برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری[1] کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^\circ\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد[2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

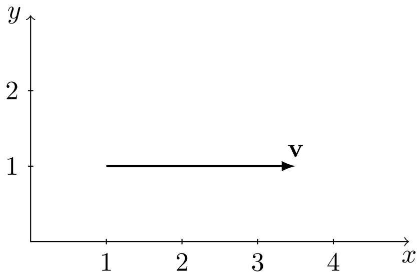
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[3] کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، . . . یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، . . . سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightarrow{F}$ لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

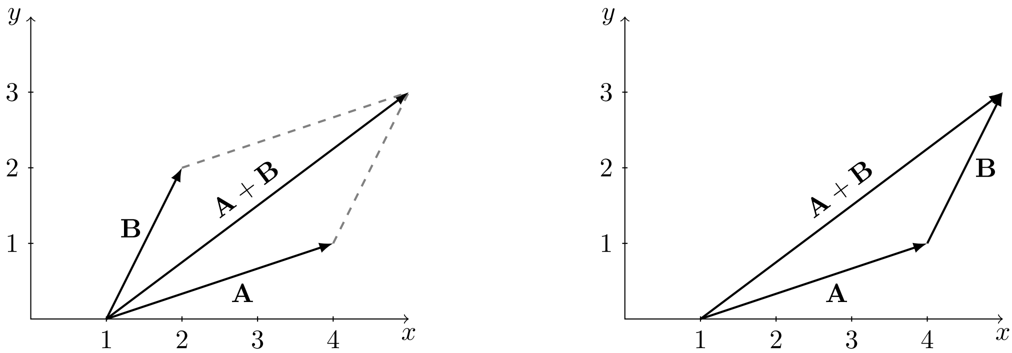
شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[1] scalar
[2] Cartesian coordinates
[3] vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں **A** کے سر کے ساتھ **B** کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

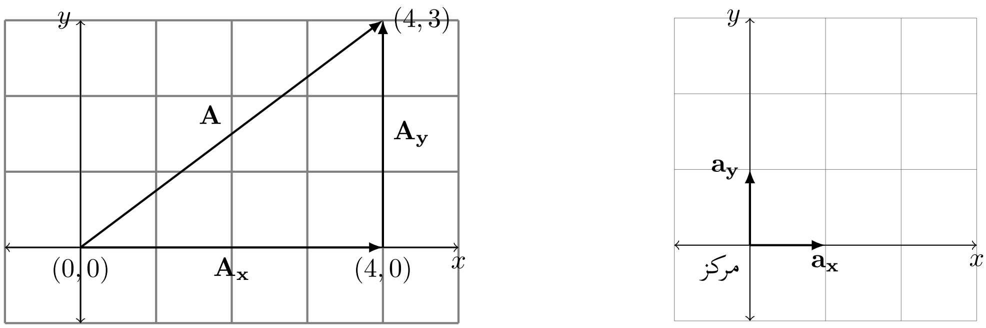
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ **B** کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر **B** کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو **A** کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ **A** کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ **A** کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ا) اکائی سمتیہ

(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 0$ ہو۔

ہم سمتی میدان کے متغیرات کو آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر ہم سمتی میدان کی بات نہ کر رہے ہوں تب ہم مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لے سکتے ہیں۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

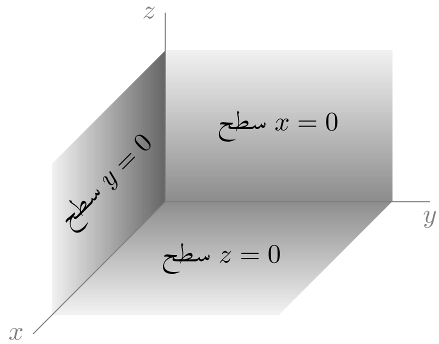
1.3 کارتیسی محدد

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

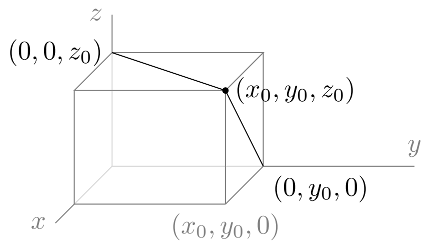
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جا سکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدد پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

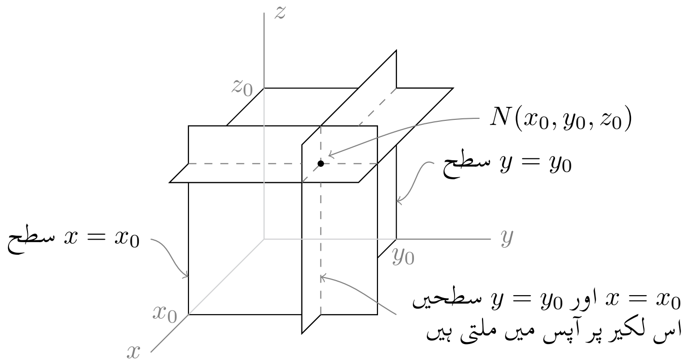
$$x = x_0, \quad y \le |\mp\infty|, \quad z \le |\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

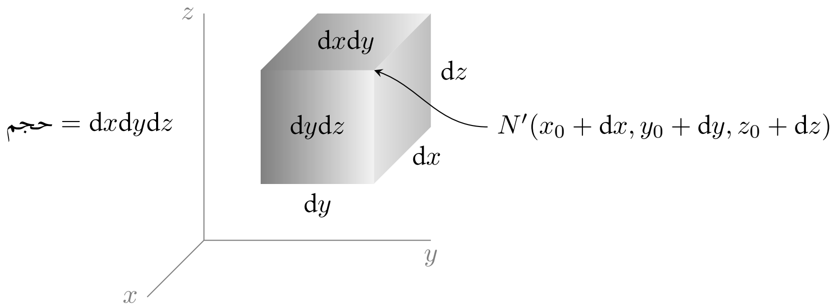
$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \le |\mp\infty|$$

لکھی جا سکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھوئینگے۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

[8] coordinates
[9] three dimensional
[10] coplanar



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ ہے۔

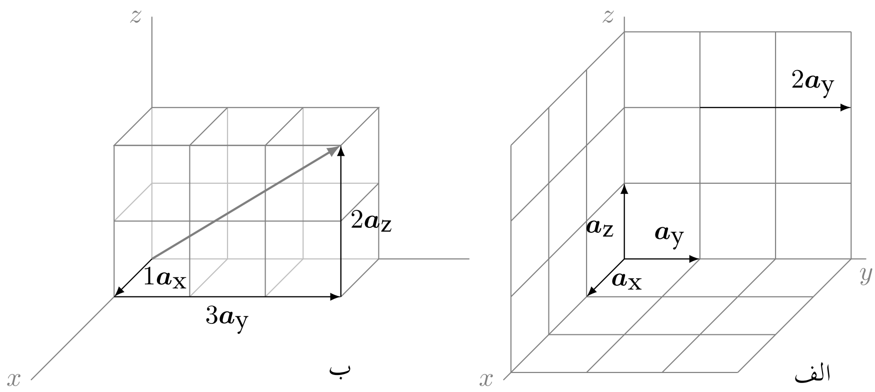
کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.3}$$

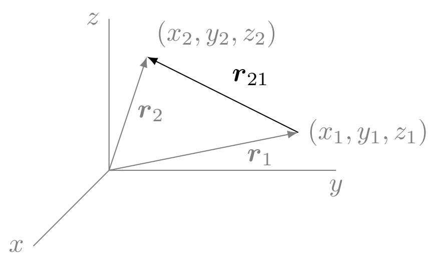
لکھی جاتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے جاتے ہیں۔یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



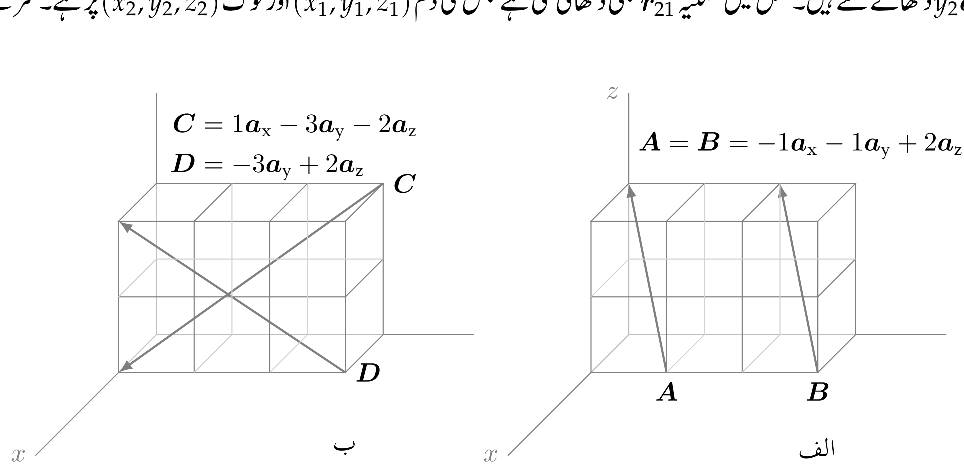
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



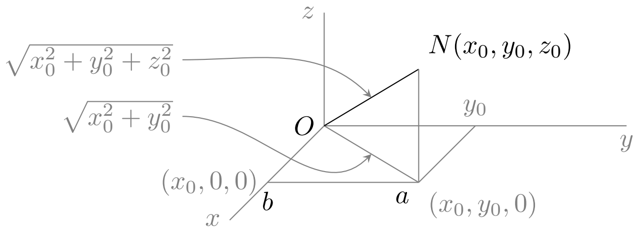
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔سمتیہ کی دُم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

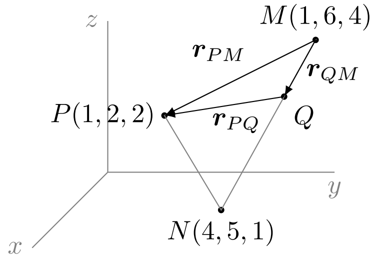
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جانب تین قدم اور آخر کار $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جا یا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5,2,-1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2+2^2+1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(5-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(1-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|\boldsymbol{r}_{QM}| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{r}_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM}\\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\ &= -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

1.5 میدانی سمتیہ

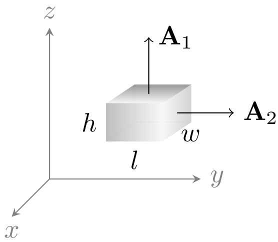
لکھنا ہے

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔ اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

---

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
[13] vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos \theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔ بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

[14] scalar product
[15] dot product
[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $i \neq j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cdot(B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔

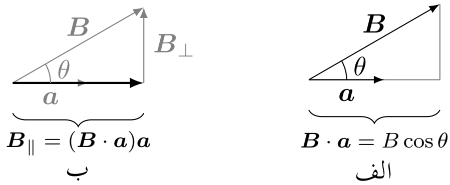
حل: مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ حاصل کئے گئے۔$|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\boldsymbol{r}_{NM}\cdot\boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

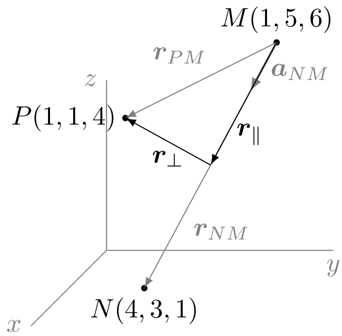
کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_\parallel$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_\parallel$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_\parallel\boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_\perp$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$\begin{aligned} r_\parallel &= \boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM} = (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) \\ &= \frac{0+8+10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

[17] $B_\parallel$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$$

ہے۔$\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{19}\end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{r}_{\perp} = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cdot\left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل:مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_Q = (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18] displacement vector

حل:نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_\text{z} \cdot [x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10} = z_0\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے لہٰذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z_0\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

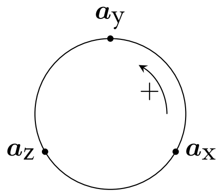
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta_{AB}\boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\
&\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گا۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times (B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\
&= A_x B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_x B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_x B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
&\quad + A_y B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_y B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
&\quad + A_z B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_z B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (A_z B_x - A_x B_z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (A_x B_y - A_y B_x) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہوں تب

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 14\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے استعمال سے

$$
\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 0
$$

لکھ کر

$$
27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0
$$

سے

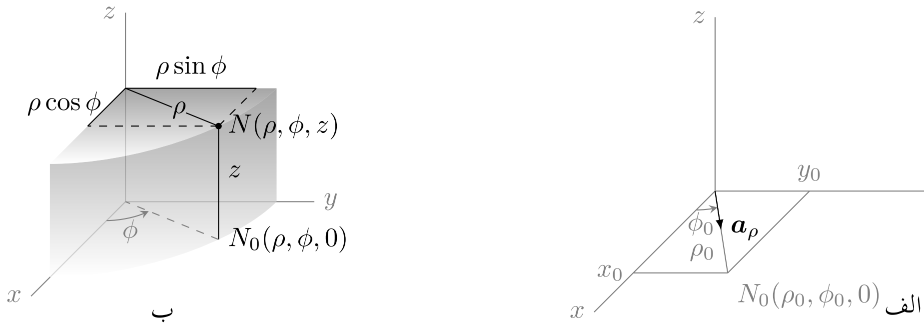
$$
27x - 15y + 18z = 27
$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مخفف 27، -15 اور 18 ہوتے ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$
\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \times (\boldsymbol{a}_{\text{y}} \times \boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0 \boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \tag{1.20}$$

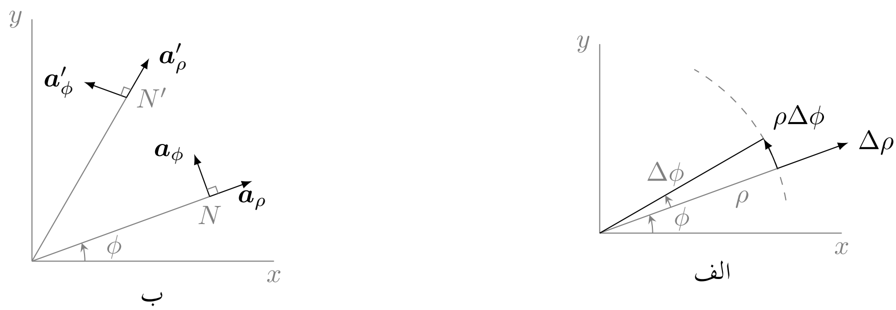
لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارتیسی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.21}$$

---

[22] cylindrical coordinate system



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\
\phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\
z &= z
\end{aligned} \tag{1.22}$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتٰی کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔ $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

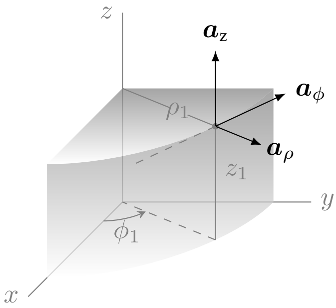
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_\mathrm{z}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1.23}$$

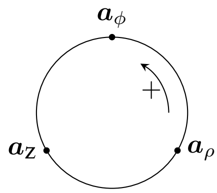
لکھا جا سکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = 0 \tag{1.24}$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_{\rho}$، $\boldsymbol{a}'_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ-\phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = (1)(1)[\cos(90^\circ-\phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ-\phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\phi}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ+\phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (1)(1)[\cos(90^\circ+\phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

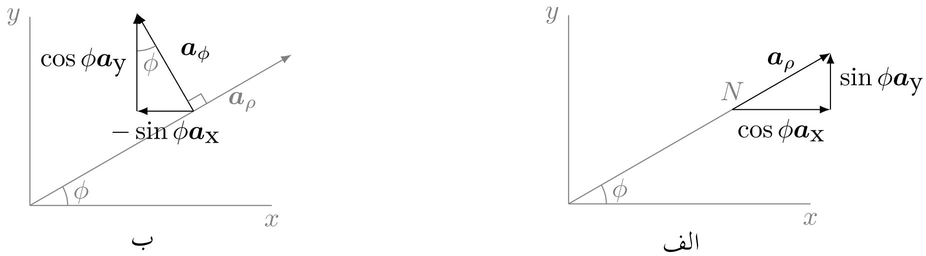
$$\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\rho} &= \cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\phi} &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\
&= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_{\rho}-\sin\phi\boldsymbol{a}_{\phi}
\tag{1.35}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_{\rho}+\cos\phi\boldsymbol{a}_{\phi}
\tag{1.36}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
&= A_\rho\boldsymbol{a}_{\rho}+A_\phi\boldsymbol{a}_{\phi}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_x \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_y \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\rho \\
\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جائے گا۔یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

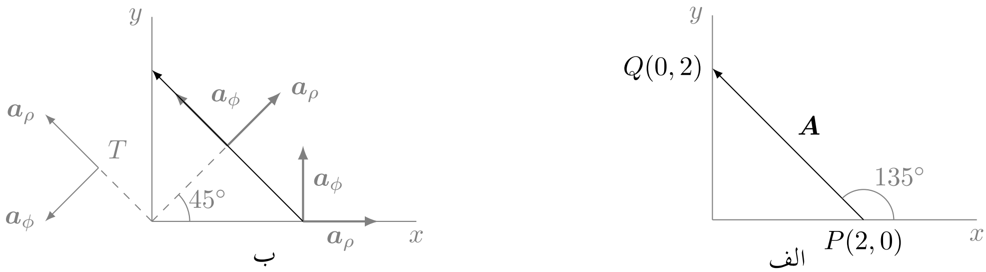
$$\begin{aligned}
A_x &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi \\
A_y &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi \\
A_z &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0
\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

مشق 1.5: $\boldsymbol{a}_\text{X}$، $\boldsymbol{a}_\text{Y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{Z}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\text{X} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi\\ \boldsymbol{a}_\text{Y} &= \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi\\ \boldsymbol{a}_\text{Z} &= \boldsymbol{a}_\text{Z}\end{aligned}$$

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_\text{X} + 2\boldsymbol{a}_\text{Y} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_\text{X} + 2\boldsymbol{a}_\text{Y})\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{X} + 2\boldsymbol{a}_\text{Y})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{X} + 2\boldsymbol{a}_\text{Y}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi\\ A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_\text{X} + 2\boldsymbol{a}_\text{Y}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\\ &= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2}\\ &= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)}\\ &= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}\\ &= \sqrt{8}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi=0^\circ$، $\phi=45^\circ$ اور $\phi=135^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi=0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=0^\circ}&=2(-\cos0^\circ+\sin0^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin0^\circ+\cos0^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\&=-2\boldsymbol{a}_\rho+2\boldsymbol{a}_\phi\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi=45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=45^\circ}&=2(-\cos45^\circ+\sin45^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin45^\circ+\cos45^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\&=2(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\&=\sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تا کہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

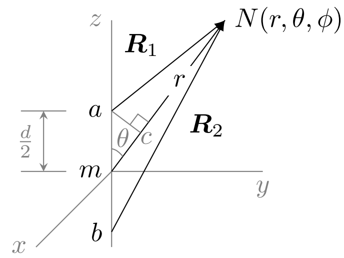
آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi=135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات 1.41 میں $\phi=135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ}&=2(-\cos135^\circ+\sin135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin135^\circ+\cos135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\&=2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\&=\sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت چارج $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب[23] کہتے ہیں۔دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

