

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
141	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
144	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
153	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
155	6.1 مسئلہ یکنائی	
156	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
157	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
158	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
164	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
167	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
174	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

179	7.1	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون
183	7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون
187	7.3	گردش
194	7.3.1	نلکی محدد میں گردش
200	7.3.2	عمومی محدد میں گردش کی مساوات
201	7.3.3	کروی محدد میں گردش کی مساوات
202	7.4	مسئلہ سٹوکس
206	7.5	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ
212	7.6	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ
217	7.7	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول
218	7.7.1	سمتی مقناطیسی دباؤ
219	7.7.2	ایمپیٹر کا دوری قانون

8 سوالات

223	8.1	توانائی باب کے سوالات
223	8.2	کپیسٹر
225	8.3	لاپلاس
225	8.4	بایوٹ-سیوارٹ

باب 1

سمتیات

1.1 مقدارِی اور سمتیہ

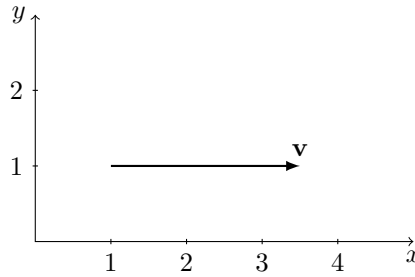
وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقدارِی¹ کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقدارِی کی مثالیں ہیں۔ مقدارِی کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقدارِی کی مثال ہے۔ متغیر مقدارِی کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت 12°C ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت 30°C ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T ، وقت t ، کارتیسی محدود² کے متغیرات x ، y اور z تمام مقدارِی متغیرات ہیں۔

ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ³ کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہوگی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

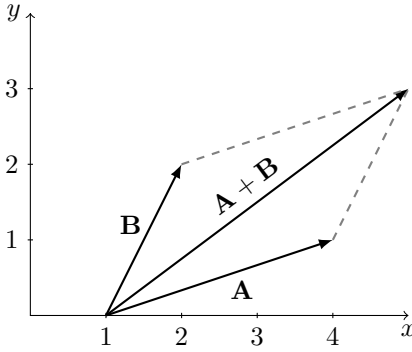
اس کتاب میں مقدارِی متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a, b, α, \dots یا بڑے حروف مثلاً A, B, Ψ, \dots سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو F جبکہ سمتی رفتار کو v سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو \vec{F} یا \vec{F} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|F|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت F کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

شکل 1.1 میں نقطہ $(1, 1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ v سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1, 1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں 1 cm کی لمبائی $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

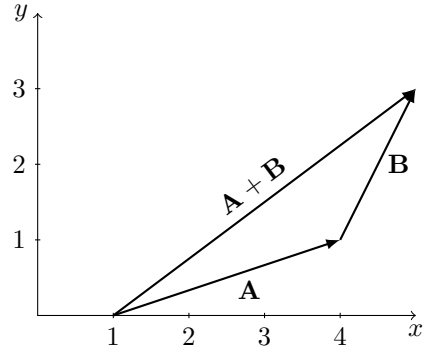
¹ scalar
² Cartesian coordinates
³ vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) سر کے ساتھ ڈم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترتیبی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے ڈم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ پہلی سمتیہ کی ڈم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔ اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں A کے سر کے ساتھ B کی ڈم ملائی گئی ہے۔ دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو سر سے ڈم جوڑنا⁴ کہتے ہیں۔ شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے ڈم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع⁵ سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $A + B = B + A$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل⁶ پر پورا اترتا ہے۔ اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی⁷

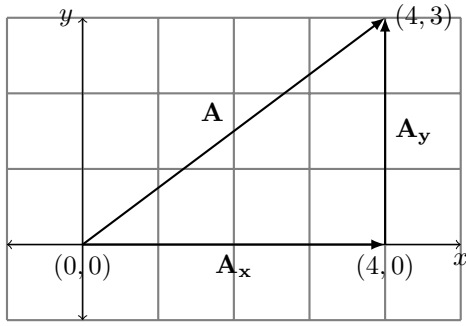
$$(1.1) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

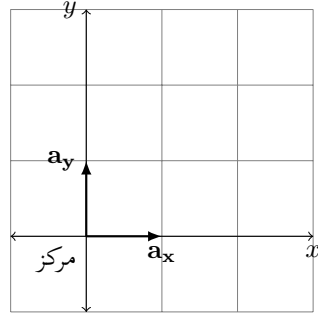
سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہم $A - B$ کو $A + (-B)$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-B$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ B کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔ یوں $A - B$ حاصل کرنے کی خاطر B کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو A کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ A کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس سمتیہ A کو منفی مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی |k| گنا ہو جاتی ہے۔

head to tail rule⁴
parallelogram law⁵
commutative law⁶
associative law⁷



(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔



(ا) اکائی سمتیہ

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $A = B$ تب ہو گا جب $A - B = 0$ ہو۔

ہم سمتی میدان کے متغیرات کو آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔ یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر ہم سمتی میدان کی بات نہ کر رہے ہوں تب ہم مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لے سکتے ہیں۔ یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

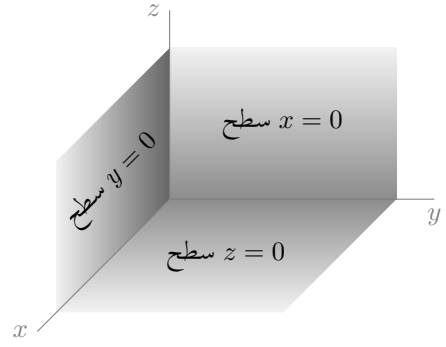
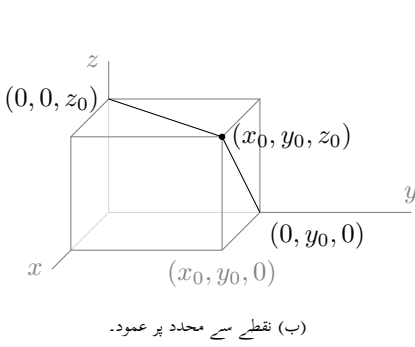
1.3 کارتیسی محدود

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدود⁸ کہلاتا ہے۔ سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خلاء تین طرفہ⁹ ہے لہذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدود پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ اکائی سمتیہ a_x کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ a_y کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔ شکل-ب میں A دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں A کو A_x اور A_y کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

$$A = A_x + A_y \quad (1.2)$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی¹⁰ دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدود اور دوسری لکیر کو y محدود تصور کیا جاسکتا ہے۔ زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔ x محدود کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدود کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدود کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جاسکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدد پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

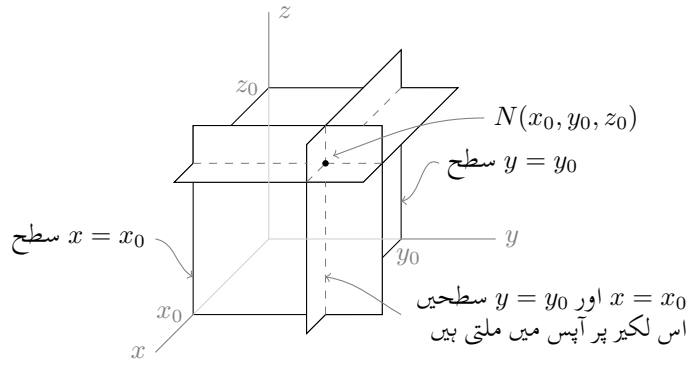
نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جاسکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x = x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

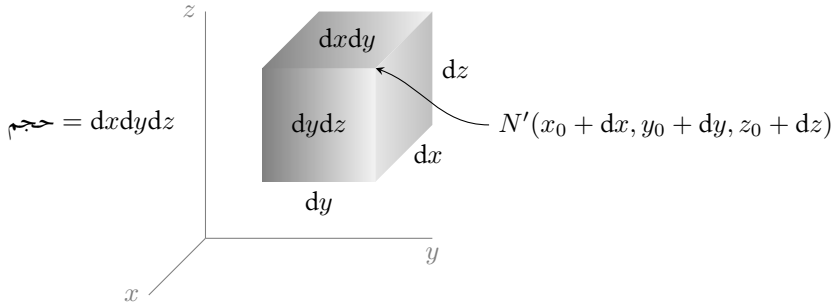
لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحیں آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحیں ایک نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھونگیں۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحی مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + dx$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + dy$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + dz$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحیں ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف dx ، dy اور dz ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $dx dy$ ہے۔ اسی طرح اس کی چھلی سطح کا رقبہ بھی $dx dy$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $dy dz$ رقبہ رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبہ $dx dz$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $dx dy dz$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ہے۔

کار تیزی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

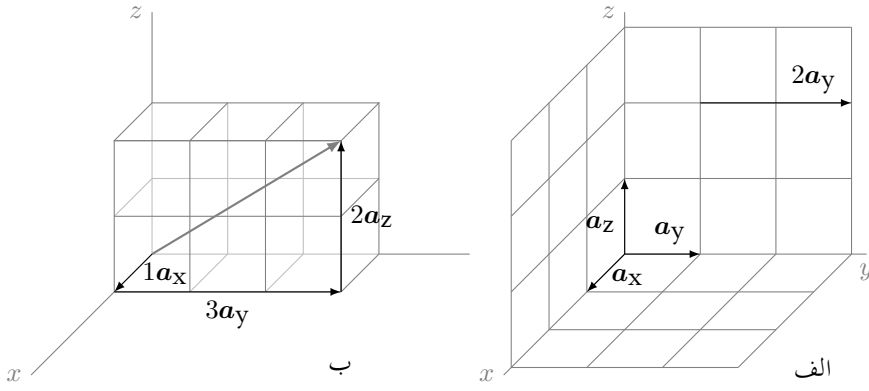
(1.3)

$$dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

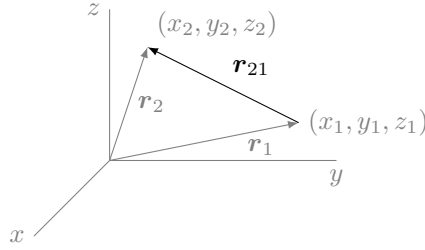
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتیہ لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کار تیزی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کار تیزی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کار تیزی نظام کے تین اکائی سمتیات a_x ، a_y اور a_z لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



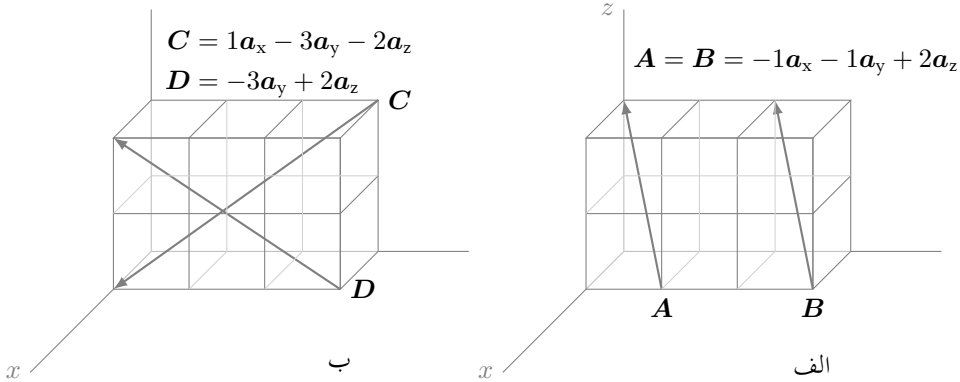
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



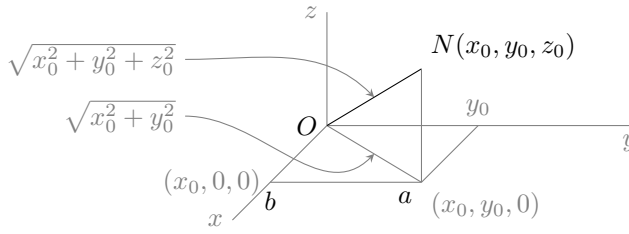
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ a_x کی سمت x محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح a_y کی سمت y محدود کے بڑھتے جانب کو اور a_z کی سمت z محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0, 1, 2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ a_y کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدود کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جاسکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $r_1 = x_1 a_x + y_1 a_y + z_1 a_z$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $r_2 = x_2 a_x + y_2 a_y + z_2 a_z$ دکھائی گئی ہے جس کی ڈم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے ڈم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $r_2 = r_{21} + r_1$ لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(1.4) \quad \begin{aligned} r_{21} &= r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ r_{21} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی ڈم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور ڈم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔ یوں سمتیہ r_{21} کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)a_x$ ، $(y_2 - y_1)a_y$ اور $(z_2 - z_1)a_z$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

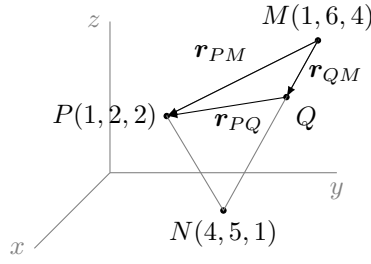
شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے یعنی $1a_x + 3a_y + 2a_z$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی ڈم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات A اور B دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہذا $A = B = -1a_x - 1a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ شکل 1.9-ب میں C کی ڈم سے a_x جانب ایک قدم اور یہاں سے $-a_y$ جانب تین قدم اور آخر کار $-a_z$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $C = 1a_x - 3a_y - 2a_z$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح D کی ڈم سے $-a_y$ جانب تین قدم اور پھر a_z جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $D = -3a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ سمتیہ D کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث¹¹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ a سے x محور پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تینوں O میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔ یوں فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تینوں ON میں a پر 90° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔ اس میں دئے سمتیہ r_{21} کی دُم محدود کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$(1.5) \quad |r_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

کے برابر ہے۔ اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہوگی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی۔ یوں r_{21} کو $|r_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے r_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ $a_{r_{21}}$ حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(1.6) \quad a_{r_{21}} = \frac{r_{21}}{|r_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔ اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جاسکتا۔ میدان سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جارہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x, y, z) کے مقام کو $r = xa_x + ya_y + za_z$ لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت F کو بالکل اسی طرح $F = F_xa_x + F_ya_y + F_za_z$ لکھا جاتا ہے جہاں F_xa_x ، F_ya_y اور F_za_z اس کے تین اجزاء ہیں۔ اس طرح قوت کی مقدار $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہوگی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔ اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $r = -5a_x + 2a_y - 1a_z$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|r| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$ ہے۔ یوں اکائی سمتیہ $a_r = \frac{-5a_x + 2a_y - 1a_z}{\sqrt{30}}$ ہوگا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔ Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{NM} &= (4 - 1)a_x + (5 - 6)a_y + (1 - 4)a_z \\ &= 3a_x - 1a_y - 3a_z \end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ r_{QM} اور r_{NM} ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|r_{QM}| = \frac{1}{3}|r_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$r_{QM} = \frac{1}{3}r_{NM} = \frac{1}{3}(3a_x - 1a_y - 3a_z) = 1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{PM} &= (1-1)a_x + (2-6)a_y + (2-4)a_z \\ &= -4a_y - 2a_z \end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $r_{QM} + r_{PQ} = r_{PM}$ لہذا

$$\begin{aligned} r_{PQ} &= r_{PM} - r_{QM} \\ &= (-4a_y - 2a_z) - (1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z) \\ &= -1a_x - \frac{11}{3}a_y - 1a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5a_x - 4a_y + 12a_z$ ، $-1a_x + 4a_y + 12a_z$ اور $-6a_x + 12a_z$

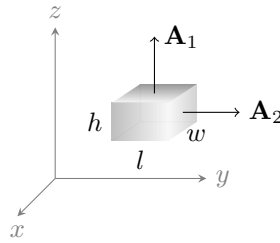
1.5 میدانِی سمتیہ

لکھنا ہے

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جاسکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود a_N اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-a_N$ بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً a_N کو سطح کی سمت ¹² تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ Sa_N ¹³ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبے A_1 اور A_2 دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

¹² عمود سطح کے ساتھ نوئے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ a_N کے زیر نوشت میں N ، لفظ نوئے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
¹³ vector area



$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= A_1 \mathbf{a}_{N1} = wla_z \\ \mathbf{A}_2 &= A_2 \mathbf{a}_{N2} = wha_y \end{aligned}$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب¹⁴ سے مراد A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$(1.7) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ¹⁵ بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $A \cdot B$ کو " A نقطہ B " پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $A \cdot B$ کو $B \cdot A$ بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارٹیزی اکائی سمتیات a_x, a_y, a_z آپس میں عمودی ہیں لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.8) \quad a_x \cdot a_y = 0, \quad a_x \cdot a_z = 0, \quad a_y \cdot a_z = 0$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہذا مساوات 1.7 کے تحت a_x اور a_x کا غیر سمتی ضرب

$$a_x \cdot a_x = (|a_x|)(|a_x|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہوگا۔ بقایا دو کارٹیزی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$(1.9) \quad a_x \cdot a_x = 1, \quad a_y \cdot a_y = 1, \quad a_z \cdot a_z = 1$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کروئیکر ڈیلٹا¹⁶ δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.10) \quad a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$$

جہاں

$$(1.11) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

¹⁴ scalar product

¹⁵ dot product

¹⁶ یہ لیپولڈ کروئیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $j = i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔ یوں $a_x \cdot a_y$ کی صورت میں $a_x \cdot a_x$ جبکہ $i = a_y$ کے برابر ہیں۔ یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \cdot a_z$ کی صورت میں $i = a_z$ اور $j = a_z$ ہیں لہذا $j = i$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارٹیزی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ یوں اگر $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ اور $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \cdot (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x a_x \cdot a_x + A_x B_y a_x \cdot a_y + A_x B_z a_x \cdot a_z \\ &\quad + A_y B_x a_y \cdot a_x + A_y B_y a_y \cdot a_y + A_y B_z a_y \cdot a_z \\ &\quad + A_z B_x a_z \cdot a_x + A_z B_y a_z \cdot a_y + A_z B_z a_z \cdot a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$(1.12) \quad A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ A کا خود غیر سمتی ضرب

$$(1.13) \quad A \cdot A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |A|^2$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(1.14) \quad \theta_{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{A \cdot B}{(A \cdot A)(B \cdot B)} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \right)$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں نکتوں دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ ہیں۔ M پر زاویہ حاصل کریں۔

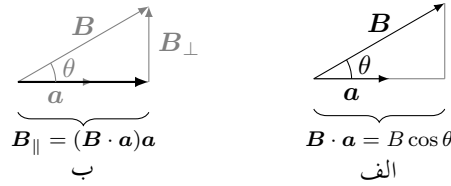
حل: مثال 1.2 میں $r_{NM} = 3a_x - 1a_y - 3a_z$ اور $r_{PM} = 0a_x - 4a_y - 2a_z$ حاصل کئے گئے۔ $|r_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|r_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$r_{NM} \cdot r_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

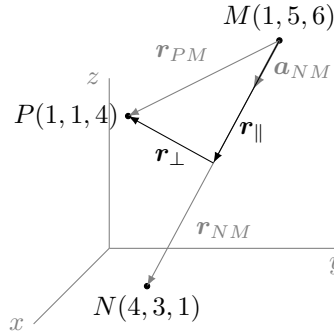
کے برابر ہے۔ یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}} \right) = 1.0321 \text{ rad}$$

یا 59.137° ہے۔



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ B اور اکائی سمتیہ a دکھائے گئے ہیں۔ ان کا غیر سمتی ضرب

$$B \cdot a = |B||a| \cos \theta = B \cos \theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی a کی سمت میں B کے جزو کا طول B_{\parallel} ¹⁷ ہے۔ یوں کسی بھی سمت میں B کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر B اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔ یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(B \cdot a)a$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں B کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں a کی سمت میں B کا سمتی جزو B_{\parallel} دکھایا گیا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ B سے $B_{\parallel}a$ منفی کرنے سے B_{\perp} حاصل ہوتا ہے جو B کا وہ جزو ہے جو a کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔ پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔ دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1, 5, 6)$ ، $N(4, 3, 1)$ اور $P(1, 1, 4)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $r_{NM} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ہے جس کا طول $|r_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $a_{NM} = \frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔ اسی طرح M سے P تک سمتیہ $r_{PM} = -4a_y - 2a_z$ ہے۔ a_{NM} کی سمت میں r_{PM} کا طول

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= r_{PM} \cdot a_{NM} = (-4a_y - 2a_z) \cdot \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) \\ &= \frac{0 + 8 + 10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

¹⁷ B_{\parallel} لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتاتی ہیں کہ B کا یہ وہ حصہ ہے جو a کے متوازی ہے۔ اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً \perp کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں a_{NM} سمت میں r_{PM} کا سمتی جزو

$$r_{\parallel} = r_{\parallel} a_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}} \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z)$$

ہے۔ r_{PM} سے r_{\parallel} منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ r_{\perp} حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= r_{PM} - r_{\parallel} = (-4a_y - 2a_z) - \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \\ &= \frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2 + 58^2 + 7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔ یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

r_{\parallel} اور r_{\perp} آپس میں عمودی ہیں لہذا ان کا نقطہ ضرب

$$r_{\parallel} \cdot r_{\perp} = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \cdot \left(\frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \right) = \frac{18}{722} (-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر r_{NM} کی ڈم رکھی جائے تب r_{NM} کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔ عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ ایسا سمتیہ جس کی ڈم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہوگی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0, 0, 0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $r_M = 1a_x + 5a_y + 6a_z$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ a_{NM} گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔ اکائی سمتیہ a_{NM} کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ sa_{NM} ہے۔ یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $r_Q = r_M + sa_{NM}$ ہوگا۔

$$r_Q = (1a_x + 5a_y + 6a_z) + s \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right)$$

اس مساوات میں s متغیر ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جاسکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1a_z$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

حل: نقطہ $N_1(0, 0, z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x, y, z)$ تک کا سمتیہ $r_{21} = xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1a_z \cdot [xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو r_{21} میں پُر کرتے ہوئے $r_{21} = xa_x + ya_y$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $r_{10} = z_0a_z$ ہے لہذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $r_{20} = xa_x + ya_y + z_0a_z$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2, 1, 3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

$$2x + y + 3z = 14: \text{جواب}$$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات A اور B کے سمتی ضرب¹⁹ کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔ حاصل سمتیہ A اور B سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ a_N سے ظاہر کیا جائیگا۔

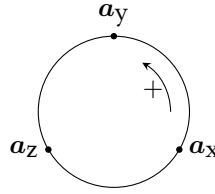
$$(1.15) \quad A \times B = |A||B| \sin \theta_{AB} a_N$$

جس سیدھی سطح پر A اور B دونوں پائے جائیں، a_N اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ a_N کو دائیں ہاتھ کے قانون²⁰ سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقیہ چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو A اور دوسری انگلی کو B کی سمت میں رکھیں۔ اس صورت میں انگوٹھا a_N کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی ڈم ایک ہی جگہ پر نہ ہوتے ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان \times سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب²¹ بھی کہا جاتا ہے اور

vector product¹⁹
right hand rule²⁰
cross product²¹



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$A \times B$ کو " A صلیب B " پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$(1.16) \quad A \times B = -B \times A$$

اکائی سمتیات a_x اور a_y کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت a_z حاصل ہوتی ہے۔ یوں $a_x \times a_y = a_z$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_z = a_x$ اور $a_z \times a_x = a_y$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $a_x \times a_x = -a_z$ ، $a_y \times a_y = -a_x$ اور $a_z \times a_z = -a_y$ لکھے جاسکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہذا $a_x \times a_x = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_y = 0$ اور $a_z \times a_z = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$(1.17) \quad \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z & a_y \times a_z &= a_x & a_z \times a_x &= a_y \\ a_x \times a_x &= 0 & a_y \times a_y &= 0 & a_z \times a_z &= 0 \end{aligned}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $a_x \times a_y$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں a_x سے شروع ہو کر a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_z حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ a_x سے a_y جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہذا جواب مثبت یعنی a_z ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \times a_y$ حاصل کرنے کی خاطر a_z سے a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_x حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہذا جواب $-a_x$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ اور $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \times (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x a_x \times a_x + A_x B_y a_x \times a_y + A_x B_z a_x \times a_z \\ &\quad + A_y B_x a_y \times a_x + A_y B_y a_y \times a_y + A_y B_z a_y \times a_z \\ &\quad + A_z B_x a_z \times a_x + A_z B_y a_z \times a_y + A_z B_z a_z \times a_z \end{aligned}$$

کو

$$(1.18) \quad A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.19) \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

یوں اگر $A = 2a_x - 3a_y + 1a_z$ اور $B = 6a_x + 5a_y - 4a_z$ ہیں تب

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(-4) - (1)(5)]a_x - [(2)(-4) - (1)(6)]a_y + [(2)(5) - (-3)(6)]a_z \\ &= 7a_x + 14a_y + 28a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2, 3, 1)$ ، $N_2(1, 6, 5)$ اور $N_3(-2, -3, 2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} r_{21} &= (1 - 2)a_x + (6 - 3)a_y + (5 - 1)a_z = -1a_x + 3a_y + 4a_z \\ r_{31} &= (-2 - 2)a_x + (-3 - 3)a_y + (2 - 1)a_z = -4a_x - 6a_y + 1a_z \end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} r_N &= (-1a_x + 3a_y + 4a_z) \times (-4a_x - 6a_y + 1a_z) \\ &= 6a_z + 1a_y + 12a_z + 3a_x - 16a_y + 24a_x \\ &= 27a_x - 15a_y + 18a_z \end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x, y, z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ N_1 سے N_4 تک سمتیہ $r_{41} = (x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z$ کے استعمال سے

$$r_{41} \cdot r_N = [(x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z] \cdot (27a_x - 15a_y + 18a_z) = 0$$

