میں پر کرتے ہوئے  $H_z$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.114) \quad H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان دو مساوات اور مساوات 14.112 سے

$$(14.115) \quad E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$(14.116) \quad E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں  $E_x$  کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 14.115 کا  $y$  کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.116 کا  $z$  کے ساتھ تفرق مساوات 14.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ)E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(14.117) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(14.118) \quad k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma \left( \gamma + \frac{Z}{Z_{yz}} \right)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM<sub>mn</sub> اور TE<sub>mn</sub> امواج کے  $k^2$  مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 14.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$(14.119) \quad k^2 = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

اور میدان

$$(14.120) \quad E_x = E_0 \sin \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 14.113 تا مساوات 14.116 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.121) \quad H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.122) \quad H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.123) \quad E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.124) \quad E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان جوابات کے ساتھ

$$(14.125) \quad H_x = 0 \quad \text{TM}_{mn} \text{ موج ہونے کا شرط}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.120 تا مساوات 14.125 کے TM<sub>mn</sub> امواج میں  $m$  یا  $n$  صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہذا TM<sub>mn</sub> کا کم سے کم تعددی موج TM<sub>11</sub> ہے۔

بے ضیاع  $\sigma = 0$  ذو برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 14.118، مساوات 14.119 اور مساوات 14.33 سے

$$(14.126) \quad \gamma = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

$$= \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$$



لکھا جاسکتا ہے جہاں  $\omega \sqrt{\mu\epsilon}$  لا محدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل  $\beta_0$  ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں  $\beta_0 > k$  کی صورت میں  $\gamma = \alpha + j\beta$  سے

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} & (k > \beta_0) \\ \beta &= 0 \end{aligned} \quad (14.127)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔ اس کے برعکس  $k < \beta_0$  کی صورت میں

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} & (k < \beta_0) \end{aligned} \quad (14.128)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں موج، بغیر گھٹے موج میں صفر کرے گی۔ انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں  $\gamma$  کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔ مساوات 14.126 میں  $\gamma = 0$  پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2 \mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \quad (14.129)$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \quad (14.130)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \quad (14.131)$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \quad (14.132)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $TM_{mn}$  اور  $TE_{mn}$  امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہو بہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد  $k > \beta_0$  کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \quad (14.133)$$

ہو گا جس سے موج میں طول موج

$$\lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (14.134)$$

اور موج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \quad (14.135)$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{لامحدود خطے میں دوری رفتار}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM<sub>mn</sub> اور TE<sub>mn</sub> کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو سکتے ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 14.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد  $\gamma = j\beta$  کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \quad (14.136)$$

ہو گا جہاں

$$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{موج کے ذوبرق کی قدرتی رکاوٹ}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 14.136 کا مساوات 14.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM<sub>mn</sub> اور TE<sub>mn</sub> امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔ اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو موج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 14.1 مستطیلی موج میں TE<sub>mn</sub> موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔  $Z_{yz}$  کے علاوہ یہی تعلق TM<sub>mn</sub> کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 14.1: مستطیلی موج میں TE<sub>mn</sub> امواج کے متغیرات کے تعلق۔

تعلق	اکائی	نام تفاعل
$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$	Hz	انقطاعی تعدد
$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$	m	انقطاعی طول موج
$\lambda_{\text{موج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	m	موج میں طول موج
$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	$\frac{m}{s}$	دوری رفتار
$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$	$\Omega$	عرضی موج کی رکاوٹ

## 14.5 کھوکھلی نالی موئیج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس  $\rho$  ہو کے مسائل نکلی محدود میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہذا ایسے موتج میں  $TE_{mn}$  یا  $TM_{mn}$  امواج حاصل کرنے کی خاطر نکلی محدود ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 364 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نکلی موتج  $z$  محدود پر رکھا گیا ہے لہذا اس میں امواج  $z$  جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو نکلی محدود میں لکھ کر

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right] a_\rho + \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) a_\phi + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] a_z$$

$$= -\mu \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial t} a_\rho + \frac{\partial H_\phi}{\partial t} a_\phi + \frac{\partial H_z}{\partial t} a_z \right)$$

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] a_\rho + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) a_\phi + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] a_z$$

$$= \sigma (E_\rho a_\rho + E_\phi a_\phi + E_z a_z) + \epsilon \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial t} a_\rho + \frac{\partial E_\phi}{\partial t} a_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial t} a_z \right)$$

محدودی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$(14.137) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\rho}{\partial t}$$

$$(14.138) \quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t}$$

$$(14.139) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$(14.140) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \sigma E_\rho + \epsilon \frac{\partial E_\rho}{\partial t}$$

$$(14.141) \quad \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \sigma E_\phi + \epsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t}$$

$$(14.142) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = \sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ چارج سے خالی  $\rho_h = 0$  خطے میں پھیلاؤ کے دو مساوات

$$(14.143) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.144) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 14.137 تا مساوات 14.144 کو وقت کے ساتھ اور  $z$  فاصلے کے ساتھ سائنز نا تعلق کا پابند ( $E_\phi = E_1 e^{j\omega t - \gamma z}$ ) بتاتے ہوئے

$$(14.145) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0$$

$$(14.146) \quad -\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - Z H_\phi = 0$$

$$(14.147) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0$$

$$(14.148) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0$$

$$(14.149) \quad -\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0$$

$$(14.150) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - Y E_z = 0$$

$$(14.151) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.152) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/m) \quad \text{سلسلہ وار رکاوٹ}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (S/m) \quad \text{متوازی فراوانی}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \text{حرکی مستقل}$$