[23] dipole



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

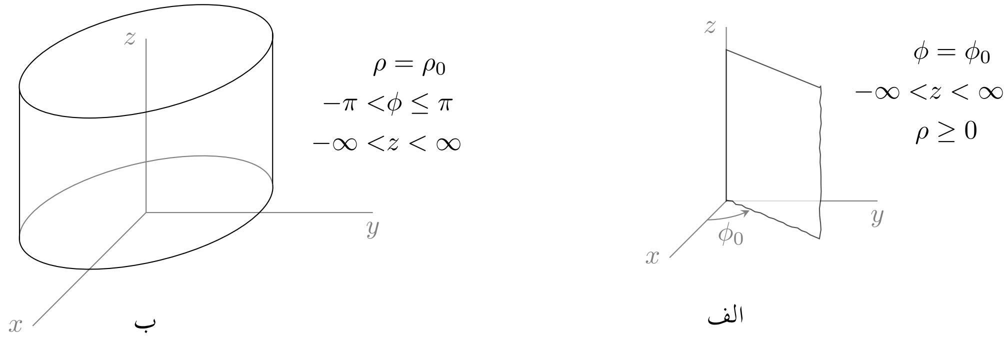
اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

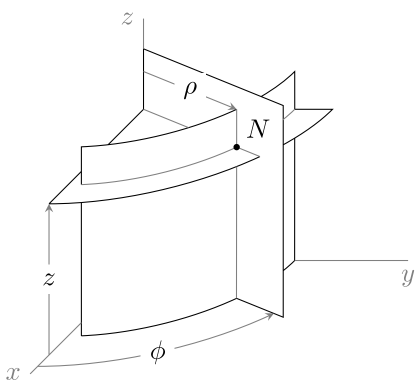
لکھا جا سکتا ہے۔

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

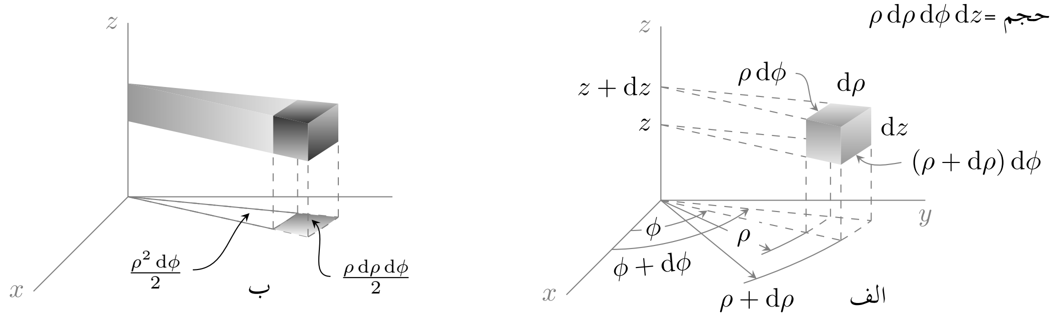
ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[24] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔ نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جیسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho \, \mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + \mathrm{d}\rho) \, \mathrm{d}\phi$ ہے۔جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 \, \mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔اگر رداس $\rho + \mathrm{d}\rho$

[24]حقیقت میں منفی حد $-180°$ کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد $-180°$ کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+d\rho)^2\,d\phi}{2}$ ہو گا۔یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ dS

$$\begin{aligned}
dS &= \frac{(\rho+d\rho)^2\,d\phi}{2} - \frac{\rho^2\,d\phi}{2}\\
&= \frac{\rho^2\,d\phi + 2\rho\,d\rho\,d\phi + (d\rho)^2\,d\phi}{2} - \frac{\rho^2\,d\phi}{2}\\
&= \rho\,d\rho\,d\phi + \frac{(d\rho)^2\,d\phi}{2}\\
&\approx \rho\,d\rho\,d\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(d\rho)^2\,d\phi}{\rho\,d\rho\,d\phi} = \frac{d\rho}{2\rho}$ ہو گی۔$d\rho$ کو کم سے کم[25] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,d\rho\,d\phi$ رقبہ اور dz بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,d\phi$، $d\rho$ اور dz لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,d\rho\,d\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $d\rho\,dz$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,d\phi\,dz$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+d\rho,\phi+d\phi,z+dz)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

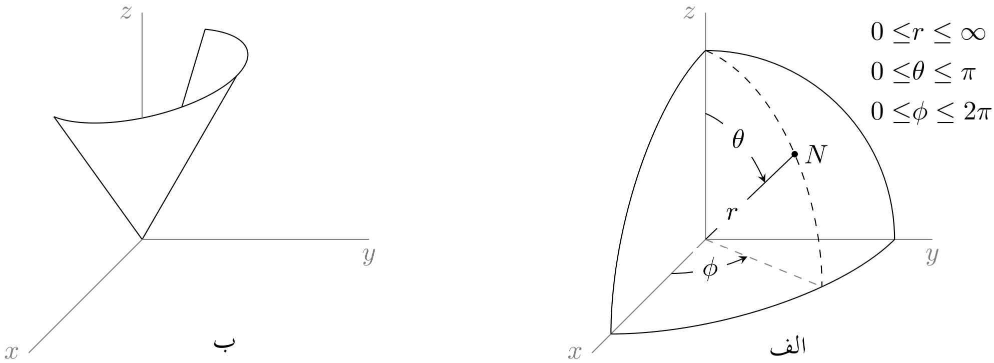
$$dL = d\rho\,\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\boldsymbol{a}_\phi + dz\,\boldsymbol{a}_z \tag{1.44}$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

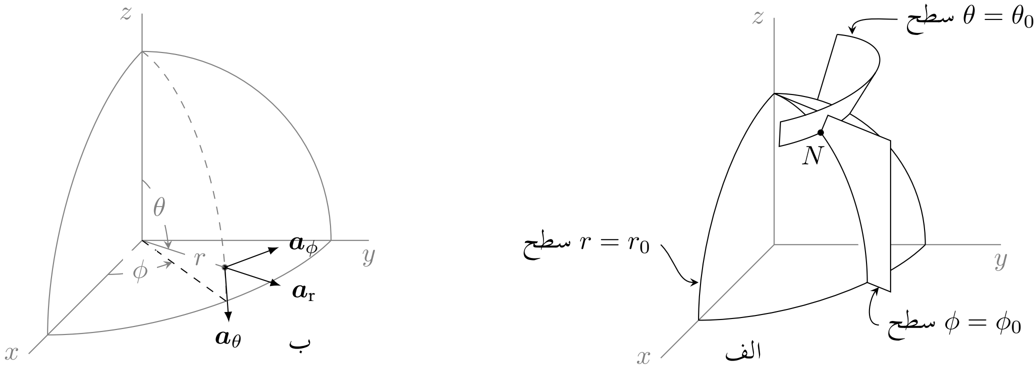
1.10 کروی محدد

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[25] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $d\rho$ لکھا جاتا ہے۔$d\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $d\rho \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدد کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



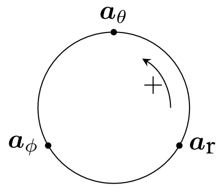
شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $0 \le r$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[26] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[27] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[28] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین

[26] longitude
[27] latitude
[28] cone



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکھٹے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ ہو گی۔اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi, \quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_\mathrm{r}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = 1, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 1, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1 \tag{1.46}$$

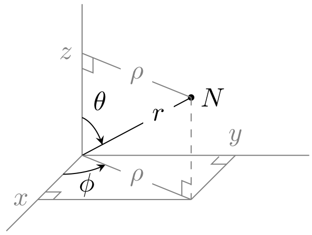
اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 0, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = 0 \tag{1.47}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin\theta$ کے برابر ہے۔اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔$\rho = r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.48}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔

شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \rho^2 + z^2 \\
\rho^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

لکھتے ہوئے

$$
r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$
\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.51}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$
\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.52}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$
\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = A_\rho \boldsymbol{a}_\rho + A_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.53}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.54}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\theta \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.55}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta = B_\rho\boldsymbol{a}_\rho - B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \cos\theta \\
B_z &= \sin\theta
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.58}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.60}$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	1	0	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

حاصل ہوتے ہیں۔یہ مساوات $\boldsymbol{a}_{\theta}$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\theta}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\theta} = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ یکساں ہیں۔اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_{\phi} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{1.62}$$

لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} &= -\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} &= \cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= 0
\end{aligned} \tag{1.63}$$

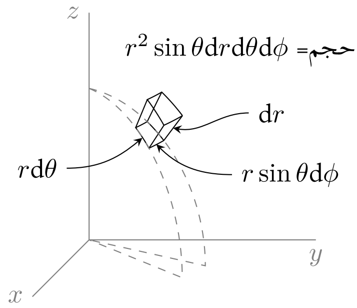
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{\theta}$ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}$ کے برابر ہے۔$\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[29] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اطراف کی

[29]کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r=r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta=\theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔اس مکعب کا حجم $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.64}$$

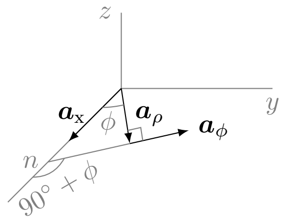
لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔شکل 1.33 میں $r=r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔اس کے برعکس $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔یوں $r=r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔اسی طرح $\theta=\theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta=\theta_0+\mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔ $\phi=\phi_0$ سطح کا $-r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi=\phi_0+\mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

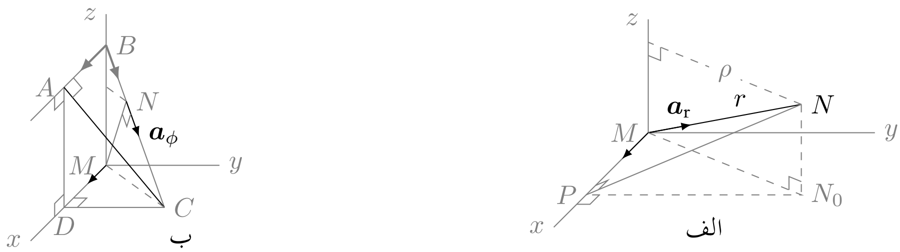
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$، $r\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$، $(r+\mathrm{d}r)\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ اور $(r+\mathrm{d}r)\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=(1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.34 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ $90° - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos(90° - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90° + \phi$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos(90° + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $r = \overline{MN}$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $x = \overline{MP}$ اور زاویہ $\underline{/NPM} = 90°$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= \frac{z}{r} = \cos\theta
\end{aligned}
$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \cos \underline{/ABC}$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\phi = \underline{/DMC}$ اور $\theta = \underline{/BMN}$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{/MNB}$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\underline{/NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\underline{/CBM} = \underline{/NBM}$ ہیں۔ اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{/BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{/CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{/MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$۔ یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos \underline{/ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔کولومب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے چارج کو نقطہ چارج[4] کہا جاتا ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant
[4] point charge

جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[5][6] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل[7] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854\times10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi}10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9\times10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674\times10^{-11}\times M\times1}{6\,370\,000\times6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[8] مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

---

[5] permittivity
[6] electric constant
[7] permeability
[8] wireless

حل:

$$F=\frac{6.674\times10^{-11}\times5.959\times10^{24}\times1}{42\,000\,000\times42\,000\,000}=0.225\,\mathrm{N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F=9\times10^9\frac{1\times1}{1\times1}=9\times10^9\,\mathrm{N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

$$\boldsymbol{R_{21}}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$\boldsymbol{a_{21}}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}}=\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

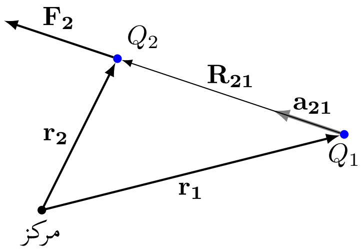
چارج Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 2.10 کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1}=-\boldsymbol{F_2}&=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}\end{aligned} \tag{2.11}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21}=R_{12}=R$ لکھا گیا ہے اور $-\boldsymbol{a_{21}}=\boldsymbol{a_{12}}$ کے برابر ہے۔دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $\mathbf{a_{21}}-$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (9-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}
$$

اور یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} &= \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi\times10^9}{4\pi}\frac{\left(-50\times10^{-6}\times20\times10^{-6}\right)}{38}\left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -0.237\left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$
\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{2.12}
$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولومب کا قانون خطی[9] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش [10] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[11] پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدن کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[12] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت[13] m_p پر بھی منحصر ہے۔مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \tag{2.15}$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

---

[9] linear
[10] gravity
[11] gravitational field
[12] m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[13] test mass

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع چارج ہے۔اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج[14] q_p پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت[15] یا صرف برقی میدان پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ایسا کولومب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی E تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \tag{2.17}$$

ہوتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی E ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے چارج Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{a}_R}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چارج کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{2.19}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

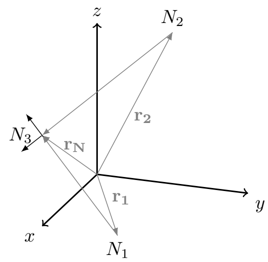
نقطہ (x', y', z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}\right|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}\right|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}\right|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[(x - x')\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y - y')\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (z - z')\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

جہاں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ \boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y'\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z'\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'} &= (x - x')\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y - y')\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (z - z')\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \end{aligned}$$

test charge[14]
electric field intensity[15]



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

کے برابر ہے۔

چارج ک
جوابات

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4,1,1)$ پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1,4,2)$ پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2,2,5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (2-1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (5-1)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\\ &= -2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 4\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned}$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned}R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}\\ &= \sqrt{21} = 4.583\\ \boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 4\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{21}}\\ &= -0.436\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 0.218\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 0.873\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= 9\times10^9\,\frac{100\times10^{-6}}{21}\left(-0.436\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 0.218\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 0.873\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)\\ &= -18\,686\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 9343\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 37\,414\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (2-4)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (5-2)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\\ &= 1\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 3\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}\\ \boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 3\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{14}}\\ &= 0.267\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - 0.535\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 0.802\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned}$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2\\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) + \left(8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 7853\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 63\,193\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

مساوات 2.16 کو

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں چارج q پر قوت F دیتا ہے۔

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت[16] ρ_L[17] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔لکیری چارج کثافت کی تعریف

$$
\rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}
$$

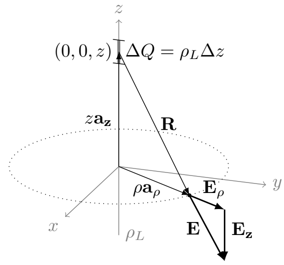
ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

---

[16] line charge density

[17] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود چارج سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر چارجوں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta \boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔محدد کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho \boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}z \tag{2.25}$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔ پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$\begin{aligned} -\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\ \alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

اور اختتامی حد

$$\begin{aligned} \infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\ \alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\rho&=\frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3\sec^3\alpha}\\&=\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\\&=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned}\tag{2.28}$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z=\rho\tan\alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z&=-\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=-\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=-\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

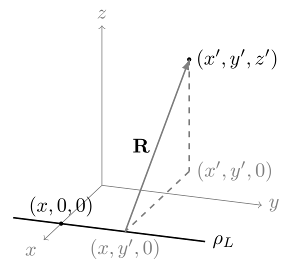
سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z&=-\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha}\\&=-\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\cos\alpha\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\&=0\end{aligned}\tag{2.29}$$

ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho\tag{2.30}$$



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R}\boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔(x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x'-x)^2+z^2}$ ہے جبکہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= (x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\end{aligned}$$

ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔نقطہ $N_1(0,0,6)$ اور نقطہ $N_2(0,8,6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E} = 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1 = 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2 = 18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت [18] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

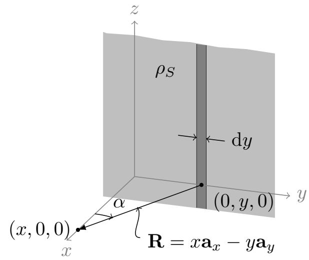
ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ چارج نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظرانداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y$ چارج پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S\,\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

[18] surface charge density



شکل 2.5: یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x, 0, 0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

کے برابر ہے جس سے

$$\begin{aligned} R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چارج بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} y &= x\tan\alpha \\ \mathrm{d}y &= x\sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{2.39}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}\\ &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\frac{x\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}\end{aligned}$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\alpha\\ &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\,\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X}\end{aligned}\tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2+y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}\Bigg|_{y=-\infty}^{y=+\infty}\\ &= 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{2.42}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر[19] سمجھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

[19] capacitor

- $x=0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x>0 \\ \boldsymbol{E}^{+}_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x<0 \end{aligned}$$

- $x=x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x>x_1 \\ \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x<x_1 \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x<0$، $x>x_1$ اور $0<x<x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x<0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\ \boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\ \boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \end{aligned} \tag{2.43}$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{2.44}$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس میدان کی سمت مثبت چارج بردار چادر سے منفی چارج بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y=2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y=5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y=10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور 0

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\text{h}} \rho_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{2.46}$$

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\text{h}} \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{2.47}$$

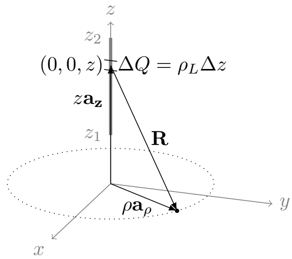
حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_h' \Delta h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

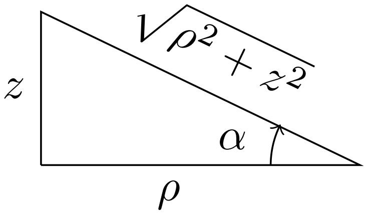
اس مساوات میں نقطہ r' پر چارج کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\text{h}} \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{2.48}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔$\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور چارج کی کثافت ρ_h' لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت



(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔یوں ہم لکھ سکتے ہیں

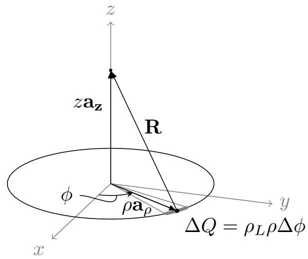
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\\
&= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho\tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \arctan\frac{z_2}{\rho}\\
\alpha_1 &= \arctan\frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)\\ &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{E}_\rho$ اور $\boldsymbol{E}_z$ کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}$$

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L\rho\Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں چارج ΔQ مقام $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\Delta\phi}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \rho \boldsymbol{a}_{\rho}\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ a_{Z} کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_{Z} تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \,\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔یہ چارج نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \boldsymbol{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔یوں

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں چارج کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: ہم کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ میں چارج $\rho_S a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔ محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ ہے۔یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R}=b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}-a\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{2.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}|=\sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}}&=\sqrt{(b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}-a\boldsymbol{a}_\mathrm{r})\cdot(b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}-a\boldsymbol{a}_\mathrm{r})}\\&=\sqrt{b^2+a^2-2ab\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}\\&=\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{|R|}=\frac{b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}-a\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 32 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{r}=\cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta=\pi$ اور $\theta=0$ کے برابر ہیں۔یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\pi}&=\sqrt{b^2+a^2+2ab}\\&=\sqrt{(b+a)^2}\\&=b+a\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری[20] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos 0}=\sqrt{b^2+a^2-2ab} \tag{2.56}$$

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b>a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b-a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab}=\sqrt{(b-a)^2}=b-a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $b<a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a-b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b \tag{2.58}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

[20] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر چارج سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_S a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0(b^2+a^2-2ab\cos\theta)}\frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\\&=\frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}\tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{[-a\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-a\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(b-a\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}]\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\tag{2.60}$$