لکھ کر

$$27(x - 2) - 15(y - 3) + 18(z - 1) = 0$$

سے

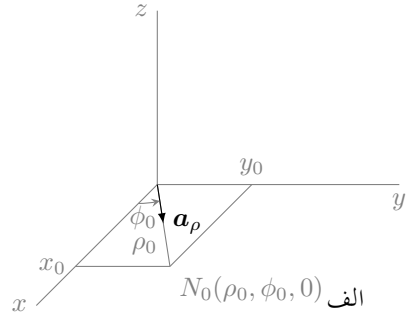
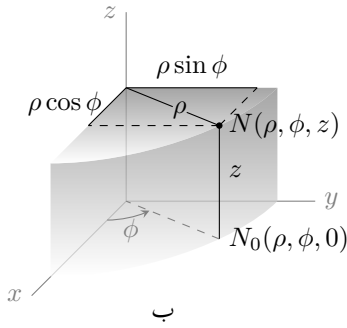
$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ایسی مساوات میں x ، y اور z کے مختلف عمودی سمتیہ میں a_x ، a_y اور a_z کے مختلف 27، 15، اور 18 ہوتے ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9 - 9x + 5y}{6}$ لکھا جاسکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $r = xa_x + ya_y + za_z$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$r = xa_x + ya_y + \left(\frac{9 - 9x + 5y}{6} \right) a_z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $A = 1a_x + 3a_y - 2a_z$ اور $B = 5a_x - 2a_y - 3a_z$ کی صورت میں $A \times A \times A \times A \times B$ اور $a_B \times A \times A \times A \times B$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارٹیزی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔ ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ ہم اس کتاب میں کارٹیزی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔ انہیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارٹیزی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x, y اور z ستوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔ آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

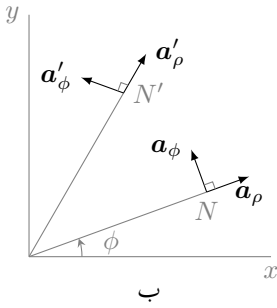
شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارٹیزی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔ اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد²² کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔ اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔ اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_ρ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\rho = \rho_0 a_\rho \quad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \quad (1.20)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نلکی اور کارٹیزی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-ب سے کارٹیزی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارٹیزی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.21)$$



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.22)$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_ρ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 2π یا 0 ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $d\phi$ کی صورت میں $\rho d\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو a_ϕ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_z لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات a_ϕ ، a_ρ اور a_z مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ a_ρ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح a_ϕ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔ a_z اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

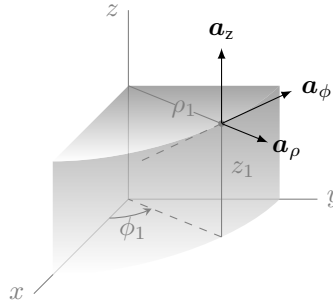
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$a_\rho \times a_\phi = a_z, \quad a_\phi \times a_z = a_\rho, \quad a_z \times a_\rho = a_\phi \quad (1.23)$$

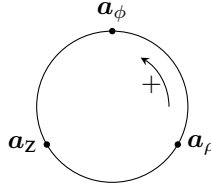
لکھا جاسکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$a_\rho \times a_\rho = 0, \quad a_\phi \times a_\phi = 0, \quad a_z \times a_z = 0 \quad (1.24)$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(1.25) \quad a_\rho \cdot a_\rho = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1, \quad a_z \cdot a_z = 1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.26) \quad a_\rho \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_z = 0, \quad a_z \cdot a_\rho = 0$$

غیر سمتی ضرب کو کروئیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

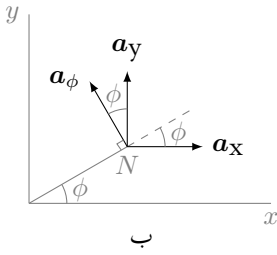
$$(1.27) \quad a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$$

جہاں

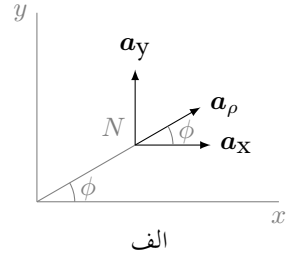
$$(1.28) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ, ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہوگی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دار و مدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو مکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ مکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر مکمل کے باہر لے جائے جاسکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے a_ρ اور a_ϕ اکائی سمتیات کو مکمل کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے a_ρ اور a_ϕ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے a'_ρ اور a'_ϕ آپس میں عمودی ہوں گے۔



ب



الف

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	a_ρ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ρ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ρ اور a_x کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہذا

$$(1.29) \quad a_\rho \cdot a_x = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

ہے۔ a_ρ اور a_y کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہذا

$$(1.30) \quad a_\rho \cdot a_y = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin \phi$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ϕ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ϕ اور a_x کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہذا

$$(1.31) \quad a_\phi \cdot a_x = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin \phi$$

ہے۔ a_ϕ اور a_y کے مابین زاویہ ϕ ہے لہذا

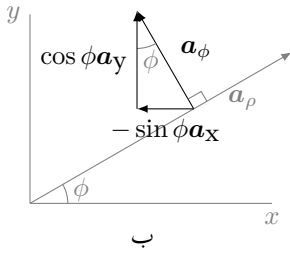
$$(1.32) \quad a_\phi \cdot a_y = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

کے برابر ہے۔ a_z کا a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

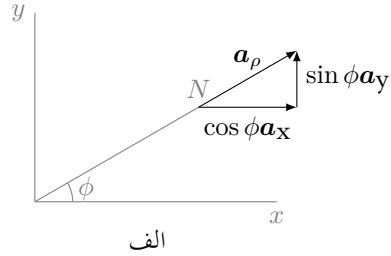
1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ρ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ a_ρ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$(1.33) \quad \begin{aligned} a_\rho &= \cos \phi a_x + \sin \phi a_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

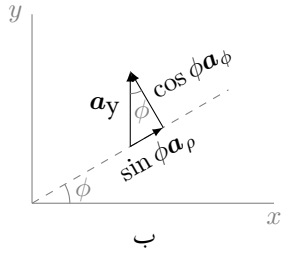


ب

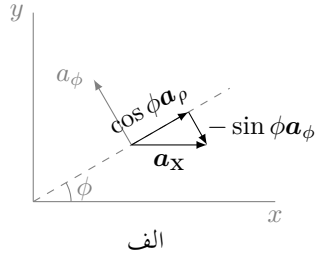


الف

شکل 1.21: a_ρ اور a_ϕ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔



ب



الف

شکل 1.22: a_x اور a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.34) \quad \begin{aligned} a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں a_x کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر a_x کی ڈم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر a_ρ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ a_ϕ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، a_x کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ a_x کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ a_ρ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ a_ϕ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$(1.35) \quad a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر a_y کی ڈم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$(1.36) \quad a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ A کو کارتیسی یا نلکی محدود میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(1.37) \quad \begin{aligned} A &= A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \\ &= A_\rho a_\rho + A_\phi a_\phi + A_z a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلی مساوات کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_x \cdot A &= A_x a_x \cdot a_x + A_y a_x \cdot a_y + A_z a_x \cdot a_z = A_x \\ a_y \cdot A &= A_x a_y \cdot a_x + A_y a_y \cdot a_y + A_z a_y \cdot a_z = A_y \\ a_z \cdot A &= A_x a_z \cdot a_x + A_y a_z \cdot a_y + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.38)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ A کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x, A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری a_ϕ, a_ρ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_\rho \cdot A &= A_\rho a_\rho \cdot a_\rho + A_\phi a_\rho \cdot a_\phi + A_z a_\rho \cdot a_z = A_\rho \\ a_\phi \cdot A &= A_\rho a_\phi \cdot a_\rho + A_\phi a_\phi \cdot a_\phi + A_z a_\phi \cdot a_z = A_\phi \\ a_z \cdot A &= A_\rho a_z \cdot a_\rho + A_\phi a_z \cdot a_\phi + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.39)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں A کو نکلی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ, A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

آئیں a_ρ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔ یوں $A = a_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔ مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $a_x \cdot A$ لینا ہوگا۔ جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = a_x \cdot A = a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = a_y \cdot A = a_y \cdot a_\rho = \sin \phi$$

اور

$$A_z = a_z \cdot A = a_z \cdot a_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں کارتیسی نظام میں $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہوئے

$$a_\rho = \cos \phi a_x + \sin \phi a_y$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

a_ϕ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$A_x = a_x \cdot a_\phi = -\sin \phi$$

$$A_y = a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$$

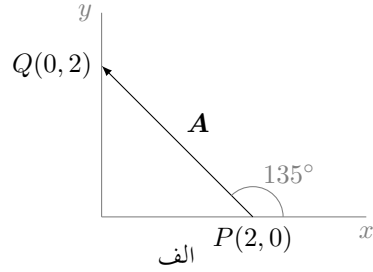
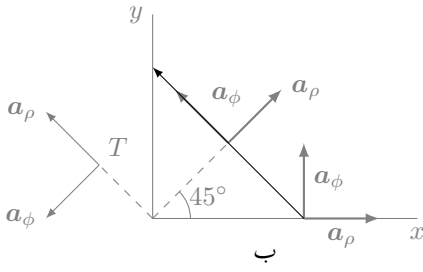
$$A_z = a_z \cdot a_\phi = 0$$

یوں

$$a_\phi = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔ اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

مشق 1.5: a_x ، a_y اور a_z کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

$$a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

$$a_z = a_z$$

شکل 1.23 میں $P(2, 0)$ سے $Q(0, 2)$ تک سمتیہ A دکھایا گیا ہے۔ کارتیسی نظام میں

(1.40)

$$A = -2a_x + 2a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(-2a_x + 2a_y) \cdot (-2a_x + 2a_y)} = \sqrt{8}$$

ہے۔ آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ ایسا کرنے کی خاطر a_ρ اور a_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $a_\rho \cdot A$ اور $a_\phi \cdot A$ حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\rho = a_\rho \cdot (-2a_x + 2a_y) = -2 \cos \phi + 2 \sin \phi$$

$$A_\phi = a_\phi \cdot (-2a_x + 2a_y) = 2 \sin \phi + 2 \cos \phi$$

یوں

(1.41)

$$A = 2(-\cos \phi + \sin \phi)a_\rho + 2(\sin \phi + \cos \phi)a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔ اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $a_\rho \cdot a_\rho = 1$ اور $a_\phi \cdot a_\phi = 1$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{A \cdot A} \\ &= \sqrt{2^2(-\cos \phi + \sin \phi)^2 + 2^2(\sin \phi + \cos \phi)^2} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 2 \cos \phi \sin \phi) + 4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 2 \cos \phi \sin \phi)} \\ &= \sqrt{8(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدود کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نکلے محدود کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔ آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔ اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ ان کی ستوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔ شکل 1.23-ب میں $\phi = 0^\circ$ ، $\phi = 45^\circ$ اور $\phi = 135^\circ$ پر a_ρ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ P یعنی $\phi = 0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} A_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ + \sin 0^\circ)a_\rho + 2(\sin 0^\circ + \cos 0^\circ)a_\phi \\ &= -2a_\rho + 2a_\phi \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 0^\circ$ پر A کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ a_ρ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت a_ϕ کی سمت میں ہی ہے۔ 1.23-ب میں نقطہ P پر A کی سمت واقع بڑھتی a_ϕ اور گھٹتی a_ρ کی سمت میں ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ $\phi = 0^\circ$ پر a_ρ اور a_ϕ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح a_ϕ اور a_y برابر ہوتے ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں a_x کی جگہ a_ρ اور a_y کی جگہ a_ϕ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$\phi = 45^\circ \text{ پر مساوات 1.41}$$

$$\begin{aligned} A_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)a_\rho + 2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\phi \end{aligned}$$

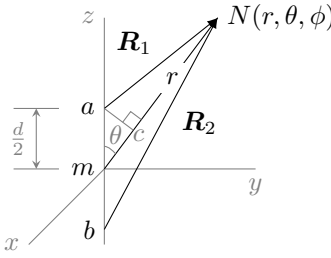
صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر A صرف اور صرف a_ϕ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔ شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر A کی سمت a_ϕ ہی ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ شکل میں اکائی سمتیات کو عین A کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جاسکے۔

آپ نے دیکھا کہ نکلے محدود میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔ آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کیا لکھا جائے گا۔ مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} A_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)a_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\rho \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کو a_ρ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محور پر نقطہ $a(0, 0, \frac{d}{2})$ پر مثبت چارج Q اور نقطہ $b(0, 0, -\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب²³ کہتے ہیں۔ دکھائے گئے سمتی فاصلوں R_1 اور R_2 کو کروئی محدود میں لکھیں۔



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m : N سے r تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ a_r ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروئی محدود کے اکائی سمتیہ a_θ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2} \cos \theta$ اور $ac = \frac{d}{2} \sin \theta$ لکھے جاسکتے ہیں۔ یوں R_1 کو ہم a سے c تک سمتیہ a_θ اور N سے c تک سمتیہ a_r $(r - \frac{d}{2} \cos \theta)$ کے مجموعے کی شکل میں

$$R_1 = \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta + (r - \frac{d}{2} \cos \theta) a_r \quad (1.42)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے R_2 کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں R_2 کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$R_2 = \frac{d}{2} a_z + r a_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود کی اکائی سمتیہ a_z اور کروئی محدود کی اکائی سمتیہ a_r استعمال کئے گئے۔ کروئی محدود میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$R_2 = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں $A_r = R_2 \cdot a_r$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r \right) \cdot a_r = \frac{d}{2} \cos \theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = R_2 \cdot a_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

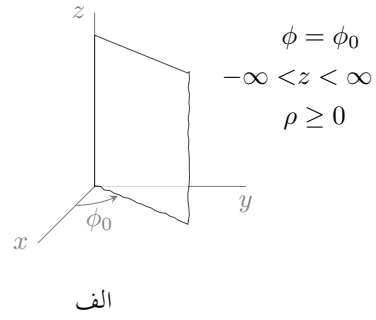
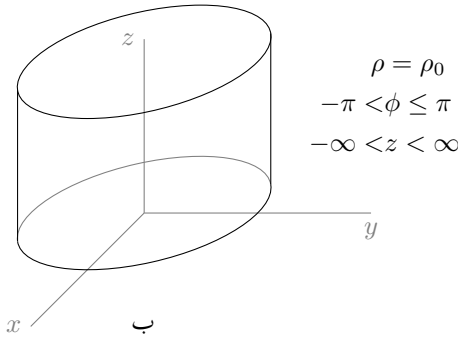
$$A_\theta = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r \right) \cdot a_\theta = -\frac{d}{2} \sin \theta$$

اسی طرح $A_\phi = R_2 \cdot a_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

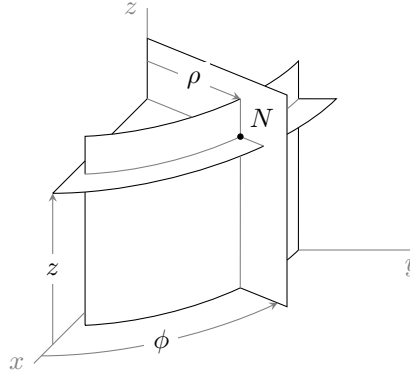
$$R_2 = \left(\frac{d}{2} \cos \theta + r \right) a_r - \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta \quad (1.43)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدود کے تین سطحیں۔

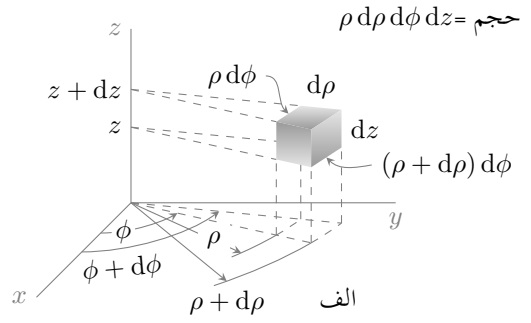
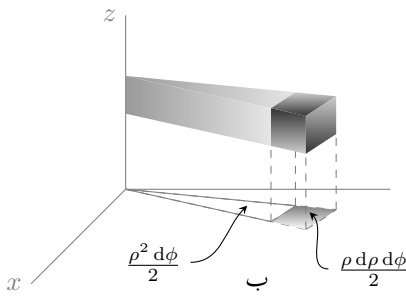
ہے۔ ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔ یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180° درجہ ہے جبکہ اس کا منفی حد $-\pi$ یعنی -180° درجہ ہے۔ نلکی محدود اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں a_z کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں a_ρ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدود میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدود کے متغیرات کو $d\phi$ اور dz بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $d\rho$ جبکہ a_z سمت کے اطراف کی لمبائی dz ہے۔ a_ϕ سمت میں z محدود کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho d\phi$ جبکہ محدود سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + d\rho) d\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدود تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $d\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 d\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + d\rho$

²⁴حقیقت میں منفی حد -180° کو نہیں چھوٹا۔ اگر منفی حد -180° کو چھوٹے تب منفی x محدود دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدود میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+d\rho)^2 d\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کارقبہ dS

$$\begin{aligned} dS &= \frac{(\rho + d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \frac{\rho^2 d\phi + 2\rho d\rho d\phi + (d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \rho d\rho d\phi + \frac{(d\rho)^2 d\phi}{2} \\ &\approx \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہاں آخری قدم $d\rho$ کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔ یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(d\rho)^2 d\phi}{\rho d\rho d\phi} = \frac{d\rho}{2\rho}$ ہو گی۔ $d\rho$ کو کم سے کم 25 کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں $\rho d\rho d\phi$ رقبہ اور dz بلندی کے مکعب کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho d\phi$ ، $d\rho$ اور dz لی جاتی ہے۔ یوں مکعب کے چٹائی اور اوپر سطح کارقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho d\rho d\phi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کارقبہ $d\rho dz$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کارقبہ $\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho, \phi, z)$ کو $N'(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$ کو تبدیل کرنے سے N' تک سمتیہ کو

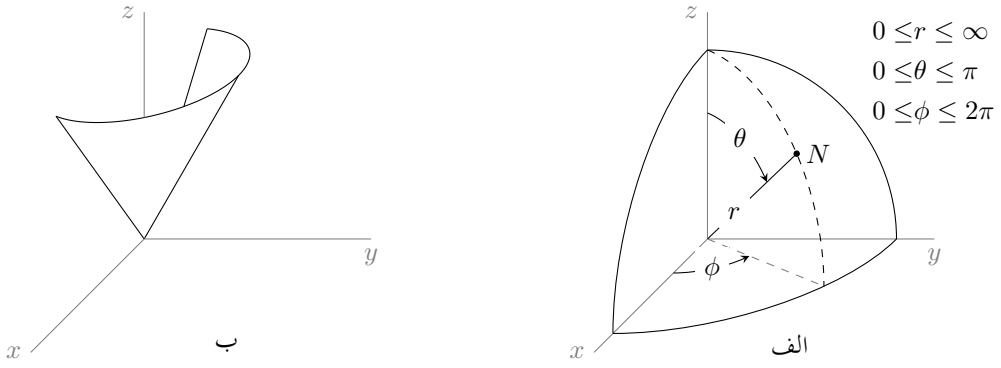
$$dL = d\rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z \quad (1.44)$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

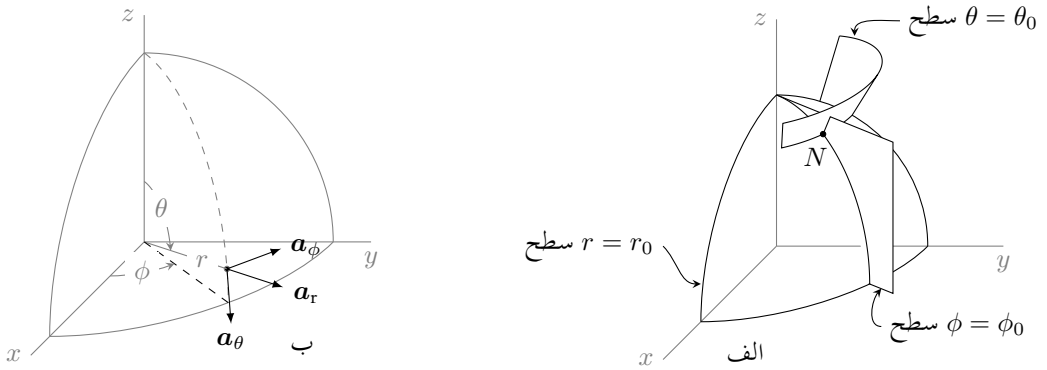
1.10 کروی محدود

سیدھی لکیریوں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدود میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدود بہتر ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدود میں باآسانی لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

²⁵ کسی بھی متغیر ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $d\rho$ لکھا جاتا ہے۔ $d\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $d\rho \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدود کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔

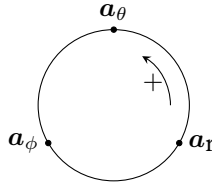


شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدود کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدود کے متغیرات r, θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدود کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدود سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدود سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نیکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدود سے شروع ہو کر منفی z محدود پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد²⁶ تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدود کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد²⁷ پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نیکی محدود کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نیکی محدود کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات a_r ، a_θ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ a_r ہوگی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ a_θ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ a_ϕ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے اکائی سمتیات کو بھی محدودی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ a_r سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح a_θ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ a_ϕ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

a_r ، a_θ اور a_ϕ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $a_r \times a_\theta = a_\phi$ ، $a_\theta \times a_\phi = a_r$ ، $a_\phi \times a_r = a_\theta$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ٹکلی محدود میں یہ انگلیاں ρ ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدود میں x ، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$(1.45) \quad a_r \times a_\theta = a_\phi, \quad a_\theta \times a_\phi = a_r, \quad a_\phi \times a_r = a_\theta$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح

$$(1.46) \quad a_r \cdot a_r = 1, \quad a_\theta \cdot a_\theta = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1$$

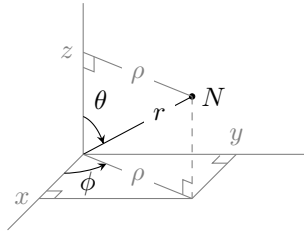
اور

$$(1.47) \quad a_r \cdot a_\theta = 0, \quad a_\theta \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_r = 0$$

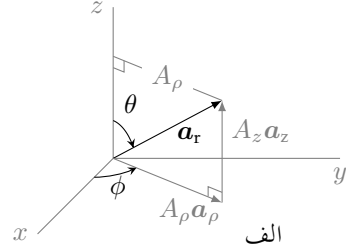
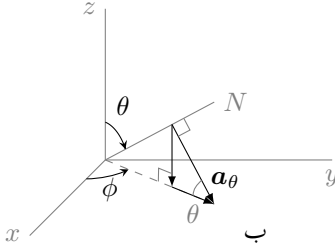
بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدود سے فاصلہ ρ ہے جو ٹکلی محدود کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin \theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r \cos \theta$ لکھی جاسکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho \cos \phi$ اور $y = \rho \sin \phi$ لکھے جاسکتے ہیں۔ $\rho = r \sin \theta$ پُر کرنے سے

$$(1.48) \quad \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جاسکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.50)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.51)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.52)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ a_r کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$a_r = A_\rho a_\rho + A_z a_z \quad (1.53)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں a_r کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin \theta$ اور $A_z = \cos \theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_r = \sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z \quad (1.54)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_\rho &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\rho = \sin \theta \\ a_r \cdot a_\phi &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.55)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $a_z \cdot a_\rho = 0, a_\rho \cdot a_\rho = 1$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔ یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیہ اور ٹکلی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_x &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_x = \sin \theta \cos \phi \\ a_r \cdot a_y &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_y = \sin \theta \sin \phi \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.56)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $a_r \cdot a_z$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی رداسی سمتیہ اور کارٹیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_r کو کارٹیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_r = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_r$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_r$ اور $A_z = a_z \cdot a_r$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$a_r = \sin \theta \cos \phi a_x + \sin \theta \sin \phi a_y + \cos \theta a_z \quad (1.57)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے a_θ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔ جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر a_θ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho a_\rho$ اور a_θ کے مابین زاویہ θ ہے۔ $B_\rho a_\rho$ اور $-B_z a_z$ مل کر ٹکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$B_\rho = \cos \theta$$

$$B_z = \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_\theta = \cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z \quad (1.58)$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_\rho &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\rho = \cos \theta \\ a_\theta \cdot a_\phi &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.59)$$

a_θ اور ٹکلی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_x &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_x = \cos \theta a_\rho \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi \\ a_\theta \cdot a_y &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_y = \cos \theta a_\rho \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta a_z \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.60)$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_ϕ	a_ρ	
$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	a_r
$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	a_θ
0	1	0	a_ϕ