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم  $TE_{mn}$  منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں  $E_z = 0$  ہو گا جس سے

$$(14.153) \quad \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0$$

$$(14.154) \quad -\gamma E_\rho - Z H_\phi = 0$$

$$(14.155) \quad \frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0$$

$$(14.156) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0$$

$$(14.157) \quad -\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0$$

$$(14.158) \quad \frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0$$

$$(14.159) \quad \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$(14.160) \quad \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 14.147 میں  $\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}$  تفرق کو کھول کر  $E_\phi + \rho \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$  لکھا گیا ہے۔ ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو  $H_z$  کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 14.153 اور مساوات 14.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ  $Z_{\rho\phi}$

$$(14.161) \quad Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 14.161 سے  $E_\rho$  مساوات 14.156 میں پر کرتے ہوئے  $H_\phi$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.162) \quad H_\phi = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.161 سے  $E_\phi$  مساوات 14.157 میں پر کرتے ہوئے  $H_\rho$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.163) \quad H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 14.161 سے

$$(14.164) \quad E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$(14.165) \quad E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ یہ مساوات تمام میدان کو  $H_z$  کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 14.164 کا  $\phi$  تفرق، مساوات 14.165 کا  $\rho$  تفرق اور مساوات 14.165 کو مساوات 14.155 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.166) \quad \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس میں

$$(14.167) \quad \frac{Z(\gamma - YZ_{\rho\phi})}{Z_{\rho\phi}} = -k^2$$

یعنی

$$(14.168) \quad k^2 = \gamma^2 + YZ$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$(14.169) \quad \rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$(14.170) \quad H_z(\rho, \phi) = M(\rho)N(\phi)$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 M N = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو  $MN$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بائیں ہاتھ کا متغیر  $\rho$  ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیر  $\phi$  ہے۔ یوں دونوں اطراف کو مستقل  $n^2$  کے برابر پر کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(14.171) \quad \frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2$$

$$(14.172) \quad -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2$$

مندرجہ بالا میں نجلی مساوات کا حل

$$(14.173) \quad N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi$$

ہے جہاں  $c_1$  اور  $c_2$  مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 14.171 کو

$$(14.174) \quad \rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جو بیسل مساوات<sup>17</sup> کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$(14.175) \quad M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho)$$

لکھا جاتا ہے جہاں  $c_3$  اور  $c_4$  مساوات کے مستقل ہیں۔

یوں مساوات 14.170 سے

$$(14.176) \quad H_z = [c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho)] (c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi)$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

کائنات میں کہیں پر بھی لا محدود میدان نہیں پایا جاتا لہذا نکلی مویج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہوگی۔ اس کے علاوہ موصل نکلی سطح پر برقی میدان صفر ہوگا، یعنی  $(E_\phi(\rho_0) = 0)$ ، جہاں نکلی کا رداس  $\rho_0$  کے برابر ہے۔

پہلے شرط کے تحت نکلی محدود میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن  $\rho = 0$  پر  $Y_n \rightarrow \infty$  کی قیمت لا محدود ہوتی ہے لہذا مساوات 14.176 میں

$$(14.177) \quad c_4 = 0$$

ہو گا۔ اگر  $c_2 = 0$  ہو تب میدان کی چوٹی  $\phi = 0^\circ$  پر ہوگی اور اگر  $c_1 = 0$  ہو تب میدان کی چوٹی  $\phi = 90^\circ$  پر ہوگی۔ کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔ یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) \quad (14.178)$$

ہو گا جہاں  $c_1 c_3 = H_0$  لکھا گیا ہے۔ اب چونکہ  $\phi = 0$  اور  $\phi = 2\pi$  ریڈین تکلی موج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔ یوں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $n = 1$  کی صورت میں نکلی میں  $\phi = 0$  تا  $\phi = 2\pi$  یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے  $H_z$  کی موج بوجہ  $\cos n\phi$  کے ایک چکر کاٹے گا۔ اسی طرح  $n = 2$  کی صورت میں نکلی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔ یوں نکلی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد  $n$  دیتا ہے۔

نکلی موج میں موج کی مساوات

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14.179)$$

ہوگی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نمائندگی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ اس کو مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \quad (14.180)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نکلی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہذا مساوات 14.180 میں  $E_\rho = 0$  پر کرتے ہوئے

$$\left. \frac{dJ_n(k\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} = 0 \quad (14.181)$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0 = \alpha'_{nm} \quad (14.182)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $\alpha'_{nm}$  بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{dJ_n(\alpha'_{nm})}{d\rho} = 0 \quad (14.183)$$

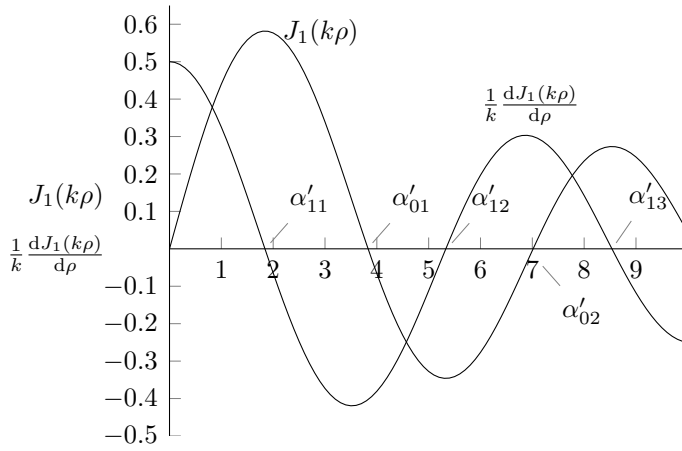
مساوات 14.182 سے حاصل  $k$  کو  $k'_{nm}$  لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm} = \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.184)$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \quad (14.185)$$



شکل 14.14: بیسل تفاعل۔

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 14.162 تا مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$(14.186) \quad H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(14.187) \quad H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k'_{nm}\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(14.188) \quad E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(14.189) \quad E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{dJ_n(k'_{nm}\rho)}{d\rho} e^{j\omega t - \gamma z}$$

$$(14.190) \quad E_z = 0$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں  $E_z$  بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں  $k'_{nm}$  کو سمجھیں۔ اگر  $n = 1$  ہو تب بیسل تفاعل  $J_1$  اور اس کا تفرق  $\frac{dJ_1}{d\rho}$  استعمال کئے جائیں گے۔  $\frac{dJ_1}{d\rho}$  کے پہلے تین صفر  $\alpha'_{11} = 1.84$ ،  $\alpha'_{12} = 5.33$  اور  $\alpha'_{13} = 8.54$  ہیں جو بالترتیب  $TE_{11}$ ،  $TE_{12}$  اور  $TE_{13}$  بلند عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 14.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح  $TE_{01}$  اور  $TE_{02}$  میں  $n = 0$  ہے جبکہ  $\alpha'_{01} = 3.832$  اور  $\alpha'_{02} = 7.016$  ہیں۔ بیسل تفاعل کے تفرق  $\frac{dJ_0}{d\rho}$  اور  $J_1$  کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔ شکل میں یوں  $\frac{dJ_0}{d\rho}$  کے صفر کو  $J_1$  کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کامل ذہن کی صورت میں  $\sigma = 0$  لیتے ہوئے مساوات 14.184 کو مساوات 14.168 میں پر کرنے سے

$$\left( \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \right)^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