حاصل ہوتا ہے۔ z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہی ممکن ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z=\frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔ سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔ بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z=\frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\tag{2.62}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z=\frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\tag{2.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمل میں $w=\cos\theta$ اور $\mathrm{d}w=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-\,\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right] = \frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right] = \frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w=\cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ہم

$$\begin{aligned}u &= w \\ \mathrm{d}v &= \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

لیتے ہیں۔یوں

$$v = \int \mathrm{d}v = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w\left[\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= w\left[\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} \\ &= \frac{-(b^2+a^2-abw)}{a^2b^2(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

سے

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \left.\frac{-(b^2+a^2-ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]$$

حاصل ہوتا ہے۔N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] = \frac{2a}{b^2(b^2-a^2)} \tag{2.68}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] = \frac{2b}{a^2(a^2-b^2)} \tag{2.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right) \\ &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل چارج $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہٰذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (r > a) \tag{2.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مرکز پر Q نقطہ چارج رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ایسی سطح کو فیراڈے حفاظتی سطح[21] کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

[21] Faraday shield

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی چارج کثافت پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 \,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r$ چارج پایا جائے گا۔ مثال 2.11 کے مطابق یہ چارج r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا چارج R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$\boldsymbol{E} = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R < a) \tag{2.73}$$

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چارج کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام چارج بطور نقطہ چارج کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R > a) \tag{2.74}$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ چارج کے میدان کو چارج سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اب چارج کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور چارج سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاو خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔ جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔ سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔ آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔ کسی بھی نقطہ (x, y) پر ایسے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x(x, y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y(x, y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.75}$$

شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ ب) لکیری چارج کثافت کے سمت بہاو خط۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔ میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔ اسی نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔ Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدد پر لامحدود لکیری چارج کثافت کا میدان

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $E_y = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=\frac{\cos\phi}{\rho}=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$E_y=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=\frac{\sin\phi}{\rho}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو

$$\boldsymbol{E}=\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y=\ln x+M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

2.8 سوالات

سوال 2.1: صفحہ 58 پر مساوات 2.60 میں a_{x} اور a_{y} اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاو

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائکل فیراڈے[1] کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے۔ چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر $-Q$ چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ بہتری در

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جا سکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاو[2] کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاو کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \tag{3.1}$$

برقی بہاو کی اکائی کولومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاو کی سمت الٹی ہو گی اور یہ چارج میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاو خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاو فی اکائی رقبے کو کثافت برقی بہاو[3] D کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.2}$$

---

[1] Michael Faraday
[2] electric flux
[3] electric flux density

سمتیہ کثافت برقی بہاو پائی جائے گی۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \text{خالی خلاء} \tag{3.3}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کروی محدد کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاو حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{3.4}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_R$ چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم جس میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام $\mathbf{r}'$ پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho_h'\Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام $\mathbf{r}$ پر

$$\Delta\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_h'\Delta h'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

کثافت برقی بہاو پیدا کرے گا۔ قانون کولومب خطی ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{D}$ بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا حجم کے تمام چارجوں سے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_h \frac{\rho_h'\,\mathrm{d}h'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{3.5}$$

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 53 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں $\mathbf{D}$ اور $\mathbf{E}$ کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاؤس کا قانون

فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے گاؤس کا قانون[4] کہتے ہیں۔

> کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

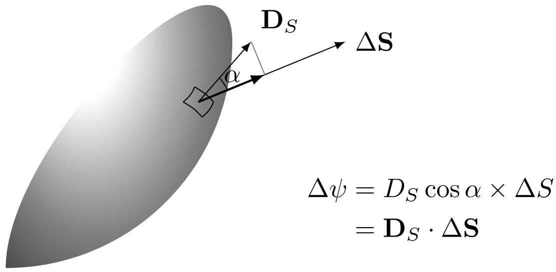
جناب گاؤس[5] نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ آئیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاو اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کے کثافت کی قیمت $D_S\cos\alpha$ ہو گی لہٰذا

$$\Delta\psi = D_S\cos\alpha\Delta S$$

---

[4] Gauss's law
[5] Carl Friedrich Gauss



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاو D_S لکھتے ہوئے زیر نوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاو تکملہ سے حاصل ہو گی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔یوں

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = Q \tag{3.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ[6] کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح[7] کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.7}$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.8}$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاو اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جا سکتا ہے۔حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{3.9}$$

[6] closed integral
[7] gaussian surface

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح ازخود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q=\int_L \rho_L \,\mathrm{d}L \tag{3.10}$$

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$Q=\sum_n Q = Q_1+Q_2+Q_3+\cdots+Q_n \tag{3.11}$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔آئیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جا سکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدد[8] کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہو گی۔اس کا مطلب ہے کہ کروی محدد کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر $\mathbf{D}$ تبدیل نہیں ہو گا۔

کروی محدد استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$\mathrm{d}S=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

لکھی جا سکتی ہے۔اسی کی سمتی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

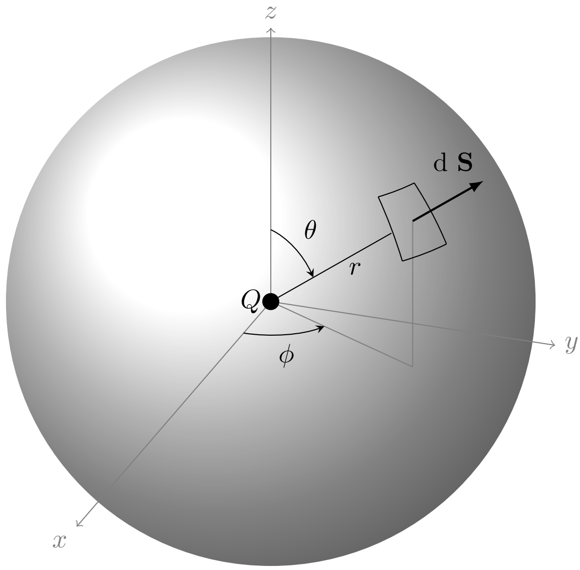
ہو گی۔اس سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت D_S اور سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی لہٰذا سمتی کثافتِ برقی بہاو

$$\boldsymbol{D}_S=D_S\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھی جائے گی۔یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاو

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\psi&=\boldsymbol{D}_S\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=(D_S\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\cdot\left(r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\\&=D_Sr^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

[8] spherical coordinates



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

ہو گی۔اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos\theta \Big|_0^\pi \,\mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi r^2 D_S
\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہٰذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہٰذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{3.12}$$

اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا صفحہ 42 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح

صفحہ 57 پر حصہ 2.11 میں کروی محدد کے مرکز پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S چارج کثافت پائی جائے کا میدان بیرونِ کروہ اور اندرونِ کروہ حاصل کیا گیا۔آئیں گاوس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔یوں $r < a$ رداس کے کرہ میں صفر چارج پایا جائے گا۔یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔اس کے برعکس $r > a$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہٰذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ چارج کو گھیرے گا لہٰذا یہاں

$$\boldsymbol{D} = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہو گا جس سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل چارج کو Q لکھا گیا ہے۔یہ نتائج گاوس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔لامحدود لکیر کو نلکی محدد کی z محدد تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔یوں یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کثافتِ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاوس کے قانون کی مدد سے کثافتِ برقی بہاو حاصل کریں۔

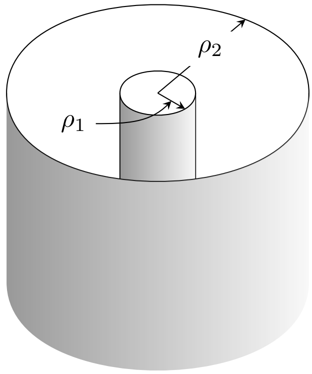
چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافتِ چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی نلکی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے[9] بند تصور کریں۔چونکہ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہے لہٰذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافتِ برقی بہاو D_ρ ہے لہٰذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاو ہو گا جو گاوس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

[9] آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نلکی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔



شکل 3.3: ہم محوری تار

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.14}$$

سے

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 47 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نلکی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ ایسی تار جسے ہم محوری تار[10] کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہو گی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہٰذا L لمبائی کی ایسی نلکی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned} \tag{3.16}$$

[10] coaxial cable

پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.17}$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.18}$$

پایا جائے گا۔بیرونی تار کے باہر فرضی نلکی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہٰذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$\boldsymbol{D}_{\text{تار کے باہر}} = 0 \tag{3.19}$$

ہو گا۔مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہٰذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار[11] بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندروری تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔3 mm رداس پر کثافتِ برقی بہاو $-5\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

---

[11] shielded

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہو گی۔صفحہ 50 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

اس شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔سامنے سطح پر $D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ پیچھے سطح پر $-D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو $S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $-S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہٰذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔یوں حجم سے برقی بہاو صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\psi_{\text{سامنے}} = D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = SD$$
$$\psi_{\text{پیچھے}} = (-D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}) \cdot (-S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}) = SD$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔اگر چارج بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ چارج پایا جائے گا۔یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پیچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho_S}{2}\boldsymbol{a}_N \tag{3.20}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔یوں

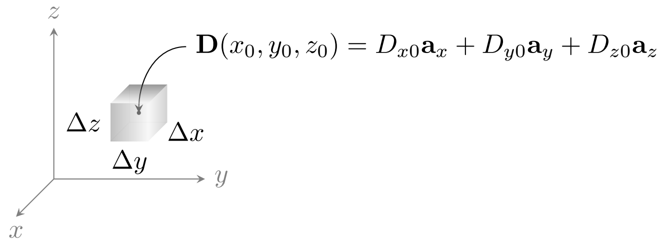
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{3.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدد کے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx، Δy اور Δz ہیں۔یہ ڈبہ برقی میدان $\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں ہے۔اس چھوٹی ڈبیہ پر گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.22}$$



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ڈبیہ کے چھ اطراف ہیں۔یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{\text{سامنے}}+\int_{\text{پیچھے}}+\int_{\text{بائیں}}+\int_{\text{دائیں}}+\int_{\text{اوپر}}+\int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}\int_{\text{سامنے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{سامنے}}\cdot \Delta\boldsymbol{S}_{\text{سامنے}}\\ &\doteq \left(D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)_{\text{سامنے}}\cdot \Delta y\Delta z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &\doteq D_{x,\text{سامنے}}\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں $\boldsymbol{D}$ کی قیمت ڈبیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ٹیلر تسلسل[12] کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a)=f(a)+\frac{1}{1!}(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2f''(a)+\cdots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ڈبیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0,y_0,z_0)$ پر

$$\boldsymbol{D}(x_0,y_0,z_0)=D_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+D_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کی قیمت سے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}D_{x,\text{سامنے}} &= D_{x0}+\frac{1}{1!}\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{1}{2!}\left[\frac{\Delta x}{2}\right]^2\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2}\cdots\\ &\doteq D_{x0}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x، y اور z ہیں لہٰذا تسلسل میں جزوی تفرق[13] کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}}\doteq\left(D_{x0}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$$

[12]Taylor series
[13]partial differential

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہٰذا پچھلی سطح $-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\text{X}}$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned}\int_{\text{پیچھے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{پیچھے}} \\ &\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\text{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\text{Y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)_{\text{پیچھے}} \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\text{X}}\right) \\ &\doteq -D_{x,\text{پیچھے}} \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x,\text{پیچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{پیچھے}} \doteq -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}\right) \Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned}\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} &\doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}\right) \Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}\right) \Delta y \Delta z \\ &\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \Delta h \tag{3.24}$$

کے برابر ہے۔حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\boldsymbol{D} = 2x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{C/m^2}$ ہو تب کارتیسی محدد کے مرکز پر $10^{-9}\,\mathrm{m^3}$ کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاو

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint\limits_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h \tag{3.25}$$

اور

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint\limits_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.26}$$

مساوات 3.25 میکس ویل[14] [15] کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو[16] بیان کرتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف جبکہ اس کا بایاں بازو پھیلاو حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدد میں پھیلاو کی مساوات} \tag{3.27}$$

سے سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[14] Maxwell equation
[15] جناب جیمز کلرک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔
[16] divergence

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ $\oint_S \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی جگہ $\boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.28}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ پانی کا بہاو، ایٹموں کی رفتار یا سیلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم $\boldsymbol{K}$ کو سمتی بہاو کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات $\boldsymbol{K}$ کا پھیلاو بیان کرتا ہے۔ پھیلاو کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

> کسی بھی سمتی کثافتی بہاو کے پھیلاو سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاو فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاو کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاو فی چھوٹی حجم کو پھیلاو کہتے ہیں۔ پھیلاو کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاو کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نا ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈھوبے نقطے پر بھی پانی کے رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈھوبا رہے اس وقت تک یہاں پھیلاو صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاو پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاو صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلاء پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاو پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پنکچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلنی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاو پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاو سے مراد نقطے سے انخلاء جبکہ منفی پھیلاو سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے $+$، ضرب کے لئے $\times$ اور تکملہ کے لئے $\int$ استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیبلا[17] کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ نیبلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{3.29}$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{3.30}$$

جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{K} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \cdot \left(K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + K_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + K_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\ &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.31}$$

[17] nabla, del

لیا جاتا ہے۔یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.32}$$

کے برابر ہے۔پھیلاو کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات} \tag{3.33}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاؤس کے قانون کی تفرق[18] شکل ہے۔اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل[19] شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 100 پر دیا گیا ہے۔

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔اس حصے میں نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی جائے گی۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\Delta_{S_{\text{سامنے}}} &= -\Delta\rho\Delta z \boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{پیچھے}}} &= +\Delta\rho\Delta z \boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z \boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z \boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
\Delta_{S_{\text{نیچے}}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho \boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔نلکی محدد میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔اس فرق کی بنا پر نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات قدر مختلف حاصل ہو گی۔چھوٹی حجم کے وسط میں

$$\boldsymbol{D} = D_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + D_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{3.34}$$

[18] differential
[19] integral

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$\boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} = \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} = \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{بائیں}} = \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{اوپر}} = \left(D_{z0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$
$$\boldsymbol{D}_{\text{نیچے}} = \left(D_{z0} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\int\limits_{\text{سامنے}} + \int\limits_{\text{پیچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left.\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\right|_N = D_\rho + \rho\left.\frac{\Delta D_\rho}{\Delta \rho}\right|_N = D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔اسی طرح

$$\int\limits_{\text{اوپر}} + \int\limits_{\text{نیچے}} = \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta\rho \Delta\phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.35}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نلکی محدد میں پھیلاو دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہر گز حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔ اس کے باوجود نلکی محدد میں بھی پھیلاو کے عمل کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ سے ہی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.36}$$

لیا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔ یوں سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے لئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial K_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \tag{3.37}$$

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات

کارتیسی محدد میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاو کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نلکی محدد میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاو کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاو کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی عمومی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جو تمام محدد کے لئے کار آمد ہے۔

کارتیسی محدد کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نلکی محدد کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدد کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدد[20] استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور تین عمودی اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ عمومی محدد کسی بھی محدد کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارتیسی محدد کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہو گا۔

شکل میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدد کے تین اطراف

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_1 &= k_1\,\mathrm{d}u\\
\mathrm{d}L_2 &= k_2\,\mathrm{d}v\\
\mathrm{d}L_3 &= k_3\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

ہیں۔ کارتیسی محدد میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $\mathrm{d}L_1 = \mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا۔ نلکی محدد میں

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1\\
k_2 &= \rho\\
k_3 &= 1
\end{aligned} \tag{3.38}$$

[20] generalized coordinates

جبکہ کروی محدد میں

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= r \\
k_3 &= r \sin\theta
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

کے برابر ہیں۔اسی طرح تین سمتی رقبے

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 \boldsymbol{a}_u \\
&\mathrm{d}L_1 \, \mathrm{d}L_3 \boldsymbol{a}_v \\
&\mathrm{d}L_1 \, \mathrm{d}L_2 \boldsymbol{a}_w
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاو حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر $\boldsymbol{D}$ کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاو حاصل کیا گیا۔یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاو سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاو حاصل کیا جائے گا۔حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاو

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 D_{u0} \\
&\mathrm{d}L_1 \, \mathrm{d}L_3 D_{v0} \\
&\mathrm{d}L_1 \, \mathrm{d}L_2 D_{w0}
\end{aligned}
$$

ہے۔ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 D_u) \, \mathrm{d}u &\quad \text{سامنے} \\
-\,\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 D_u) \, \mathrm{d}u &\quad \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
k_2 k_3 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w &\quad \text{سامنے} \\
-k_2 k_3 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w &\quad \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاو کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$
\frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w
$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔چھوٹی حجم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \mathrm{d}L_1 \, \mathrm{d}L_2 \, \mathrm{d}L_3 \\
&= k_1 k_2 k_3 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]=\lim_{\mathrm{d}h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}h}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف ہے۔یوں پھیلاو کی عمومی مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\tag{3.40}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نلکی اور کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نلکی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z)\right]\\&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(D_z)\qquad\text{نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned}\tag{3.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروی محدد میں پھیلاو

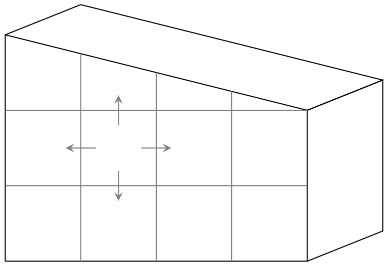
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta D_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta D_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(rD_\phi)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)\qquad\text{کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned}\tag{3.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاو

صفحہ 73 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_h$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

لکھتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}h \tag{3.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاو[21] بیان کرتا ہے۔اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔مسئلہ پھیلاو کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاو کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔ فاصلہ ر

مسئلہ پھیلاو کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے باآسانی ممکن ہے۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاو قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاو ثابت ہوتی ہے لہٰذا دونوں کا مجموعی بہاو حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاو رد کیا جائے گا۔یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاو کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاو کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاو سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے $\boldsymbol{D}$ سے پھیلاو کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہوتا ہے۔کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات کے تحت

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)$$

کے برابر ہے۔چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}\right) = \begin{cases} 0 & r>0 \\ \infty & r=0\end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔مرکز پر لا محدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہو گی۔

---

[21] divergence theorem

باب 4

توانائی اور برقی دباو

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ $\mathrm{d}L$ طے کرنے سے

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}L$$

کام کیا جاتا ہے۔اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام [1] کہتے ہیں۔شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F\cos\alpha\,\mathrm{d}L\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $F\cos\alpha\,\mathrm{d}L$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا گیا ہے۔

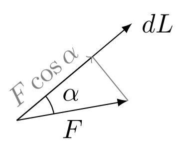
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\boldsymbol{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ پایا جاتا ہے [2] جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{F}_G = -mg\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ لکھا جا سکتا ہے۔کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_{\text{لاگو}}\cdot\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = mg\Delta h$$

[1] work
[2] $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہو گی۔کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے مخففی توانائی[3] کہتے ہیں۔اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخففی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{F}_G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔اختیار کردہ راستے کا مخففی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخففی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان[4] کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔برقی میدان $\mathbf{E}$ میں چارج q پر قوت $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ عمل کرتا ہے۔چارج کو فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$\mathrm{d}W = -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.1}$$