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارٹیزیائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \phi$	$\sin \theta \cos \phi$	a_r
$-\sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	a_θ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات a_θ اور کارٹیزیائی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_θ کو کارٹیزیائی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_\theta = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_\theta$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_\theta$ اور $A_z = a_z \cdot a_\theta$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$(1.61) \quad a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

کروی محدود a_ϕ اور نلکی محدود a_ϕ یکساں ہیں۔ اسے کارٹیزیائی نظام میں

$$(1.62) \quad a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.63) \quad \begin{aligned} a_\phi \cdot a_x &= -\sin \phi \\ a_\phi \cdot a_y &= \cos \phi \\ a_\phi \cdot a_z &= 0 \end{aligned}$$

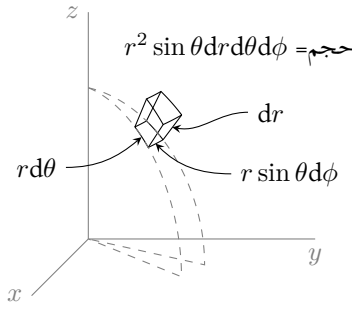
لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ a_ϕ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدود کے متغیرات dr ، $d\theta$ اور $d\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا مخرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ a_r سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں dr ہے۔ a_θ سمت میں z محدود کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + dr) d\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r d\theta + dr d\theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو بہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{dr}{r} = \frac{dr d\theta}{r d\theta}$ کے برابر ہے۔ dr کو کم سے کم 29 کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $dr d\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے a_ϕ اطراف کی

²⁹ کسی بھی متغیرہ r میں چھوٹی سی تبدیلی Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو dr لکھا جاتا ہے۔ dr کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $dr \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r \sin \theta d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جاسکتا ہے جس کے $r = r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin \theta dr d\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r dr d\theta$ ہوگا۔ اس مکعب کا حجم $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ ہوگا۔

شکل 1.33 میں کروی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r, \theta, \phi)$ کو $N'(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ تک سمتیہ کو $d\phi$ کوئے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$(1.64) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

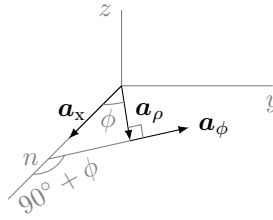
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف \mathbf{a}_r ہیں جن میں $-\mathbf{a}_r$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r = r_0 + dr$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں \mathbf{a}_r ہیں جن میں \mathbf{a}_r سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ جبکہ $r = r_0 + dr$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ ہے۔ اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$ جبکہ $\theta = \theta_0 + d\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$ ہوگا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$ اور $\phi = \phi_0 + d\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$ ہوگا۔

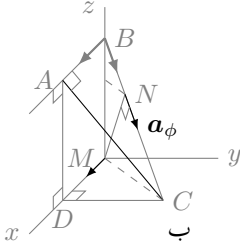
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin(\theta + d\theta) d\phi$, $r \sin \theta d\phi$, $(r + dr) \sin \theta d\phi$ اور $(r + dr) \sin(\theta + d\theta) d\phi$

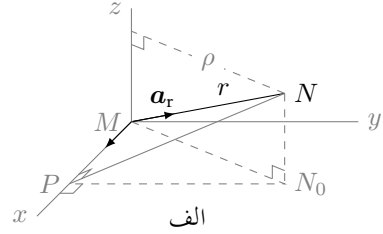
مثال 1.9: دو اکائی سمتیات \mathbf{a}_1 اور \mathbf{a}_2 کا غیر سمتی ضرب $\cos \alpha_{12} (1)(1) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کو سائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x$ اور $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



حل: شکل 1.34 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہذا $a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی ڈم نقطہ n پر آٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90^\circ + \phi$ ہے۔ یوں $a_x \cdot a_\phi = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin \phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح a_y اور a_ϕ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ a_z ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر a_x, a_y, a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں a_x اور a_r بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $a_x \cdot a_r = \cos \angle NMP$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\angle NMP$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدود پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے a_x سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدود پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تھون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ $\overline{MP} = x$ کا فاصلہ x اور زاویہ $\angle NPM = 90^\circ$ ہیں لہذا $\cos \angle NMP = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی a_x اور a_r کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدود پر عمود بناتے ہوئے یوں $a_y \cdot a_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدود پر عمود سے $a_z \cdot a_r = \frac{z}{r}$ لکھے جاسکتے ہیں۔ چونکہ $x = r \sin \theta \cos \phi$ ، $y = r \sin \theta \sin \phi$ اور $z = r \cos \theta$ کے برابر ہیں لہذا ہم

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_x &= \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi \\ a_r \cdot a_y &= \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi \\ a_r \cdot a_z &= \frac{z}{r} = \cos \theta \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر a_θ کا a_x کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_θ جبکہ محدود کے مرکز M پر a_x دکھائے گئے ہیں۔ $a_\theta \cdot a_x$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محور پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $a_\theta \cdot a_x = \cos \angle ABC$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\angle DMC = \phi$ اور $\angle BMN = \theta$ کر دی محدود کے زاویے ہیں۔ ٹکون $\triangle BMN$ میں زاویہ $\angle MNB$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\angle NBM = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\angle NBM = \angle CBM$ ہیں۔ اس طرح ٹکون $\triangle BMC$ میں $\angle BMC = 90^\circ$ جبکہ $\angle CBM = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\angle MCB = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے ٹکون $\triangle BMC$ کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ٹکون $\triangle MDC$ سے

$$\overline{MD} = \overline{MC} \cos \phi = \frac{l \cos \phi}{\tan \theta}$$

شکل سے واضح ہے کہ \overline{MD} اور \overline{AB} برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$ ۔ یوں ٹکون $\triangle BAC$ سے

$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l \cos \phi}{\tan \theta} \right)}{\left(\frac{l}{\sin \theta} \right)} = \cos \theta \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $a_r \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi$ لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $a_\theta \cdot a_y$ اور $a_\theta \cdot a_x$ حاصل کریں۔

جوابات: $\sin \phi$ اور $\sin \theta$ ۔

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون¹ سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔ کولومب کا قانون² اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$(2.1) \quad F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکروں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکروں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔ تناسب کے جزو مستقل G لکھا اور تجاذبی مستقل³ پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔ یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہوگی۔ ایسے چارج کو نقطہ چارج⁴ کہا جاتا ہے۔

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی

Law of Universal Gravitation¹
Coulomb's law²
gravitational constant³
point charge⁴

جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔ مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁶ ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔ خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad (2.3)$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل⁷ ہے۔ یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (2.5)$$

ہیں۔ یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (2.6)$$

کے برابر ہے۔ اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \quad (2.7)$$

لیا جائے گا۔ ϵ_0 کی اکائی فی راڈ فی میٹر $\frac{\text{F}}{\text{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین 9.8 N کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔ زمین کا رداس 6370 km لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24} \text{ kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000 \text{ km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔ پوری دنیا میں بے تار⁸ مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔ اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

permittivity⁵
electric constant⁶
permeability⁷
wireless⁸

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225 \text{ N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \text{ N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدود کے مرکز سے سمتی فاصلہ r_1 پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ r_2 پر دکھائے گئے ہیں۔ چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ R_{21} ہے جہاں

$$(2.8) \quad R_{21} = r_2 - r_1$$

کے برابر ہے۔ سمتیہ R_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ a_{21} یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$(2.9) \quad a_{21} = \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{R_{21}}{R_{21}} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

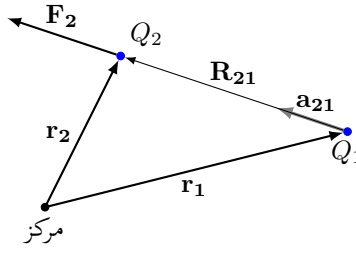
چارج Q_2 پر قوت F_2 کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ a_{21} کے سمت میں ہوگی۔ اس طرح یہ قوت

$$(2.10) \quad \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا۔ مساوات 2.10 کو کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔ چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہذا Q_1 پر قوت F_1 یوں لکھا جائے گا

$$(2.11) \quad \begin{aligned} F_1 &= -F_2 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} a_{12} \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $a_{12} = -a_{21}$ کے برابر ہے۔ دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت a_{21} کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-a_{21}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3, 2, 4)$ پر $20 \mu C$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1, 5, 9)$ پر $-50 \mu C$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= (1 - 3)\mathbf{a}_x + (5 - 2)\mathbf{a}_y + (9 - 4)\mathbf{a}_z \\ &= -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \\ R_{21} &= |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{38} \\ &= 6.1644 \end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21} &= \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{-2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{6.1644} \\ &= -0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6})}{38} (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \\ &= -0.237 (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \text{ N} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت a_{21} کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$(2.12) \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولومب کا قانون خطی⁹ ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایک کلوگرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہوگی جسے زمین کی کشش¹⁰ یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔ زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8 \frac{m}{s^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (2.13)$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان¹¹ پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دار و مدار پیمائشی کمیت¹² m_p پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلوگرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلوگرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلوگرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جاسکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلوگرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر 1.96 N قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad (2.14)$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \quad (2.15)$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

⁹linear

¹⁰gravity

¹¹gravitational field

¹² m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔

¹³test mass

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع چارج ہے۔ اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج q_p پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔ مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت E یا صرف برقی میدان پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$(2.16) \quad E = \frac{F}{q_p}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہوگا۔ ایسا کولومب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی E تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ E_1, E_2, E_3, \dots کا سمتی مجموعہ

$$(2.17) \quad E = \sum_{i=1}^n E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی E ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے چارج Q سے سمت a_R میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$(2.18) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_R}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج کو r کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.19) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

جہاں a_r r کے مرکز پر r کی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x', y', z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جاسکتی ہے۔

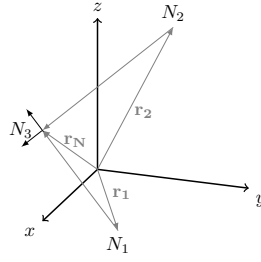
$$(2.20) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں

$$r = xa_x + ya_y + za_z$$

$$r' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$$

$$R = r - r' = (x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z$$



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4, 1, 1)$ پر $100 \mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1, 4, 2)$ پر $50 \mu\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2, 2, 5)$ پر Q_1 سے چارج Q_2 پیدا E_1 اور E_2 حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی E کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا E_1 حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned} R_{31} &= R_3 - R_1 = (2 - 4)a_x + (2 - 1)a_y + (5 - 1)a_z \\ &= -2a_x + 1a_y + 4a_z \end{aligned}$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned} R_{31} &= |R_{31}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{21} = 4.583 \\ a_{31} &= \frac{R_{31}}{R_{31}} = \frac{-2a_x + 1a_y + 4a_z}{\sqrt{21}} \\ &= -0.436a_x + 0.218a_y + 0.873a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned} E_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} (-0.436a_x + 0.218a_y + 0.873a_z) \\ &= -18686a_x + 9343a_y + 37414a_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} R_{32} &= (2 - 1)a_x + (2 - 4)a_y + (5 - 2)a_z \\ &= 1a_x - 2a_y + 3a_z \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} R_{32} &= |R_{32}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ a_{32} &= \frac{1a_x - 2a_y + 3a_z}{\sqrt{14}} \\ &= 0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z \end{aligned}$$

سے

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{14} (0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z)$$

$$= 8582a_x - 17196a_y + 25779a_z \quad \frac{V}{m}$$

ملتا ہے۔ ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل E حاصل کرتے ہیں۔

$$E = E_1 + E_2$$

$$= (-18686a_x + 9343a_y + 37414a_z) + (8582a_x - 17196a_y + 25779a_z)$$

$$= -10104a_x - 7853a_y + 63193a_z \quad \frac{V}{m}$$

مساوات 2.16 کو

$$(2.21) \quad F = qE$$

لکھا جاسکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں چارج q پر قوت F دیتا ہے۔

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محور پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محور پر انتہائی قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔ یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت ρ_L ¹⁶ کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔ لکیری چارج کثافت کی تعریف

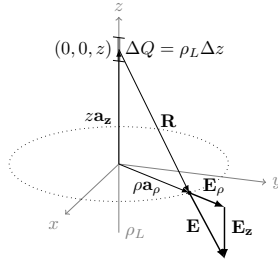
$$(2.22) \quad \rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

ہے۔ لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔ اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہوگی۔ آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔ مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ z محور کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔ نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دار و مدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہوگی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہوگا۔

¹⁶ line charge density

¹⁷ اس کتاب میں رداں کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے، اس کے زیر نوشت میں S ، L یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ E سمتی فاصلہ R کی سمت میں ہوتا ہے لہذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا E کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$(2.23) \quad E = E_\rho + E_z$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0, 0, z)$ پر موجود چارج سے E_z کی سمت منفی z جانب ہوگی۔ اسی طرح $(0, 0, -z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا E کی سمت مثبت z جانب ہوگی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدود پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا E_z کے اثر کو منفی z محدود پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا E_z ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$(2.24) \quad E_z = 0$$

ہوگا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدود پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہوگا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدود پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے E_z کو دائرے کی دوسری جانب z محدود پر $-\infty$ تک فاصلے پر چارجوں کا E_z ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جاسکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہوگا۔ آئیں اس E کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ پر دائرے پر ΔE پیدا کرتا ہے۔ محدود کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z a_z$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ ρa_ρ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} R &= \rho a_\rho - z a_z \\ |R| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ a_R &= \frac{R}{|R|} = \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \Delta z (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو مکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ مکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$(2.25) \quad E = \int dE = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz$$

اس مکمل کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.26) \quad E = \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا مکمل E_ρ اور دوسرا مکمل E_z دیتا ہے یعنی

$$(2.27) \quad E_\rho = \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا مکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں مکمل کو باری باری حل کریں۔ پہلے E_ρ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مکمل کا ابتدائی حد

$$-\infty = \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}}$$

$$\alpha_{\text{ابتدائی}} = -\frac{\pi}{2}$$

اور اختتامی حد

$$\infty = \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}}$$

$$\alpha_{\text{اختتامی}} = \frac{\pi}{2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$dz = \rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$E_\rho = \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{\rho^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho \end{aligned} \quad (2.28)$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔ اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \, dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

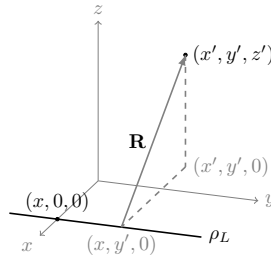
سے

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\sec^3 \alpha} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \alpha \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

ملتا ہے۔ یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$E = E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho \quad (2.30)$$



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔ اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔ نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ ایسی صورت میں کسی بھی نقطہ پر E حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔ یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔ اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔ لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_R کو a_ρ تصور کریں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} a_R \quad (2.31)$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محور کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ (x', y', z') پر E حاصل کریں۔

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ (x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}$ ہے جبکہ

$$R = (x' - x)a_x + za_z$$

$$a_R = \frac{(x' - x)a_x + za_z}{\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}}$$

ہیں۔ یوں

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x' - x)^2 + z^2}} a_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر E حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $E = 30a_z$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 5, 0)$ اور نقطہ $N_2(7, 3, 4)$ پر E حاصل کریں۔

$$E_2 = 18 \left(\frac{3a_y + 4a_z}{5} \right) \frac{V}{m} \text{ اور } E_1 = 18a_z \frac{V}{m} \text{ جوابات:}$$

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبہ پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

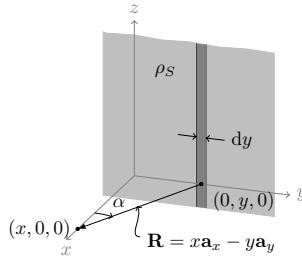
$$\rho_S = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (2.32)$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ ہوتا رہے بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہوگی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا E حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے E پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے E حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محور کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ dy ہے۔ اس گھیرے گئے رقبہ کی چوڑائی dy ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور dy چوڑائی رقبہ میں $\rho_S \Delta L dy$ چارج پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبہ کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبہ پر $\frac{\rho_S \Delta L dy}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S dy \quad (2.33)$$



شکل 2.5: یکساں چارج بردار بموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔ نقطہ $(x, 0, 0)$ پر \mathbf{E} حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ \mathbf{R} دکھایا گیا ہے جہاں

$$\mathbf{R} = x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y \quad (2.34)$$

کے برابر ہے جس سے

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.35)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چارج بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\rho_S dy (x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y)}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \quad (2.36)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو $d\mathbf{E} = dE_x + dE_y$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$dE_x = \frac{\rho_S x dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_x$$

$$dE_y = -\frac{\rho_S y dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_y \quad (2.37)$$

کے برابر ہیں۔ x محدود کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدود کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا dE_y کو ختم کرے گا۔ یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے dE_y کو منفی y پر کھینچی لکیر کا dE_y ختم کرے گا۔ x محدود کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$E_y = 0 \quad (2.38)$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔ پہلے E_x حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.37 میں دئے dE_x کا مکمل لیتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر

$$y = x \tan \alpha$$

$$dy = x \sec^2 \alpha d\alpha \quad (2.39)$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 \alpha d\alpha}{x^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

میں $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \end{aligned} \quad (2.40)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_y حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے dE_y کا مکمل لیتے ہیں۔

$$E_y = \int dE_y = -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y dy}{(x^2 + y^2)}$$

مکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{df(y)}{2f(y)}$ لکھا جاسکتا ہے جس کا مکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N \quad (2.42)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں a_N اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر¹⁹ سمجھا جاسکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

• $x = 0$ پر $\rho_s + \text{کثافت کی سطح کا برقی میدان}$ ۔

$$E_{x>0}^+ = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x > 0$$

$$E_{x<0}^+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x < 0$$

• $x = x_1$ پر $-\rho_s$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$E_{x>x_1}^- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x > x_1$$

$$E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x < x_1$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$ ، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$(2.43) \quad \begin{aligned} E_{x<0} &= E_{x<0}^+ + E_{x<x_1}^- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = 0 \\ E_{x>x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x>x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = 0 \\ E_{0<x<x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_x \end{aligned}$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$(2.44) \quad E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_x$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔ اس میدان کی سمت مثبت چارج بردار چادر سے منفی چارج بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔ یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلا یا ہوا پائی جائے۔ چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہوگی۔

مثال 2.8: خلا میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ پہلی سطح $y = 2$ پر 2 nC/m^2 ، دوسری سطح $y = 5$ پر 4 nC/m^2 اور تیسری سطح $y = 10$ پر -6 nC/m^2 کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_1(0, 0, 0)$ ، $N_2(5, 3, 4)$ ، $N_3(-2, 7, 11)$ اور $N_4(-7, 30, 22)$ پر E حاصل کریں۔

جوابات: $0, 144\pi a_y, 216\pi a_y$

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔ اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بننا ہے لہذا اسی پر غور کرتے ہیں۔ لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔ حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیر تصور کرتے ہیں۔ یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہوگی۔ کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \quad (2.45)$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی مکمل سے حاصل کیا جائے گا۔ کارٹیسی محدد میں ایسا مکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint_h \rho_h \, dx \, dy \, dz \quad (2.46)$$

جہاں مکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرز کے مکمل کو عموماً ایک درجی مکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int_h \rho_h \, dh \quad (2.47)$$

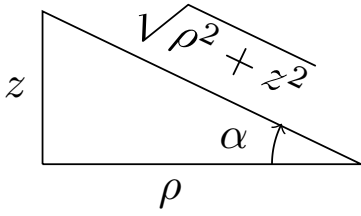
حجم میں \mathbf{r}' نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ \mathbf{r} پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان dE مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_h \Delta h'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

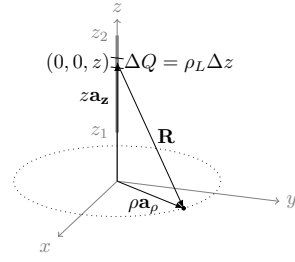
اس مساوات میں نقطہ \mathbf{r}' پر چارج کی کثافت ρ'_h لکھی گئی ہے۔ تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ \mathbf{r} پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے مکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho'_h \, dh'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.48)$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔ سمتیہ \mathbf{r} اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔ اس نقطے پر برقی میدان کو $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیر ہے جس کی قیمت \mathbf{r}' پر منحصر ہے۔ \mathbf{r}' پر چھوٹی حجم dh' اور چارج کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں \mathbf{r}' اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ \mathbf{r}' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر \mathbf{E} حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔



(ب) Z اور α کا تعلق



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔ نقطہ دار گول دائرے پر E حاصل کریں۔ اس گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر E کی حتمی قیمت $|E|$ یکساں ہوگی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

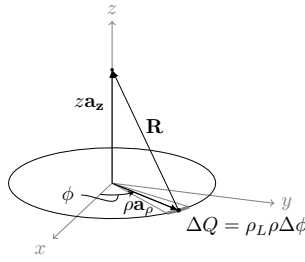
$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= E_\rho + E_z \end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan \alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \arctan \frac{z_2}{\rho} \\ \alpha_1 &= \arctan \frac{z_1}{\rho} \end{aligned}$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_\rho = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$(2.49) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) + \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔

حل: ہلکی محدود استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں چارج ΔQ مقام ρa_ρ پر پایا جاتا ہے جبکہ \mathbf{E} مقام $z a_z$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{E} رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z \mathbf{a}_z - \rho \mathbf{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

پیدا ہو گا۔ دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (z\mathbf{a}_z - \rho\mathbf{a}_\rho) d\phi$$

تکملہ کا متغیر ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔ حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جاسکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔ E_z لکھتے ہوئے کارٹیسی محدود کی اکائی سمتیہ \mathbf{a}_z کو تکملہ کے باہر لے جایا جاسکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے \mathbf{a}_z تبدیل نہیں ہوتا البتہ E_ρ لکھتے ہوئے ٹکلی محدود کی اکائی سمتیہ \mathbf{a}_ρ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے \mathbf{a}_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔ چونکہ \mathbf{a}_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L \rho z \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ E_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_\rho d\phi \end{aligned} \quad (2.50)$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$E_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.51)$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\mathbf{a}_\rho = \cos\phi\mathbf{a}_x + \sin\phi\mathbf{a}_y$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos\phi\mathbf{a}_x + \sin\phi\mathbf{a}_y) d\phi \\ &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (\sin\phi\mathbf{a}_x - \cos\phi\mathbf{a}_y) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ چارج نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\mathbf{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \mathbf{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہذا حقیقت میں صرف \mathbf{a}_z جانب ہی E پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس ٹکون کو دیکھتے ہوئے جس کا R حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E_R کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$E_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{a}_z$$

یہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رد اس a کرہ کی سطح پر یکساں چارج کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔ کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان E حاصل کریں۔

حل: ہم کرہ کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a, \theta, \phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ میں چارج $\rho_S a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0, 0, b)$ پر برقی میدان dE پیدا کرے گا۔ محدود کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ aa_r جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ ba_z ہے۔ یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$(2.52) \quad \mathbf{R} = ba_z - aa_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود اور کروی محدود کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔ اس طرح

$$(2.53) \quad \begin{aligned} |\mathbf{R}| &= \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \sqrt{(ba_z - aa_r) \cdot (ba_z - aa_r)} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab a_z \cdot a_r} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta} \end{aligned}$$

اور

$$(2.54) \quad a_r = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{ba_z - aa_r}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 32 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $a_z \cdot a_r = \cos \theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدود کو $(0, 0, -a)$ اور $(0, 0, a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔ یوں $(0, 0, -a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$(2.55) \quad \begin{aligned} \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \pi} &= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab} \\ &= \sqrt{(b + a)^2} \\ &= b + a \end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری²⁰ ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔ اسی طرح $(0, 0, a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$(2.56) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos 0} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}$$

کے برابر ہے۔ اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.57) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b - a)^2} = b - a$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $b < a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.58) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a - b)^2} = a - b$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

²⁰ فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

اس طرح N پر

$$dE = \frac{a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر چارج سے پیدا میدان کو مکمل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_S a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)} \frac{b\mathbf{a}_Z - a\mathbf{a}_R}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \\ (2.59) \quad &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b\mathbf{a}_Z - a\mathbf{a}_R) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi \end{aligned}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\mathbf{a}_R = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_X + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_Y + \cos \theta \mathbf{a}_Z$ لکھتے ہوئے

$$(2.60) \quad E = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[-a \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_X - a \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_Y + (b - a \cos \theta) \mathbf{a}_Z] \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ Z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف \mathbf{a}_Z سمت میں ہی ممکن ہے۔ یوں \mathbf{a}_X اور \mathbf{a}_Y اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$(2.61) \quad E_Z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi$$

لکھتے ہیں۔ سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں \mathbf{a}_X اور \mathbf{a}_Y اجزاء کو صفر ثابت کریں۔ بیرونی مکمل پہلے لیتے ہوئے

$$(2.62) \quad E_Z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(2.63) \quad E_Z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے مکمل میں $w = \cos \theta$ اور $dw = -\sin \theta d\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$(2.64) \quad \int \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(2.65) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$(2.66) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{b+a} + \frac{1}{b-a} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(b-a) + (b+a)}{(b+a)(b-a)} \right] = \frac{2}{b(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N اندرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$(2.67) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(a-b) + (a+b)}{(a+b)(a-b)} \right] = \frac{2}{a(a^2 - b^2)}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w = \cos \theta$ پر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w \, dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ ہم

$$u = w$$

$$dv = \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$v = \int dv = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔ اس طرح

$$\int \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int w \left[\frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= w \left[\frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \right] + \int \frac{dw}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-w}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2 b^2}$$

$$= \frac{-(b^2 + a^2 - abw)}{a^2 b^2 (b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