یا

$$(14.191) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left( \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔



- کم تعدد پر حقیقی  $\gamma$  ہو گا لہذا موج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر  $\gamma = 0$  حاصل ہو گا۔ یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔
- بلند تعدد پر  $\gamma$  خیالی عدد ہو گا لہذا موج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 14.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$(14.192) \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k'_{nm}}{\rho_0} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(14.193) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں  $\text{TE}_{11}$  کے لئے  $\alpha'_{11} = 1.84$  سے  $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$  حاصل ہو گا۔  
انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر  $\gamma$  خیالی ہو گا لہذا اسے

$$(14.194) \quad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \quad (\text{rad/m})$$

لکھا جائے گا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر  $z$  سمت میں موج میں طول موج

$$(14.195) \quad \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

$\lambda_0$  موج کے ذوق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج  
 $\lambda_{0c}$  انقطاعی طول موج

ہیں۔ موج میں دوری رفتار  $v_p = f\lambda_g$

$$(14.196) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\text{m/s})$$

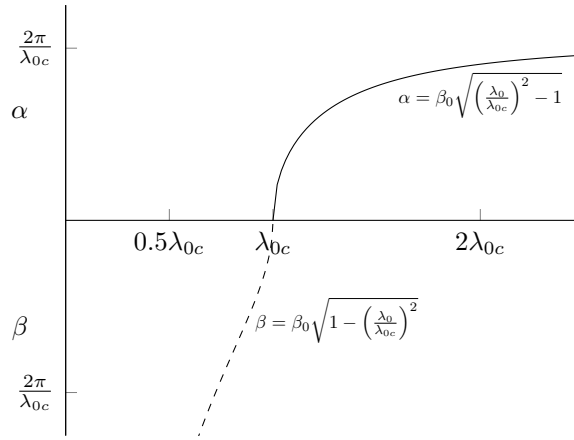
حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 14.195 اور مساوات 14.196 ہو بہو مستطیلی موج کے مساوات ہیں۔ یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہذا نکلی موج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔ اس کے برعکس مستطیلی موج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ نکلی موج میں  $\text{TE}_{11}$  تمام امواج، بشمول  $\text{TM}_{nm}$ ، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہذا اسے غالب<sup>18</sup> بلند درجی انداز کہتے ہیں۔  $\text{TE}_{01}$  بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہذا کم موصلیت کے چادر کی بنی موج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔



شکل 14.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

#### 14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔ آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔ مستطیلی موج میں مساوات 14.127

$$(14.197) \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2}$$

انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 14.131 کی مدد سے

$$(14.198) \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} = \beta_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} \quad (\text{Np/m})$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\lambda_0 \quad \text{لا محدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ مساوات 14.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد ( $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ) کی صورت میں مساوات 14.198 سے

$$(14.199) \quad \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \quad (\text{Np/m})$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.15 میں تضعیفی مستقل  $\alpha$  بالمقابل لا محدود خطے میں طول موج  $\lambda_0$  کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر  $\alpha = 0$  ہے۔

مثال 14.1: ایک موج کا انقطاعی طول موج  $\lambda_{0c} = 50 \text{ mm}$  ہے۔ اس موج میں  $\lambda_0 = 2 \text{ m}$  کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ  $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$  ہے لہذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68 \text{ Np/m}$$

ہوگا۔ یوں موج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

#### 14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا موج بے ضیاع ہوتا ہے لہذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر  $\alpha = 0$  ہوگا۔ مساوات 14.128 سے

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \quad (14.200)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.200 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔ شکل 14.15 میں نقطہ دار خط سے  $\beta$  دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر  $\beta = 0$  ہے۔

شکل 14.15 میں طول موج کو افقی محدود اور حرکی مستقل کو عمودی محدود پر رکھا گیا ہے۔ عین انقطاعی طول موج  $\lambda_{0c}$  پر  $\gamma = 0$  یعنی  $\alpha = 0$  اور  $\beta = 0$  ہیں۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر  $\alpha = 0$  رہتا ہے جبکہ  $\beta$  کی قیمت طول موج کم کرنے سے لامحدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر  $\beta = 0$  رہتا ہے جبکہ  $\alpha$  کی قیمت  $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$  تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی موج کامل نہیں ہوتے لہذا ان میں  $\alpha$  صفر نہیں ہوتا۔ بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے موج میں  $\alpha$  کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ  $\beta$  مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔ آئیں حقیقی موج میں  $\alpha$  کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathcal{P}_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} [E_s \times H_s^*]$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔ کسی بھی موج میں میدان، مثلاً صفحہ 374 پر مساوات 14.85، میں حرکت کرتے میدان  $e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$  خاصیت رکھتے ہیں۔ یوں  $Z = \frac{E}{H}$  لیتے ہوئے

$$(14.201) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{Z_h} e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2} Z_h |H|^2 e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $x = 0$  پر اوسط طاقت  $P_0$  کے برابر ہے،  $Z$  کے حقیقی جزو کو  $Z_h$  اور  $|E|^2 = E \times E^*$  لکھے گئے ہیں۔ اس مساوات سے

$$(14.202) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \quad (\text{Np/m})$$

حاصل ہوتا ہے جہاں اوسط  $\mathcal{P}$  کو  $P$  لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.202 میں کسی بھی نقطے پر  $x$  سمت میں  $P$  طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر  $-\frac{dP}{dx}$  طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔ تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موج کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع ( $I^2 R_c$ ) ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موج کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل درآمد نہیں ہوتا۔ کم انقطاعی تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو  $\alpha$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.202 کو یوں پڑھا جاسکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنما}}$$