کام[5] کیا جاتا ہے۔کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.2}$$

توانائی درکار ہو گی۔

4.2 لکیری تکملہ

کار ہے۔

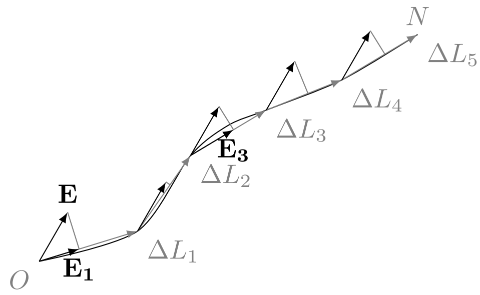
مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔شکل 4.2 میں یکساں[6] اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان $\boldsymbol{E}$ میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta\boldsymbol{L}_1$، $\Delta\boldsymbol{L}_2$، . . . میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔یوں $\Delta\boldsymbol{L}_1$ کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1$ توانائی درکار ہو گی۔یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_2 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_3 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_4 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_5 \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot (\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5) \end{aligned} \tag{4.3}$$

---

potential energy[3]
conservative field[4]
work[5]
uniform[6]



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

لکھی جا سکتی ہے۔ قوسین میں بند $\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5$ در حقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$W = -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \tag{4.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو تکمل کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$W = \int_O^N -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.5}$$

چونکہ q اور $\boldsymbol{E}$ کی قیمتیں مستقل ہیں لہٰذا انہیں تکمل کے باہر لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \int_O^N \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{L}_{ON}$ پر ہے جہاں $\boldsymbol{L}_{ON}$ نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

میں $N_1(1,0,2)$ سے $N_2(0,1,2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1\,\mathrm{C}$ کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان[7]

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

---

[7]slope

شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

ہے لہٰذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں لکیر کی مساوات

$$y = -x + 1 \tag{4.7}$$

ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.8}$$

لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\ &= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} \Big[(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Big] \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\ &= -0.1 \int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1 \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمل x کے ساتھ ہے لہٰذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یوں پہلا تکمل

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 [y+z]\,\mathrm{d}x &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2]\,\mathrm{d}x \\ &= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^0 \\ &= 0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔دوسرا تکمل y کے ساتھ ہے لہٰذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 [x+z]\,\mathrm{d}y &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2]\,\mathrm{d}y \\ &= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y\right)\Bigg|_0^1 \\ &= -0.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ہو گا۔تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1,0,2)$ سے $(0,1,2)$ تک $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میدان میں $0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z$$

میں پہلی تکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔ یاد رہے کہ ربع اول[8] میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned}
-0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0 (\sqrt{1-x^2}+2)\,\mathrm{d}x \\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + 2x)\right|_1^0 \\
&= -0.025\pi - 0.2
\end{aligned}$$

جواب، دوسرے تکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned}
-0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1 (\sqrt{1-y^2}+2)\,\mathrm{d}y \\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}y}{2} + \frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + 2x)\right|_0^1 \\
&= 0.025\pi + 0.2
\end{aligned}$$

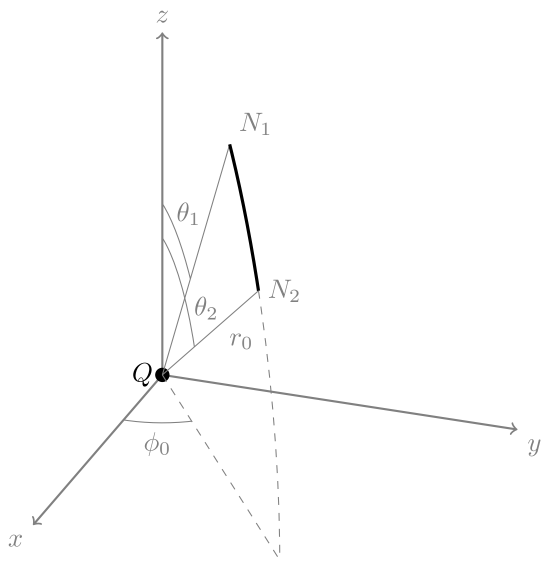
جواب حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گا۔

---

[8] first quadrant



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1, 0, 2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $-0.1328\,\mathrm{J}$ ، $-0.1328\,\mathrm{J}$

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{4.9}$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ یعنی $\boldsymbol{E}$ کے عمود میں سفر کریں۔ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہٰذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔آئیں تکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

کارتیسی، نلکی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دیتے ہیں۔یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned}
W &= -q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -q\int_{r_0,\theta_1,\phi_0}^{r_0,\theta_2,\phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q\int_{r_0}^{r_0} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{r_1,\theta_1,\phi_1}^{r_2,\theta_2,\phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot (\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہٰذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 3x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + x^3z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2x^3yz\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں محدد کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

- دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔
- ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔ $-1200\,\mathrm{J}$، $-1200\,\mathrm{J}$

4.3 برقی دباو

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو برقی دباو[9] کہتے ہیں۔ برقی دباو کے اکائی $\mathrm{J/C}$ کو وولٹ[10] کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہٰذا برقی دباو بھی مقداری ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباو یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.11}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباو V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

---

[9] voltage
[10] volt

برقی دباو دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔کسی نقطے کی حتمی برقی دباو معنی نہیں رکھتی۔برقی دباو بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ[11]، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباو کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباو کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ایسے نقطے کو برقی زمین[12]، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے۔عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباو، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباو مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباو ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کی برقی دباو کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔طبعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباو حاصل کی جائے گی۔

ہم محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباو حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباو V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباو V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباو

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{4.12}$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

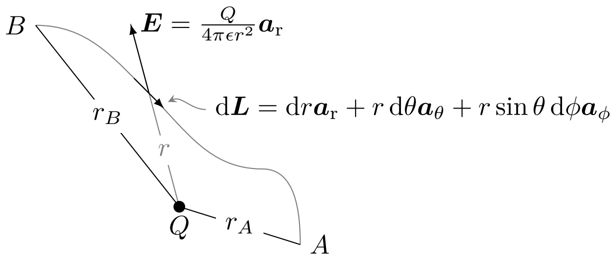
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر اوسط برقی میدان $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گا۔یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi\right)\\
&= -\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = -\int_{r_B}^{r_A}\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left.\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباو۔

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباو $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{4.13}$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نا کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباو مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $0 = \frac{1}{\infty}$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \tag{4.14}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباو کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لٰہذا برقی دباو لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لٰہذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.15}$$

جو کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباو V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباو مقداری ہے لٰہذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباو تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح[13] کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہو گی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو

z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت کا میدان صفحہ 71 پر مساوات 3.15

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho$$

[11] reference point
[12] electrical ground
[13] equipotential surface

دیتا ہے۔اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$V = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho_L \,\mathrm{d}\rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{4.16}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 71 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جس سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \boldsymbol{a}_\rho \tag{4.17}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری چارج کثافت پایا جاتا ہے۔اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباو

$$V = -\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \boldsymbol{a}_\rho \cdot \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{4.18}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو

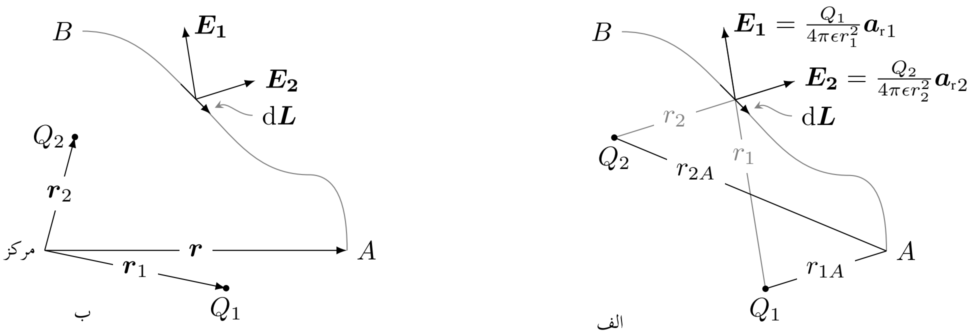
شکل 4.6-الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدد کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان $\boldsymbol{E}_1$ اور $\boldsymbol{E}_2$ دکھائے گئے ہیں۔یوں N پر کل میدان $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ ہو گا۔نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1 \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} + r_1 \,\mathrm{d}\theta_1 \boldsymbol{a}_{\theta 1} + r_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\phi_1 \boldsymbol{a}_{\phi_1} \tag{4.19}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2 \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} + r_2 \,\mathrm{d}\theta_2 \boldsymbol{a}_{\theta 2} + r_2 \sin\theta_2 \,\mathrm{d}\phi_2 \boldsymbol{a}_{\phi_2} \tag{4.20}$$

لکھا جائے گا۔ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباو۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&- \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}
\end{aligned}
$$

توانائی درکار ہو گی۔اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r_1$ ملتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r_2$ ملتا ہے۔ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$
\mathrm{d}W = -\frac{qQ_1\,\mathrm{d}r_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2\,\mathrm{d}r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$
\begin{aligned}
W = \int_B^A \mathrm{d}W &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{1B}}^{r_{1A}}\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{2B}}^{r_{2A}}\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2^2}\\
&= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1A}}-\frac{1}{r_{1B}}\right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2A}}-\frac{1}{r_{2B}}\right)
\end{aligned}
$$

توانائی درکار ہو گی۔نقطہ B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباو

$$
V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1A}}+\frac{Q_2}{r_{2A}}\right) \tag{4.21}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباو کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباو حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباو علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_1$ جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_2$ اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$
V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{4.22}
$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$ ہے۔یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.22

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{Q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|} \end{aligned} \tag{4.23}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(\boldsymbol{r})$ میں $\boldsymbol{r}$ سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q=\rho_h\Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_1)\Delta h_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_2)\Delta h_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\cdots+\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_n)\Delta h_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \tag{4.24}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام $\boldsymbol{r}_j$ پر کثافت کو $\rho_h(\boldsymbol{r}_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$V(\boldsymbol{r})=\int_{\text{حجم}}\frac{\rho_h(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}h'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.25}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔مقام $\boldsymbol{r'}$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}h'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔مساوات 4.25 نقطہ $\boldsymbol{r}$ پر برقی دباو دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ $\boldsymbol{r}$ تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(\boldsymbol{r})$ برابر توانائی درکار ہو گی۔

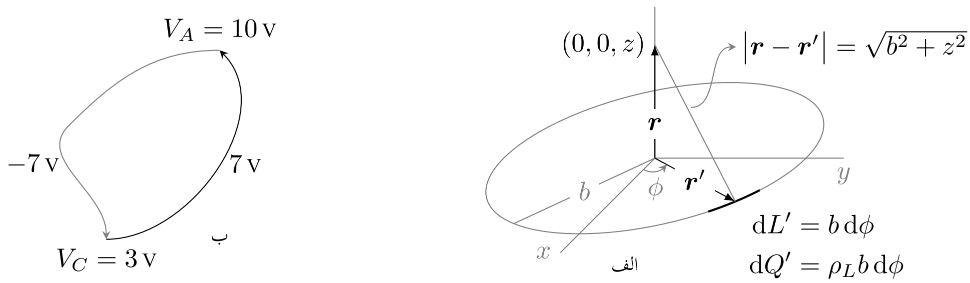
اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_S یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(\boldsymbol{r})=\int_{\text{سطح}}\frac{\rho_S(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.26}$$

$$V(\boldsymbol{r})=\int_{\text{لکیر}}\frac{\rho_L(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}L'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{4.27}$$

لکھتے۔ان مساوات میں $\mathrm{d}h'$، $\mathrm{d}S'$ اور $\mathrm{d}L'$ غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباو حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z=0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔$N(0,0,z)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے Z محدد پر پیدا برقی دباو۔ (ب)بند دائرے کی برقی دباو صفر ہے۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کا رداس $\boldsymbol{r}$ اور نلکی محدد کا رداس $\boldsymbol{\rho}$ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پہ $\boldsymbol{r}'$ کے مقام پر چھوٹی لکیر $\mathrm{d}L' = b\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ برقی دباو $\boldsymbol{r}$ پر درکار ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\lvert \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \rvert = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0,0,z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0,0,0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباو پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباو یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$V_A = -\int_\infty^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$
$$V_C = -\int_\infty^C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

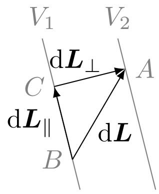
شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباو میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباو میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباو میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = -\int_C^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} - \int_A^C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \tag{4.28}$$

جہاں تکمل کے نشان پر گول دائرہ بند تکمل کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل 4.8: برقی دباو کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان[14] کے لئے درست ہے۔اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان[15] کہتے ہیں۔ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان[16] ہے۔یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخففی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخففی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہو گی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی مخففی توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباو پایا جاتا ہے۔ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباو میں $-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ تبدیلی رونما ہو گی جہاں برقی میدان کو $\boldsymbol{E}$ لکھا گیا ہے۔

$$\mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.29}$$

چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا ہم B سے C اور پھر A بھی جا سکتے تھے۔B سے C تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ لکھتے ہوئے

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) \tag{4.30}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\boldsymbol{E}$ کو ہم قوہ سطحہ کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.31}$$

جس سے

$$\mathrm{d}V = -(\boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) = -E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel - E_\perp\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.32}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel = E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ لکھا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp = 0$ ہے۔اس مساوات کا پہلا جزو $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباو دیتا ہے۔ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباو نہیں پایا جاتا یعنی $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر ہے۔اب چونکہ $\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0 \tag{4.33}$$

[14] static electric field
[15] conservative field
[16] یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولولہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\perp} \tag{4.34}$$

یوں

$$\mathrm{d}V = -E_{\perp}\,\mathrm{d}L_{\perp} \tag{4.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{E}_{\perp}$ کی جگہ $\boldsymbol{E}$ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}L_{\perp} \tag{4.36}$$

اس مساوات سے

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.38}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباو کو حتمی برقی دباو تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اسے $V(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباو کے آزاد متغیرات x، y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی برقی دباو کو

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.40}$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}z \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}y = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -E_x\,\mathrm{d}x$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہو گی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوت 4.40 میں پُر کرتے

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \tag{4.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad \text{کارتیسی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.45}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$E = -\nabla V \tag{4.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباو کی ڈھلوان[17] پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباو اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 78 پر مساوات 3.32 پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری[18] حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاو کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{4.47}$$

مشق 4.3: تفاعل $f(x,y,z) = 3 + z^2 e^y \sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

جواب: $z^2 e^y \cos x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z^2 e^y \sin x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2z e^y \sin x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}_{21} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ ان کے مابین فاصلہ $R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ہے۔ نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل: نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2، y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1، y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔ یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

---

[17] gradient

[18] طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاو کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کراتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} &= \frac{\partial}{\partial x_2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{-\frac{3}{2}}\left[2(x_2-x_1)\right]\\ &= \frac{-(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2-x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla_2\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$\nabla_2\frac{1}{R_{21}} = -\frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2} \tag{4.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$\nabla_1\frac{1}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} \tag{4.49}$$

کے برابر ہے۔یوں

$$\nabla_1\frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2\frac{1}{R_{21}} \tag{4.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان

نلکی محدد میں برقی دباو کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباو $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi + E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.52}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.53}$$

جہاں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صفحہ 27 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -\left(E_\rho\,\mathrm{d}\rho + E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi + E_z\,\mathrm{d}z\right) \tag{4.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}\phi = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ اور $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho = -E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi$$
$$E_z\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.55}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right) \tag{4.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \qquad \text{نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔ کارتیسی محدد کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔کروی محدد میں کسی بھی نقطے کے برقی دباو کو $V(r,\theta\phi)$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح $\boldsymbol{E}$ کو تین عمودی حصوں میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.59}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.60}$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi = -\left(E_r\,\mathrm{d}r + E_\theta r\,\mathrm{d}\theta + E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\right) \tag{4.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لٰہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r$ اور $-E_r\,\mathrm{d}r$ تبدیل ہوں گے۔یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لٰہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r = -E_r\,\mathrm{d}r$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta = -E_\theta r\,\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi = -E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\right) \tag{4.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \qquad \text{کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.63}$$

مشق 4.5: صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں پھیلاو کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ لئے گئے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{K_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{K_3}\frac{\partial}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \qquad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہٰذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.6 جفت قطب

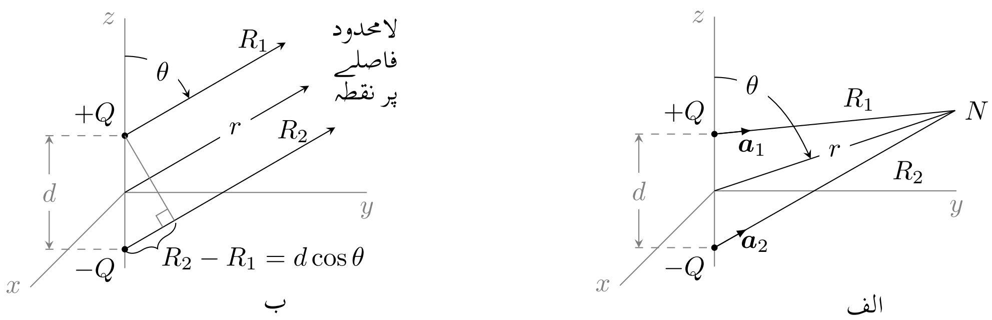
شکل 4.9-الف میں محدد کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدد پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ایسی جوڑی چارجوں کو جفت قطب[19] کہا جاتا ہے۔ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباو کی قیمتیں درکار ہیں۔کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتٰی کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباو اور برقی میدان حاصل کریں۔

شکل 4.9-ب میں R_1، R_2 اور r تینوں z محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$\begin{aligned}
R_2 - R_1 &= d\cos\theta \\
R_1 &= r - \frac{d}{2}\cos\theta \\
R_2 &= r + \frac{d}{2}\cos\theta
\end{aligned} \tag{4.64}$$

---

[19] dipole



شکل 4.9: جفت قطب

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباو V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \tag{4.65}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r - \frac{d}{2}\cos\theta)(r + \frac{d}{2}\cos\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{d\cos\theta}{(1 - \frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta)} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ نچلے قوسین میں $\cos\theta \leq 1$ اور $d \gg r$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta \ll 1$ ہو گا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.66}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{4.67}$$

ہم پہلے برقی دباو اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر تکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباو حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا چارج $|Q|$ ضرب چارجوں کے درمیان سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ کو معیار اثر جفت قطب[20] کہتے ہیں اور اسے $\boldsymbol{p}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{4.68}$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی چارج سے مثبت چارج کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا شکل 4.9 میں $\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔ اس طرح چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ کے برابر ہے لہٰذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$V = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.69}$$

[20] dipole moment

لکھ سکتے ہیں۔اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.70}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباو حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ $\boldsymbol{r}'$ جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی محدد نظام سے آزاد مساوات ہے۔

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباو r^2 گنا کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ اکیلے چارج کا برقی دباو ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو چارج نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت چارج کا اثر منفی چارج کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے $\boldsymbol{E}$ کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