سے

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(b^2 + a^2 - ab \cos \theta)}{a^2 b^2 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right]$$

حاصل ہوتا ہے۔ N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.68) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.69) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$(2.70) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{b(b^2 - a^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)} \right)$$

$$= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل چارج $4\pi a^2 \rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔ کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$(2.71) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a(a^2 - b^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)} \right)$$

$$= 0$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔ چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$(2.72) \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (r > a)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ وہی میدان ہے جو کروئی محدد کے مرکز پر Q نقطہ چارج رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ ایسی سطح کو فیراڈے حفاظتی سطح²¹ کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی چارج کثافت پائی جائے گا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان E حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر dr موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 dr$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 dr$ چارج پایا جائے گا۔ مثال 2.11 کے مطابق یہ چارج r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا چارج R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$(2.73) \quad E = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \Big|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r \quad (R < a)$$

لکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چارج کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام چارج بطور نقطہ چارج کردار ادا کرتے ہوئے

$$(2.74) \quad E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{a^3 \rho_h}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \quad (R > a)$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں E کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ چارج کے میدان کو چارج سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اب چارج کے قریب E کی قیمت زیادہ اور چارج سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر E کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہوگی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

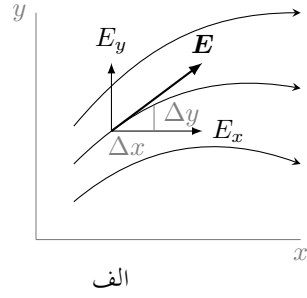
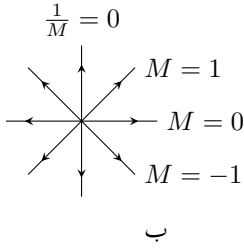
آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاؤ خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر E یہاں سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہوتا ہے۔ جس مقام پر گھنے سمت بہاؤ خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر E کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔ سمت بہاؤ خطوط پر تیر کا نشان E کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کار تیزی محدود میں کسی بھی میدان کو

$$E = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔ آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔ کسی بھی نقطہ (x, y) پر ایسے میدان کو

$$(2.75) \quad E = E_x(x, y) \mathbf{a}_x + E_y(x, y) \mathbf{a}_y$$



شکل 2.8: (الف) سمت بہاؤ خط کے مساوات کا حصول۔ (ب) لکیری چارج کثافت کے سمت بہاؤ خط۔

شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک E کے تین سمت بہاؤ خط دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں کسی عمومی نقطے پر E دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہے۔ میدان کے کارٹیسائی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔ اسی نقطے پر سمت بہاؤ خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔ Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$(2.76) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم مکمل سے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لا محدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدود پر لا محدود لکیری چارج کثافت کا میدان

$$(2.77) \quad E = \frac{a_\rho}{\rho}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = E \cdot a_x$ اور $E_y = E \cdot a_y$ سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_x = \frac{\cos \phi}{\rho} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_y = \frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لا محدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو

$$(2.78) \quad E = \frac{x}{x^2 + y^2} a_x + \frac{y}{x^2 + y^2} a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

لکھ کر اس کا مکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \quad (2.79)$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہا و خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

2.8 سوالات

سوال 2.1: صفحہ 58 پر مساوات 2.60 میں a_x اور a_y اجزاء کا مکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مانگل فیراڈے¹ کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔ چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر Q چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھایہ گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جاسکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاؤ² کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاؤ کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \quad (3.1)$$

برقی بہاؤ کی اکائی کو لومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاؤ کی سمت الٹی ہوگی اور یہ چارج میں داخل ہوگا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پلایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاؤ خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ کو کثافت برقی بہاؤ³ D کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r \quad (3.2)$$

Michael Faraday¹
electric flux²
electric flux density³

سمتیہ کثافت برقی بہاؤ پائی جائے گی۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$(3.3) \quad D = \epsilon_0 E \quad \text{خالی خلاء}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کردی محدود کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاؤ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$(3.4) \quad D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R$$

جہاں a_R چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام r' پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام r پر

$$\Delta D(r) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

کثافت برقی بہاؤ پیدا کرے گا۔ قانون کولومب خطی ہونے کی بنا پر D بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا حجم کے تمام چارجوں سے

$$(3.5) \quad D(r) = \int_h \frac{\rho'_h dh'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 53 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں D اور E کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا D اور E کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاؤس کا قانون

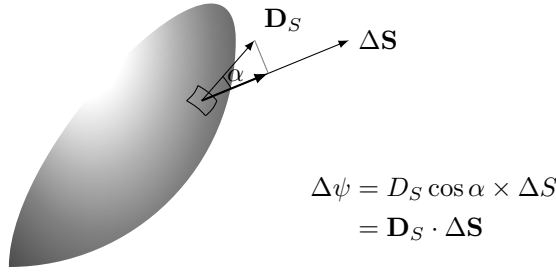
فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جاسکتا ہے جسے گاؤس کا قانون⁴ کہتے ہیں۔

کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

جناب گاؤس⁵ نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ انہیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاؤ اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاؤ اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاؤ کے کثافت کی قیمت $D_S \cos \alpha$ ہو گی لہذا

$$\Delta \psi = D_S \cos \alpha \Delta S$$



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاؤ D_S لکھتے ہوئے زیر نوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاؤ کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔ اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = D_S \cdot \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاؤ تکملہ سے حاصل ہوگی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔ یوں

$$(3.6) \quad \psi = \oint_S D_S \cdot \Delta S = Q$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ⁶ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔ اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح⁷ کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔ یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$(3.7) \quad Q = \int_h \rho_h dh$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(3.8) \quad \oint_S D_S \cdot \Delta S = \int_h \rho_h dh$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔ اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاؤ اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جاسکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$(3.9) \quad Q = \int_S \rho_S dS$$

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q = \int_L \rho_L dL \quad (3.10)$$

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (3.11)$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی مکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ انہیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جاسکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدہ⁸ کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافت برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہوگی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدہ کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر D تبدیل نہیں ہوگا۔

کروی محدہ استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اسی کی سمتی شکل

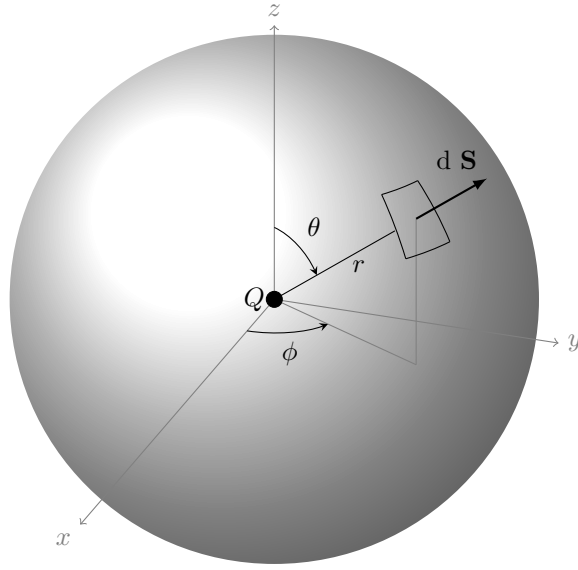
$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

ہوگی۔ اس سطح پر کثافت برقی بہاؤ کی قیمت D_S اور سمت \mathbf{a}_r ہوگی لہذا سمتی کثافت برقی بہاؤ

$$D_S = D_S \mathbf{a}_r$$

لکھی جائے گی۔ یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاؤ

$$\begin{aligned} d\psi &= D_S \cdot dS \\ &= (D_S \mathbf{a}_r) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r) \\ &= D_S r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

ہوگی۔ اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہوگی۔

$$\begin{aligned}\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left. -\cos \theta \right|_0^{\pi} d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہوگا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہوگا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی سمتی شکل

$$(3.12) \quad D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

اور $D = \epsilon_0 E$ سے

$$(3.13) \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا صفحہ 42 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح

صفحہ 57 پر حصہ 2.11 میں کروی محدود کے مرکز پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S چارج کثافت پائی جائے گا میدان بیرون کروہ اور اندرون کروہ حاصل کیا گیا۔ آئیں گاؤس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔ یوں $r < a$ رداس کے کرہ میں صفر چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔ اس کے برعکس $r > a$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ چارج کو گھیرے گا لہذا یہاں

$$D = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2} a_r$$

ہو گا جس سے

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} a_r$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل چارج کو Q لکھا گیا ہے۔ یہ نتائج گاؤس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔ اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ لامحدود لکیر کو ٹکلی محدود کی z محدود تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔ مزید، جیسا کہ پہچلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔ یوں یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کثافت برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔ آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاؤس کے قانون کی مدد سے کثافت برقی بہاؤ حاصل کریں۔

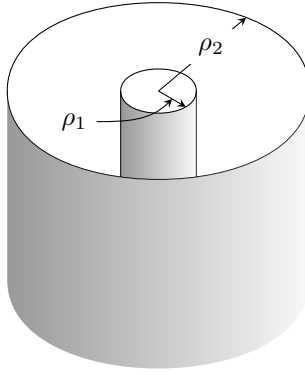
چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافت چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔ اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی ٹکلی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے⁹ بند تصور کریں۔ چونکہ برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہے لہذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ ٹکلی سطح کا رقبہ $2\pi \rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافت برقی بہاؤ D_ρ ہے لہذا پوری سطح سے $2\pi \rho L D_\rho$ برقی بہاؤ ہو گا جو گاؤس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔ اس طرح

$$2\pi \rho L D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \rho}$$

⁹ آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس ٹکلی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔



شکل 3.3: ہم محوری تار

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$(3.14) \quad D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho$$

سے

$$(3.15) \quad E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 47 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصبے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہوگی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہوگی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نکلی نمادوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ ایسی تار جسے ہم محوری تار¹⁰ کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہوگی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نکلی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہذا L لمبائی کی ایسی نکلی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$(3.16) \quad \begin{aligned} D &= \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L} a_\rho \end{aligned}$$

پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$(3.17) \quad D_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L} a_\rho$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$(3.18) \quad D_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L} a_\rho$$

پایا جائے گا۔ بیرونی تار کے باہر فرضی نکلی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$(3.19) \quad D_{\text{تار کے باہر}} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار¹¹ بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کثافت برقی بہاؤ $-5 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر 94.26 nC چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر 94.26 nC چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہوگی۔ صفحہ 50 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

اس شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔ سامنے سطح پر Da_x جبکہ پیچھے سطح پر $-Da_x$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو Sa_x اور $-Sa_x$ لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ یوں حجم سے برقی بہاؤ صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\begin{aligned}\psi_{\text{سامنے}} &= Da_x \cdot Sa_x = SD \\ \psi_{\text{پچھے}} &= (-Da_x) \cdot (-Sa_x) = SD\end{aligned}$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔ اگر چارج بردار سطح پر ρ_s ہو تب حجم میں $\rho_s S$ چارج پایا جائے گا۔ یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پچھے}} = 2DS = \rho_s S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_s}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$(3.20) \quad D = \frac{\rho_s}{2} \mathbf{a}_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں \mathbf{a}_N سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔ یوں

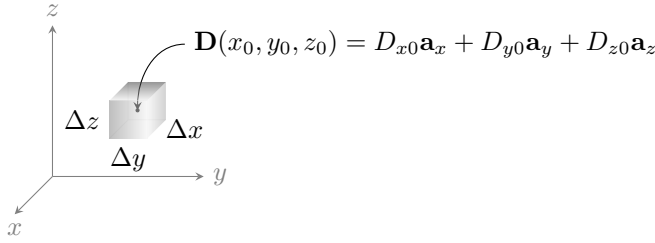
$$(3.21) \quad E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_N$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدود پر نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ہیں۔ اس چھوٹی ڈبہ پر گاؤس کے قانون

$$(3.22) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_h \rho_h dh$$



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ ڈبئیہ کے چھ اطراف ہیں۔ یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \int_{\text{سامنے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{سامنے}} \\ &\doteq (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x, \text{سامنے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں D کی قیمت ڈبئیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ ٹیلر تسلسل¹² کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ڈبئیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\mathbf{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0} \mathbf{a}_x + D_{y0} \mathbf{a}_y + D_{z0} \mathbf{a}_z$$

کی قیمت سے وسط سے $\frac{\Delta x}{2} + \text{فاصلے پر ڈبئیہ کے سامنے سطح پر } D_x \text{ ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔}$

$$\begin{aligned} D_{x, \text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\Delta x}{2} \right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \dots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x, y اور z ہیں لہذا تسلسل میں جزوی تفرق¹³ کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہذا پیکل سطح $-\Delta y \Delta z a_x$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پیکل سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پہچے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{پہچے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{پہچے}} \\ &\doteq (D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z)_{\text{پہچے}} \cdot (-\Delta y \Delta z a_x) \\ &\doteq -D_x_{\text{پہچے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پیکل سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x, \text{پہچے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{پہچے}} \doteq - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned} \int_{\text{پہچے}} + \int_{\text{سامنے}} &\doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \\ &\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{بائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{نیچے}} + \int_{\text{اوپر}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$(3.23) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$(3.24) \quad Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta h$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $D = 2xa_x + 3ya_y + 5a_z$ C/m² ہو تب کارتیسی محدود کے مرکز پر 10^{-9} m³ کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5 \text{ nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاؤ

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں یعنی

$$(3.25) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h$$

اور

$$(3.26) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta h}$$

مساوات 3.25 میکس ویل¹⁴ کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ D کا پھیلاؤ¹⁶ بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف جبکہ اس کا باایاں بازو پھیلاؤ حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارتیسی محدود میں

$$(3.27) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات}$$

سے سمتیہ D کا پھیلاؤ حاصل کیا جاتا ہے۔

انجینئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ K کا $\oint_S K \cdot dS$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ D کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے D کی جگہ K لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(3.28) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S K \cdot dS}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ K پانی کا بہاؤ، اینٹوں کی رفتار یا سیلیکان کی پتہری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم K کو سمتی بہاؤ کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات K کا پھیلاؤ بیان کرتا ہے۔ پھیلاؤ کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاؤ کے پھیلاؤ سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاؤ فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاؤ کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاؤ فی چھوٹی حجم کو پھیلاؤ کہتے ہیں۔ پھیلاؤ کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاؤ کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نہ ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈھوبے نقطے پر بھی پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈھوبا رہے اس وقت تک یہاں پھیلاؤ صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاؤ پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور پر باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاؤ صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلاء پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاؤ پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پنچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلتی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاؤ پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلنے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاؤ سے مراد نقطے سے انخلاء جبکہ منفی پھیلاؤ سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے $+$ ، ضرب کے لئے \times اور تکملہ کے لئے \int استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیبل¹⁷ کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ نیبلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$(3.29) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیر f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$(3.30) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z$$

جبکہ سمتیہ K کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot K &= \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \cdot (K_x a_x + K_y a_y + K_z a_z) \\ &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{aligned}$$

لیا جاتا ہے۔ یہ علامت انجینئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کو $\nabla \cdot \mathbf{D}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(3.32) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

کے برابر ہے۔ پھیلاؤ کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔ مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(3.33) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاؤس کے قانون کی تفریق¹⁸ شکل ہے۔ اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمیل¹⁹ شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 100 پر دیا گیا ہے۔

3.9 نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ اس حصے میں نلکی محدود استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی جائے گی۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{سامنے}} &= -\Delta\rho\Delta z a_\phi \\ \Delta S_{\text{پچھے}} &= +\Delta\rho\Delta z a_\phi \\ \Delta S_{\text{بائیں}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right) \Delta\phi\Delta z a_\rho \\ \Delta S_{\text{دائیں}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right) \Delta\phi\Delta z a_\rho \\ \Delta S_{\text{اوپر}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho a_z \\ \Delta S_{\text{نیچے}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں آنے والے سامنے رقبے برابر تھے۔ نلکی محدود میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔ اس فرق کی بنا پر نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات قدر مختلف حاصل ہوگی۔ چھوٹی حجم کے وسط میں

$$(3.34) \quad \mathbf{D} = D_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + D_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + D_{z0} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$D_{\text{سامنے}} = \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) a_{\phi}$$

$$D_{\text{پچھے}} = \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) a_{\phi}$$

$$D_{\text{بائیں}} = \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) a_{\rho}$$

$$D_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) a_{\rho}$$

$$D_{\text{اوپر}} = \left(D_{z0} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) a_z$$

$$D_{\text{نیچے}} = \left(D_{z0} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} = \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left. \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \right|_N = D_{\rho} + \rho \frac{\Delta D_{\rho}}{\Delta \rho} \Big|_N = D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S D_S \cdot dS = \left(\frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$(3.35) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نکلی محدود میں پھیلاؤ دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہر گز حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے باوجود نکلی محدود میں بھی پھیلاؤ کے عمل کو $\nabla \cdot \mathbf{D}$ سے ہی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$(3.36) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

لیا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔ یوں سمتیہ \mathbf{K} کے لئے اسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(3.37) \quad \nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}$$

3.10 پھیلاؤ کی عمومی مساوات

کارٹیزی محدود میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاؤ کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نکلی محدود میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاؤ کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی عمومی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے جو تمام محدود کے لئے کارآمد ہے۔

کارٹیزی محدود کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نکلی محدود کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدود کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدود²⁰ استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور تین عمودی اکائی سمتیات (a_u, a_v, a_w) ہیں۔ عمومی محدود کسی بھی محدود کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارٹیزی محدود کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہوگا۔

شکل میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدود کے تین اطراف

$$dL_1 = k_1 du$$

$$dL_2 = k_2 dv$$

$$dL_3 = k_3 dw$$

ہیں۔ کارٹیزی محدود میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $dL_1 = dx$ کے برابر ہوگا۔ نکلی محدود میں

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = \rho$$

$$k_3 = 1$$

(3.38)

جبکہ کروئی محدود ہیں

$$(3.39) \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ اسی طرح تین سمتی رقبے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 a_u \\ dL_1 dL_3 a_v \\ dL_1 dL_2 a_w \end{aligned}$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آئے سامنے سطحوں پر بہاؤ حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر D کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاؤ حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاؤ سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاؤ حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاؤ

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} \\ dL_1 dL_3 D_{v0} \\ dL_1 dL_2 D_{w0} \end{aligned}$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ سامنے} \\ - dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ پیچے} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ سامنے} \\ - k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ پیچے} \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاؤ کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) du dv dw$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$\begin{aligned} dh &= dL_1 dL_2 dL_3 \\ &= k_1 k_2 k_3 du dv dw \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right] du dv dw$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right] = \lim_{dh \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{dh}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف ہے۔ یوں پھیلاؤ کی عمومی مساوات

$$(3.40) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right]$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نکلی اور کروئی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نکلی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z) \end{aligned}$$

نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروئی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta D_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta D_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r D_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) \end{aligned}$$

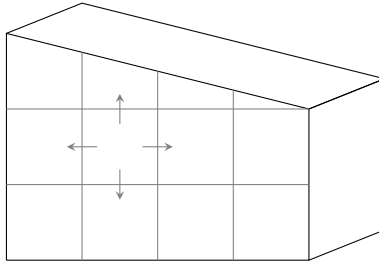
کروئی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاؤ

صفحہ 73 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا مکملہ بند حجم میں سمتیہ کے مکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

لکھتے ہوئے

$$(3.43) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \nabla \cdot \mathbf{D} dh$$

لکھا جاسکتا ہے جو مسئلہ پھیلاؤ²¹ بیان کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاؤ \mathbf{D} کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی مکملہ کو دو درجی مکملہ اور دو درجی مکملہ کو تین درجی مکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا مکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاؤ کے مکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ پھیلاؤ کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے باآسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاؤ قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاؤ ثابت ہوتی ہے لہذا دونوں کا مجموعی بہاؤ حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاؤ رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاؤ کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاؤ کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاؤ سے ہی جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے \mathbf{D} سے پھیلاؤ کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ہوتا ہے۔ کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لا محدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہوگی۔

باب 4

توانائی اور برقی دباؤ

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ dL طے کرنے سے

$$dW = F dL$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام¹ کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned} dW &= F \cos \alpha dL \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $F \cos \alpha dL$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ لکھا گیا ہے۔

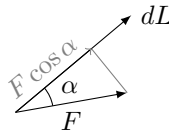
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $F_G = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{a}_r$ پایا جاتا ہے² جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $F_G = -mga_r$ لکھا جاسکتا ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h \mathbf{a}_r$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \Delta h \mathbf{a}_r = mg \Delta h$$

¹work
² \mathbf{a}_r اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے کردہ فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہو گی۔ کام کرنے کے لئے درکار توانائی کیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے محففی توانائی³ کہتے ہیں۔ اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور محففی توانائی مکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = - \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ اختیار کردہ راستے کا محففی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین محففی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان⁴ کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ برقی میدان E میں چارج q پر قوت $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ عمل کرتا ہے۔ چارج کو فاصلہ dL ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\mathbf{F}_{\text{بیرونی}} = -\mathbf{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$(4.1) \quad dW = -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

کام⁵ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$(4.2) \quad W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

توانائی درکار ہو گی۔

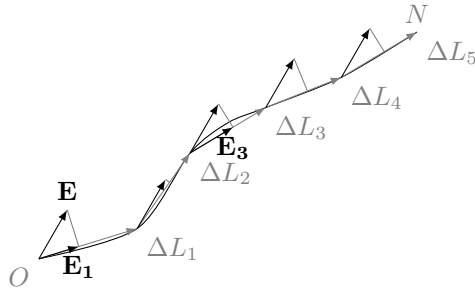
4.2 لکیری تکملہ

کار ہے۔

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں یکساں⁶ اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان E میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں E کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots$ میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں ΔL_1 کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\mathbf{E} \cdot \Delta L_1$ توانائی درکار ہو گی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$(4.3) \quad \begin{aligned} W &= -q\mathbf{E} \cdot \Delta L_1 - q\mathbf{E} \cdot \Delta L_2 - q\mathbf{E} \cdot \Delta L_3 - q\mathbf{E} \cdot \Delta L_4 - q\mathbf{E} \cdot \Delta L_5 \\ &= -q\mathbf{E} \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5) \end{aligned}$$



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

لکھی جاسکتی ہے۔ تو سین میں بند $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ L_{ON} ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.4) \quad W = -qE \cdot L_{ON}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے dL بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو مکمل کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.5) \quad W = \int_O^N -qE \cdot dL$$

چونکہ q اور E کی قیمتیں مستقل ہیں لہذا انہیں مکمل کے باہر لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$(4.6) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \int_O^N dL \\ &= -qE \cdot L_{ON} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q ، E اور L_{ON} پر ہے جہاں L_{ON} نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

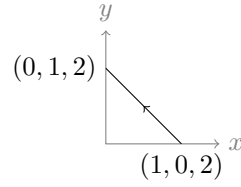
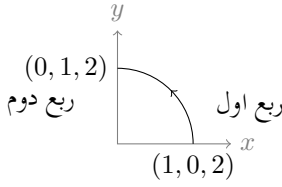
مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$E = (y+z)a_x + (x+z)a_y + (x+y)a_z \quad \frac{V}{m}$$

میں $N_1(1, 0, 2)$ سے $N_2(0, 1, 2)$ تک سیدھی لکیر پر 0.1 کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان⁷

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$



شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

ہے لہذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں لکیر کی مساوات

$$(4.7) \quad y = -x + 1$$

ہے۔ کار تیزی محدود میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$(4.8) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} [(y+z)a_x + (x+z)a_y + (x+y)a_z] \cdot (dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ &= -0.1 \int_1^0 (y+z) dx - 0.1 \int_0^1 (x+z) dy - 0.1 \int_2^0 (x+y) dz \end{aligned}$$

آخری قدم پر مکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں مکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں مکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں $(y+z)$ کا مکمل x کے ساتھ ہے لہذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یوں پہلا مکمل

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 [y+z] dx &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2] dx \\ &= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^0 \\ &= 0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا مکمل y کے ساتھ ہے لہذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔ سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 [x+z] dy &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2] dy \\ &= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y \right) \Big|_0^1 \\ &= -0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

ہو گا۔ تیسرے مکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ مکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^0 (x+y) dz = 0 \text{ J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0J$ ہوگی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1, 0, 2)$ سے $(0, 1, 2)$ تک $\frac{V}{m}$ تک $\mathbf{E} = (y + z)\mathbf{a}_x + (x + z)\mathbf{a}_y + (x + y)\mathbf{a}_z$ میدان میں $0.1C$ کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اگائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1 \int_1^0 (y + z) dx - 0.1 \int_0^1 (x + z) dy - 0.1 \int_2^2 (x + y) dz$$