کامل ذوب برق سے بھرے موج میں ذوب برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ ایسی صورت میں صرف موج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$(14.203) \quad -\frac{dP}{dx} = \frac{1}{dx} \int \int \mathcal{P}_{\text{چادر}} dS = \int \mathcal{P}_{\text{چادر}} dl$$

ہو گا جہاں  $\mathcal{P}_{\text{چادر}}$  سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موج کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔ مساوات 14.203 میں سطح کا چھوٹا رقبہ  $dS$  موج کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔ اس رقبے کی لمبائی  $dx$  اور چوڑائی  $dl$  ہے جہاں  $l$  اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔ شکل 14.9 کے مستطیلی موج کی صورت میں  $l = 2(y_1 + z_1)$  کے برابر ہو گا۔ مخلوط پونٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$(14.204) \quad \mathcal{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2} Z_{ch} |H_m|^2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $H_m$  چادر کے متوازی میدان اور  $Z_c$  چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو  $Z_{ch}$  ہے۔ چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت  $|H_m|$  ہے۔ چونکہ موصل میں  $\sigma \gg j\omega\epsilon$  ہوتا ہے لہذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{ch} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 14.203 کو

$$(14.205) \quad -\frac{dP}{dx} = \frac{Z_{ch}}{2} \int |H_m|^2 dl$$

لکھا جاسکتا ہے۔

موتج میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P = \frac{Z_{yz,h}}{1} \int \int |H_{\perp}|^2 dS \quad (14.206)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $H_{\perp}$  سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔ اس میدان کو موتج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں  $Z_{yz}$  موتج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو  $Z_{yz,h}$  لکھا گیا ہے۔ اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha = \frac{Z_{ch} \int |H_m|^2 dl}{2Z_{yz,h} \int \int |H_{\perp}|^2 dS} \quad (\text{Np/m}) \quad (14.207)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 14.207 تمام موتج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔ کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 14.207 میں پرکئے جائیں گے۔ بہتر موصول سے بنے موتج کی صورت میں کامل موصول کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ مساوات 14.207 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.2: دو متوازی چادروں کے موتج کو صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس موتج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔ چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 14.207 سے

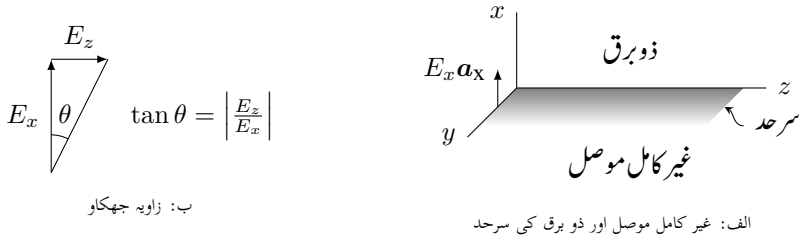
$$\alpha = \frac{2Z_{ch} \int_0^{y_1} |H_m|^2 dy}{2Z_{yz,h} \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} |H_{\perp}|^2 dz dy}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔ اس موتج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔ یوں مقناطیسی میدان  $Ha_y$  ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔ یوں  $H_m$  اور  $H_{\perp}$  دونوں  $Ha_y$  ہی ہیں لہذا

$$\alpha = \frac{Z_{ch} y_1}{Z_{yz,h} y_1 z_1} = \frac{Z_{ch}}{z_1 Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔ تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 450 \times 10^6}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 450 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} \\ &= 0.0055 + j0.0055 \end{aligned}$$



شکل 14.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو  $Z_{ch} = 0.0055$  اوہم ہے۔ ہوا کے لئے  $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7 \Omega$  ہے۔ ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2 \times 376.7} = 73 \mu\text{Np/m}$$

ہوگا۔ یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے  $e^{-0.073} = 0.9296$  یعنی 92.96 فی صد ہوگی۔

## 14.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 14.16-الف میں  $x = 0$  پر دکھائی گئی ہے۔ سطح کے نیچے ( $x < 0$ ) غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر ( $x > 0$ ) ذو برق ہے۔ سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج  $z$  سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں  $y$  کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  ہوگا۔ چونکہ موج  $z$  سمت حرکت کر رہی ہے لہذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \quad (14.208)$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 14.16 تا مساوات 14.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \quad (14.209)$$

$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \quad (14.210)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \quad (14.211)$$

$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \quad (14.212)$$

$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \quad (14.213)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \quad (14.214)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \quad (14.215)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \quad (14.216)$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔ موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.212 سے  $E_x$  اور مساوات 14.214 سے  $E_z$  کو مساوات 14.210 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1}H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1) H_y = 0$$

یا

$$(14.217) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.218) \quad k_1^2 = -(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.217 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ ذو برق میں  $x$  کی قیمت 0 تا  $\infty$  ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے  $\infty \rightarrow x$  پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہذا اسے رد کرتے ہوئے  $c_2 = 0$  لیا جاتا ہے۔ اور یوں

$$(14.219) \quad H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \quad \text{ذو برق خطہ}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(14.220) \quad \gamma_2 E_y + j\omega\mu_2 H_x = 0$$

$$(14.221) \quad -\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

$$(14.222) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_z = 0$$

$$(14.223) \quad \gamma_2 H_y - (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) E_x = 0$$

$$(14.224) \quad -\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) E_y = 0$$

$$(14.225) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) E_z = 0$$

$$(14.226) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0$$

$$(14.227) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.223 سے  $E_x$  اور مساوات 14.225 سے  $E_z$  کو مساوات 14.221 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[ \gamma_2^2 - j\omega\mu_2 (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \right] H_y = 0$$

یا

$$(14.228) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.229) \quad k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2$$

$$(14.230) \quad \gamma_m^2 = j\omega\mu_2 (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 14.228 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔ موصل میں  $x$  کی قیمت  $0$  تا  $-\infty$  ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لا محدود فاصلے  $-\infty \rightarrow x$  پر میدان کی قیمت لا محدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہذا اسے رد کرتے ہوئے  $c_3 = 0$  لیا جاتا ہے اور یوں

$$(14.231) \quad H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \quad \text{موصل خطہ}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقتناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات میدان برابر ہوں گے لہذا  $x = 0$  پر کسی بھی  $z$  پر تمام  $t$  کے لئے مساوات 14.219 اور مساوات 14.231 برابر ہوں گے جس سے

$$(14.232) \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

$$(14.233) \quad c_1 = c_4$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.212 سے  $E_x$  اور مساوات 14.214 سے ذوبرق میں  $E_z$  یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$(14.234) \quad \begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{-k_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \end{aligned} \quad \text{ذوبرق خطہ}$$