جب تک Q ضرب $\boldsymbol{d}$ کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر $\boldsymbol{d}$ کو یوں تبدیل کیا جائے کہ $Q\boldsymbol{d}$ تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔اب اگر ہم $Q\boldsymbol{d}$ کی قیمت محدود رکھتے ہوئے $\boldsymbol{d}$ کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جا سکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جا سکے تو ایسی صورت میں ہمیں نقطہ جفت قطب حاصل ہو گا۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط

ہم پہلے صفحہ 61 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاو خط[21] پر غور کر چکے ہیں۔آئیں جفت قطب کے سمت بہاو خط کھینچنا دیکھیں۔برقی دباو کے سمت بہاو خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جا سکتے ہیں۔اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔مختلف برقی دباو کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباو کے سمت بہاو خط حاصل کئے جاتے ہیں۔شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔مساوات 4.65 کے تحت دونوں چارج سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباو صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر $\boldsymbol{a}_\theta$ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

یا

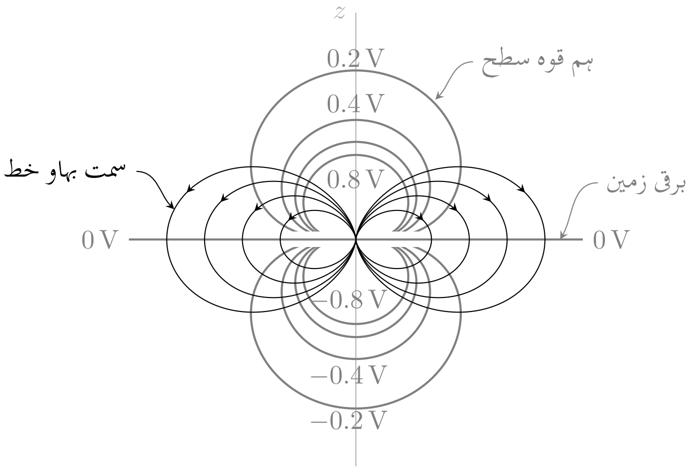
$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2\ln\sin\theta + \ln M$$

یا

$$r = M\sin^2\theta \tag{4.71}$$



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوہ اور سمت بہاو خط۔

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ تکمل کا مستقل ہے۔یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔ برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کریں۔

صفحہ 24 پر مثال 1.8 میں $\boldsymbol{R}_1 = R_1\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2 = R_2\boldsymbol{a}_2$ سمتیوں کو کروی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{R}_1 = (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$$
$$\boldsymbol{R}_2 = (r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$$

جس سے $R_1 = |\boldsymbol{R}_1| = \sqrt{\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)^2} \\
&= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}} \\
&\approx r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta} \qquad (d \ll r)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

آخری قدم پر $r \gg d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \cdots$$

---

[21] streamlines

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r}\cos\theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دیئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3(1 - \tfrac{d}{r}\cos\theta)^{\frac{3}{2}} = r^3\left(1 - \tfrac{3d}{2r}\cos\theta + \cdots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہٰذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$R_1^3 = r^3\left(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.73}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$R_2^3 = r^3\left(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\left[(r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta)} - \frac{\left[(r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right) \\
&= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta}{(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta)(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)
\end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2}\cos^2\theta \approx 1)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظرانداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta) \tag{4.75}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r,\theta,\phi)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔ ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty,\theta',\phi')$ سے کروی محدد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r,\theta',\phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r,\theta,\phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r,\theta,\phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.76}$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباو V_{23}

$$\begin{aligned}
V_{23} &= -\int_{N_3}^{N_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta)\cdot\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{r^3} \\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}r}{r^3} = \left.\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right|_{\infty,\theta',\phi'}^{r,\theta',\phi'} = \frac{Qd\cos\theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ہم اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ رکھتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
V_{12} &= -\int_{N_2}^{N_1} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta)\cdot r\,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_\theta}{r^3}\\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\bigg|_{r,\theta',\phi'}^{r,\theta,\phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\cos\theta-\cos\theta')}{r^2}
\end{aligned}$$

ہو گا۔اب N_1 سے N چلتے ہیں۔اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہٰذا

$$V_{01} = -\int_{N_1}^{N_0} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_1}^{N_0} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta)\cdot r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ اور $\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ کی بدولت تکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔یوں V_{23}، V_{12} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباو

$$V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباو حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔برقی دباو کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباو یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباو۔ہم ایسی برقی دباو جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباو پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے چارج کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔یہ توانائی چارج کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔چونکہ توانائی اٹل ہے لہٰذا یہ توانائی بصورت مخففی توانائی چارج میں منتقل ہو جاتی ہے۔جب تک بیرونی قوت چارج کو اس نقطے پر روکے رکھے یہ توانائی چارج میں بطور مخففی توانائی رہے گی۔اگر چارج کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخففی توانائی حرکی[22] توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے چارج کو حرکت دے گی۔یوں اب چارج ازخود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخففی توانائی کتنی ہو گی۔یہ توانائی ان چارجوں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔خالی خلاء میں چونکہ کوئی چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں پہلے چارج Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہٰذا دوسرے چارج Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل

---

[22] kinetic energy

کرنے کے لئے $Q_2V_{2,1}$ توانائی درکار ہو گی جہاں N_2 پر پہلے چارج کی وجہ سے پیدا برقی دباو کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔ $V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباو پیدا کرنے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے۔یوں

$$\text{چارج } Q_2 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_2V_{2,1}$$

لکھا جائے گا۔اب خلاء میں دو عدد چارج پائے جاتے ہیں لہٰذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباو ہوں گے۔یوں N_3 پر کل $V_{3,1}+V_{3,2}$ برقی دباو ہو گا لہٰذا

$$\text{چارج } Q_3 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_3V_{3,1}+Q_3V_{3,2}$$

اور اسی طرح

$$\text{چارج } Q_4 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_4V_{4,1}+Q_4V_{4,2}+Q_4V_{4,3}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار مزید چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔کل مخففی توانائی W تمام چارجوں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\begin{aligned}W&=Q_2V_{2,1}+Q_3V_{3,1}+Q_3V_{3,2}+Q_4V_{4,1}+Q_4V_{4,2}+Q_4V_{4,3}+\cdots\\&=Q_2(V_{2,1})+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2})+Q_4(V_{4,1}+V_{4,2}+V_{4,3})+\cdots\end{aligned}\tag{4.78}$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4V_{4,2}$ کو دیکھیں۔اسے یوں

$$Q_4V_{4,2}=Q_4\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0R_{42}}=Q_2\frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0R_{24}}=Q_2V_{2,4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح $Q_4V_{4,2}$ کو $Q_2V_{2,4}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$\begin{aligned}W&=Q_1V_{1,2}+Q_1V_{1,3}+Q_2V_{2,3}+Q_1V_{1,4}+Q_2V_{2,4}+Q_3V_{3,4}+\cdots\\&=Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots)+Q_2(V_{2,3}+V_{2,4}+\cdots)+Q_3(V_{3,4}+\cdots)\end{aligned}\tag{4.79}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}2W=\;&Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots)\\&+Q_2(V_{2,1}+V_{2,3}+V_{2,4}+\cdots)\\&+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2}+V_{3,4}+\cdots)\\&+\cdots\end{aligned}\tag{4.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام چارجوں کا مجموعی برقی دباو V_1 ہے۔یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباو حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے چارج Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔یوں

$$V_1=V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots$$

کے برابر ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$W=\frac{1}{2}\left(Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}Q_mV_m\tag{4.81}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots \\
V_2 &= V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots \\
V_3 &= V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots
\end{aligned}
$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی چارج کثافت ρ_h پائی جائے کی کل مخففی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں چارج $\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h$ کو نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں یہ مساوات تکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$
W = \frac{1}{2}\int_h \rho_h V \,\mathrm{d}h \tag{4.82}
$$

جہاں تکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$
\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \tag{4.83}
$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 78 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) V \,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{2}\int_h \left[\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)\right] \mathrm{d}h
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

اس مساوات میں تکمل کے دو اجزاء ہیں۔پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاو، جسے صفحہ 83 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی تکمل کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\frac{1}{2}\int_h \nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) \,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.85}
$$

یہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔h اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام چارج پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں چارج کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہو گی۔ایسے حصوں کا تکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی تکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہو گا۔مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جا سکتا ہے۔لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہو گی جہاں $r \to \infty$ ہو گا۔لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا چارج کثافت نقطہ مانند چارج Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباو پیدا کرے گا۔یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند تکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \to \infty$ کی صورت میں ایسا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں مساوات 4.84 کو

$$
W = -\frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \,\mathrm{d}h
$$

یا

$$W=\frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h=\frac{\epsilon_0}{2}\int_h E^2\,\mathrm{d}h \tag{4.86}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 66 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})=V(\nabla\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})&=\nabla\cdot(V[D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}])\\&=\nabla\cdot(VD_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+VD_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+VD_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\&=\frac{\partial(VD_x)}{\partial x}+\frac{\partial(VD_y)}{\partial y}+\frac{\partial(VD_z)}{\partial z}\\&=\frac{\partial V}{\partial x}D_x+V\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}D_y+V\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}D_z+V\frac{\partial D_z}{\partial z}\end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D})=V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}D_x+\frac{\partial V}{\partial y}D_y+\frac{\partial V}{\partial z}D_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V\nabla\cdot\boldsymbol{D}=V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)$$

اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\cdot\nabla V&=(D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\&=D_x\frac{\partial V}{\partial x}+D_y\frac{\partial V}{\partial y}+D_z\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بایاں بازو ہی ملتا ہے۔یاد رہے کہ $D_x\frac{\partial V}{\partial x}$ کو $\frac{\partial V}{\partial x}D_x$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 52 پر مساوات 2.44 دو لامحدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر $+\rho_S$ اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔ اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آمنے سامنے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخففی توانائی حاصل کریں۔

حل: چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 4.86 میں تکمل سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon_0^2}\int_h \mathrm{d}h = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.87}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔ منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباو ہو گا۔ منفی چادر پر برقی دباو چونکہ صفر لیا گیا ہے لہٰذا مساوات 4.82 کا تکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس حجم پر بھی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ مثبت چادر پر سطحی چارج کثافت کو حجمی چارج کثافت میں یوں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ الٹ قطب کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہٰذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر چارج پایا جائے گا۔ یوں مثبت چادر کے S حصے پر چارج $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی چارج کثافت تصور کیا جا سکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \to 0$ ہے۔ اس چارج کو $(a-t/2)$ تا $(a+t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$W = \frac{1}{2}\int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t}\frac{\rho_S a}{\epsilon_0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}S = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.88}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم مخففی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخففی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔ اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخففی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخففی توانائی مثبت چادر پر ہے۔ اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب منفی چادر پر برقی دباو $-Ea$ ہوتا اور مخففی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $\frac{-Ea}{2}$ برقی دباو حاصل ہوتی ہے اور مخففی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔ برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جا سکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخففی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔ اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل مخففی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ مخففی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس[3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

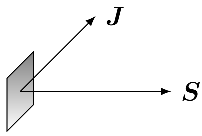
جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر کہتے ہیں۔یوں

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

---
[1] continuity equation
[2] boundary conditions
[3] images
[4] dielectric
[5] polarization



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو[6] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جائے گا اور یوں

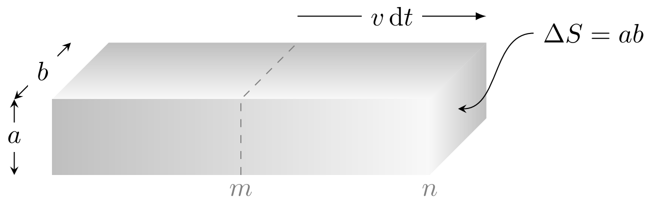
$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{S}$ کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں چارج $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں

---
[6] current density



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کر انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ چارج ہے۔ اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m^3}$ ہے میں حجمی کثافت چارج $3\,\mathrm{C/m^3}$ ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج $1\,\mathrm{C/m^3}$ رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ چارج خارج ہوتا ہے۔اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات[7] کی تکمل شکل ہے۔آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 83 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h$$

اگر حجم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h\,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_h \rho_h\,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[7] continuity equation

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔نہایت چھوٹی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر اس لمحہ میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔$\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[8] کہتے ہیں۔رفتار بہاو کا دارومدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[9] کہتے ہیں۔حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔چونکہ $\boldsymbol{v}_d$ کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$ کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہٰذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

---

[8] drift velocity
[9] mobility

مساوات 5.9 کو صفحہ 117 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e \mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ρ_e منفی مقدار ہے۔یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔σ کو موصلیت کا مستقل[10] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[11] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔اس کتاب کے آخر میں صفحہ 237 پر جدول 9.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[12] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940\,\mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5\,\mathrm{g}$ ہیں۔اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔برقی میدان $E = 0.1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[13] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940\,\mathrm{kg}$ ہیں لہٰذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہٰذا $0.1\,\mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

ہو گی۔ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$$

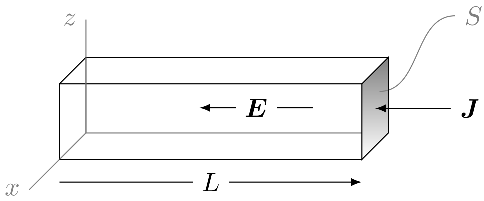
حاصل ہوتا ہے جہاں $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2\,S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ لکھا گیا ہے۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔اس رفتار[14] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً $300\,\mathrm{K}$ پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

---

[10] conductivity
[11] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز کمپنی کا بنیاد رکھا۔
[12] copper
[13] mole
[14] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔امید ہی سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار[15] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔سلاخ کو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = -J\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائے جاتے ہیں۔یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = -\int_0^L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^L E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \int_0^L E\,\mathrm{d}y = E\int_0^L \mathrm{d}y = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھتے ہیں۔یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔برقی رو

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma\frac{V}{L}$$

[15] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

یا

$$V = I\frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R = \frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V = IR \tag{5.15}$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[16] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[17] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83\times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ اور $\sigma = 5.8\times 10^{7}$ ہے لہٰذا

$$R = \frac{1000}{5.8\times 10^{7}\times 2.83\times 10^{-7}} = 0.61\,\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔(ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔(پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔

---

[16] resistance
[17] ohm

جوابات: $1.91\,\frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$، $3.82\,\frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ اور $2.55\,\frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 78 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10}\,\text{C}/\text{m}^3$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہٰذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل[18] رکھتا ہے۔تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 9.1 اور جدول 9.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07\,\mu\text{s}$$

---

[18] time constant

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جا سکتا ہے۔ اس لمحاتی چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جا سکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون[19] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

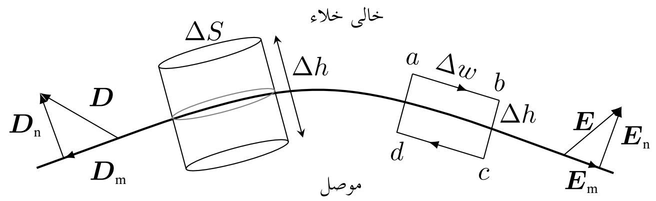
یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جا سکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔ یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \tag{5.17}$$

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر چارج سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اس سرحد پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دکھائے گئے ہیں۔خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کو $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت حاصل کریں۔ہم $\boldsymbol{E}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ حاصل کریں گے۔پہلے $\boldsymbol{E}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}+\int_b^c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}+\int_c^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}+\int_d^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=E_m\Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=-E_{n,b}\frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=E_{n,a}\frac{\Delta h}{2}$$

electrostatic[19]

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w + \left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔ اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{اوپر ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ بیلن کے اوپر والے سرے پر

$$\int_{\text{اوپر ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{مماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 210\boldsymbol{a}_\text{x} - 350\boldsymbol{a}_\text{y} + 99\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر E_m، E_n اور ρ_S حاصل کریں۔

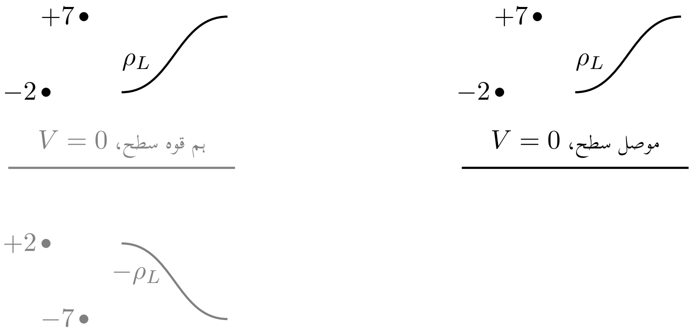
جوابات: 0، $420\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $3.71\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 107 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے اوپر جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتا ہے۔موصل سطح کے اوپر جانب میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح کے اوپر جانب سے جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین کے اوپر مثبت نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح کے اوپر جانب برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم برقی زمین کے نچلی جانب عین مثبت چارج کے نیچے اور اتنے ہی فاصلے پر برابر مگر منفی چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

گا۔اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس[20] کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔لہٰذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح کے اوپر جانب مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z=3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5\,\mu\mathrm{C}$ کا عکس $-5\,\mu\mathrm{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔یوں $5\,\mu\mathrm{C}$ نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

---

[20] image

پیدا کرے گا۔اسی طرح $-5\,\mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}+5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}+5\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کل میدان

$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}}=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}=\frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}}=-14.13\times10^{-9}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S=-14.3\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_{+}$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی $\boldsymbol{E}_{\text{کل}}$ ہو جاتی ہے۔درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

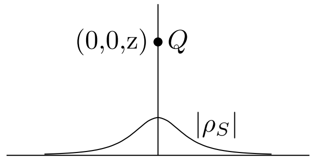
مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل:اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{Q(\rho\boldsymbol{a}_{\rho}-z\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-Q(\rho\boldsymbol{a}_{\rho}+z\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$\boldsymbol{D}=\frac{-2Qz\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-a_{\mathrm{z}}$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{5.21}$$

پایا جائے گا۔شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جا سکتا ہے۔یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلکان اور جرمینیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ[21] سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔نیم موصل دوری جدول[22] کے چوتھے جماعت[23] سے تعلق رکھتے ہیں۔دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں انہیں عطا کنندہ[24] عناصر کہتے ہیں۔نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں المونیم کو قبول کنندہ[25] عنصر کہا جاتا ہے۔ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول[26] کہا جاتا ہے۔نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جا سکتی ہے۔اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کے رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

---

[21] doping
[22] periodic table
[23] group
[24] donor
[25] acceptor
[26] hole

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر خالص سلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہے۔جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ اور $0.17\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہیں۔خالص سلیکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

5.7 ذو برق

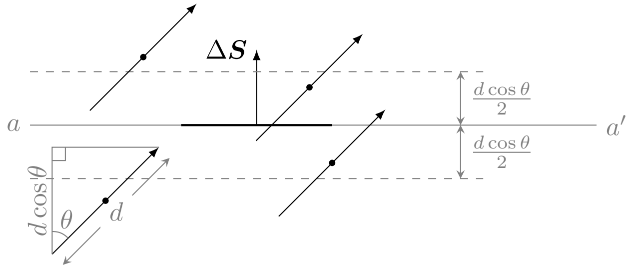
اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ایسے اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جا سکتی ہے۔آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہٰذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ایسے مالیکیول کو قطبی[27] مالیکیول کہتے ہیں۔قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ایسے اشیاء کو غیر قطبی[28] کہتے ہیں۔بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا

---

[27] polar
[28] non polar



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ہے۔مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے ذو برقی[29] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج[30] کہتے ہیں۔اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 105 میں دئے مساوات 4.68

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا کل معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔تقطیب[31] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔Δv کو کم سے کم[32] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P} = 0$ ہو گا۔ذو برق کے اندر تصوراتی سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر

[29] dielectric
[30] bound charge
[31] polarization
[32] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔اسی طرح aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta \boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta \boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صحہ 67 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0\boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے چارج $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} Q &= \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \\ Q_m &= \int_h \rho_m \,\mathrm{d}h \\ Q_{\text{کل}} &= \int_h \rho_{\text{کل}} \,\mathrm{d}h \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{P} &= -\rho_m \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho_{\text{کل}} \end{aligned}$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

قلم میں دوراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں با آسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جا سکے اسے آسان محور[33] یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔۔ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں ناہم سموت[34] کہلاتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال[35] کی خاصیت رکھتے ہیں۔ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ایسے اشیاء ہم سمتی[36] کہلاتے ہیں۔انجنیئر نگ میں استعمال ہونے والے ذو برق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.36}$$

[33] easy axis
[34] anisotropic
[35] ferroelectric
[36] isotropic

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e\epsilon_0$ یا $\epsilon_0(\epsilon_R-1)$ لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+(\epsilon_R-1)\epsilon_0\boldsymbol{E}$$

یا

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_R\epsilon_0\boldsymbol{E}=\epsilon\boldsymbol{E} \tag{5.37}$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$\epsilon=\epsilon_R\epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ان کا تعلق

$$\chi_e=\epsilon_R-1 \tag{5.39}$$

ہے۔

χ_e ذو برقی مستقل[37]، ϵ_R جزوی برقی مستقل[38] جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[39] کہلاتے ہیں۔اس کتاب کے آخر میں صفحہ 238 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 9.2 میں دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں[40] خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned}D_x&=\epsilon_{xx}E_x+\epsilon_{xy}E_y+\epsilon_{xz}E_z\\D_y&=\epsilon_{yx}E_x+\epsilon_{yy}E_y+\epsilon_{yz}E_z\\D_z&=\epsilon_{zx}E_x+\epsilon_{zy}E_y+\epsilon_{zz}E_z\end{aligned} \tag{5.40}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل[41] کہا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔ناہم سموت اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ناہم سموت اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک ناہم سموت ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon=\epsilon_0\begin{vmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{vmatrix}$$

ہے۔برقی میدان $\boldsymbol{E}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{E}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E}=1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D}=4\sqrt{3}\epsilon_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{D}=9\epsilon_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{D}=\epsilon_0(4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+9\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+9\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$

---

[37] susceptibility
[38] relative electric constant, relative permittivity
[39] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[40] non homogeneous
[41] tensor

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔یہی ناہم سموت ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔(الف) ذو برق میں $E = 5\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ پایا جاتا ہے۔(ب) $D = 2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔(پ)ذو برق میں 6×10^{20} مالیکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26}\,\mathrm{C\,m}$ ہے۔

جوابات: $1.156\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$، $1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $7.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ایسا کرنے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے

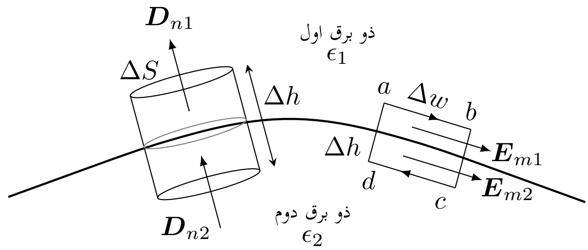
$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \to 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{5.41}$$



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.42}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ[42] ہوتا ہے۔اس کے برعکس مساوات 5.42 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاو جوڑ دار[43] ہوتا ہے۔یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاو میں سیڑھی نما[44] تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاوس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int\limits_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}_{m} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{5.43}$$

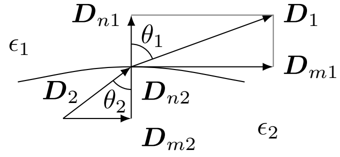
لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.43 کے پہلے جزو سے

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{n1}\Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور بیلن کے اوپر ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ $\boldsymbol{D}_{n2}$ اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔مساوات 5.43 کا دوسرا جزو

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D_{n2}\Delta S$$

[42] continuous
[43] discontinuous
[44] step



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے نلکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.43 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ان تمام نتائج سے

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{5.44}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم ذو برق کا برقی مستقل ϵ_R گنا کرتے ہوئے اس میں مقید چارج کا حساب رکھتے ہیں۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برق کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔انجنیئر نگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.45}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$\epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} \tag{5.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائی جاتی ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار[45] ہے۔اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$\begin{aligned} D_{m1} &= D_1 \sin\theta_1 \\ D_{n1} &= D_1 \cos\theta_1 \\ D_{m2} &= D_2 \sin\theta_2 \\ D_{n2} &= D_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

[45] discontinuous

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$
\begin{aligned}
\frac{D_{n1}}{D_{n2}} &= \frac{D_1 \cos\theta_1}{D_2 \cos\theta_2} = 1 \\
\frac{D_{m1}}{D_{m2}} &= \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.45 اور مساوات 5.42 کا استعمال کیا گیا ہے۔انہیں

$$
\begin{aligned}
D_1 \cos\theta_1 &= D_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

لکھ سکتے ہیں۔ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$
\frac{\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2}
$$

جس سے

$$
\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}
\tag{5.48}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ ہوتا ہے لٰہذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_2 > \epsilon_1$ تصور کیا گیا ہے لٰہذا اس میں $\theta_2 > \theta_1$ ہے۔

مساوات 5.47 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
D_1^2 \cos^2\theta_1 &= D_2^2 \cos^2\theta_2 \\
&= D_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\
&= D_2^2 - D_2^2 \sin^2\theta_2
\end{aligned}
$$

اس میں مساوات 5.47 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin\theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$
D_1^2 \cos^2\theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1}
\tag{5.49}
$$

ملتا ہے۔چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لٰہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$
\begin{aligned}
E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} &= \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \\
&= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1}
\tag{5.50}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_1 = D_2$ ہوتا ہے۔اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_1 = E_2$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برق کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسا ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھا۔ موصل میں $\boldsymbol{E} = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برق میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہو گا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاو $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \tag{5.51}$$

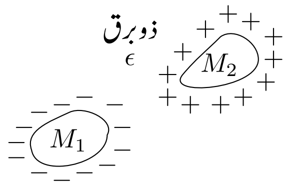
مثال 5.8: ٹیفلون

5.10 کپیسٹر

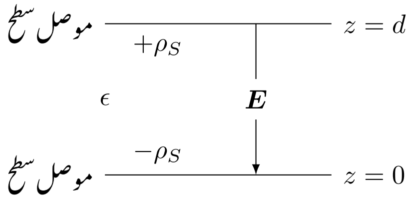
شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔ M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہٰذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاو کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاو کا دخول ہو گا۔یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی۔ $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہٰذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔



شکل 5.10: کپیسٹنس کی تعریف۔



شکل 5.11: متوازی چادر کپیسٹر۔

کپیسٹنس C[46] کی تعریف

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{5.52}$$

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباو V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو تکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں صفحہ 67 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 91 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کپیسٹنس کی عمومی مساوات

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{-\int_{-}^{+} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}} \tag{5.53}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاو بھی دگنی ہو جائے گی۔یوں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباو بھی دگنا ہو گا۔اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباو ایک بار پھر وہی کپیسٹنس دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کپیسٹنس کی قیمت کا دارومدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کپیسٹنس کی اکائی فیراڈ[47] ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ[48] کے برابر ہے۔ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور کپیسٹنس کو مائیکروفیراڈ μF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔نچلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ اوپر چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 52

[46] capacitance
[47] Farad
[48] یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔

پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\rho_S}{\epsilon}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو گی۔میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔مثبت سطح سے خارج برقی بہاو کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاو داخل ہوتا ہے لہٰذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہو گا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = -\int_0^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\epsilon}\cdot \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon}\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباو ہو گا۔لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہو گا۔حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہو گا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S\,\mathrm{d}S = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{5.54}$$

ہو گی۔کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔میدان کے پھولنے[49] کو ہم نے نظرانداز کیا ہے۔کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جا سکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ابرق کپیسٹر[50] انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا[51] کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.9: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا۔اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 9.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$C = \frac{5.4\times 0.01^2}{36\pi\times 10^9\times 0.25\times 10^{-3}} = 19.1\,\mathrm{pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

---

[49] fringing
[50] mica capacitor
[51] deposit

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر

صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباو دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔اس طرح اتنی تار کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{5.55}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_A < r_B$ ہے۔اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہو گا۔دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدد کے مرکز پر نقطہ چارج $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباو صفحہ 93 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان سطحوں کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \tag{5.56}$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \qquad \text{کرہ کی کپیسٹنس} \tag{5.57}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔یہ مساوات رداس R کرہ کی کپیسٹنس دیتا ہے۔یاد رہے کہ اس کپیسٹر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

مثال 5.10: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔خالی خلاء میں موصل بلور کی کپیسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^{9}} = 0.55\,\mathrm{pF}$$

---

r_A رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چھڑانے سے $\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی بدولت

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r > r_1) \end{cases}$$

ہو گا۔ برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباو

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned}$$

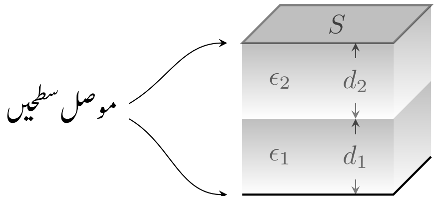
ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.58}$$

حاصل ہوتی ہے۔

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہو گا۔ یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں



$$C_2 = \frac{d_2}{\epsilon_2 S}$$

$$C_1 = \frac{d_1}{\epsilon_1 S}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q = \rho_S S$ ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

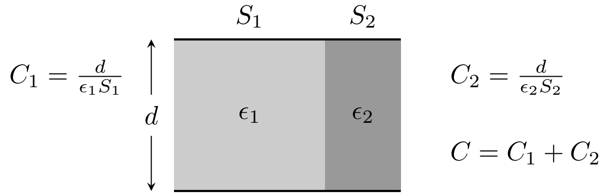
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.59}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned} \tag{5.60}$$

کے برابر ہیں۔یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جا سکتے ہیں۔انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے۔



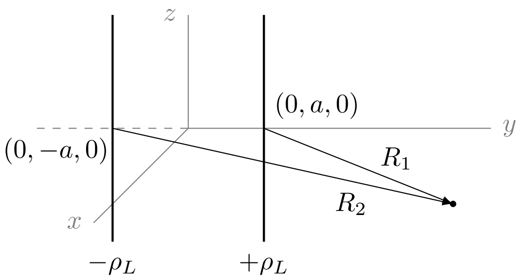
شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.61}$$

لکھ سکتے ہیں۔آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہٰذا نچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برق مستقل کے ذو برق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہو گا۔یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned} \tag{5.63}$$

کے برابر ہیں۔

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

شکل 5.14 میں دو لا محدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو $(0, a, 0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت $+\rho_L$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0, -a, 0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت $-\rho_L$ پایا جاتا ہے۔ z محدد پر لا محدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو صفحہ 94 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10} R_2}{R_{20} R_1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y=0$ پر $R_{10}=R_{20}$ ہو گا لہٰذا دراصل ہم برقی زمین کو $y=0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_1 &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y-a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ \boldsymbol{R}_2 &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y+a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\sqrt{\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.64}$$

یا

$$e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}}=\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.65}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباو مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$K_1=e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}} \tag{5.66}$$

لکھ کر اسے

$$K_1=\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2+y^2-2ay\frac{K_1+1}{K_1-1}=-a^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے دونوں جانب $a^2\frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

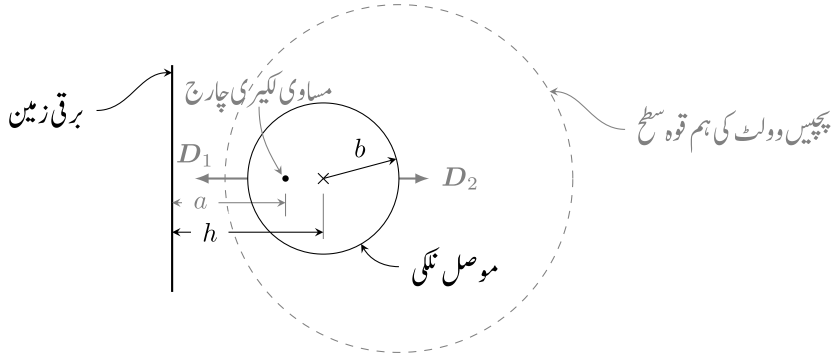
$$x^2+\left[y-a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\right]^2=\left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2 \tag{5.67}$$

لکھا جا سکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $\left[0,\frac{a(K_1+1)}{K_1-1}\right]$ پر ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نلکی شکل رکھتی ہے۔مساوات 5.67 میں

$$\begin{aligned}b&=\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\\ h&=a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\end{aligned} \tag{5.68}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$x^2+(y-h)^2=b^2 \tag{5.69}$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گیں جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہو گا۔ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ہم مختلف برقی دباو $V_2, V_3, \ldots$ کے لئے $K_2, K_3, \ldots$ حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباو کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نلکی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.68 کی مدد سے a، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.68 کو حل کرتے ہوئے

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$
$$K_1 = \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}\right)^2 \tag{5.70}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نلکی V_1 وولٹ پر ہے لہٰذا ان کے درمیان V_1 برقی دباو ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے L لمبائی پر کل چارج $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نلکی پر یہی $Q = \rho_L L$ چارج ہو گا۔یوں L لمبائی کے موصل نلکی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \frac{h}{b}} \tag{5.71}$$

کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $h \gg b$ ہو گا لہٰذا مساوات 5.71

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \tag{5.72}$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.71 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ آئیں مثال 5.11 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.11: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- نلکی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نلکی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔
- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو بہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- نلکی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لہٰذا مساوات 5.70 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66\,\mathrm{m}$$
$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5}\right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.66 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.71 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22\,\mathrm{nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.66 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9\times10^9\times2.11\times10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 5.68 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\times 8.66\times\sqrt{3.73}}{3.73-1} = 12.25\,\mathrm{m} \\ h &= 8.66\times\left(\frac{3.73+1}{3.73-1}\right) = 15\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- کسی بھی جگہ $\boldsymbol{E}$ کو مساوات 5.64

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(x^2+(y+a)^2) - \ln(x^2+(y-a)^2)\right]$$

کے ڈھلوان $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس سے

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = -\epsilon_0\nabla V = -\epsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2x}{x^2+(y-a)^2}\right] \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right] \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر $\boldsymbol{D}$ عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہٰذا ہم موصل نلکی پر برقی زمین کے قریبی جانب $\boldsymbol{D}_1$ اور اس سے دور جانب $\boldsymbol{D}_2$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے نلکی کا قریبی فاصلہ $h-b = 5\,\mathrm{m}$ ہے۔یوں $x=0$ اور $y=5$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2\times 0}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(5+8.66)}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2(5-8.66)}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{D}_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گا۔ زمین سے دور نلکی پر $x = 0$ اور $y = h + b = 10 + 5 = 15\,\mathrm{m}$ ہیں جس سے

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=0\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(15+8.66)}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2(15-8.66)}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=-\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

یا

$$
\boldsymbol{D}_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاو کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نلکی پر

$$
\begin{aligned}
\rho_{S\text{قریبی}} &= \frac{0.693\rho_L}{4\pi}\\
\rho_{S\text{دور}} &= \frac{0.231\rho_L}{4\pi}
\end{aligned}
$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہٰذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نلکی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہو۔ نلکی سے پیدا ہم قوہ سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.70 کو ثابت کریں۔

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{6.3}$$

ہو گا۔

[1] homogeneous
[2] Poisson equation

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جا سکتیں ہیں۔عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پائی جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظرانداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 111 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)\\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1-V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1-V_2)]^2=0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1-V_2)=0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1-V_2)=0$ کا مطلب ہے کہ V_1-V_2 کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔یہ تب ہی ممکن ہے جب V_1-V_2 کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1-V_2=\text{اٹل قیمت}$$

ہو۔حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔مگر سرحد پر

$$V_1-V_2=V_{1s}-V_{2s}=0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت ازخود صفر ہے۔یوں

$$V_1=V_2 \tag{6.9}$$

ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا اتریں گے لہٰذا $\nabla^2 V_1=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1-V_2)=0$ حاصل ہوتا ہے۔سرحد پر اب بھی $V_{1s}-V_{2s}=0$ ہو گا۔یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔یوں

$$\nabla^2 V_1=0$$
$$\nabla^2 V_2=0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1V_1+c_2V_2)=0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

linear[5]

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 102 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \qquad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔در حقیقت ایسا نہیں ہے۔کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔A اور B دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$
$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$
$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}\right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V = \frac{V_0 x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کے سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S = D_n \boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر چارج بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔
- کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

اور

$$\boldsymbol{D} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}\bigg|_{x=d} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

کے برابر ہے۔چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{a}_{\text{X}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔یوں

$$\rho_S = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 142 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V=A\ln\rho+B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho=b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho=a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n=D\bigg|_{\rho=a}=\frac{\epsilon V_0}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$Q=\frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a\ln\frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C=\frac{2\pi\epsilon L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 143 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho\neq 0$ ہو۔یاد رہے کہ $\rho=0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho}=\frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho\neq 0$ ہو۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}}\qquad \rho\neq 0 \tag{6.22}$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

صورت اختیار کرے گا۔یہاں بھی پہلا حل $\rho=\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہاں بھی $\rho=0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2}=0\qquad \rho\neq 0$$

رہ جاتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V=A\phi+B$$

حاصل ہوتا ہے۔ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho=0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔یوں $\rho=0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔یہاں $\phi=0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi=\phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V=\frac{V_0\phi}{\phi_0}\qquad \rho\neq 0 \tag{6.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے

$$\boldsymbol{E}=-\frac{V_0}{\phi_0\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

---

[6] undefined

مثال 6.4: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔اگر $r \neq 0$ اور $\sin\theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔اس کے پہلی بار تکمل سے

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = \frac{A\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V = A \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} + B = A \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\frac{\pi}{2} < \theta_0$ ہے تب ہمیں

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا چارج کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی نا کہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کیا جا سکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $0 < x$ خطہ n

[7] silicon
[8] diode

قسم کا ہے۔مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ ازخود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹوں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔آئیں اس چارج کثافت کے لئے پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}$$

حل کریں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a} \tag{6.33}$$

[9] free holes
[10] free electrons
[11] diffusion

کے برابر ہے۔دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V=\frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon}\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}}+B$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے $B=-\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V=\frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon}\left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0=V_{x\to+\infty}-V_{x\to-\infty}=\frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں کل مثبت چارج

$$Q=S\int_0^{\infty} 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x=2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q=S\sqrt{\frac{2\rho_0\epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C=\frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

سے

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C=\sqrt{\frac{\rho_0\epsilon}{2\pi V_0}}S=\frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