میں پہلی تکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1 - x^2}$ پُر کرنا ہوگا۔ یاد رہے کہ ربع اول⁸ میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 (y + z) dx &= -0.1 \int_1^0 (\sqrt{1 - x^2} + 2) dx \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 \\ &= -0.025\pi - 0.2 \end{aligned}$$

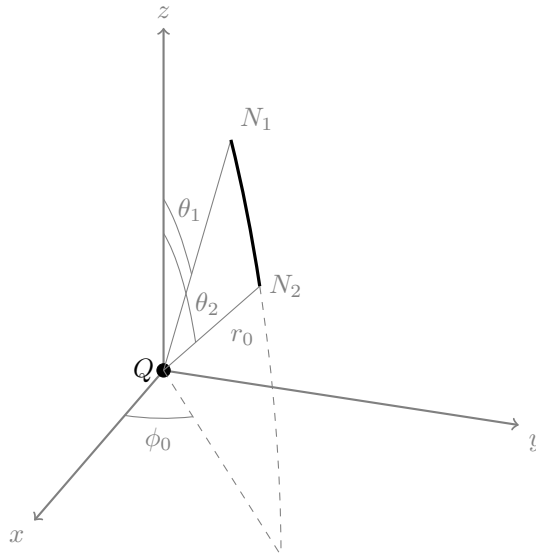
جاول، دوسرے تکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1 - y^2}$ کا استعمال ہوگا۔ یوں

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 (x + z) dy &= -0.1 \int_0^1 (\sqrt{1 - y^2} + 2) dy \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} y}{2} + \frac{y\sqrt{1 - y^2}}{2} + 2y \right) \Big|_0^1 \\ &= 0.025\pi + 0.2 \end{aligned}$$

جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x + y) dz = 0J$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0J$ ہوگا۔



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1, 0, 2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔
جوابات: -0.1328 J ، -0.1328 J

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.9) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم \mathbf{a}_r یعنی E کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔ آئیں مکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(4.10) \quad \begin{aligned} dL &= dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= \rho d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

کار تیزی، نکلی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ dL دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \int_{r_0, \theta_1, \phi_0}^{r_0, \theta_2, \phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_0}^{r_0} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = 1$ کے علاوہ $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = 0$ اور $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{r_1, \theta_1, \phi_1}^{r_2, \theta_2, \phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\mathbf{E} = 3x^2yz^2\mathbf{a}_x + x^3z^2\mathbf{a}_y + 2x^3yz\mathbf{a}_z \frac{V}{m}$ میں محدود کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

• دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔

• ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی $-1200J, -1200J$ ۔

4.3 برقی دباؤ

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو برقی دباؤ کہتے ہیں۔ برقی دباؤ کے اکائی J/C کو وولٹ¹⁰ کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقدار ہی ہے لہذا برقی دباؤ بھی مقداری ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباؤ یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (4.11)$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B ، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ L_{ON} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباؤ V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباؤ دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔ کسی نقطے کی حتمی برقی دباؤ معنی نہیں رکھتی۔ برقی دباؤ بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔ یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ¹¹، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔ دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔ یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔ اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباؤ کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباؤ کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ ایسے نقطے کو برقی زمین¹²، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباؤ پر تصور کیا جاتا ہے۔ عموماً گرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباؤ، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہوگا جبکہ گھریلو برقی دباؤ مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباؤ ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً گرہ ارض کی برقی دباؤ کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔ طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔ یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباؤ حاصل کی جائے گی۔

ہمہ محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔ اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباؤ حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباؤ V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباؤ V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباؤ

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (4.12)$$

ہوگا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہوگی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

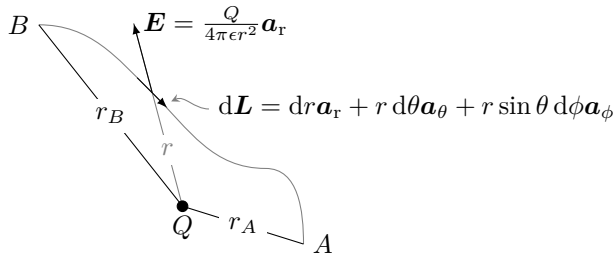
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباؤ

شکل 4.5 میں خالی غلاء میں کروی محدود مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔ Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی dL پر اوسط برقی میدان $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ ہوگا۔ یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned} dW &= -qE \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -\frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباؤ۔

توانائی درکار ہوگی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$(4.13) \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نہ کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباؤ مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty} = 0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$(4.14) \quad V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پر اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباؤ کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہذا برقی دباؤ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.15) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

جو کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباؤ V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباؤ مقداری ہے لہذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیت نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباؤ تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح¹³ کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی رداس کا قوہ سطح ہوگی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ

z محدود پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت کا میدان صفحہ 71 پر مساوات 3.15

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho$$

دیتا ہے۔ اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$(4.16) \quad V = - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho_L d\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباؤ

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 71 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جس سے

$$(4.17) \quad E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباؤ

$$V = - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho \cdot d\rho a_\rho = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

$$(4.18) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ

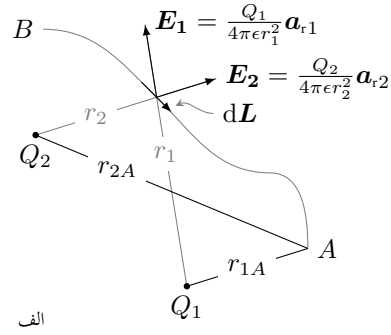
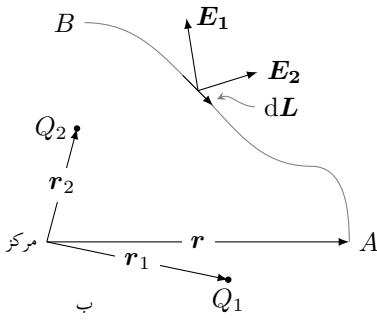
شکل 4.6-الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} a_{r1}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کا میدان $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} a_{r2}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_2 اس محدود کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان E_1 اور E_2 دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $E = E_1 + E_2$ ہو گا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی dL پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$(4.19) \quad dL = dr_1 a_{r1} + r_1 d\theta_1 a_{\theta1} + r_1 \sin \theta_1 d\phi_1 a_{\phi1}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$(4.20) \quad dL = dr_2 a_{r2} + r_2 d\theta_2 a_{\theta2} + r_2 \sin \theta_2 d\phi_2 a_{\phi2}$$

لکھا جائے گا۔ dL فاصلہ طے کرنے کی خاطر



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباؤ۔

$$\begin{aligned} dW &= -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{L} \\ &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{a}_{r1} \cdot d\mathbf{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{a}_{r2} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ اس مساوات میں $\mathbf{a}_{r1} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت $d\mathbf{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے dr_1 ملتا ہے۔ اسی طرح $\mathbf{a}_{r2} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت $d\mathbf{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے dr_2 ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$dW = -\frac{qQ_1 dr_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2 dr_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W &= \int_B^A dW = -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{dr_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}} \right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباؤ

$$(4.21) \quad V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباؤ کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباؤ علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدود کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ r_1 جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ r_2 اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ r ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.22) \quad V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} \right)$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|r - r_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|r - r_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.22

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{Q_n}{|r - r_n|} \right) \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|r - r_j|}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(r)$ میں r سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_h(r_1)\Delta h_1}{|r - r_1|} + \frac{\rho_h(r_2)\Delta h_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{\rho_h(r_n)\Delta h_n}{|r - r_n|} \right) \quad (4.24)$$

جہاں r کو کثافت کا آزاد متغیر لیتے ہوئے مقام r_j پر کثافت کو $\rho_h(r_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی مکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$V(r) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(r') dh'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|} \quad (4.25)$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔ مقام r' پر چھوٹی حجم dh' میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(r') dh'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.25 نقطہ r پر برقی دباؤ دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ r تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(r)$ برابر توانائی درکار ہوگی۔

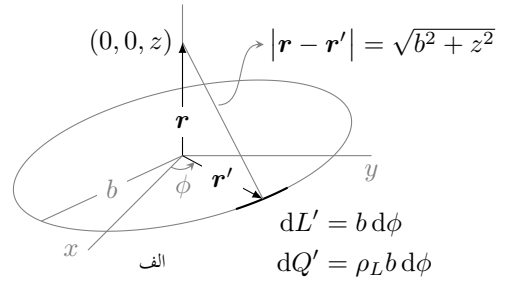
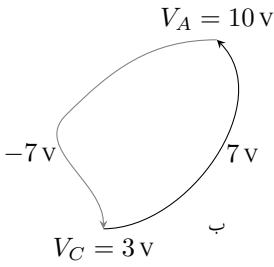
اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_s یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(r) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_s(r') dS'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|} \quad (4.26)$$

$$V(r) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|} \quad (4.27)$$

لکھتے۔ ان مساوات میں dh' ، dS' اور dL' غیر سستی یعنی مقداری ہیں۔ تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدود کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ $N(0, 0, z)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے Z محدد پر پیدا برقی دباؤ۔ (ب) بند دائرے کی برقی دباؤ صفر ہے۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کا رداس r اور نکلی محدود کا رداس ρ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے r' کے مقام پر چھوٹی لکیر $dL' = b d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ برقی دباؤ r پر درکار ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|r' - r| = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0, 0, 0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ ولٹ کا برقی دباؤ پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباؤ یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$V_C = - \int_{\infty}^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

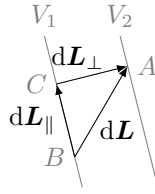
شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس ولٹ جبکہ V_C تین ولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات ولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7V$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات ولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7V$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباؤ میں سات ولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباؤ میں سات ولٹ ہی کی کمی رونما ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباؤ میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے مکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جاسکتا ہے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (4.28)$$

جہاں مکمل کے نشان پر گول دائرہ بند مکمل کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل 4.8: برقی دباؤ کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان¹⁴ کے لئے درست ہے۔ اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان¹⁵ کہتے ہیں۔ ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان¹⁶ ہے۔ یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے محض توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر محض توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہوگی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی محض توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.5 برقی دباؤ کی ڈھلوان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ dL لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباؤ میں $-E \cdot dL$ تبدیلی رونما ہوگی جہاں برقی میدان کو E لکھا گیا ہے۔

$$(4.29) \quad dV = V_2 - V_1 = -E \cdot dL$$

چھوٹی لمبائی dL پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا ہم B سے C اور پھر A بھی جاسکتے تھے۔ B سے C تک فاصلے کو $dL_{||}$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو dL_{\perp} لکھتے ہوئے

$$(4.30) \quad dV = -E \cdot (dL_{||} + dL_{\perp})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ E کو ہم قوہ سطح کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.31) \quad E = E_{||} + E_{\perp}$$

جس سے

$$(4.32) \quad dV = -(E_{||} + E_{\perp}) \cdot (dL_{||} + dL_{\perp}) = -E_{||} dL_{||} - E_{\perp} dL_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $E_{||}$ اور $dL_{||}$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{||} \cdot dL_{||} = E_{||} dL_{||}$ لکھا گیا ہے جبکہ E_{\perp} اور dL_{\perp} کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\perp} \cdot dL_{\perp} = 0$ ہے۔ اس مساوات کا پہلا جزو $-E_{||} dL_{||}$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے۔ ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباؤ نہیں پایا جاتا یعنی $-E_{||} dL_{||}$ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$(4.33) \quad E_{||} = 0$$

static electric field¹⁴
conservative field¹⁵

¹⁶ یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولوہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔ اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔ آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$(4.34) \quad E = E_{\perp}$$

یوں

$$(4.35) \quad dV = -E_{\perp} dL_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں E_{\perp} کی جگہ E لکھتے ہیں۔

$$(4.36) \quad dV = -E dL_{\perp}$$

اس مساوات سے

$$(4.37) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$(4.38) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباؤ کو حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہذا اسے $V(x, y, z)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات x, y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x, y, z)$ کا تفرق

$$(4.39) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی برقی دباؤ کو

$$(4.40) \quad E = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$(4.41) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.42) \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $dy = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx = -E_x dx$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہوگی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جاسکتا ہیں۔ یوں

$$(4.43) \quad \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے مساوت 4.40 میں پُر کرتے

$$(4.44) \quad E = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم

$$(4.45) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \quad \text{کارتیسی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.46) \quad E = -\nabla V$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباؤ کی ڈھلوان¹⁷ پڑھا جاتا ہے۔ مساوت 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباؤ اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 78 پر مساوت 3.32 پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری¹⁸ حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاؤ کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.47) \quad \nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

مشق 4.3: متعلق $f(x, y, z) = 3 + z^2 e^y \sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

جواب: $z^2 e^y \cos x a_x + z^2 e^y \sin x a_y + 2z e^y \sin x a_z$

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا سمتی فاصلہ $R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ہے۔ نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل: نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2, y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1, y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔ یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} a_x + \frac{\partial}{\partial y_2} a_y + \frac{\partial}{\partial z_2} a_z$$

¹⁷gradient

¹⁸طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاؤ کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کرتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} &= \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{3}{2}} [2(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{-(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x - (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y - (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$(4.48) \quad \nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = -\frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔ اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$(4.49) \quad \nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$(4.50) \quad \nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

4.5.1 نلکی محدود میں ڈھلوان

نلکی محدود میں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات نلکی محدود کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباؤ $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.51) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$(4.52) \quad \mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z$$

$$(4.53) \quad dL = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

جہاں چھوٹی لمبائی dL کو صفحہ 27 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.54) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - (E_\rho d\rho + E_\phi \rho d\phi + E_z dz)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $d\phi = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho$ اور $-E_\rho d\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا $-E_\rho d\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho$ ہو گا جس سے $-E_\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho d\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$(4.55) \quad \begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.56) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدود میں ڈھلوان کی مساوات

$$(4.57) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{نلکی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔ کارٹیزی محدود کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.5.2. کروی محدود میں ڈھلوان

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدود میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ کروی محدود میں کسی بھی نقطے کے برقی دباؤ کو $V(r, \theta, \phi)$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح E کو تین عمودی حصوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.58) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$(4.59) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$(4.60) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.61) \quad \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = - \left(E_r dr + E_\theta r d\theta + E_\phi r \sin \theta d\phi \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r} dr$ اور $-E_r dr$ تبدیل ہوں گے۔ یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r} dr = -E_r dr$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta = -E_\theta r d\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = -E_\phi r \sin \theta d\phi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے کروی محدود میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(4.63) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad \text{کروی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

مشق 4.5: صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں پھیلاؤ کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات (a_u, a_v, a_w) لئے گئے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1} \frac{\partial}{\partial u} a_u + \frac{1}{K_2} \frac{\partial}{\partial v} a_v + \frac{1}{K_3} \frac{\partial}{\partial w} a_w \quad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدود میں E کی مساوات حاصل کریں۔

حل: برقی دباؤ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدود کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ صفر کے برابر ہوں گے۔ اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں تلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہوسکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.6 جفت قطب

شکل 4.9- الف میں محدود کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدود پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔ یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ ایسی جوڑی چارجوں کو جفت قطب¹⁹ کہا جاتا ہے۔ ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباؤ کی قیمتیں درکار ہیں۔ کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔ دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہوگا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہوگا۔ شکل 4.9- الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔ نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ آخر کار یہ شکل 4.9- ب کی طرح نظر آتے ہیں۔ آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباؤ اور برقی میدان حاصل کریں۔

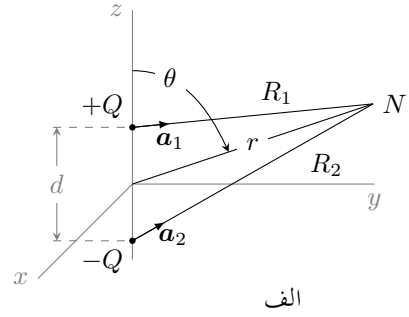
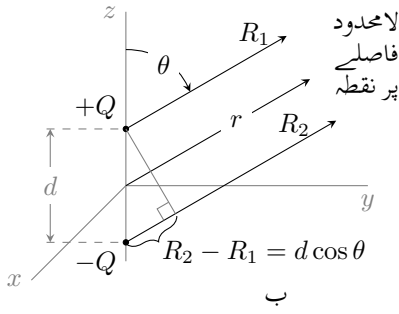
شکل 4.9- ب میں R_1, R_2 اور r تینوں z محدود کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$R_2 - R_1 = d \cos \theta$$

$$R_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$R_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$$

(4.64)



شکل 4.9: جفت قطب

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباؤ V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$(4.65) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{(r - \frac{d}{2} \cos \theta)(r + \frac{d}{2} \cos \theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{(r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d \cos \theta}{(1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta)} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نیچے قوسین میں $\cos \theta \leq 1$ اور $d \gg r$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \gg 1$ ہوگا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.66) \quad V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$(4.67) \quad \mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

ہم پہلے برقی دباؤ اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر مکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دو نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباؤ حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا چارج |Q| ضرب چارجوں کے درمیان سمتی فاصلہ d کو معیار اثر جفت قطب²⁰ کہتے ہیں اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(4.68) \quad p = Qd$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی چارج سے مثبت چارج کی سمت میں ہوتا ہے لہذا شکل 4.9 میں $d = da_z$ ہے۔ اس طرح چونکہ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$ کے برابر ہے لہذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$(4.69) \quad V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(4.70) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^2} \cdot \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

جہاں r اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباؤ حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ r' جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی محدود نظام سے آزاد مساوات ہے۔

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباؤ r^2 گنا کم ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ اکیلے چارج کا برقی دباؤ ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو چارج نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت چارج کا اثر منفی چارج کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔ یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے E کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

جب تک Q ضرب d کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر d کو یوں تبدیل کیا جائے کہ Qd تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ اب اگر ہم Qd کی قیمت محدود رکھتے ہوئے d کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جاسکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جاسکے تو ایسی صورت میں ہمیں نقطہ جفت قطب حاصل ہو گا۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاؤ خط

ہم پہلے صفحہ 61 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاؤ خط²¹ پر غور کر چکے ہیں۔ آئیں جفت قطب کے سمت بہاؤ خط کھینچنا دیکھیں۔ برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جاسکتے ہیں۔ اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مختلف برقی دباؤ کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط حاصل کئے جاتے ہیں۔ شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں چارج سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباؤ صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔ اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر a_r سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر a_θ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔ اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{dr}{r d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}$$

یا

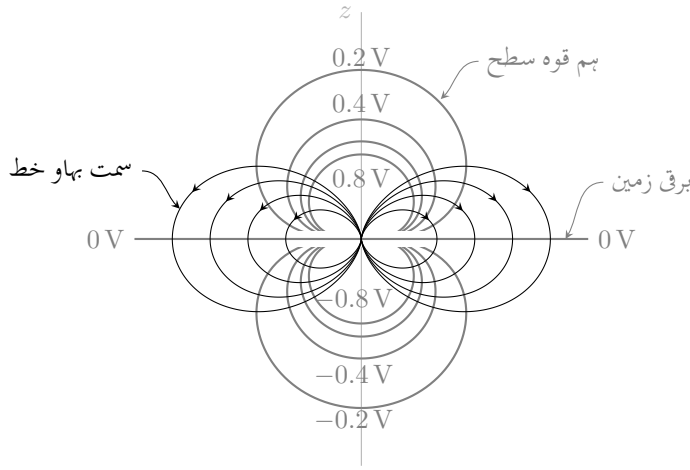
$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

لکھ کر تکمیل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2 \ln \sin \theta + \ln M$$

یا

$$r = M \sin^2 \theta$$



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوہ اور سمت بہاؤ خط۔

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ مکمل کا مستقل ہے۔ یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔ برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کریں۔

صفحہ 24 پر مثال 1.8 میں $R_1 = R_1 a_1$ اور $R_2 = R_2 a_2$ سمتیوں کو کروی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$R_1 = \left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) a_r + \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta$$

$$R_2 = \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right) a_r - \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta$$

جس سے $R_1 = |R_1| = \sqrt{R_1 \cdot R_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$R_1 = \sqrt{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2} \sin \theta\right)^2}$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}}$$

$$\approx r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta} \quad (d \ll r)$$

(4.72)

آخری قدم پر $r \ll d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$(a + b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r} \cos \theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right)^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta + \dots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.73) \quad R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$(4.74) \quad R_2^3 = r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{R_2^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left[\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{\left[\left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta}{\left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)\left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \approx 1)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$(4.75) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r, \theta, \phi)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty, \theta', \phi')$ سے کروی محد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r, \theta', \phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r, \theta, \phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r, \theta, \phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محد میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$(4.76) \quad dL = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباؤ V_{23}

$$\begin{aligned} V_{23} &= - \int_{N_3}^{N_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot d\mathbf{a}_r}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{2 \cos \theta dr}{r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{\infty, \theta', \phi'}^{r, \theta', \phi'} = \frac{Qd \cos \theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ ہم اس راستے $dr = 0$ اور $d\phi = 0$ رکھتے ہیں لہذا

$$\begin{aligned} V_{12} &= - \int_{N_2}^{N_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r d\theta \mathbf{a}_\theta}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{\sin \theta d\theta}{r^2} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \Big|_{r, \theta', \phi'}^{r, \theta, \phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\cos \theta - \cos \theta')}{r^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔ اب N_1 سے N چلتے ہیں۔ اس راستے $dr = 0$ اور $d\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہذا

$$V_{01} = - \int_{N_1}^{N_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ اور $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کی بدولت مکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔ یوں V_{12} ، V_{23} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباؤ

$$(4.77) \quad V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباؤ حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔ برقی دباؤ کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباؤ یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباؤ۔ ہم ایسی برقی دباؤ جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباؤ پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے چارج کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔ یہ توانائی چارج کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔ چونکہ توانائی اٹل ہے لہذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی چارج میں منتقل ہو جاتی ہے۔ جب تک بیرونی قوت چارج کو اس نقطہ پر روکے رکھے یہ توانائی چارج میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔ اگر چارج کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی حرکی²² توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے چارج کو حرکت دے گی۔ یوں اب چارج از خود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخفی توانائی کتنی ہو گی۔ یہ توانائی ان چارجوں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں چونکہ کوئی چارج نہیں پایا جاتا لہذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے چارج Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔ اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہذا دوسرے چارج Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل

کرنے کے لئے $Q_2 V_{2,1}$ توانائی درکار ہوگی جہاں N_2 پر پہلے چارج کی وجہ سے پیدا برقی دباؤ کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔ $V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباؤ پیدا کرنے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں

$$Q_2 \text{ چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_2 V_{2,1}$$

لکھا جائے گا۔ اب خلاء میں دو عدد چارج پائے جاتے ہیں لہذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباؤ ہوں گے۔ یوں N_3 پر کل $V_{3,1} + V_{3,2}$ برقی دباؤ ہو گا لہذا

$$Q_3 \text{ چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

اور اسی طرح

$$Q_4 \text{ چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار مزید چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ کل محفئی توانائی W تمام چارجوں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$(4.78) \quad \begin{aligned} W &= Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \\ &= Q_2 (V_{2,1}) + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2}) + Q_4 (V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + \dots \end{aligned}$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4 V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$Q_4 V_{4,2} = Q_4 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} = Q_2 \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} = Q_2 V_{2,4}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح $Q_4 V_{4,2}$ کو $Q_2 V_{2,4}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$(4.79) \quad \begin{aligned} W &= Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \\ &= Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) + Q_2 (V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) + Q_3 (V_{3,4} + \dots) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$(4.80) \quad \begin{aligned} 2W &= Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ &\quad + Q_2 (V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ &\quad + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے توسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ یوں توسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام چارجوں کا مجموعی برقی دباؤ V_1 ہے۔ یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباؤ حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے چارج Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔ یوں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots$$

کے برابر ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$(4.81) \quad W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots$$

$$V_2 = V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots$$

$$V_3 = V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی چارج کثافت ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم dh میں چارج $dQ = \rho_h dh$ کو نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات مکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$(4.82) \quad W = \frac{1}{2} \int_h \rho_h V dh$$

جہاں مکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$(4.83) \quad \nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 78 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.84) \quad \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_h (\nabla \cdot D) V dh \\ &= \frac{1}{2} \int_h [\nabla \cdot (VD) - D \cdot (\nabla V)] dh \end{aligned}$$

اس مساوات میں مکمل کے دو اجزاء ہیں۔ پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاؤ، جسے صفحہ 83 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی مکمل کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.85) \quad \frac{1}{2} \int_h \nabla \cdot (VD) dh = \frac{1}{2} \oint_S (VD) \cdot dS$$

یہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام چارج پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں چارج کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہو گی۔ ایسے حصوں کا مکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی مکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جاسکتا ہے۔ لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہو گی جہاں $r \rightarrow \infty$ ہو گا۔ لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا چارج کثافت نقطہ مانند چارج Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباؤ پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند مکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \rightarrow \infty$ کی صورت میں ایسا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2} \int_h D \cdot (\nabla V) dh$$

$$(4.86) \quad W = \frac{1}{2} \int_h \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dh = \frac{\epsilon_0}{2} \int_h E^2 dh$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 66 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V\mathbf{D}) &= \nabla \cdot (V[D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z]) \\ &= \nabla \cdot (VD_x \mathbf{a}_x + VD_y \mathbf{a}_y + VD_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial(VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(VD_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} D_x + V \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} D_z + V \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} D_x + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + \frac{\partial V}{\partial z} D_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V \nabla \cdot \mathbf{D} = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