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.223 سے  $E_x$  اور مساوات 14.225 سے موصل میں  $E_z$  یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$(14.235) \quad \begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \end{aligned} \quad \text{موصل خطہ}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں  $c_4 = c_1$  اور  $\gamma_2 = \gamma_1$  پر کئے گئے ہیں۔



سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے  $x = 0$  پر دونوں اطراف  $E_z$  برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$(14.236) \quad k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.218 سے

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 - k_1^2 \\ &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 k_2^2 \\ &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 (-\gamma_2^2 + \gamma_m^2) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 14.236 اور دوسرے قدم پر مساوات 14.229 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس میں مساوات 14.232 سے  $\gamma_2 = \gamma_1$  پر کرتے ہوئے

$$(14.237) \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.234 میں  $E_x$  سرحد کے عمودی ہے جبکہ  $E_z$  سرحد کے متوازی ہے۔ کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔ شکل 14.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$(14.238) \quad \theta = \tan^{-1} \left| \frac{E_z}{E_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-k_1}{\gamma_1} \right|$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاؤ کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر  $\omega = 100 \text{ Mrad/s}$  تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\sigma_2 = 5.8 \times 10^7$$

سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 = j0.33356$$

$$k_1 = 0.9215(1 - j) \times 10^{-6}$$

$$k_2 = 6.038(1 - j) \times 10^4$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{0.9215(1-j) \times 10^{-6}}{j0.33356} \right| = 0.00022385^\circ$$

زاویہ حاصل ہوتا ہے۔ اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔ برقی میدان کا عمودی یعنی  $E_x$  حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ  $E_z$  حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔

ہوا اور پانی  $\epsilon_R = 78$  کے سرحد پر  $\omega = 100 \text{ Mrad/s}$  تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\epsilon_1 = \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = 78\epsilon_0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\sigma_2 = 0$$

ے

$$\gamma_1 = \gamma_2 = j0.33144$$

$$k_1 = j0.037528$$

$$k_2 = 2.9272$$

حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{j0.037528}{j0.33144} \right| = 6.46^\circ$$

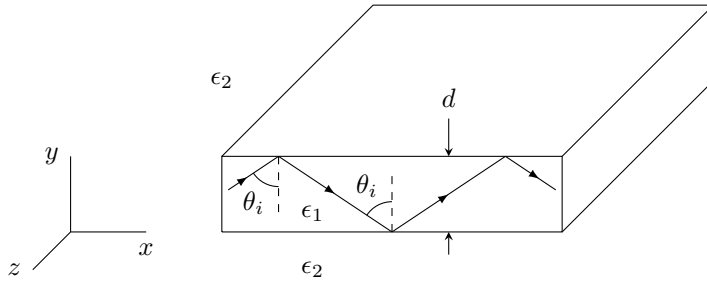
زاویہ دیتا ہے۔ ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاؤ باآسانی ناپی جاسکتی ہے۔

## 14.9 ذو برق تختے کا مویج

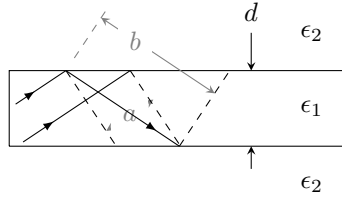
اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے موج پر غور کرتے رہے ہیں۔ اس حصے میں ذو برق سے بنائے گئے موج پر غور کیا جائے گا۔ شکل 14.17 میں  $d$  موٹائی اور لامحدود وسعت کے ذو برق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔ اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخل کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی دائیں جانب، یعنی بڑھتے  $x$  جانب، حرکت پر غور کرتے ہیں۔ جب تک ذو برق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصلے زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ یوں ذو برق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج صفر کرے گی۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔ حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذو برق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذو برق کے باہر میدان لامحدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذو برق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔

اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصلے زاویے سے زیادہ ہو، موج ذو برق میں صفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔ موج مخصوص زاویوں پر ہی صفر کر پاتی ہے۔ آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔ دونوں فاصلے زاویے سے زیادہ زاویے پر آمد ہیں یعنی  $\theta > \theta_{ic}$  ہے۔ یوں

$$\theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (14.239)$$



شکل 14.17: ذو برق تختے کا موج



شکل 14.18: ذو برق تختے کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

ہو گا جہاں

$$\epsilon_1 > \epsilon_2$$

ذو برق تختے کا برقی مستقل  $\epsilon_1$

ذو برق تختے کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل  $\epsilon_2$

ت نہیں ہیں۔

شکل 14.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی فاصلہ  $a$  دوسری موج کے زاویائی فاصلہ  $b$  کے برابر ہو اور یا ان میں فرق  $2m\pi$  ہو جہاں  $m = 0, 1, 2, \dots$  ممکن ہے۔ زاویائی فاصلے ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔ اس شرط کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(14.240) \quad \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi$$

جہاں

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

پہلے خطے کا انحرافی مستقل  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$

$\phi$  سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق

$\lambda_0$  خالی خلاء میں طول موج

ہیں۔ یوں

$$(14.241) \quad \frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0} \left[ \frac{1}{\cos \theta_i} - \sin \theta_i \left( \tan \theta_i - \frac{1}{\tan \theta_i} \right) \right] + \phi = 2m\pi$$

ہو گا جسے

$$(14.242) \quad \frac{4\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ عمودی برقی میدان  $E_{\perp}$  کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  کی صورت میں صفحہ 348 پر مساوات 13.24 سے

$$(14.243) \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i + j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = 1/\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.244) \quad \phi = -2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i}$$

کے برابر ہے۔

یوں شرح انعکاس  $\Gamma$  کی حتمی قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے زاویائی فرق  $\phi$  پیدا ہوتا ہے۔ مساوات 14.243 کو مساوات 14.242 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.245) \quad \frac{4\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} - 2m\pi = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos \theta_i}$$