[12] cross sectional area

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{6.38}$$

صورت اختیار کرے گا۔تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ایسا ہی ایک سادہ حل $V=x+y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V=G(x)+H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ہم $V=x+y$ کو $V=V_1+V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned}V_1&=X_1(x)Y_1(y)=1x\\ V_2&=X_2(x)Y_2(y)=1y\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y)=1$ اور $X_2(x)=1$ کے برابر ہیں۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x+y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V=x+y$ جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V=G(x)+H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔اگر $V=XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)+X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔m^2 کو علیحدگی مستقل[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}&=m^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}&=-m^2\end{aligned}$$

---

[13] separation constant

یا

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) = 0 \\
\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) = 0
\end{aligned} \tag{6.41}
$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C \cos my + D \sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right) \left(C \cos my + D \sin my\right) \tag{6.44}$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

---

[14] power series

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = m^2 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \right)$$

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned} 2 \times 1 a_2 &= m^2 a_0 \\ 3 \times 2 a_3 &= m^2 a_1 \\ 4 \times 3 a_4 &= m^2 a_2 \end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \\ a_4 &= \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0 \\ a_6 &= \frac{m^6}{6!} a_0 \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \qquad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m} \\ a_5 &= \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \qquad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{0,\text{جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

---

[15] coefficient

یا

$$X = a_0 \sum_{0,\text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0,\text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \cdots$$

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \cdots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$Y = C \cos my + D \sin my \tag{6.47}$$

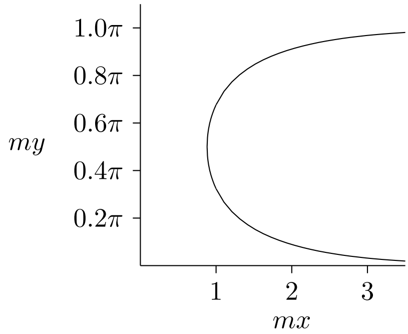
لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx)\,(C \cos my + D \sin my) \tag{6.48}$$

یا

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right)(C \cos my + D \sin my) \tag{6.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1: $my=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ایسی صورت میں $V=0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V=V_0\sinh mx\sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD=V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx=\frac{1}{2}\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)$$

ہے لہٰذا $x=0$ پر $\sinh mx=0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y=0$، $y=\frac{\pi}{m}$، $\frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم قوہ سطحیں $x=0$ اور $y=\frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n=0,1,\cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x=0$، $y=0$ اور $y=\frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V=V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0=V_0\sinh mx\sin my$$

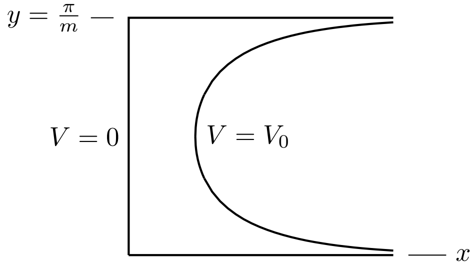
یا

$$my=\sin^{-1}\frac{1}{\sinh mx}$$

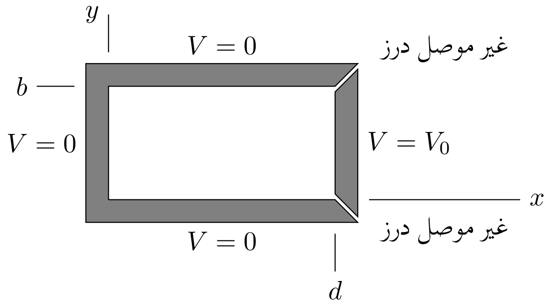
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔$x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔انس درز کے اثر کو نظرانداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right)\\
0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔$y = 0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= B\sinh mx\,(C\cos 0 + D\sin 0)\\
0 &= BC\sinh mx
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔اب چونکہ $A = 0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD\sinh mx\sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 \qquad (0 < y < b) \\ V &= -V_0 \qquad (b < y < 2b) \end{aligned}$$

---

[16] Fourier series

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y + \int_b^{2b}(-V_0)\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\right]$$

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$
$$c_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh\frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi\sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$V = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\sinh\frac{n\pi d}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x,y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل:ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

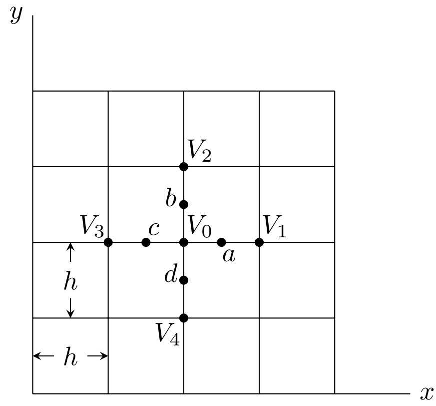
$$\begin{aligned}
V &= \frac{4\times 90}{\pi}\left(\frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\sinh\pi}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sinh\frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\frac{\sinh\frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi}\sin\frac{5\pi}{2}\right)\\
&= \frac{4\times 90}{\pi}(0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406)\\
&= 22.5\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

[17] numerical iteration



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

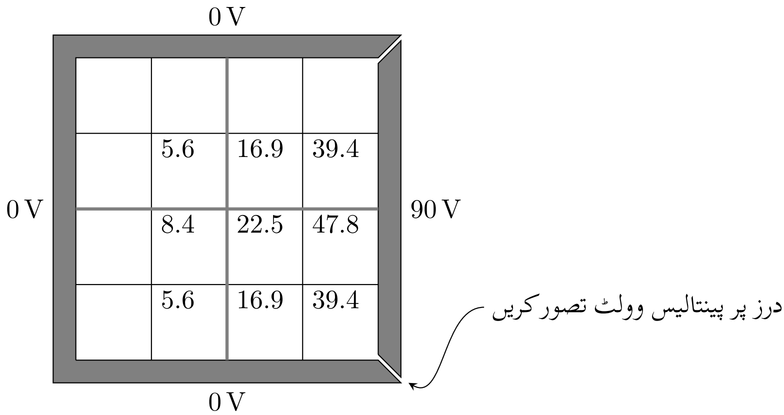
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔بالکل اسی طرح ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

بھی لکھ سکتے ہیں۔ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \tag{6.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

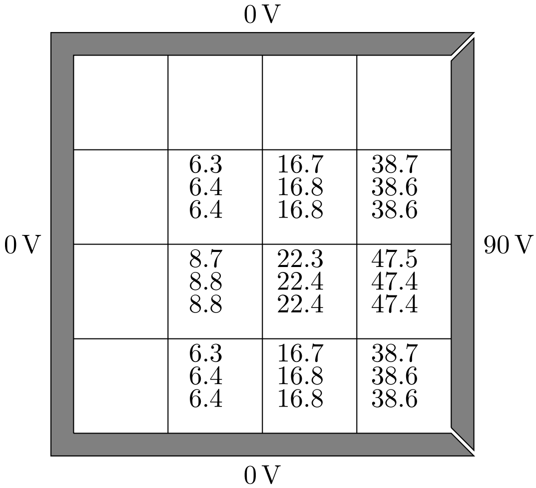
عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کی جاتی ہے حتٰی کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45 + 45 + 0 + 0}{4} = 22.5\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔



شکل 6.6: چار بار دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔یہی اصل جواب ہیں۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V = \frac{22.5 + 0 + 0 + 0}{4} = 5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\frac{90 + 39.4 + 22.5 + 39.4}{4} &= 47.8\,\mathrm{V}\\
\frac{39.4 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} &= 16.9\,\mathrm{V}\\
\frac{22.5 + 5.6 + 0 + 5.6}{4} &= 8.4\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+0+16.9+47.8}{4}=38.7\,\mathrm{V}$$

ہو جائے گی۔اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+38.7+22.5+38.7}{4}=47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو 22.4 V حاصل ہوا ہے۔مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جا سکے۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ[1] کا قانون[2]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

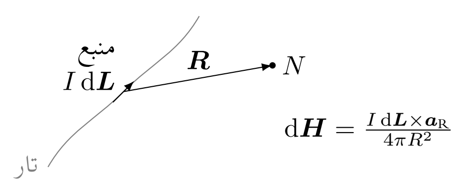
بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔چھوٹے لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

---

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{R}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{\mathrm{d}Q_1 \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 119 پر دئے استمراری مساوات

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}
$$

سے

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.3}
$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$
\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0
$$

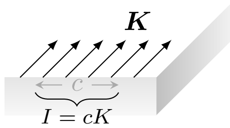
لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

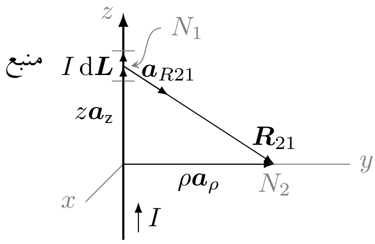
$$
\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.4}
$$

ہی تجرباتی طور ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.4 لکھی جا سکتی ہے۔البتہ مساوات 7.4 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا مساوات 7.4 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احمقانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔



شکل 7.2: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔



شکل 7.3: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

شکل 7.2 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی تو بذریعہ تکمل

$$I = \int K\,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}v \tag{7.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.6}$$

یا

$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.3 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظرانداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جا سکتی ہے۔ چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho\boldsymbol{a}_{\rho} - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$R_{21} = |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\boldsymbol{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi\,\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنا ہو گا۔ اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\left.\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} \tag{7.8}$$

سے

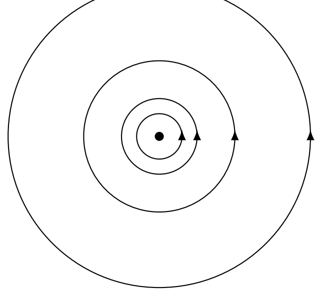
$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.4 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z اور نا ہی زاویہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

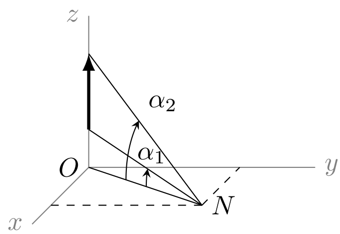
اگر شکل 7.3 میں تار لا محدود نہ ہو تب مساوات 7.5 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.10}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.5 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔



شکل 7.4: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.5: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔گاؤس کے قانون کی مدد سے تشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔تشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون[3] کہتے ہیں۔اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.11}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

[3]Ampere's circuital law

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی رو ان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.3 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.11 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتی ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H \, \mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \rho \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi$ اور $H_\phi \boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, \mathrm{d}\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

یا

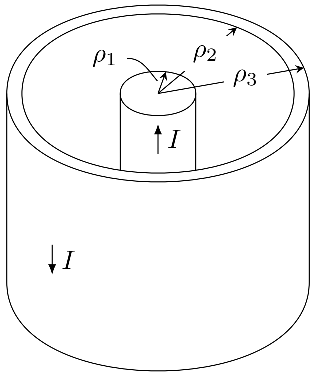
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

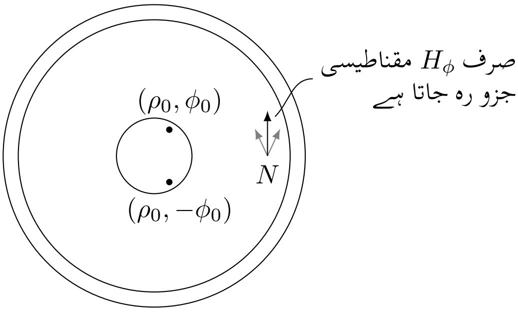
ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.6 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہٰذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔

شکل 7.6: ہم محوری تار۔

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لٰہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لٰہذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $I+$ اور بیرونی تار کے $I-$ کو گھیرے گی لٰہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لٰہذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

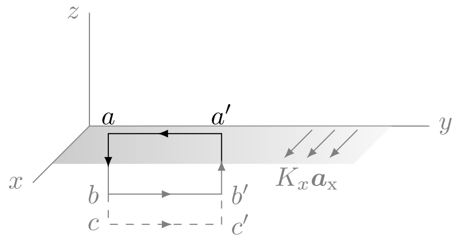
ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$

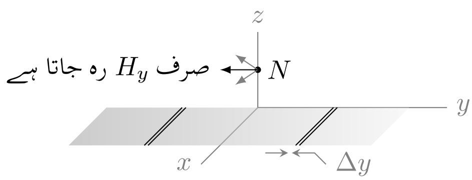
برقی رو گھیرے گی لٰہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔

شکل 7.7: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.7-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل 7.7-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ برقی رو گزارے گی۔لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.7-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

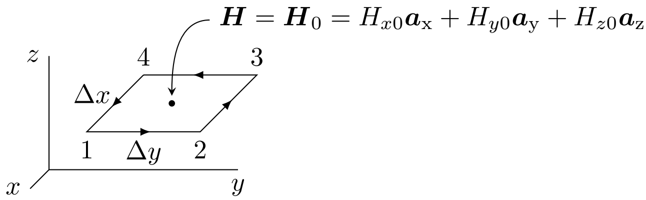
یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.12}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہرگز نہیں ہے۔اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔



شکل 7.8: گردش کی تعریف۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $\left|\boldsymbol{H}_{yb}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{ya}\right|$ ہو گا۔اس طرح مساوات 7.12 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_y &= -\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} \qquad (z > 0)\\
\boldsymbol{H}_y &= +\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} \qquad (z < 0)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$
\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \tag{7.13}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \qquad (-h < z < 0)\\
\boldsymbol{H} &= 0 \qquad\qquad (z < -h, \quad z > 0)
\end{aligned} \tag{7.14}
$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[4] کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔شکل 7.8 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔یہ راہ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + H_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ میں پائی جاتی ہے۔شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + H_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + H_z(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\
&= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{z}}
\end{aligned}
$$

[4] curl

کے برابر ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔آئیں اس تکمل کو حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.8 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو گا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y\,\mathrm{d}y = H_{y21}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y = H_{y21}\Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21}\Delta y \tag{7.15}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل[5] بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0+\tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.16}$$

لکھ کر مساوات 7.15 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.17}$$

---

[5] Taylor series

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.16 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔ اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لٰہذا یہاں

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.18}$$

ہو گا جو عین مساوات 7.16 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.19}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq -\left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.20}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.21}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.17، مساوات 7.19، مساوات 7.20 اور مساوات 7.21 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{7.22}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = J_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + J_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + J_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \doteq J_z\Delta x\Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.23}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.24}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta x\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.25}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.24 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔اسی طرح مساوات 7.25 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.23، مساوات 7.24 اور مساوات 7.25 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[6] کہتے ہیں۔انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔اس تعریف کی حسابی شکل

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.24، مساوات 7.25 اور مساوات 7.23 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.26}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت[7] کی شکل میں

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

---

[6] curl
[7] determinant

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.28}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{7.29}$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.30}$$

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.31}$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہٰذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔یوں $q\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔مساوات 7.31 یہی کہتا ہے۔اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہو گا۔مساوات 7.30 یہی کہتا ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \times \left(H_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.26 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H} = (x^2y + 2z)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (xz - y)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (e^x yz)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (e^x z - x)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (2 - e^x yz)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (z - x^2)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو گی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.29 سے

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.32}$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.29 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$، دوسرے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\mp\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{7.33}$$

یہاں رک کر $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\nabla^2\boldsymbol{A}\equiv\nabla^2A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\nabla^2A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\nabla^2A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.35}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.33 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{7.36}$$

مساوات 7.35 سمتیہ کی لاپلاسی[8] ہے۔

مثال 7.2: سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla\times\left(M\boldsymbol{S}\right)\equiv\left(\nabla M\right)\times\boldsymbol{S}+M\left(\nabla\times\boldsymbol{S}\right) \tag{7.37}$$

کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$M\boldsymbol{S}=M\left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)=MS_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+MS_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+MS_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.29 کی طرح لکھ کر

$$\nabla\times M\boldsymbol{S}=\left(\frac{\partial MS_z}{\partial y}-\frac{\partial MS_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial MS_x}{\partial z}-\frac{\partial MS_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\left(\frac{\partial MS_y}{\partial x}-\frac{\partial MS_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\times M\boldsymbol{S}=&\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z+M\frac{\partial S_z}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}S_y-M\frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\&+\left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x+M\frac{\partial S_x}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial x}S_z-M\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\&+\left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y+M\frac{\partial S_y}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}S_x-M\frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

[8] vector Laplacian

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} &= \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right] \\ &\quad + M\left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right]\end{aligned}$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \boldsymbol{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \boldsymbol{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{\partial M}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{\partial M}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right) \times \left(S_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + S_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}\right)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.9 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + H_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

ہو گا۔کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

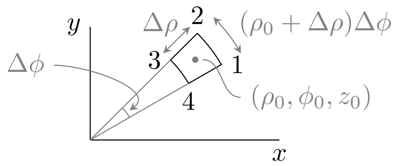
$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} &\doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi \\ &\doteq \left[H_{\phi 0}\rho_0 + H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$



شکل 7.9: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

اور

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right] \\
&\doteq \left[-H_{\phi 0}\rho_0 + H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$

اور

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

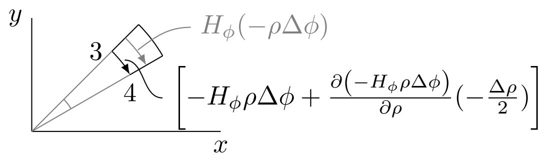
$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.38}$$

ہو گا۔اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

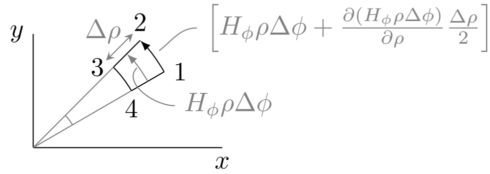
$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right) \doteq J_z$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔



(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کی قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.10: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گا اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right) = J_z \tag{7.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.38 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.10-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi\rho\Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔ اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi\rho\Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi 0}\rho_0\Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} \tag{7.40}$$

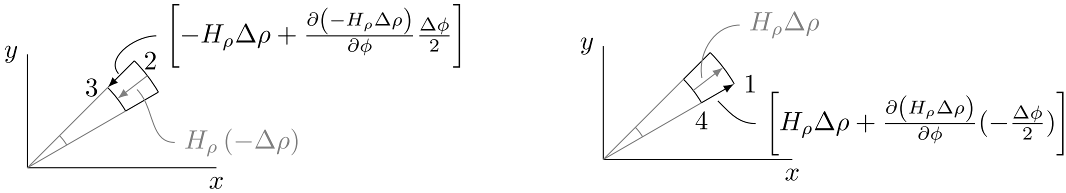
ہو گی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.10-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\ &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned} \tag{7.41}$$

ہو گا۔



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رو نما ہو گی جسے

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.42}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.43}$$

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.40، مساوات 7.41، مساوات 7.42 اور مساوات 7.43 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi \\ &= \left[\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi\end{aligned} \tag{7.44}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[H_{\phi0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.12: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

جو بالکل مساوات 7.38 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi0}$ کے برابر ہوں گے۔مساوات 7.44 سے گردش

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to0\\ \Delta\phi\to0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]=J_z \tag{7.45}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho=\rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0\Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔اس رقبے کو شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z\Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}=H_z\Delta z+\frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-H_z\Delta z+\frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=+\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}+\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.47}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.46 اور مساوات 7.47 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho \rho \Delta\phi \Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \Delta z \Delta \phi = J_\rho \rho \Delta\phi \Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho \Delta\phi \Delta z} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] = J_\rho \tag{7.48}$$