اور

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \nabla V &= (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \\ &= D_x \frac{\partial V}{\partial x} + D_y \frac{\partial V}{\partial y} + D_z \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بائیں بازو ہی ملتا ہے۔ یاد رہے کہ $D_x \frac{\partial V}{\partial x}$ کو $\frac{\partial V}{\partial x} D_x$ لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 52 پر مساوات 2.44 دو لامحدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر ρ_S اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔ اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آئے سامنے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل محففی توانائی حاصل کریں۔

حل: چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 4.86 میں مکمل سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.87) \quad W = \frac{\epsilon_0 \rho_S^2}{2} \int_h dh = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔ منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباؤ ہوگا۔ منفی چادر پر برقی دباؤ چونکہ صفر لیا گیا ہے لہذا مساوات 4.82 کا مکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان چارج نہیں پایا جاتا لہذا اس حجم پر بھی مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ مثبت چادر پر سطحی چارج کثافت کو حجمی چارج کثافت میں یوں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ الٹ قطب کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر چارج پایا جائے گا۔ یوں مثبت چادر کے S حصے پر چارج $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی چارج کثافت تصور کیا جاسکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \rightarrow 0$ ہے۔ اس چارج کو $(a - t/2)$ تا $(a + t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$(4.88) \quad W = \frac{1}{2} \int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S \rho_S a}{t \epsilon_0} dx dS = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0}$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم محففی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ محففی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔ اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ محففی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام محففی توانائی مثبت چادر پر ہے۔ اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب منفی چادر پر برقی دباؤ Ea - ہوتا اور محففی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $-\frac{Ea}{2}$ برقی دباؤ حاصل ہوتی ہے اور محففی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔ برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جاسکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں محففی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔ اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل محففی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے کہ محففی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات¹ حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط² حاصل کرتے ہوئے عکس³ کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق⁴ کی تقطیب⁵ پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

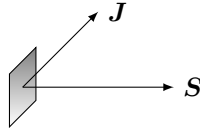
جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاؤ کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیر کہتے ہیں۔ یوں

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترجیحی ہوگی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

continuity equation¹
boundary conditions²
images³
dielectric⁴
polarization⁵



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو⁶ سے مراد برقی رونی اکائی مربع سطح $(\frac{A}{m^2})$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$(5.2) \quad \Delta I = J_n \Delta S$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$(5.3) \quad \Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو مکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$(5.4) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $S = 2a_x$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\mathbf{J} = 1a_x + 1a_y$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں \mathbf{J} مستقل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 5.4 میں مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے اور یوں اس مکمل سے

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = 2A$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

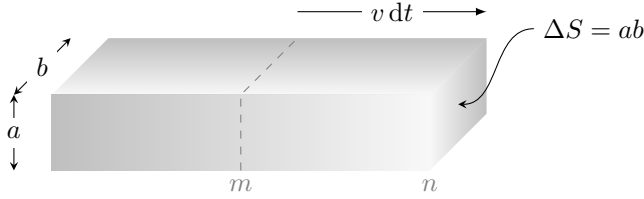
اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\mathbf{S} = -2a_x$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = -2A$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{S} کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں dt دورانیہ میں چارج $v dt$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv dt$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv dt$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv dt}{dt} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$(5.5) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزرنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نہ ہی اسے ختم کیا جاسکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کی انہیں ختم کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جاسکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب 5C اور دوسری جانب 3C- چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل 2C چارج ہے۔ اگر ہم 3C کو 3C- کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل 2C ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم 5 m^3 ہے میں حجمی کثافت چارج 3 C/m^3 ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج 1 C/m^3 رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15 \text{ C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_2 = 1 \times 5 = 5 \text{ C}$ رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے 10 C چارج خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5 \text{ A}$ ہے۔ اسی کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5 - 15)}{2} = 5 \text{ A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

جسم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمیل سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(5.6) \quad I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں جسم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمیل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q جسم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات⁷ کی مکمل شکل ہے۔ آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاؤ کو صفحہ 83 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمیل کو حجمی تکمیل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh$$

اگر جسم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{d}{dt} \int_h \rho_h dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $\frac{d}{dt}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات تکمیل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور جسم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{d(uv)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہوگی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہوگا اور یوں $\frac{d}{dt}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے مکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم dh کے لئے مکمل

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

یہ ہے جس سے

$$(5.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاؤ کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاؤ فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ انہیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان E میں الیکٹران پر قوت

$$(5.8) \quad F = -eE$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہوگی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہوگی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ E کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار v_d حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔ v_d کو رفتار بہا⁸ کہتے ہیں۔ رفتار بہا کا دار و مدار E کی قیمت پر ہے لہذا ہم

$$(5.9) \quad v_d = -\mu_e E$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری⁹ کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ v_d کو میٹر فی سیکنڈ اور E کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہذا حرکت پذیری کو $\frac{m^2}{Vs}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 117 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$(5.10) \quad \mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$(5.11) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$(5.12) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

لکھا گیا ہے۔ σ کو موصلیت کا مستقل¹⁰ کہتے ہیں اور اس کی اکائی¹¹ $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ میٹر فی سیمینز ہے۔ سیمینز کو بڑے S سے جبکہ سینڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 227 پر جدول 8.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تا بنے¹² کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ 5.8×10^7 ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت 8940 kg/m^3 اور ایٹمی کمیت 63.5 g ہیں۔ اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تا بنے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہا حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول¹³ ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں 8940 kg ہیں لہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہذا 0.1 nm اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$(5.13) \quad \rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

ہوگی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ کو $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہا

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران \mathbf{E} کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار¹⁴ سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً 300 K پر تا بنے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ہوتی ہے۔

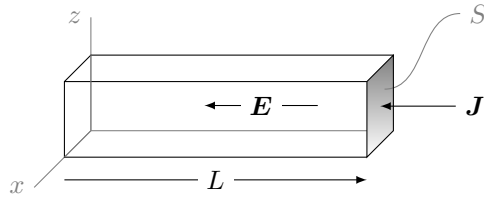
¹⁰ conductivity

¹¹ یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمینز (1816-1892) کے نام پر جنہوں نے موجودہ سیمینز کمپنی کا بنیاد رکھا۔

¹² copper

¹³ mole

¹⁴ کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے ادھر ادھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔ اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہوگا۔ امید ہی سمجھ آگئی ہوگی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$ ، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار 15 میں 1 الیکٹران ہوگا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔ سلاخ کو a_y سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $E = -Ea_y$ اور کشاف برقی رو $J = -Ja_y$ پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بائیں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباؤ کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = - \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^L Ea_y \cdot dy a_y = \int_0^L E dy = E \int_0^L dy = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $S = -Sa_y$ لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہوگی۔ برقی رو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

¹⁵ چونہے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(5.14) \quad R = \frac{L}{\sigma S}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$(5.15) \quad V = IR$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت¹⁶ دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم¹⁷ ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔ اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جاسکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباؤنی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$(5.16) \quad R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

سے حاصل ہوگی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباؤ والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی مکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000 \text{ m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61 \Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ (الف) برقی میدان کی شدت $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں 2 A برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ، $3.82 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ اور $2.55 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔ یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 78 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔ مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔ اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا مکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔ اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل¹⁸ رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 8.1 اور جدول 8.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07 \mu\text{s}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جاسکتا ہے۔ اس لحاظ سے چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جاسکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان E پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون 19 کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

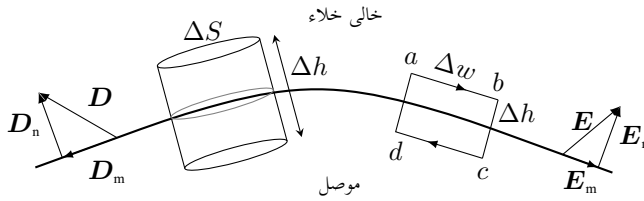
یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔ یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \quad (5.17)$$

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاؤ کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہذا سطح پر چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج ΔS اسی سطح پر چارج $\rho_s \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_s \quad (5.18)$$



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط.

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں E اور D دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں E کو E_m اور E_n کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح D کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر E اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں E کی قیمت حاصل کریں۔ ہم E کے مجموعے E_m اور E_n حاصل کریں گے۔ پہلے E_m حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ da اور bc عمودی ہیں۔ خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ da اور bc کی لمبائیاں Δh ہیں۔ صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint E \cdot dL = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔ اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\oint E \cdot dL = \int_a^b E \cdot dL + \int_b^c E \cdot dL + \int_c^d E \cdot dL + \int_d^a E \cdot dL = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b E \cdot dL = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c E \cdot dL = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $E = 0$ ہے۔ c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $E = 0$ ہے۔

$$\int_c^d E \cdot dL = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a E \cdot dL = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w + (E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $(E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

(5.19) $E_m = 0$
حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا ٹیلن دکھایا گیا ہے۔ اس ٹیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب ٹیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔ گاؤس کے قانون کے تحت ٹیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاؤ کا اخراج ٹیلن کے دونوں سروں اور اس کے نکلی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{اوپر ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب ٹیلن کی نکلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ ٹیلن کے اوپر والے سرے پر

$$\int_{\text{اوپر ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہذا یوں

$$(5.20) \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔ موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔ یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا مکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ یاد رہے کہ برقی میدان کا مکمل برقی دباؤ دیتا ہے جو مکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جاسکتا ہے جہاں $E_n = 0$ ہونے کی وجہ سے مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\mathbf{E} = 210a_x - 350a_y + 99a_z \frac{V}{m}$ کے برابر ہے۔ اس نقطے پر E_n, E_m اور ρ_S حاصل کریں۔

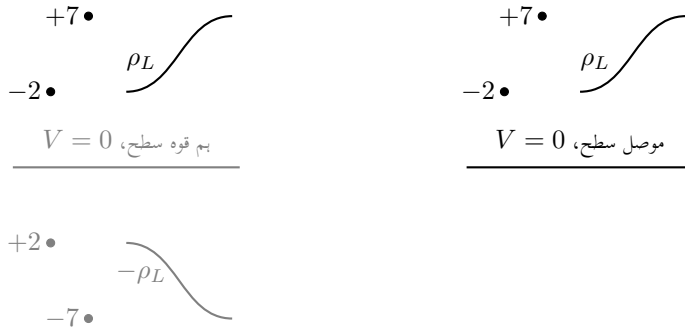
جوابات: $0, 420 \frac{V}{m}$ اور $3.71 \frac{nC}{m^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 107 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جاسکتی ہے۔ ایسی موصل سطح پر برقی دباؤ صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔ موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے اوپر جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔ یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتا ہے۔ موصل سطح کے اوپر جانب میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔ اسی طرح سطح کے اوپر جانب سے جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔ فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین کے اوپر مثبت نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں سطح کے اوپر جانب برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہذا ہم برقی زمین کے ٹکلی جانب عین مثبت چارج کے نیچے اور اتنے ہی فاصلے پر برابر مگر منفی چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔ یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس²⁰ کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جاسکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ لہذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہوگی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح کے اوپر جانب مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کی ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ $M(2, 4, 3)$ پر E حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5 \mu\text{C}$ کا عکس $-5 \mu\text{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5, 7, -2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب N سے M تک سمتیہ $R_{MN} = -3a_x - 3a_y - 5a_z$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $R_{MP} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$ ہے۔ یوں $5 \mu\text{C}$ نقطہ M پر

$$E_+ = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔ اسی طرح $5 \mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$E_- = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔ چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ M پر کل میدان

$$E_{\text{کل}} = E_+ + E_- = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہوگا۔ موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔ موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔ یوں موصل کی سطح پر

$$D = \epsilon_0 E = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13 \times 10^{-9}a_z$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔ یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_s = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2, 4, 3)$ پر میدان E_+ ہوتا۔ لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی E ہو جاتی ہے۔ درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں Q پر نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

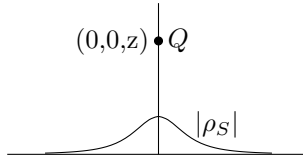
حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0, 0, -z)$ پر Q چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho, \phi, 0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$E_+ = \frac{Q(\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_- = \frac{-Q(\rho a_\rho + z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔ $D = \epsilon_0 E$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$D = \frac{-2Qz a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-a_z$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$(5.21) \quad \rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{C}{m^2}$$

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہوگی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلیکان اور جرمنیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ²¹ سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول²² کے چوتھے جماعت²³ سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ²⁴ عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھادی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ²⁵ عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول²⁶ کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $v_d = \mu_h E$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول E کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہذا اس کے رفتار بہاو کی سمت E کی سمت ہی ہوگی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$(5.22) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

doping²¹
periodic table²²
group²³
donor²⁴
acceptor²⁵
hole²⁶

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_{11} آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سیلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{m^2}{Vs}$ جبکہ خول کی رفتار بہاؤ $0.025 \frac{m^2}{Vs}$ ہے۔ جر مینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36 \frac{m^2}{Vs}$ اور $0.17 \frac{m^2}{Vs}$ ہیں۔ خالص سیلیکان اور خالص جر مینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

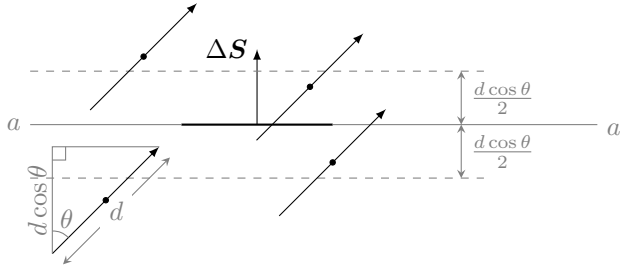
جوابات: $0.348 \frac{mS}{m}$ اور $2 \frac{S}{m}$

5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباؤ لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔ آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے مالیکیول کو قطبی²⁷ مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان E لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو غیر قطبی²⁸ کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ہے۔ مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔ یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنادیتا ہے۔ پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جاسکے ذو برقی²⁹ کہلاتے ہیں۔

ذو برقی میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج³⁰ کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برقی کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 105 میں دئے مساوات 4.68

$$p = Qd \quad (5.23)$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں Q ذو برقی کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا کل معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$p_{کل} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i \quad (5.24)$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی p مختلف ہو سکتے ہیں۔ تقطیب³¹ سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i \quad (5.25)$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔ Δv کو کم سے کم³² کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برقی میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $P = 0$ ہو گا۔ ذو برقی کے اندر تصوراتی سطح ΔS لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر

²⁹ dielectric
³⁰ bound charge
³¹ polarization

³² یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرنے وقت $\Delta t \rightarrow 0$ لیا جاتا ہے۔

سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے دونوں جانب ہلکی سیابی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔ بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $p = Qd$ پیدا ہوتے ہیں جن کا d اور p سطح ΔS کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d \cos \theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔ یوں ΔS رقبہ اور $d \cos \theta$ گہرائی کے حجم $d \Delta S \cos \theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سر ΔS سے گزرے گا۔ چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہذا اتنی حجم میں $n d \Delta S \cos \theta$ جفت قطب ہوں گے۔ یوں $\frac{n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $-\frac{n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔ مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہذا کل

$$(5.26) \quad \Delta Q_m = n Q d \Delta S \cos \theta = n Q d \cdot \Delta S$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔ چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہذا اس حجم کی تقطیب

$$(5.27) \quad P = n Q d$$

ہوگی۔ یوں مساوات 5.26 کو

$$(5.28) \quad \Delta Q_m = P \cdot \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر ΔS کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں α_S بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S P \cdot dS$$

کے برابر ہو گا۔ یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$(5.29) \quad Q_m = - \oint_S P \cdot dS$$

ہو گا۔ یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہذا ہم کثافت برقی بہاؤ کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔ گاوس کا قانون ص 67 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0 E$ اور کل گھیرے چارج Q کی شکل میں لکھتے ہیں

$$(5.30) \quad Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0 E \cdot dS$$

جہاں

$$(5.31) \quad Q_{\text{کل}} = Q + Q_m$$

کے برابر ہے۔ مساوات 5.30 میں بند سطح S آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔ مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$(5.32) \quad Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 E + P) \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاؤ کو اب

$$(5.33) \quad D = \epsilon_0 E + P$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔ یوں ذو برقی اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاؤ میں اضافی جزو P شامل ہو جاتا ہے۔ اس طرح

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.34)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} Q &= \int_h \rho_h dh \\ Q_m &= \int_h \rho_m dh \\ Q_{کل} &= \int_h \rho_{کل} dh \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\rho_m \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_{کل} \end{aligned}$$

اور

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h \quad (5.35)$$

لکھ جاسکتے ہیں۔

قلم میں دوراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جاسکے اسے آسان محور³³ یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں ناہم سموت³⁴ کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال³⁵ کی خاصیت رکھتے ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برقی اشیاء میں لاگو بیرونی میدان E اور تقطیب P ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء ہم سمتی³⁶ کہلاتے ہیں۔ انجینئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برقی اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \\ &= (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.36)$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$D = \epsilon_0 E + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 E$$

یا

$$(5.37) \quad D = \epsilon_R \epsilon_0 E = \epsilon E$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$(5.38) \quad \epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$$

کے برابر ہے۔ ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجینئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ ان کا تعلق

$$(5.39) \quad \chi_e = \epsilon_R - 1$$

ہے۔

χ_e ذو برقی مستقل³⁷، ϵ_R جزوی برقی مستقل³⁸ جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل³⁹ کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 228 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 8.2 میں دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں⁴⁰ خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں بننے جاتے۔ ان اشیاء میں E کا ہر کارتیسی جزو D کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق یوں

$$(5.40) \quad \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نواعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل⁴¹ کہا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔ ناہم سموت اشیاء میں D اور E (اور P) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $D = \epsilon_0 E + P$ ان کے لئے بھی درست ہے، $D = \epsilon E$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہوگا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ ناہم سموت اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک ناہم سموت ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔ برقی میدان $E = \sqrt{3}a_x$ ، $E = \sqrt{3}a_y$ اور $E = 1a_x + 1a_y + 1a_z$ کی صورت میں D حاصل کریں۔

$$D = \epsilon_0 (4a_x + 9a_y + 9a_z) \text{ اور } D = 9\epsilon_0 a_y, D = 4\sqrt{3}\epsilon_0 a_x \text{ جوابات:}$$

³⁷susceptibility

³⁸relative electric constant, relative permittivity

³⁹permittivity of vacuum, electric constant of vacuum

⁴⁰non homogeneous

⁴¹tensor

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی ناہم سموت ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں $E = 5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذو برق میں 6×10^{20} مالکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ پر ہر مالکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26} \text{ C m}$ ہے۔

جوابات: $7.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $1.156 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برقی کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برقی کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

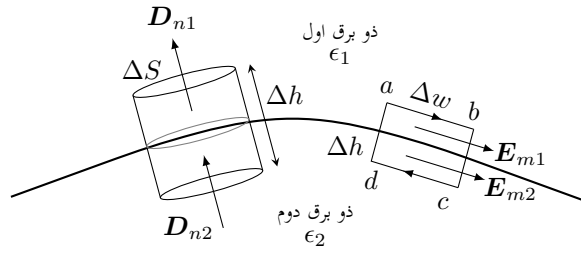
حاصل ہوتا ہے۔ Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\Delta h \rightarrow 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \rightarrow 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$(5.42) \quad \frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برقی سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ⁴² ہوتا ہے۔ اس کے برعکس مساوات 5.42 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاؤ جوڑ دار⁴³ ہوتا ہے۔ یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاؤ میں سیڑھی نما⁴⁴ تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاوس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے ہیں پر لاگو کرتے ہوئے

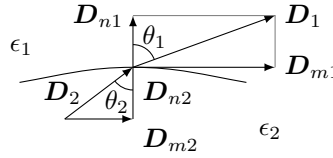
$$(5.43) \quad \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S} \rho_S dS$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.43 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} = D_{n1} \Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہذا D_{n1} اور بیلن کے اوپر ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ D_{n2} اور بیلن کا نیچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.43 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} = -D_{n2} \Delta S$$



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔ اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \rightarrow 0$ ہو گا جس سے نکلی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.43 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S dS = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$(5.44) \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم ذو برقی کا برقی مستقل ϵ_R گنا کرتے ہوئے اس میں مقید چارج کا حساب رکھتے ہیں۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برقی کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔ انجینئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$(5.45) \quad D_{n1} = D_{n2}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$(5.46) \quad \epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائے جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار⁴⁵ ہے۔ اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$D_{m1} = D_1 \sin \theta_1$$

$$D_{n1} = D_1 \cos \theta_1$$

$$D_{m2} = D_2 \sin \theta_2$$

$$D_{n2} = D_2 \cos \theta_2$$

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos \theta_1}{D_2 \cos \theta_2} = 1$$

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 5.45 اور مساوات 5.42 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$(5.47) \quad \begin{aligned} D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2}$$

جس سے

$$(5.48) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon E$ ہوتا ہے لہذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا E اور D ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.47 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2 \theta_1 &= D_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2 \theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.47 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin \theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2 \theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(5.49) \quad D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

ملتا ہے۔ چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

$$(5.50) \quad E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_2 = D_1$ ہوتا ہے۔ اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برقی کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسا ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھا۔ موصل میں $E = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برقی میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہوگا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_s \Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برقی جانب ڈھکن پر عمودی بہاؤ $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔ یوں $D_n = \rho_s$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_s}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برقی کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_s \end{aligned} \quad (5.51)$$

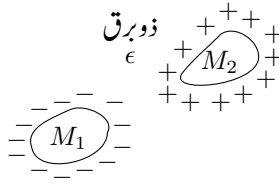
مثال 5.8: ٹیفلون

5.10 کپیسٹر

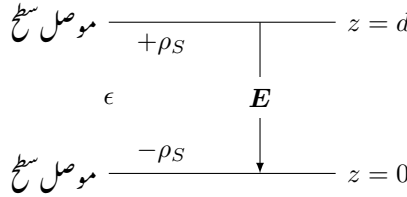
شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برقی پایا جاتا ہے۔ M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔ یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔ چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاؤ کا دخول ہو گا۔ یوں موصل کے گرد ذو برقی میں کثافت برقی بہاؤ D اور برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی۔ D اور E کی ابتدا M_2 سے ہوگی اور ان کا اختتام M_1 پر ہوگا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہوگی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔



شکل 5.10: کیپیسٹنس کی تعریف۔



شکل 5.11: متوازی چادر کیپیسٹر۔

کیپیسٹنس C^{46} کی تعریف

(5.52)
$$C = \frac{Q}{V_0}$$
 ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباؤ V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو مکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں صفحہ 67 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 91 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کیپیسٹنس کی عمومی مساوات

(5.53)
$$C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاؤ بھی دگنی ہو جائے گی۔ یوں D اور E بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباؤ بھی دگنا ہو گا۔ اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباؤ ایک بار پھر وہی کیپیسٹنس دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیپیسٹنس کی قیمت کا دار و مدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کیپیسٹنس کی اکائی فیراڈ⁴⁷ ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ⁴⁸ کے برابر ہے۔ ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور پر کیپیسٹنس کو مائیکرو فیراڈ μF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر کیپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ چلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_s$ پائی جاتی ہے جبکہ اوپر چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_s$ پائی جاتی ہے۔ اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔ دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 52

⁴⁶capacitance

⁴⁷Farad

⁴⁸یہ اکائی انگریزی ماہر طبیعیات مائیکل فیراڈ کے نام سے منسوب ہے۔

پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔ یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$E = -\frac{\rho_S}{\epsilon} a_z$$

ہوگی۔ میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔ مثبت سطح سے خارج برقی بہاؤ کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاؤ داخل ہوتا ہے لہذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہوگا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = - \int_0^d E \cdot dL = \int_0^d \frac{\rho_S a_z}{\epsilon} \cdot dz a_z = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباؤ ہوگا۔ لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہوگا۔ حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہوگا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S dS = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.54)$$

ہوگی۔ کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے⁴⁹ کو ہم نے نظر انداز کیا ہے۔ کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جاسکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ ابرق کپیسٹر⁵⁰ انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا⁵¹ کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.9: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی مونٹ اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا۔ اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 8.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1 \text{ pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری کیپسٹر

صفحہ 94 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔ L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔ اس طرح اتنی تار کا کیپسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (5.55)$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔ اندرونی سطح پر Q اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ گاؤس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہو گا۔ دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدود کے مرکز پر نقطہ چارج Q کا میدان ہوتا ہے۔ یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباؤ صفحہ 93 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان سطحوں کا کیپسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \quad (5.56)$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔ اگر r_B کو لا محدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \quad \text{کرہ کی کیپسٹنس} \quad (5.57)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔ یہ مساوات رداس R کرہ کی کیپسٹنس دیتا ہے۔ یاد رہے کہ اس کیپسٹر کی دوسری سطح لا محدود فاصلے پر ہے۔