یا

$$(14.246) \quad \tan \left( \frac{2\pi n_1 d \cos \theta_i}{\lambda_0} - m\pi \right) = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}} \quad \text{پہلے خطے کا انحرافی مستقل}$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_{R2}} \quad \text{دو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انحرافی مستقل}$$

$$d \quad \text{دو برق تختے کی موٹائی}$$

$$\theta_i \quad \text{آمدی زاویہ}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

ہیں۔

## 14.10 گھمکی خلاء

موتج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔ اس کے برعکس گھمکی طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔ گھمکی کو امالہ اور کپیسٹر کے گھمکی دور<sup>19</sup> کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل میں امالہ اور کپیسٹر کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گھمکی تعدد  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ہے۔ اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور کپیسٹر کی قیمت کم کرنی ہوگی۔ شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔ اسی طرح کپیسٹر کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے دو چادروں کو دور کر دیا گیا ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔ شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے کی حد شکل-ت میں دکھائی گئی ہے جہاں کپیسٹر اور امالہ مل کر بند ڈبے کی شکل اختیار کر گئے ہیں۔ یہی بند ڈبی گھمکی خلاء<sup>20</sup> کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گھمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔ صفحہ 372 پر مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موج میں تمام میدان دیتے ہیں۔ ان میں  $\gamma = j\beta$  لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں  $H_y$  کے مساوات میں  $H_{y0} = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1}$  لکھا گیا ہے اور یہی طریقہ کار باقی مساوات پر بھی لاگو کیا گیا ہے تاکہ صرف ضروری معلومات پر توجہ رہے۔ مثبت  $x$  جانب حرکت کرتے میدان مثلاً  $H_x^+$  پر زیر بالا + لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$(14.247) \quad H_x^+ = H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(14.248) \quad H_y^+ = H_{y0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(14.249) \quad H_z^+ = H_{z0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(14.250) \quad E_z^+ = -E_{z0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(14.251) \quad E_y^+ = E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$(14.252) \quad E_x^+ = 0$$

اگر موج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔ برقی میدان  $E_y^+$  بند سرے کی چادر کے متوازی ہے لہذا انعکاسی مستقل  $\Gamma_{||} = -1$  ہے۔ یوں یہ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی  $x$  جانب حرکت کرے گا۔ انعکاسی برقی میدان

$$(14.253) \quad E_y^- = -E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)}$$

ہے۔ آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned} E_y^+ + E_y^- &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \\ &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} (e^{-j\beta x} - e^{j\beta x}) \end{aligned}$$

یعنی

$$(14.254) \quad E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t}$$

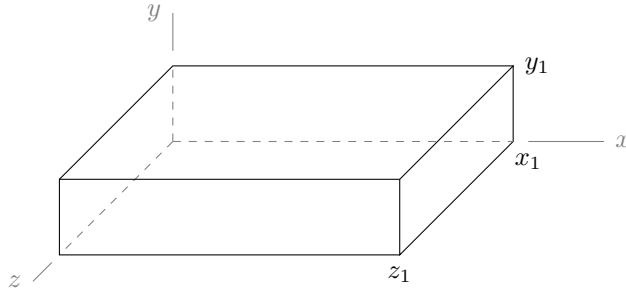
کو جنم دیتے ہیں۔ موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا مساوات 14.254 کا برقی میدان موج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح بند سرے سے  $\frac{\lambda}{2}$  یا  $\frac{3\lambda}{2}$  فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں  $l = 1, 2, \dots$  ہے۔ یوں بند سرے سے  $\frac{\lambda}{2}$  فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ  $E_y^-$  موج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 14.19 میں مستطیلی موج کے دائیں اور بائیں بند سرے بند کرتے ہوئے بقایا موج کو ہٹا لیا گیا ہے۔ یہ بند ڈبہ مستطیلی گھمکیا<sup>21</sup> ہے۔

شکل 14.19 میں گھمکیا کا بایاں سرا  $x = 0$  اور دایاں سرا  $x = x_1$  پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$(14.255) \quad x_1 = \frac{l\lambda}{2} \quad (l = 1, 2, 3, \dots)$$

ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2} = l\pi$$



شکل 14.19: مستطیلی گھمکیا

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(14.256) \quad \beta = \frac{l\pi}{x_1}$$

ملتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.254

$$(14.257) \quad E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t}$$

لکھا جائے گا۔ اس مساوات میں گھمکیا کے سمت  $x$  میں  $l$  آدھے طول موج پائے جاتے ہیں،  $y$  سمت میں  $n$  آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور  $z$  سمت میں  $m$  آدھے طول موج پائے جاتے ہیں۔

مساوات 14.257 میں  $x = 0$  یا  $x = x_1$  پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 14.86 میں دے  $k$  کو  $k_{yz}$  لکھتے

$$(14.258) \quad k_{yz}^2 = \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے  $\sigma = 0$  لیتے ہوئے مساوات 14.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں  $\alpha = 0$  کی صورت میں  $\gamma = j\beta$  ہو گا لہذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

یا

$$\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 = -\left( \frac{l\pi}{x_1} \right)^2 + (2\pi f)^2 \frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

$$(14.259) \quad \lambda_{گھمکی} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{z_1} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{x_1} \right)^2}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل  $k$  یوں

$$(14.260) \quad k_{xyz}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$(14.261) \quad \lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

یوں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی  $TE_{lmn}$  کہلائیں گے اور گھمکی طول موج  $\lambda_{lmn}$  لکھی جائے گی۔

#### 14.11 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت چارج سے خالی  $\rho_h = 0$  نقطے کے میکس ویل کے مساوات

$$(14.262) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(14.263) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(14.264) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$(14.265) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

سے شروع کرتے ہیں۔ مساوات 14.263 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 14.262 اور مساوات 14.265 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ ان میں سے  $E_x$  کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$(14.266) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان  $E_x(x, y, z, t)$  کے چار آزاد متغیرات ہیں۔ علیحدگی متغیرات<sup>22</sup> استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$(14.267) \quad E_x(x, y, z, t) = M(x, y, z)T(t)$$