ملتا ہے۔

شکل 7.12-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} &= H_z \Delta z + \frac{\partial (H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_z \Delta z + \frac{\partial (-H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(+\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial (H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial (-H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right)
\end{aligned}$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\lim_{\substack{\Delta\rho \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta \rho \Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = J_\phi \tag{7.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.49، مساوات 7.48 اور مساوات 7.45 کا مجموعہ نلکی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.50}$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نلکی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کے گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho \cos\phi + 5)\boldsymbol{a}_\rho + 6 \sin\phi \boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho} + 3) \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_u &= k_1 \,\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}L_v &= k_2 \,\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}L_w &= k_3 \,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2 \Delta v$ اور $k_3 \Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2 \Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)
$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)
$$

ہو گا۔ یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w \tag{7.51}
$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right) \\
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$
\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} + \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} \Delta v \Delta w \tag{7.52}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w \tag{7.53}
$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w
$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \right] = J_u \tag{7.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u} \right] = J_v \tag{7.55}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v} \right] = J_w \tag{7.56}$$

لکھ سکتے ہیں۔عمومی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \right] \boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u} \right] \boldsymbol{a}_v \\ + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v} \right] \boldsymbol{a}_w \end{aligned} \tag{7.57}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix} \tag{7.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin\theta \end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\text{r}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.57 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial (H_\phi r \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (H_\theta r)}{\partial \phi} \right] \boldsymbol{a}_\text{r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (H_\phi r \sin\theta)}{\partial r} \right] \boldsymbol{a}_\theta \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \boldsymbol{a}_\phi \end{aligned}$$

یا

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(H_\phi r)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.59}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: اگر $\boldsymbol{H} = 2r\cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - 3r\sin\theta \boldsymbol{a}_\theta$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \boldsymbol{H} = -4\sin\theta \boldsymbol{a}_\theta$

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.13-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)_N$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N$$

یا

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \boldsymbol{H})\cdot \Delta\boldsymbol{S}_B$$

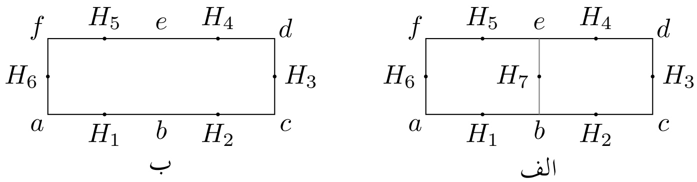
بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7 \cdot \Delta\boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5 \cdot \Delta\boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6 \cdot \Delta\boldsymbol{L}_{af}$$

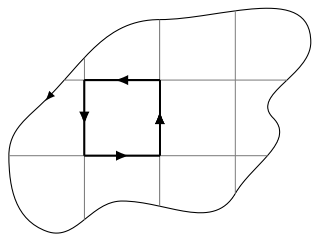
لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta\boldsymbol{S}_D$$



شکل 7.13: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔



شکل 7.14: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

اور

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{be}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot\Delta\boldsymbol{L}_{af}\\ &\doteq (\nabla\times\boldsymbol{H}_B)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_B + (\nabla\times\boldsymbol{H}_D)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.13-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.13-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔شکل 7.14 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla\times\boldsymbol{H}_B)\cdot\Delta\boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{H}_B)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.60}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.60 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[9] بیان کرتا ہے۔

[9] Stokes theorem

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لٰہذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔کسی بھی عمومی سمتیہ میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A})\, \mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔صفر لمبائی کے راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لٰہذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T \,\mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.61 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.61 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.62}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.62 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.3 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.63}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[10] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل[11] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.64}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ہو بہو مساوات 7.63 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔ یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔ مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔ آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔ یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل مقناطیسی بہاو[12] Φ دیتا ہے جسے ویبر[13] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \mathrm{Wb} \tag{7.65}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.66}$$

---

[10] Tesla
[11] magnetic constant, permeability
[12] magnetic flux
[13] Weber

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.67}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.66 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.67 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.67 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho\\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0\\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}\\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0\end{aligned} \tag{7.68}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H}\end{aligned} \tag{7.69}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{7.70}$$

مساوات 7.68 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔انہیں کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}&\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h \,\mathrm{d}h\\ &\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0\\ &\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\end{aligned} \tag{7.71}$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.6 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا۔اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تا $z = d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi \cdot (\mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\phi)$$

یعنی

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.72}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

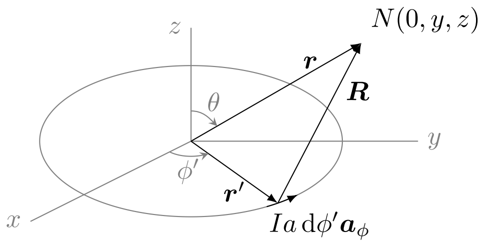
مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس $25\,\mathrm{mm}$ جبکہ اس کا بیرونی رداس $28\,\mathrm{mm}$ ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس $35\,\mathrm{mm}$ اور بیرونی رداس $37\,\mathrm{mm}$ ہے میں $10\,000\,\mathrm{A}$ کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mathrm{\mu Wb}$ ہیں۔بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mathrm{\mu Wb}$ ہیں۔تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mathrm{\mu Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے $(0, 0, 0)$ پر ہے۔اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل[14] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 7.15: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

مثال 7.4: شکل 7.15 میں $x=0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0,y,z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a,\frac{\pi}{2},\phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi'\boldsymbol{a}'_\phi$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_\phi$ کو کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}'_\phi = -\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi'\left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi', a\sin\phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}'_\rho = a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + a\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

کے برابر ہے۔نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}| = R &= \sqrt{(-a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2} \\
&= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}
\end{aligned}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$$

---

[14] numerical solution

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R} &= a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \times \left[-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right] \\ &= a\,\mathrm{d}\phi' \left[z\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]\end{aligned}$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi'$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'$ پر کرتے ہوئے تکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ہی ہے۔بقایا دو اجزاء

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\ H_z &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a - y\sin\phi')\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{7.73}$$

ہیں۔یہ دونوں بیضوی تکمل[15] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل[16] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

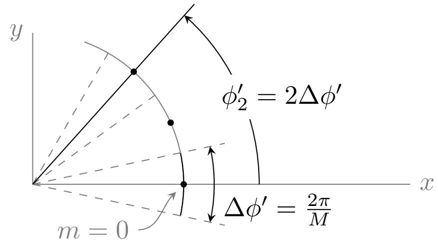
مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

حل:اس نقطے پر

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(3 - 2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

---

[15] elliptic integral
[16] numerical solution



شکل 7.16: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

لکھا جائے گا۔اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.16 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\frac{2\pi}{M} = \Delta\phi'$ کے برابر ہو گا۔ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi_0' = 0$ ہو گا۔شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi_1' = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi_2' = 2\Delta\phi' = \frac{2\times 2\pi}{M}$ ہو گا۔یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi_m' = m\Delta\phi' = \frac{2\pi m}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\begin{aligned}\Delta H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\phi_m'\Delta\phi'}{(3-2\sin\phi_m')^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin(\frac{2\pi m}{M})\frac{2\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2\pi m}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

کے برابر ہو گا۔یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\sin\frac{2\pi m}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2\pi m}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔جدول 7.1 میں $M = 10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin\frac{2\pi m}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2\pi m}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}(0.00000+0.23852+0.82674+0.82674+0.23852+0.00000\\ &\qquad -0.06889-0.08763-0.08763-0.06889)\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{10}(1.8175)\\ &= 1.1420\left(\frac{I}{4\pi a}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433-1.1420}{1.1433}\right)\times 100 = 0.11\,\%$$

$\frac{\sin\frac{2\pi m}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2\pi m}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
−0.06889	6
−0.08763	7
−0.08763	8
−0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو[17] بیان کیا جا سکتا ہے۔البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباو[18] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔سمتی مقناطیسی دباو اینٹینا[19]، موج[20] اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)[21] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 100 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.74}$$

---

scalar magnetic potential[17]
vector magnetic potential[18]
antenna[19]
waveguide[20]
microwave oven[21]

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J}=0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H}=-\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J}=0) \tag{7.75}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

سے

$$\mu_0\nabla\cdot(-\nabla V_m)=0$$

یا

$$\nabla^2 V_m=0 \qquad (\boldsymbol{J}=0) \tag{7.76}$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J}=0$ ہے

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_{\phi}$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.75 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial\phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial\phi}=-\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m=-\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تا کہ $\phi=0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi=0$ پر $V_m=0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi=2\pi$ پر $V_m=-I$ کے برابر ہے ناکہ صفر۔تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m=-2I$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر

سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لٰہذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کے راہ پر $\boldsymbol{J} = 0$ ہے۔یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \tag{7.77}$$

بیان کی جاتی ہے۔ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi \leq \pi)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔زاویہ $\phi = \pi$ تک صرف زاویہ صفر سے بڑھاتے ہوئے پہنچا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہو گی۔

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.78}$$

سے کرتے ہیں۔ سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔ مساوات 7.61 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ A کا گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.79}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ ہم مساوات 7.79 میں دیئے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.78 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 193 پر مساوات 7.36 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A} = \oint \frac{\mu_0 I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.80}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا $\boldsymbol{H}$ کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباو کے مساوات

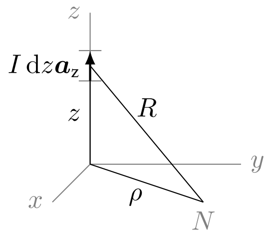
$$V = \int \frac{\rho_L \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.80 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری تکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس تناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.80 کی تفرقی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.81}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔



شکل 7.17: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

شکل 7.17 میں z محدد پر لا محدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}\;,\quad \mathrm{d}A_\rho=0,\quad \mathrm{d}A_\phi=0 \tag{7.82}$$

سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نلکی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathrm{d}\boldsymbol{A}&=\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\,\mathrm{d}A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi\\&=\frac{I\,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔یہی مساوات شکل 7.17 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جا سکتے ہیں۔یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A}=\int_S\frac{\mu_0\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.83}$$

اور

$$\boldsymbol{A}=\int_h\frac{\mu_0\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.84}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباو کی طرح سمتی مقناطیسی دباو کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \to \infty$ پر $\boldsymbol{A} \to 0$ تصور کیا جاتا ہے۔لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \to \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔تار کے اندر $\boldsymbol{B}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہٰذا اس دائرے پر $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے گردش کو مساوات 7.50 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بایوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.85}$$

سمتی مقناطیسی دباو کے تعریف

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.86}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاو کے تعلق

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.87}$$

سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.88}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.85 حاصل کرتے ہیں۔مساوات 7.84 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباو دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارتا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔یوں چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}h_1$ لکھیں گے جو $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ کے برابر ہو گا۔تکمل کے متغیرات x_1، y_1 اور z_1 ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{A}_2 = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}} \tag{7.89}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہٰذا گردش کے متغیرات بھی x_2، y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 100 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.89 سے $\boldsymbol{A}_2$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔اس مساوات میں تکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔تکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا ہم تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں $\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جا سکتا۔اس کے علاوہ اس کا x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہٰذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.90}$$

یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}$ ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.91}$$

حاصل کی گئی۔اس کی مدد سے مساوات 7.90 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times \boldsymbol{J}_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.92}$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں $\boldsymbol{J}_1$ صرف x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\boldsymbol{J}_1$ کے تمام تفرق جو x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔یوں $\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 101 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \boldsymbol{J}_1}{R_{21}^2} \,\mathrm{d}h_1$$

یا

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2} \,\mathrm{d}h_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔اس میں $\boldsymbol{J}_1 \,\mathrm{d}h_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = \oint_h \frac{I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.89 درست ہے اور یہ مساوات ، مساوات – اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.93}$$

کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.86 اور مساوات 7.87 سے جن سے

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 193 پر مساوات 7.36 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \right] \tag{7.95}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاو اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاو کو پہلے حل کرتے ہیں۔مساوات 7.89 کی پھیلاو

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \,\mathrm{d}h_1 \tag{7.96}$$

لکھی جاسکتی ہے۔صفحہ 112 پر مثال 4.7 میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہٰذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right) = \frac{1}{R_{21}}(\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}}\right) \tag{7.97}$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}}(\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.98}$$

ہو گا۔

چونکہ $\boldsymbol{J}_1$ صرف متغیرات x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہٰذا اس کے x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا $\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 101 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.99}$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.97 کے دوبارہ استعمال سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}}(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)\right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.100}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.62 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.101}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.102}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہٰذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تا کہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.103}$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباو کا پھیلاو صفر کے برابر ہے۔اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاو بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ہم مساوات 7.95 حل کرنے کی خاطر پھیلاو اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔پھیلاو حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباو اور سمتی مقناطیسی دباو کے ایک جزو

$$
\begin{aligned}
V &= \int_h \frac{\rho \, \mathrm{d}h}{4\pi\epsilon_0 R} \\
A_x &= \int_h \frac{\mu_0 J_x \, \mathrm{d}h}{4\pi R}
\end{aligned}
$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔اب ہم پوئسن مساوات

$$
\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$
\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\
\nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z
\end{aligned}
$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$
\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.104}
$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.95 میں مساوات 7.103 اور مساوات 7.104 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.105}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباو کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباو کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔سمتی مقناطیسی دباو کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\
\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 193 پر مساوات 7.36 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.103 کی مدد سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.106}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔اسی طرح قوت چارج کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی

رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 لورنز مساوات قوت[21] کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

8.2 تفرقی چارج پر قوت

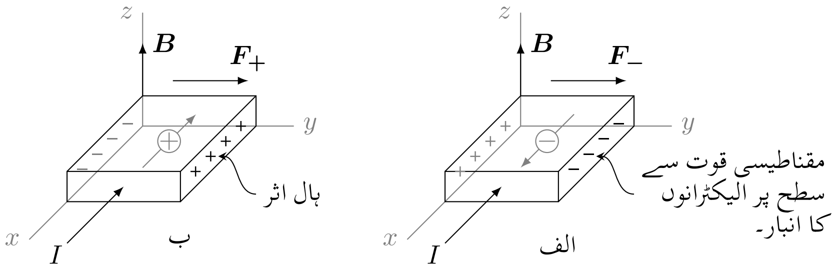
مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج $\mathrm{d}Q$ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔ مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

اور منفی چارج کے مابین کولومب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے ہال اثر[3] کے نام[4] سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے لہٰذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند $-$ علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہٰذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں قوت $\boldsymbol{F}_{-}$ عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[5] ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباو[6] پایا جائے گا۔ تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول[7] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[8] وغیرہ۔

---

[1] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔
[2] Lorentz force equation
[3] Hall effect
[4] ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔
[5] uncovered
[6] Hall voltage
[7] free holes
[8] magnetic flux meter

سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔اس مساوات کو صفحہ 117 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے چارج کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{8.6}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \,\mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم مساوات 7.5 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB \sin\alpha \tag{8.14}$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ یہاں تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\
&= -108.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{nN}
\end{aligned}$$

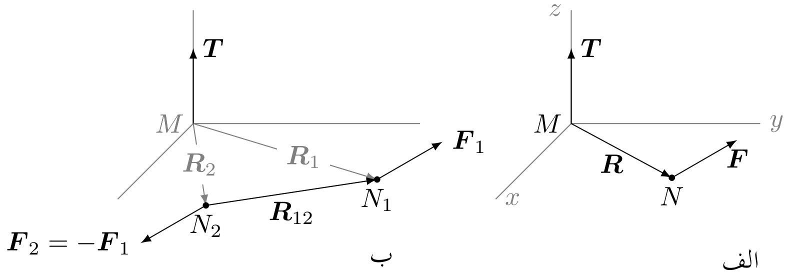
ہو گا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\
&= 54.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{nN}
\end{aligned}$$

قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right] \\
&= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2
\end{aligned} \tag{8.16}$$



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔

8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں B کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$F = -B \times \oint \mathrm{d}L$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}L = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

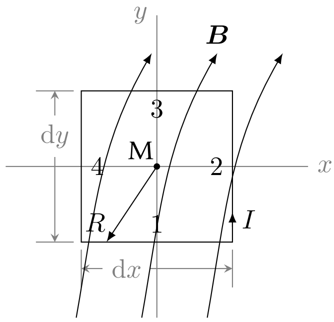
یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ[9] یعنی قوت کا معیار اثر[10] عموماً صفر نہیں ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چُول[11] کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت F عمل کر رہا ہے۔ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ R قوت کا بازو[12] کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر T

$$T = R \times F \tag{8.17}$$

کے برابر ہے۔مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

torque[9]
moment of force[10]
pivot[11]
moment arm[12]



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \\ &= \boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{F}_1 \end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے بند راہ پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ میں مروڑ حاصل کریں۔اس راہ کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{x0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_{y0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_{z0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\mathrm{d}z}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I \,\mathrm{d}x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I \,\mathrm{d}x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\mathrm{d}z}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \right] \\ &= I \,\mathrm{d}x \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\mathrm{d}z}{2} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \right] \end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکلارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

کے برابر ہے۔بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{B}_0\right)$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.19}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[13] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.20}$$

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.21}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

[13] differential magnetic dipole moment

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{X} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} \times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X}\right)$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں بھی چھوٹے رقبے میں میدان کو یکساں تصور کیا جا سکتا ہے۔اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.22}$$

سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔میں اسی اصول کی مدد سے تار پر مروڑ کی سمت حاصل کرتا ہوں۔

8.5 مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات

باب 9

سوالات

9.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 9.1:

سوال 9.2: برقی میدان $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ میں $-0.1\,\text{C}$ کے چارج کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\text{J}$، $-0.2\,\text{J}$ اور $0\,\text{J}$

سوال 9.3: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

9.2 کپیسٹر

سوال 9.4: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\text{nC}}{\text{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{Z}})}{2\pi\times26}$

سوال 9.5: لا محدود موصل زمینی سطح $z=0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D}=\frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-112\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times884}$

سوال 9.6: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L=5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}\qquad(-\infty<y<\infty,x=0,z=2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z=0$ پر لا محدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 9.7: مشق 5.3 میں $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر سیلکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔اگر سیلکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی $10^7\times1$ سیلکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلکان کی موصلیت کیا ہو گی۔ سیلکان کی تعدادی کثافت $10^{28}\times5$ ایٹم فی مربع میٹر ہے۔(ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 9.8: صفحہ 129 پر مثال 5.6 میں لا محدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 9.9: صفحہ 120 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 9.10: مساوات 5.71 میں $\cosh^{-1}\frac{h}{b}=\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$ لکھا گیا ہے۔اسے ثابت کریں۔

سوال 9.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلا اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلا دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$

9.3 لاپلاس

سوال 9.12: صفحہ 157 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 9.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 9.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 9.15: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 9.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 9.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 9.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 9.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

9.4 بایوٹ-سیوارٹ

سوال 9.20: مساوات 7.10 حاصل کریں۔

سوال 9.21: شکل 7.7ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 9.22: مساوات 7.18 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.8 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $\frac{\Delta x}{2}-$ تبدیلی سے $\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\partial H_y}{\partial x}$ تبدیلی رونما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0}-\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 9.23: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 9.24: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 9.25: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.73 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0,a,a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525\left(\frac{I}{4\pi a}\right)$

جدول 9.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 9.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عمبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
تقطیر شدہ پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 9.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 9.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$