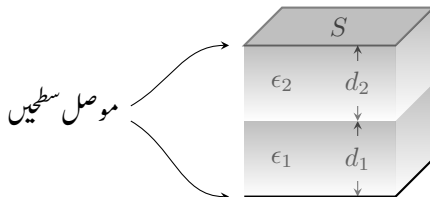
مثال 5.10: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔ بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔ خالی خلاء میں موصل بلور کی کیپسٹنس حاصل کریں۔

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55 \text{ pF}$$
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \mathbf{a}_r & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & (r > r_1) \end{cases}$$
$$V = - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)$$
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر ρ_S جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہوگا۔ یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں



$$C_2 = \frac{d_2}{\epsilon_2 S}$$

$$C_1 = \frac{d_1}{\epsilon_1 S}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہوگا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q = \rho_S S$ ہوگا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

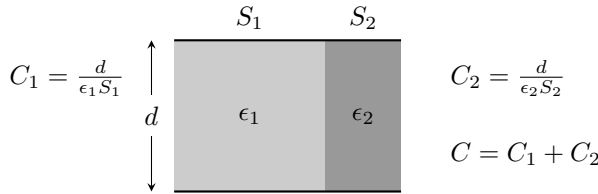
$$(5.59) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں

$$(5.60) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جاسکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے۔



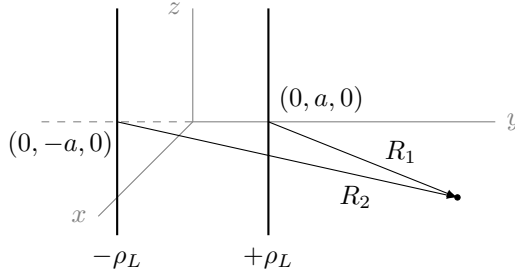
شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$(5.61) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھ سکتے ہیں۔ آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔ دونوں موصل چادر ہم قوتہ ہیں لہذا ٹپلی چادر کو برقی زمین یعنی صفروولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہوگا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقی مستقل کے ذو برق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔ D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہوگا۔ یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$(5.62) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(5.63) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو (0, a, 0) سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت +ρ_L پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو (0, -a, 0) سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت -ρ_L پایا جاتا ہے۔ z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ صفحہ 94 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ₀ پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباؤ

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر R₁₀ = R₂₀ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہوگا لہذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔ اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\begin{aligned} R_1 &= xa_x + (y - a)a_y \\ R_2 &= xa_x + (y + a)a_y \end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے

$$(5.64) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

یا

$$(5.65) \quad e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباؤ مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔ چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$(5.66) \quad K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = -a^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب $a^2 \frac{(K_1 + 1)^2}{(K_1 - 1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

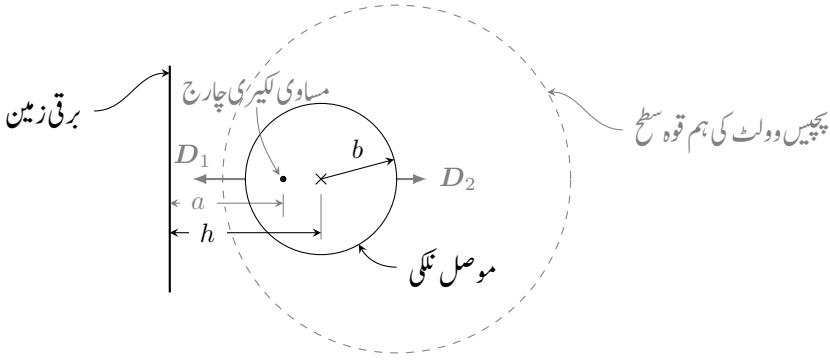
$$(5.67) \quad x^2 + \left[y - a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $\left[0, \frac{a(K_1 + 1)}{K_1 - 1} \right]$ پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نکلی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.67 میں

$$(5.68) \quad \begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \\ h &= a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$(5.69) \quad x^2 + (y - h)^2 = b^2$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گئے جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہوگا۔ ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دار و مدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباؤ V_2, V_3, \dots کے لئے K_2, K_3, \dots حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباؤ کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نکلی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.68 کی مدد سے K_1, a اور یوں V_1 معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 5.68 کو حل کرتے ہوئے

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$K_1 = \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \right)^2 \quad (5.70)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نکلی V_1 وولٹ پر ہے لہذا ان کے درمیان V_1 برقی دباؤ ہوگا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے لمبائی پر کل چارج $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہوگا جبکہ b رداس کے موصل نکلی پر یہی $Q = \rho_L L$ چارج ہوگا۔ یوں L لمبائی کے موصل نکلی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \frac{h}{b}} \quad (5.71)$$

کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $b \gg h$ ہو گا لہذا مساوات 5.71

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \quad (5.72)$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.71 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جاسکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ انہیں مثال 5.11 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.11: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- نکلی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نکلی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔
- پچیس وولٹ ہم قوه سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو ہو ایسی ہی ہم قوه سطحیں پیدا کرے گا۔
- نکلی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لہذا مساوات 5.70 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66 \text{ m}$$

$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5} \right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.66 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.71 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22 \text{ nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.66 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9 \times 10^9 \times 2.11 \times 10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.68 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25 \text{ m}$$

$$h = 8.66 \times \left(\frac{3.73 + 1}{3.73 - 1} \right) = 15 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

- کسی بھی جگہ E کو مساوات 5.64

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x^2 + (y+a)^2) - \ln(x^2 + (y-a)^2) \right]$$

کے ڈھلوان $E = -\nabla V$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس سے

$$D = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \nabla V = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y \right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2x}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(y+a)}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right]$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر D عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہذا ہم موصل نکلی پر برقی زمین کے قریبی جانب D_1 اور اس سے دور جانب D_2 کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے نکلی کا قریبی فاصلہ $h - b = 5 \text{ m}$ ہے۔ یوں $x = 0$ اور $y = 5$ ہو گا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(5 + 8.66)}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2(5 - 8.66)}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$D_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi} a_y$$

ہو گا۔ زمین سے دور نکلی پر $x = 0$ اور $y = h + b = 10 + 5 = 15 \text{ m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(15 + 8.66)}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2(15 - 8.66)}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = -\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$D_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi} a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاؤ کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نکلی پر

$$\rho_{S\text{ قریبی}} = \frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$

$$\rho_{S\text{ دور}} = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج a_y جانب ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نکلی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہو۔ نکلی سے پیدا ہونے والی سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.70 کو ثابت کریں۔

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$(6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

میں $D = \epsilon E$ اور حاصل جواب میں $E = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$(6.2) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں¹ خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن² مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدود میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیر $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

عموماً $\nabla \cdot \nabla^2$ کو لکھا جاتا ہے۔ اس طرح پوٹنسن مساوات کی کارٹینیسی شکل

$$(6.4) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$(6.5) \quad \nabla^2 V = 0$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس³ مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جاسکتی ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ کارٹینیسی محدود میں لاپلاس کی مساوات

$$(6.6) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صورت رکھتی ہے۔ ∇^2 کو لاپلاسی عامل⁴ کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباؤ V_1, V_0, V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا E معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔ اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباؤ اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاؤ دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔ اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباؤ معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاؤ یا برقی دباؤ حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ حل برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباؤ پائی جائے۔ اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظر انداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباؤ کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

6.1 مسئلہ یکنائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(6.7) \quad \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباؤ V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 111 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ D کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل پورے حجم کے لئے

$$(6.8) \quad \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] dh + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی مکمل کو بند سطحی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot dS = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی مکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں مکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا مکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہذا موجودہ مکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ مکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا مکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدود کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر مکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$(6.9) \quad V_1 = V_2$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوٹنسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوٹنسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوٹنسن مساوات پر پورا اتریں گے لہذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوٹنسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی⁵ ہے۔

6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدود میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 102 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= -E_\rho \mathbf{a}_\rho - E_\phi \mathbf{a}_\phi - E_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (6.10)$$

لکھتے ہیں جہاں $E = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ E کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ $E = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \quad (6.11)$$

لکھا جاسکتا ہے جو نلکی محدود میں لاپلاس کی مساوات ہے۔

کروی محدود میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \quad (6.12)$$

جبکہ عمومی محدود میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k_1 k_3}{k_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad \text{عمومی} \quad (6.13)$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ مکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ مکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدود کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدود کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارتیسی محدود میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح x محدود سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔ یوں کارتیسی محدود میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہذا کارتیسی محدود میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔ نکلی محدود میں z محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدود میں دیکھ لیں گے لہذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدود میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدود کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔ چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ مکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \quad (6.14)$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔ A اور B دو درجی مکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباؤ کا دار و مدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔ x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں x محدود کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباؤ اور چادروں کا x محدود پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ V_2 ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$

$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$

$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان

$$(6.15) \quad V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباؤ کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$(6.16) \quad V = \frac{V_0 x}{d}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباؤ اور کپیسٹنس حاصل کئے۔ موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ برقی دباؤ سے میدان بذریعہ $E = -\nabla V$ اور بہاؤ بذریعہ $D = \epsilon E$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاؤ کے برابر ہے۔ سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباؤ V حاصل کریں۔

• مکمل کے سرحدی شرائط سے مکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔

• برقی دباؤ سے برقی میدان اور برقی بہاؤ بذریعہ $E = -\nabla V$ اور $D = \epsilon E$ حاصل کریں۔

• کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاؤ کی قیمت $D_S = D_n a_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔

• چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاؤ برابر ہوتے ہیں لہذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔ مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا چادر میں دخول ہو گا۔

• سطح پر چارج بذریعہ سطحی مکمل حاصل کریں۔

• کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہذا

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

اور

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

چونکہ بہاؤ کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$D_S = \mathbf{D} \Big|_{x=d} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\mathbf{a}_N = -\mathbf{a}_x$$

ہے لہذا برقی بہاؤ چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon \frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int \epsilon \frac{V_0}{d} dS = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 142 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدود پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہذا کارتیسی محدود کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نکلی محدود میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدود کے مثال کی طرح ہی ہے لہذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

یا

$$(6.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

ہو گا جس سے

$$(6.18) \quad \rho = \infty$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ہو گا۔ اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمیل لے کر حل کرتے ہیں۔ پہلی بار تکمیل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

یا

$$dV = A \frac{d\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$V = A \ln \rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہم قوہ سطحیں نکلی شکل کے ہیں۔ یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباؤ دیتی ہے۔ ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho = b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho = a$ کو V_0 برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے

$$(6.20) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباؤ صفر ہی ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔ یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$E = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} a \rho$$

اور

$$D_n = D \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 143 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔ یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین⁶ ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad \rho \neq 0 \quad (6.22)$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباؤ نکلی محدود کے متغیر ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباؤ ممکن نہ ہو گا۔ یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباؤ کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \quad \rho \neq 0 \quad (6.23)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$E = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کمپیشننس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.4: کروی محدب میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباؤ کی مساوات

$$(6.24) \quad V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

اور پتیشنس کی مساوات

$$(6.25) \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباؤ ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدب میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.26) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر $r \neq 0$ اور $\sin \theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin \theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(6.27) \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ $\sin \theta$ اس صورت صفر کے برابر ہوگا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔ اس کے پہلی بار تکمیل سے

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

یا

$$dV = \frac{A d\theta}{\sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$(6.28) \quad V = A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + B = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم توہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔ اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ہے تب ہمیں

$$(6.29) \quad V = V_0 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کیپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔ پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.30) \quad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \mathbf{a}_\theta$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_s = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r \sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin \theta_0 \ln \left(\tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta_0 d\phi dr}{r}$$

ہو گا۔ مکمل میں رداس کا محدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی محدود حاصل ہوتی ہے جس سے محدود کیپیسٹنس حاصل ہو گا۔ حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ ایسی صورت میں

$$(6.31) \quad C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln \left(\cot \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے محدود سطح سے شروع کیا تھا لہذا چارج کی مساوات بھی صرف محدود سطح کے لئے درست ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کیپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی ناکہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال

پوٹنسن مساوات تب حل کیا جاسکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔ حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباؤ وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ ہم پوٹنسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سیلیکان⁷ کی پتہری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سیلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی سیلیکان پتہری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ⁸ کو جنم دیتے ہیں۔ x محدود پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n

قسم کا ہے۔ مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ از خود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول⁹ اور n خطے میں آزاد الیکٹران¹⁰ پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ¹¹ کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔ یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $E = -Ea_x$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان E چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے E بڑھتی رہے گی۔ آخر کار E کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ انہیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$(6.32) \quad \rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔ انہیں اس چارج کثافت کے لئے پونسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جاسکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا $x \rightarrow \pm\infty$ پر $E_x \rightarrow 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہذا

$$(6.33) \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

کے برابر ہے۔ دوسری بار مکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.34) \quad V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب جہی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباؤ دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباؤ V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.35) \quad V_0 = V_{x \rightarrow +\infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کل مثبت چارج

$$(6.36) \quad Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش S^{12} ہے۔ مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$(6.37) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جاسکتی البتہ

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

سے

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہوگی۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔ یوں برقی دباؤ سے کپیسٹنس کے گٹھنے کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔ اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباؤ ایک سے زیادہ محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ تصور کریں کہ V کارتیسی محدود کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.38) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔ یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ ایسا ہی ایک سادہ حل $V = x + y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V = G(x) + H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ ہم $V = x + y$ کو $V = V_1 + V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$V_1 = X_1(x)Y_1(y) = 1x$$

$$V_2 = X_2(x)Y_2(y) = 1y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $Y_1(y) = 1$ اور $X_2(x) = 1$ کے برابر ہیں۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x + y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V = x + y$ جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V = G(x) + H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔ اگر $V = XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$(6.39) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔ یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔ اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ m^2 کو علیحدگی مستقل¹³ کہا جاتا ہے۔

$$(6.40) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = m^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -m^2$$

یا

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔ اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \pm m$$

حاصل ہو گا۔ ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$(6.42) \quad X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$(6.43) \quad Y(y) = C \cos my + D \sin my$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$(6.44) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔ البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے¹⁴

$$(6.45) \quad X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0, a_1, a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

اور

$$(6.46) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = m^2 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)$$

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔ یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ¹⁵ عین برابر ہوں یعنی جب

$$2 \times 1a_2 = m^2 a_0$$

$$3 \times 2a_3 = m^2 a_1$$

$$4 \times 3a_4 = m^2 a_2$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔ جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$a_2 = \frac{m^2}{2 \times 1} a_0$$

$$a_4 = \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0$$

$$a_6 = \frac{m^6}{6!} a_0$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$a_3 = \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}$$

$$a_5 = \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \quad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔ انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots$$

اور دوسرا طاقی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \dots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.47) \quad Y = C \cos my + D \sin my$$

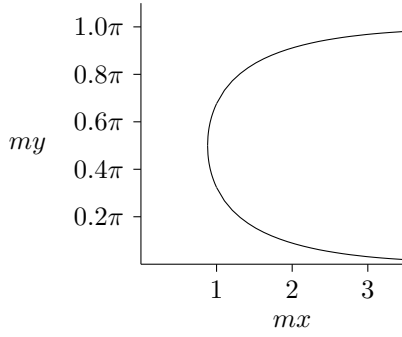
لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$(6.48) \quad V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx) (C \cos my + D \sin my)$$

یا

$$(6.49) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sinh mx} \right)$ کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ان میں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔ پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً برقی دباؤ کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ ان میں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \quad (6.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔ چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2} (e^{mx} - e^{-mx})$$

ہے لہذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔ $\sin my$ کی قیمت $y = 0$ ، $y = \frac{2\pi}{m}$ ، $y = \frac{\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہوگی۔ یوں صفر برقی دباؤ کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جاسکتی ہیں جہاں $n = 0, 1, \dots$ ہو سکتا ہے۔ ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

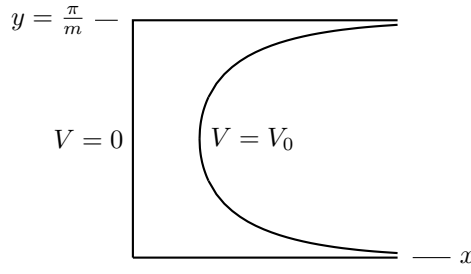
یا

$$my = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh mx}$$

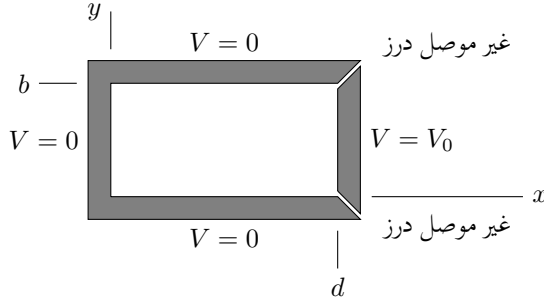
x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔ یہ سطحیں z محور کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباؤ مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباؤ پیدا کرے گی۔ حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباؤ درکار ہو گا۔ ان میں ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوه سطحیں اور ان پر برقی دباؤ۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباؤ دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباؤ حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔ $x=0$ ، $y=0$ اور $y=b$ پر برقی دباؤ صفر ہے جبکہ $x=d$ پر برقی دباؤ V_0 ہے۔ دونوں ہم قوه سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباؤ مختلف ہو سکتے ہیں۔ انس درز کے اثر کو نظر انداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباؤ صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں $x=0$ پر برقی دباؤ صفر پر کرنے سے

$$0 = (A \cosh 0 + B \sinh 0) (C \cos my + D \sin my)$$

$$0 = A (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ $y=0$ پر صفر برقی دباؤ پر کرنے سے

$$0 = B \sinh mx (C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$0 = BC \sinh mx$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC=0$ کی صورت میں درست ہو گا۔ اب چونکہ $A=0$ ہے لہذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباؤ صفر حاصل ہو گا۔ یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباؤ کے بارے میں علم حاصل ہو۔ اس لئے $C=0$ کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD \sinh mx \sin my$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباؤ پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔ یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔ اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$(6.52) \quad V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔ مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباؤ کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔ البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔ گھبرائیں نہیں۔ ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$(6.53) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \dots)$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباؤ کے شرط کو پورا کیا جائے۔ اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$(6.54) \quad V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریر تسلسل¹⁶ ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباؤ سے کوئی غرض نہیں۔ ایسی صورت میں ہم فوریر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بھایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباؤ کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 & (0 < y < b) \\ V &= -V_0 & (b < y < 2b) \end{aligned}$$

اسی صورت میں فوریر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b} \left[\int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right]$$

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$c_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$(6.55) \quad V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباؤ $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباؤ رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہوگی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90 \text{ V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کریں۔

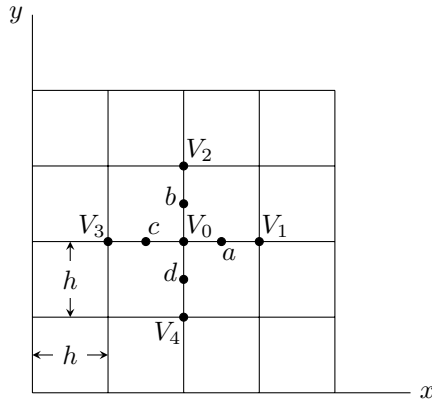
حل: ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔ مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \times 90}{\pi} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\sinh \pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sinh \frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \frac{\sinh \frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4 \times 90}{\pi} (0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5 \text{ V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرائے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔ کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرائے¹⁷ کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔ انہیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ قریبی نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباؤ V_0, V_1, V_2, V_3 اور V_4 ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot D = 0$ اور $\nabla \cdot E = 0$ ہوں گے جس سے دو محدود

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

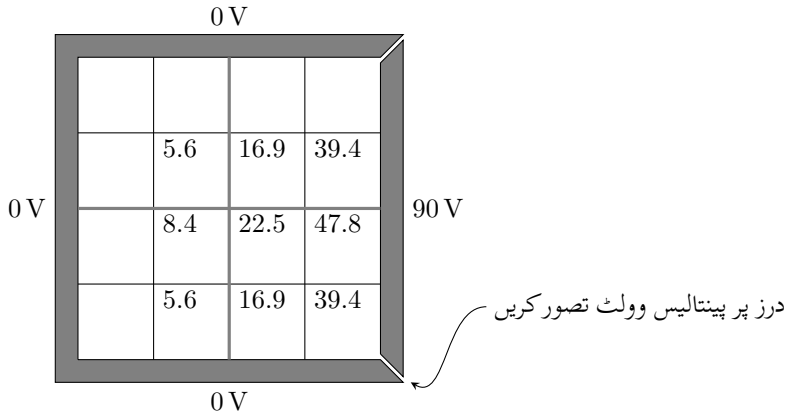
$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_b - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباؤ ہو گا۔

بھی لکھ سکتے ہیں۔ ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$(6.56) \quad V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

حاصل ہوتا ہے۔ h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔ h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباؤ حاصل کی جاتی ہے حتیٰ کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ اس کے چار اطراف صفر برقی دباؤ پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔ اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جاسکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔ اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباؤ صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباؤ زیر استعمال آئے گی۔ اب دو کونوں پر صفر برقی دباؤ ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔ درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45 + 45 + 0 + 0}{4} = 22.5 \text{ V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

0 V				90 V
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6	
	8.7 8.8 8.8	22.3 22.4 22.4	47.5 47.4 47.4	
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6	
0 V				

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 0 + 16.9 + 47.8}{4} = 38.7 \text{ V}$$

ہو جائے گی۔ اوپر اور نیچے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نئی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 38.7 + 22.5 + 38.7}{4} = 47.5 \text{ V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} = 16.7 \text{ V}$$

ہو گی جو قطار کے نیچے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5 + 16.7 + 8.4 + 16.7}{4} = 22.3 \text{ V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ 22.4 V حاصل ہوا ہے۔ مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباؤ حتمی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔ یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کئے۔ اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔ اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباؤ حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ با آسانی سمجھا جاسکے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے تاکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔ دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔ یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

باب 7

برقرار مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ¹ کا قانون²

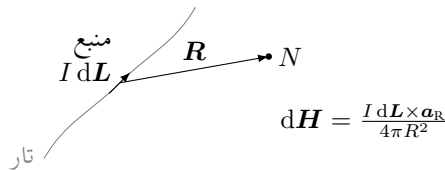
$$(7.1) \quad dH = \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت H کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ($\frac{A}{m}$) حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے dL جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان H دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے R فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نکلی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔ چھوٹے لمبائی dL کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I dL$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

Biot-Savart law¹

² یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایپپیٹر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب R اور dL کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

$$dE_2 = \frac{dQ_1 a_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہے ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔ ہم فی الحال صرف ایک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ ایک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہوگا لہذا صفحہ 119 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

سے

$$(7.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

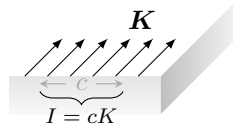
لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی مکمل شکل

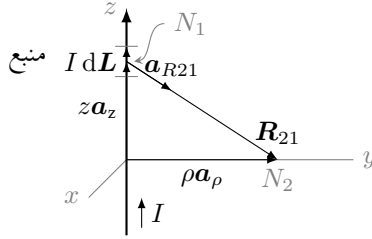
$$(7.3) \quad \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

یہ تجرباتی طور ثابت کی جاسکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.3 لکھی جاسکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.3 میں مکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جاسکتا ہے جس کا بند مکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہذا مساوات 7.3 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔ اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احقنا نہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔



شکل 7.2: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔



شکل 7.3: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

شکل 7.2 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو K دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی رو بذریعہ مکمل

$$I = \int K dc$$

حاصل ہو گی جہاں dc چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں dL کو سطحی کثافت برقی رو K یا حجمی کثافت برقی رو J کی صورت میں

$$(7.4) \quad I dL = K dS = J dv$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$(7.5) \quad H = \int_S \frac{K \times a_R dS}{4\pi R^2}$$

یا

$$(7.6) \quad H = \int_h \frac{J \times a_R dh}{4\pi R^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.3 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے dL میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جاسکتی ہے۔ چونکہ

$$R_{21} = \rho a_\rho - z a_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$R_{21} = |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھا جاسکتے ہیں۔ نکلی محدود میں چھوٹی لمبائی

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $d\rho = 0$ اور $d\phi = 0$ ہیں لہذا $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$ کے ہوتے مساوات 7.1 کو

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے مکمل سے حاصل ہوگا جہاں مکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$ لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں مکمل کے اندر \mathbf{a}_ϕ پر نظر رکھنا ہوگا۔ اگرچہ \mathbf{a}_ϕ اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا مکمل کا متغیر یعنی z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\mathbf{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہذا \mathbf{a}_ϕ کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \left. \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

(7.7)

ے

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

(7.8)

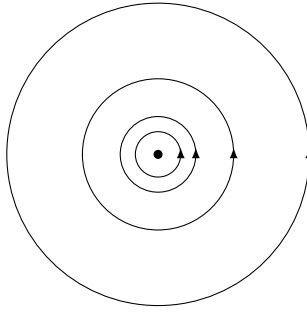
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.4 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں برقی رو کی سمت میں ہوں تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان z اور z ناہی زاویہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