جہاں پہلے تفاعل  $M$  کے تین آزاد متغیرات  $x, y$  اور  $z$  ہیں جبکہ دوسرے تفاعل  $T$  کا صرف  $t$  آزاد متغیر ہے۔ یوں مساوات 14.266 سے

$$T \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = M \left( \mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو  $MT$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left( \mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ خلاء کے متغیرات  $x, y$  اور  $z$  پر منحصر ہے جبکہ دائیں ہاتھ وقت  $t$  پر منحصر ہے۔ یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔ یوں انہیں مستقل  $k^2$  کے برابر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left( \mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = -k^2$$

جس سے دو مساوات

$$(14.268) \quad \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + k^2 T = 0$$

$$(14.269) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + k^2 M = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.268 کا حل  $T = e^{pt}$  فرض کرتے ہوئے

$$(\mu\epsilon p^2 + \mu\sigma p + k^2 T) e^{pt} = 0$$

سے

$$p = \frac{-\sigma \mp \sqrt{\sigma^2 - 4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کامل ذو برق کی صورت میں  $\sigma = 0$  ہو گا جس سے

$$(14.270) \quad p = \mp \frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t) = c_{t1} e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t} + c_{t2} e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$



لکھا جاسکتا ہے جہاں  $c_{t2}$ ،  $c_{t1}$  مساوات کے مستقل ہیں۔ اس میں

$$(14.271) \quad \omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$(14.272) \quad T(t) = c_{t1}e^{-j\omega t} + c_{t2}e^{j\omega t}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.269 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔ یوں

$$(14.273) \quad M(x, y, z) = X(x)N(y, z)$$

لیتے ہوئے

$$N \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + X \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + k^2 X N = 0$$

یا

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{N} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) - k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل  $-k_x^2$  کے برابر لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(14.274) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0$$

$$(14.275) \quad \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)N = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں دوسرے مساوات میں  $N$  کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$(14.276) \quad N(y, z) = Y(y)Z(z)$$

لکھتے ہوئے

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)YZ = 0$$

یا

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + k_x^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کو نئے مستقل  $-k_y^2$  کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$(14.277) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y$$

$$(14.278) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - k_x^2 - k_y^2)Z = -k_z^2 Z$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر  $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$  یا

$$(14.279) \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

لیا گیا ہے۔ مساوات 14.274، مساوات 14.277 اور مساوات 14.278 کے حل

$$(14.280) \quad X(x) = c_{x1}e^{-jk_x x} + c_{x2}e^{jk_x x} = c'_{x1} \cos k_x x + c'_{x2} \sin k_x x$$

$$(14.281) \quad Y(y) = c_{y1}e^{-jk_y y} + c_{y2}e^{jk_y y} = c'_{y1} \cos k_y y + c'_{y2} \sin k_y y$$

$$(14.282) \quad Z(z) = c_{z1}e^{-jk_z z} + c_{z2}e^{jk_z z} = c'_{z1} \cos k_z z + c'_{z2} \sin k_z z$$

ہیں۔

مساوات 14.273، مساوات 14.276 اور مساوات 14.267 سے ظاہر ہے کہ

$$(14.283) \quad E_x(x, y, z, t) = TXYZ$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.283 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ  $E_x$  موج کو ظاہر کرتی ہے۔ اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک  $k$  پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔ یوں  $k_x = 0.32$  یا  $k_x = -7.59$  ہو سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔ انہیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لا محدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔ صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباؤ صفر ہو گا۔ یوں  $z = 0$  اور  $z = z_0$  پر  $E_x = 0$  صفر ہو گا۔ ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔ مساوات 14.282 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$(14.284) \quad c'_{z1} = 0$$

$$(14.285) \quad k_z = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(14.286) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

کے برابر ممکن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $k_z$  اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔ یوں  $k_z = \frac{\pi}{z_1}$  یا  $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$  ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔ یہی خصوصیت متعین موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح  $y = 0$  اور  $y = y_0$  پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 364 پر دکھایا شکل 14.8 حاصل ہوتا ہے۔ ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔ اس طرح مساوات 14.281 سے

$$(14.287) \quad c'_{y1} = 0$$

$$(14.288) \quad k_y = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$(14.289) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

کے برابر ممکن ہیں۔ اب موج  $y$  اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے  $k_y$  بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی موج میں موج کی مساوات

$$E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)} \quad (14.290)$$

ہوگی جہاں  $e^{j(\omega t - k_x x)}$  بڑھتے  $x$  جانب موج جبکہ  $e^{j(\omega t + k_x x)}$  گھٹتے  $x$  جانب موج ہے۔  $k_y$  اور  $k_z$  کی قیمتیں مساوات 14.285 اور مساوات 14.288 کے تحت ہوں گی۔ جیسے آپ جلد مساوات 14.304 میں دیکھیں گے، طول موج اور  $k$  کا ایک خاص تعلق ہے۔ یوں جس تعدد کی موج مستطیلی موج سے گزر رہی ہو مساوات 14.304 اس کا  $k$  دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہوگی۔ اب کسی بھی  $k_y$  اور  $k_z$  کے لئے مساوات 14.279 سے  $k_x$  کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جاسکتی ہے۔ جب تک  $k_x$  کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 14.280 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہوگی البتہ اگر  $k_y$  اور  $k_z$  کی جوڑی سے  $k_x$  کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 14.280 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہوگا۔ بڑھتے  $x$  جانب موج کی صورت میں  $x \rightarrow \infty$  کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہوگا لہذا ایسی صورت میں  $c_{x1} = 0$  لیا جائے گا۔ مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد،  $k_x$  اور  $k_y$  14.279 کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر  $x = 0$  اور  $x = x_0$  پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 403 پر دکھایا شکل 14.19 حاصل ہوگا۔ چونکہ  $E_x$  ان چادروں کے عمودی ہے لہذا ہمیں  $E_y$  یا  $E_z$  کی مساوات درکار ہوگی۔ میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا ہوں۔ آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھکے ہوں گے لہذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \quad (14.291)$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \quad (14.292)$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \dots \quad (14.293)$$

کے برابر ممکن ہے۔

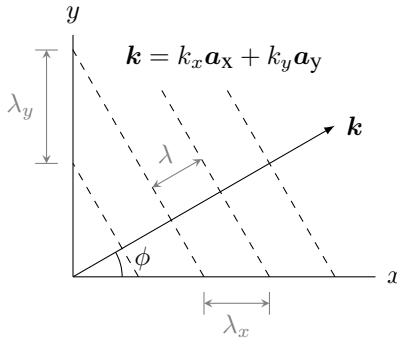
ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 14.19 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (14.294)$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک بار پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔ مساوات 14.280 دراصل دو ممکنہ جوابات  $e^{jk_x x}$  اور  $e^{-jk_x x}$  کا مجموعہ ہے۔ اسی طرح مساوات 14.281 اور مساوات 14.282 بھی مجموعے ہیں۔ مساوات 14.283 میں  $X$ ،  $Y$  اور  $Z$  کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 14.280، مساوات 14.281 اور مساوات 14.282 کے پہلے جزو چننے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j\omega t - k_x a_x - k_y a_y - k_z a_z} \quad (14.295)$$



شکل 14.20: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

حاصل ہوتا ہے۔ کارٹیزی محدد میں کسی بھی نقطہ  $(x, y, z)$  کو سمتیہ

$$(14.296) \quad \mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

ظاہر کرتی ہے۔ ہم  $k_x, k_y, k_z$  اور  $k$  کو سمتیہ

$$(14.297) \quad \mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 14.279 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔ اس طرح

$$(14.298) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

ہو گا لہذا مساوات 14.295 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$(14.299) \quad E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$(14.300) \quad E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

اصل موج دیتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے  $k$  کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 14.20 میں موج کے حرکت کی سمت،  $x$  محدد کے ساتھ  $\phi$  زاویہ بناتی ہے۔ یہ موج  $xy$  سطح پر پائی جاتی ہے یعنی  $k_z = 0$  کے برابر ہے۔ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جاسکتی ہے۔ یوں  $x$  محدد پر نقطہ  $(x_0, 0)$  سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد  $f$  ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $y$  محدد پر نقطہ  $(0, y_0)$  سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔ اسی طرح  $k$  پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت  $t$  کو روک کر  $x$  محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ  $\lambda_x$  ناپا جائے گا۔ اسی طرح  $y$  محدد پر طول موج  $\lambda_y$  ناپا جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج  $\lambda$  ناپا جائے گی۔ ان تمام کو شکل 14.20 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد  $f$  اور طول موج  $\lambda$  جانتے ہوئے اس کی رفتار  $v = f\lambda$  لکھی جاسکتی ہے۔ سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار  $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  کے برابر ہوتی ہے لہذا

$$(14.301) \quad f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہوگا۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو  $2\pi$  سے ضرب دیتے ہوئے

$$(14.302) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 14.271 پر کرنے سے

$$(14.303) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

یا

$$(14.304) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق  $\sigma = 0$  کے لئے حاصل کئے گئے لہذا  $\alpha = 0$  اور

$$(14.305) \quad \gamma = 0 + j\beta = jk$$

کے برابر ہے۔ اس طرح  $k$  کو  $\beta$  جبکہ  $k_x, k_y, k_z$  کو بالترتیب  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  لکھا جاسکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 14.304 کی طرح  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$  لکھنا ممکن ہوگا۔ آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔ شکل 14.20 کو دیکھ کر  $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \phi}$  لکھا جاسکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے  $\cos \phi = \frac{k_x}{k}$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  پر کرتے ہوئے

$$(14.306) \quad \lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہم

$$(14.307) \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$$

$$(14.308) \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے مجموعی رفتار<sup>23</sup> کہتے ہیں

$$(14.309) \quad v = f\lambda = \frac{\omega}{k}$$

کے برابر ہے۔ موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔ اس کے برعکس کارتیسی محدود پر دوری رفتار<sup>24</sup>

$$v_x = f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_y = f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y}$$

$$v_z = f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z}$$

ہوں گے۔ شکل 14.20 میں  $\phi$  کی قیمت کم کرنے سے  $\lambda_y$  اور  $v_y$  کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ  $\phi = 0$  پر  $v_y = \infty$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔ آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز سفر نہیں کر سکتی۔

## باب 15

### سوالات

مویج

سوال 15.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب:  $0.00177^\circ$

سوال 15.2: ہوا اور پانی  $\epsilon_R = 78$  کے سرحد پر 1 GHz تردد کے موج کا جھکاؤ حاصل کریں۔

جواب:  $6.46^\circ$



جدول 15.1:  $\sigma$ 

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
$7 \times 10^4$	گرفتار	$6.17 \times 10^7$	چاندی
1200	سلیکان	$5.80 \times 10^7$	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	$4.10 \times 10^7$	سونا
5	سمندری پانی	$3.82 \times 10^7$	المونیم
$10^{-2}$	چھونا پتھر	$1.82 \times 10^7$	ٹنگسٹن
$5 \times 10^{-3}$	چکنی مٹی	$1.67 \times 10^7$	جست
$10^{-3}$	تازہ پانی	$1.50 \times 10^7$	پیتل
$10^{-4}$	تقطیر شدہ پانی	$1.45 \times 10^7$	نکل
$10^{-5}$	ریتیلی مٹی	$1.03 \times 10^7$	لوبا
$10^{-8}$	سنگ مرمر	$0.70 \times 10^7$	قلعی
$10^{-9}$	بیک لائٹ	$0.60 \times 10^7$	کاربن سٹیل
$10^{-10}$	چینی مٹی	$0.227 \times 10^7$	مینگنیز
$2 \times 10^{-13}$	بیرا	$0.22 \times 10^7$	جرمینیم
$10^{-16}$	پولیسٹرن پلاسٹک	$0.11 \times 10^7$	سٹینلس سٹیل
$10^{-17}$	کوارٹس	$0.10 \times 10^7$	نائیکروم



جدول 15.2:  $\sigma/\omega\epsilon$  and  $\epsilon_R$ 

$\sigma/\omega\epsilon$	$\epsilon_R$	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا $\text{SiO}_2$
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 15.3:  $\mu_R$ 

$\mu_R$	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 15.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	$\epsilon_0$	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	$\mu_0$	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