اگر شکل 7.3 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.5 میں مکمل کے محدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

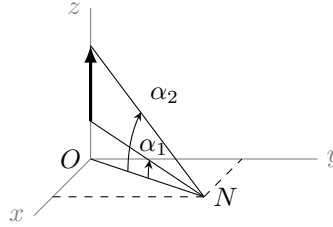
$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \mathbf{a}_\phi$$

(7.9)

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.5 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہوگی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔



شکل 7.4: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.5: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے متشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیٹر کا دوری قانون³ کہتے ہیں۔ اس قانون کو باپوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔ اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔ یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیٹر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ H کا لکیری بند مکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (7.10)$$

لکیری بند مکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ H کے لکیری مکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $d\mathbf{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر H کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $H \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کر کے تمام $H \cdot d\mathbf{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ مقناطیسی شدت H کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔ یوں کسی ایک نقطے پر $H \cdot d\mathbf{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $H \cdot d\mathbf{L}$ سے مختلف ہو گی۔ ایمپیٹر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $H \cdot d\mathbf{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔ اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔ یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ ایمپیر کے دوری قانون اس صورت استعمال کیا جاسکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.3 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.10 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتے ہیں کہ اس پر H اور dL یا تو آپس میں عمودی ہوں اور H کی قیمت قطعی اور اس کی سمت dL کے متوازی ہو۔ پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ صفر کے برابر ہوگا اور یوں راہ کے اس حصے پر مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ کو $H dL$ لکھا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں راہ کے اس راستے پر مکمل کی قیمت HL کے برابر ہوگی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدود z پر منحصر ہے۔ تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے بھی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔ اسی طرح باپوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت α_ϕ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔ یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ H کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہوگی۔ ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $dL = \rho d\phi \alpha_\phi$ اور $H_\phi \alpha_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہذا ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint H \cdot dL = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

یا

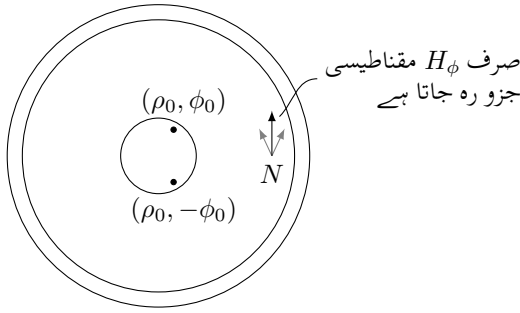
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

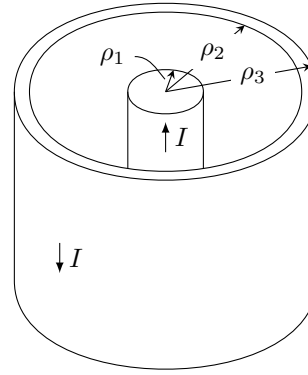
ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.6 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محدود پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارٹیسائی محدد کے x محدود پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ϕ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔ اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے ردا سی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے ردا سی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا ردا س ρ اندرونی تار کے ردا س ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی ردا س ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.6: ہم محوری تار۔

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہوگی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرے}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2} \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \quad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہذا

$$H_\phi = 0 \quad (\rho_3 < \rho)$$

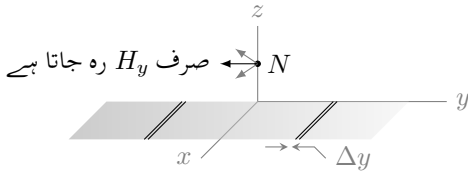
ہوگا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرے}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

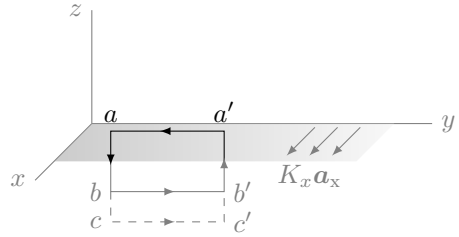
برقی رو کو گھیرے گی لہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \quad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہوگا۔



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔



(ا) لامحدود جسمات کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

شکل 7.7: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو I دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.7-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ اور لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x a_x$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔ اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل 7.7-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y a_x$ برقی رو گزارے گی۔ لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.7-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $abb'a'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔ اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا مکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔ راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بائوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_y a_y$ جبکہ اس کے نیچے جانب $H_y b a_y$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ $K y_1$ برقی رو کو گھیرتی ہے لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت

$$H_y a y_1 + H_y b y_1 = K_x y_1$$

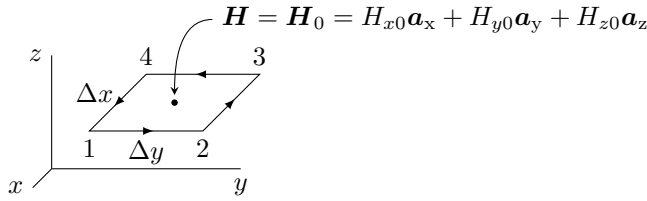
یا

$$(7.11) \quad H_y a + H_y b = K_x$$

ہو گا۔ اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_y a + H_y c = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ $H_y b$ اور $H_y c$ عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دار و مدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔ اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔



شکل 7.8: گردش کی تعریف۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $|H_{ya}| = |H_{yb}|$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 7.11 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$H_y = -\frac{1}{2}K_x a_x \quad (z > 0)$$

$$H_y = +\frac{1}{2}K_x a_x \quad (z < 0)$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$(7.12) \quad H = \frac{1}{2}K \times a_N$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $K_x a_x$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$(7.13) \quad \begin{aligned} H &= K \times a_N & (-h < z < 0) \\ H &= 0 & (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned}$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارٹیزی محدود میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.8 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔ شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} H_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)a_x + H_y(x_0, y_0, z_0)a_y + H_z(x_0, y_0, z_0)a_z \\ &= H_{x0}a_x + H_{y0}a_y + H_{z0}a_z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا مکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہوگا۔ انہیں اس مکمل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کار تیزی محدود میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.8 میں 1 تا 2 پر $dx = 0$ اور $dz = 0$ ہیں لہذا اس چھوٹے فاصلے کو $dL = dy a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔ یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہوگا۔ یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری مکمل

$$\int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z) \cdot dy a_y = \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} H_y dy = H_{y21} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy = H_{y21} \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جایا گیا۔ ہمیں اس طرح کے مکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہذا اس پورے عمل کو ہم

$$(7.14) \quad (H \cdot dL)_{21} = H_{y21} \Delta y$$

لکھیں گے۔ ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل⁵ بروئے کار لانا ہوگا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x + \frac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$(7.15) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

لکھ کر مساوات 7.14 کو

$$(7.16) \quad (H \cdot dL)_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.15 کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\Delta x \frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہوگی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔ اب رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہذا یہاں

$$(7.17) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

ہوگا جو عین مساوات 7.15 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 بھی کچھ کرتے ہوئے

$$(7.18) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq - \left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(7.19) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq - \left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

اور 4 تا 1 پر

$$(7.20) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.16، مساوات 7.18، مساوات 7.19 اور مساوات 7.20 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا مکمل

$$(7.21) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کشاف برقی رو

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z \Delta x \Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا مکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہوگا جسے

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہوگا حتیٰ کہ $\Delta x \rightarrow 0$ اور $\Delta y \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہوگا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$(7.22) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدود کے بقایا دو محدود کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$(7.23) \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

اور

$$(7.24) \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.23 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.24 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δx اور Δz ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.22، مساوات 7.23 اور مساوات 7.24 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش⁶ کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدود پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$H_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں H کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد H کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدود میں گردش H کے x, y اور z اجزاء مساوات 7.23، مساوات 7.24 اور مساوات 7.22 بالترتیب دیتے ہیں لہذا

$$(7.25) \quad H_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) a_z = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت⁷ کی شکل میں

$$(7.26) \quad H_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیپلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$(7.27) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \text{ گردش}$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدود میں ہی گردش ∇ اور \mathbf{H} کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کے باوجود کسی بھی محدود میں گردش کو $\nabla \times \mathbf{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں کارتیسی محدود میں \mathbf{H} کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$(7.28) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.29) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

لکھی جاسکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔ یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ کی نقطہ شکل

$$(7.30) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوگی۔ یوں $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ صفر کے برابر ہوگا جس سے \mathbf{E} کا گردش بھی صفر ہوگا۔ مساوات 7.30 یہی کہتا ہے۔ اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہوگی۔ اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہوگا۔ مساوات 7.29 یہی کہتا ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \mathbf{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.25 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\mathbf{H} = (x^2y + 2z)\mathbf{a}_x + (xz - y)\mathbf{a}_y + (e^xyz)\mathbf{a}_z$ تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہوگا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہوگی۔

جوابات: $\nabla \times \mathbf{H} = (e^{xz} - x)\mathbf{a}_x + (2 - e^xyz)\mathbf{a}_y + (z - x^2)\mathbf{a}_z$ گردش کی قیمت $2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z$ ہوگی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.28 سے

$$(7.31) \quad \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.28 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ ، دوسرے جزو میں $\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (7.32) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right] \mathbf{a}_y - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

یہاں رک کر \mathbf{A} کے پھیلاؤ کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ &+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (7.33)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &\equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (7.34)$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.32 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7.35)$$

مساوات 7.34 سمتیہ کی لاپلاسی⁸ ہے۔

مثال 7.2: سمتیہ \mathbf{S} اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla \times (M\mathbf{S}) \equiv (\nabla M) \times \mathbf{S} + M(\nabla \times \mathbf{S}) \quad (7.36)$$

کے برابر ہے۔

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$M\mathbf{S} = M(S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z) = MS_x \mathbf{a}_x + MS_y \mathbf{a}_y + MS_z \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.28 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times M\mathbf{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times M\mathbf{S} &= \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z + M \frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} S_y - M \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x + M \frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} S_z - M \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y + M \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} S_x - M \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\nabla \times M\mathbf{S} = \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z \right] \\ + M \left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \right]$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \mathbf{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \mathbf{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial M}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \mathbf{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

7.3.1 نلکی محدود میں گردش

نلکی محدود میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.9 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اس رقبے کے وسط میں

$$H_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + H_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + H_{z 0} \mathbf{a}_z$$

ہوگا۔ کارتیسی محدود میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محدود میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

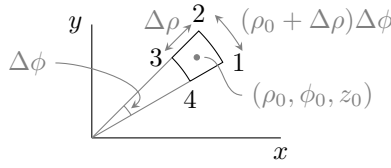
$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

ہوگی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر مکمل

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} \doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} \right) \left(\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\phi \\ \doteq \left[H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \right] \Delta\phi$$



شکل 7.9: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

اور

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \right) \left[- \left(\rho_0 - \frac{\Delta \rho}{2} \right) \Delta \phi \right] \\ &\doteq \left[-H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta \rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta \rho}{2} \right)^2 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر اطراف $\Delta \rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر مکمل

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) (-\Delta \rho)$$

اور

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) \Delta \rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا مکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

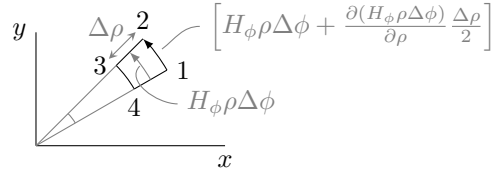
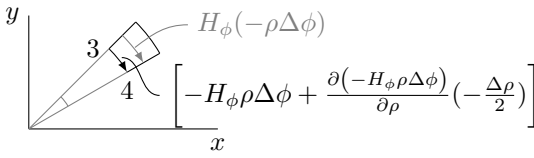
$$(7.37) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi$$

ہو گا۔ اس چھوٹے رقبے سے $J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$ برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi \doteq J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \doteq J_z$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.10: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta \rho$ اور $\Delta \phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہوگا اور تقریباً برابر کی علامت \approx کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$(7.38) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta \phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) = J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.37 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.10-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho \Delta \phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر مکمل تقریباً

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{\phi} \rho \Delta \phi$$

کے برابر ہوگا۔ اس مکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_{\phi} \rho \Delta \phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta \rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} = \frac{\partial(H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس مکمل کی قیمت $H_{\phi 0} \rho_0 \Delta \phi$ کے برابر ہے لہذا وسط سے $\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$(7.39) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_{\phi} \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

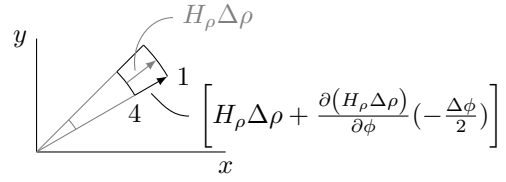
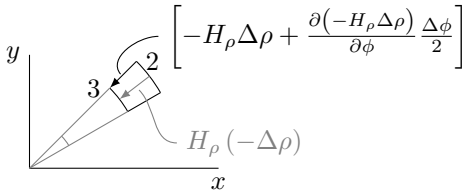
ہوگی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.10-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر مکمل

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{\phi}(-\rho \Delta \phi)$$

کے برابر ہوگا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل

$$(7.40) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_{\phi} \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ &= -H_{\phi} \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \end{aligned}$$

ہوگا۔



(۱) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $\frac{\Delta \rho}{2}$ تا $\frac{\Delta \rho}{2} +$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho \Delta \rho$ ہوگی۔ اس نقطے سے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہوگی جسے

$$\Delta(H \cdot dL) = \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \left(-\frac{\Delta \phi}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

$$H \cdot dL = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہوگی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

$$H \cdot dL_{14} = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \quad (7.41)$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $\frac{\Delta \rho}{2}$ تا $\frac{\Delta \rho}{2} -$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$H \cdot dL = H_\rho(-\Delta \rho)$$

ہوگی۔ اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$H \cdot dL_{32} = -H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \quad (7.42)$$

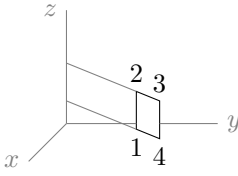
کے برابر ہوگا۔

مساوات 7.39، مساوات 7.40، مساوات 7.41 اور مساوات 7.42 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

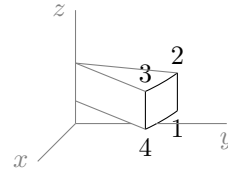
$$\begin{aligned} \oint H \cdot dL &= \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \Delta \phi \\ &= \left[\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \Delta \rho \Delta \phi \end{aligned} \quad (7.43)$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\oint H \cdot dL = \left[H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \Delta \rho \Delta \phi$$



(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.12: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

جو بالکل مساوات 7.37 ہی ہے۔ یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔ یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔ مساوات 7.43 سے گردش

$$(7.44) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta \phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta \rho \rho \Delta \phi} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] = J_z$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔ گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور لمبائی $\rho_0 \Delta \phi$ رکھیں گے۔ اس رقبے کو شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری مکمل حاصل کیا جائے گا۔ مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $H_z \Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطے سے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ زاویہ پر اس مکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial \phi} \left(+\frac{\Delta \phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $-H_z \Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ زاویہ پر

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \phi} \left(-\frac{\Delta \phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا مکمل

$$(7.45) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = +\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $-H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(+\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا مکمل

$$(7.46) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -\rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.45 اور مساوات 7.46 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل مکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $I\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \Delta z \Delta \phi = I\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$(7.47) \quad \lim_{\substack{\Delta\phi \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] = J_\rho$$

ملتا ہے۔

شکل 7.12-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے \mathbf{H} کے لکیری مکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} &= H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(+\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} &= H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} &= -H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(-H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned}$$

اور یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$(7.48) \quad \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta\rho\Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = J_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.48، مساوات 7.47 اور مساوات 7.44 کا مجموعہ نکلی محدود میں گردش دیتا ہے یعنی

$$(7.49) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نکلی محدود میں ∇ اور \mathbf{H} کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔ اس کے باوجود \mathbf{H} کے گردش کو $\nabla \times \mathbf{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\mathbf{H} = (3\rho \cos \phi + 5)\mathbf{a}_\rho + 6 \sin \phi \mathbf{a}_\phi + 2\mathbf{a}_z$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{6}{\rho} + 3 \right) \sin \phi \mathbf{a}_z$

7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات

صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات (a_u, a_v, a_w) ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$dL_u = k_1 du$$

$$dL_v = k_2 dv$$

$$dL_w = k_3 dw$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2 \Delta v$ اور $k_3 \Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2 \Delta v$ کے برابر ہے لہذا اس پر چلتے ہوئے مکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$H \cdot dL_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک مکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل

$$H \cdot dL_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial(-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)$$

ہو گا۔ یوں ان اطراف پر کل مکمل

$$(7.50) \quad H \cdot dL_{21} + H \cdot dL_{43} = -\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$H \cdot dL_{32} = H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right)$$

$$H \cdot dL_{14} = -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(7.51) \quad H \cdot dL_{32} + H \cdot dL_{14} = \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} \Delta v \Delta w$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں چھوٹے رقبے کے گردش کل مکمل

$$(7.52) \quad \oint H \cdot dL = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint H \cdot dL = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$(7.53) \quad \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] = J_u$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$(7.54) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] = J_v$$

اور

$$(7.55) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] = J_w$$

لکھ سکتے ہیں۔ عمومی محدود میں گردش کے ان اجزاء کو

$$(7.56) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] \mathbf{a}_v \\ + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] \mathbf{a}_w$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$(7.57) \quad \mathbf{H} \text{ گردش} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\mathbf{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\mathbf{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 80 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدود میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

اور \mathbf{a}_u کی جگہ \mathbf{a}_r ، \mathbf{a}_v کی جگہ \mathbf{a}_θ اور \mathbf{a}_w کی جگہ \mathbf{a}_ϕ پر کرنے سے کروی محدود حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.56 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروں محدود میں گردش کی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(H_\theta r)}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(H_\phi r)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \quad (7.58)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: اگر $\mathbf{H} = 2r \cos \theta \mathbf{a}_r - 3r \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = -4 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.13- الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B)_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $d\mathbf{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ \mathbf{H}_B سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N$$

یا

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta S_B$$

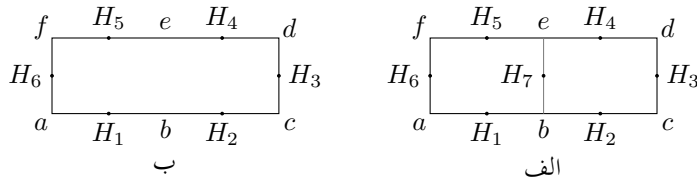
بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{L}_{ba} + \mathbf{H}_7 \cdot \Delta \mathbf{L}_{eb} + \mathbf{H}_5 \cdot \Delta \mathbf{L}_{fe} + \mathbf{H}_6 \cdot \Delta \mathbf{L}_{af}$$

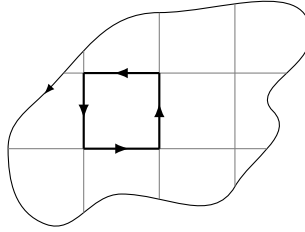
لکھا جاسکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta S_D$$



شکل 7.13: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمیل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمیل کے برابر ہے۔



شکل 7.14: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمیل لیں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمیل کے برابر ہو گا۔

اور

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} + H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_7 \cdot \Delta L_{be}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمیل میں $H_7 \cdot \Delta L_{be} = -H_7 \cdot \Delta L_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمیل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B + \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D &\doteq H_1 \cdot \Delta L_{ba} + H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} + H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_5 \cdot \Delta L_{fe} + H_6 \cdot \Delta L_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta \mathbf{S}_B + (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta \mathbf{S}_D \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمیل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمیل کے برابر ہے جو شکل 7.13-ب کو دیکھ کر لکھی جاسکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.13-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمیل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمیل کے برابر ہو گا۔ شکل 7.14 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو بڑے چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف پر لکیری تکمیل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمیل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمیل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta \mathbf{S}$ کے مجموعے کو تکمیل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$(7.59) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $d\mathbf{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.59 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات مسئلہ سٹوکس⁹ بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ کے دونوں اطراف کا $d\mathbf{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی مکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی مکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد مکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی مکمل اور بند لکیری مکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاؤ حجمی مکمل اور بند سطحی مکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں \mathbf{A} کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاؤ کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔ کسی بھی عمومی سمتیہ میدان \mathbf{A} کا گردش $\nabla \times \mathbf{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاؤ $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی مکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dh = \int_{\text{حجم}} T dh$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاؤ لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{حجم}} T dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \mathbf{A}$ کا مکمل ہے۔ مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی مکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری مکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری مکمل لیا جائے گا۔ جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔ صفر لمبائی کے راہ پر مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی dh کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T dh = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$(7.60) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.60 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کا گردش اور گردش کا پھیلاؤ کارتیسی محدود میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہو گا۔

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

جس کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.60 کے تحت گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(7.61) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ہو گا۔ اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.61 درست ہو۔ یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.2 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفریک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو B کی تعریف

$$(7.62) \quad B = \mu_0 H$$

ہے جہاں B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر Wb/m^2 ہے جسے ٹسلا¹⁰ پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل¹¹ ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\text{H}}{\text{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ خالی خلاء میں

$$(7.63) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

کے برابر ہے۔

چونکہ H کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جاسکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو D اور برقی میدان کی شدت E کا تعلق

$$D = \epsilon_0 E$$

ہو بہو مساوات 7.62 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہاو کا سطحی مکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S D \cdot dS$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S D \cdot dS = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔ یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔ مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔ آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔ یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ ناتو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور ناہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی مکمل مقناطیسی بہاو Φ ¹² دیتا ہے جسے ویبر¹³ Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$(7.64) \quad \Phi = \int_S B \cdot dS \quad \text{Wb}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$(7.65) \quad \oint_S B \cdot dS = 0$$

¹⁰ Tesla
magnetic constant, permeability¹¹
magnetic flux¹²
Weber¹³

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.66) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.65 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔ اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔ فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.66 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.66 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(7.67) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

ان کے ساتھ

$$(7.68) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباؤ کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$(7.69) \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

مساوات 7.67 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاؤ اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔ انہیں کی مکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(7.70) \quad \begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h dh \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned}$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباؤ پر بھی غور کریں گے۔ ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب P کی صورت میں شامل کیا۔ ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔ اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاؤ کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.6 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاؤ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہو گا۔ اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاؤ وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔ تار کو z محدود پر تصور کرتے ہوئے $z = d$ تا $z = 0$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} a_\phi \cdot (d\rho dz a_\phi)$$

یعنی

$$(7.71) \quad \Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

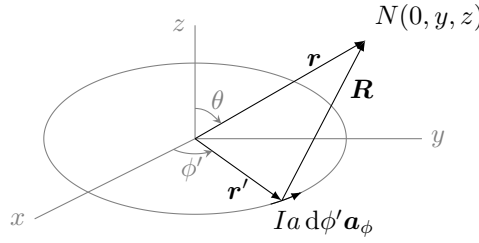
مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جاسکتی ہے۔ ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا ایک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین H اور B حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 109 \mu Wb$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 56.6 \mu Wb$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446 \mu Wb$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدد کے $(0, 0, 0)$ پر ہے۔ اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ ہائیو سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں H حاصل کریں۔

$$H = \frac{I}{2\rho} a_z \text{ جواب}$$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل¹⁴ حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 7.15: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور پر ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

مثال 7.4: شکل 7.15 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0, y, z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $dL' = a d\phi' a'_\phi$ لکھا جاسکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ a'_ϕ کو کارتیسی محدود میں

$$a'_\phi = -\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$dL' = a d\phi' (-\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ چھوٹی لمبائی خود $(a \cos \phi', a \sin \phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$r' = a a'_\phi = a \cos \phi' a_x + a \sin \phi' a_y$$

کے برابر ہے۔ نقطہ N کا مقام کارتیسی محدود میں

$$r = y a_y + z a_z$$

ہے۔ یوں

$$R = r - r' = -a \cos \phi' a_x + (y - a \sin \phi') a_y + z a_z$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} |R| = R &= \sqrt{(-a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2} \\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'} \end{aligned}$$

اور

$$a_R = \frac{R}{|R|} = \frac{-a \cos \phi' a_x + (y - a \sin \phi') a_y + z a_z}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بائیوٹ سیوارٹ قانون میں $a_R = \frac{R}{R}$ پڑھتے ہوئے

$$H = \oint \frac{I dL' \times R}{4\pi R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں پہلے $d\mathbf{L}' \times \mathbf{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}' \times \mathbf{R} &= a d\phi' \left(-\sin \phi' \mathbf{a}_x + \cos \phi' \mathbf{a}_y \right) \times \left[-a \cos \phi' \mathbf{a}_x + (y - a \sin \phi') \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \right] \\ &= a d\phi' \left[z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

یوں بائیوٹ سپوارٹ کے قانون کو

$$\mathbf{H} = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' \mathbf{a}_x + z \sin \phi' \mathbf{a}_y + (a - y \sin \phi') \mathbf{a}_z}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} d\phi'$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\phi' - \pi$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'$ پر کرتے ہوئے مکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ہی ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

(7.72)

$$H_z = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - y \sin \phi') d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

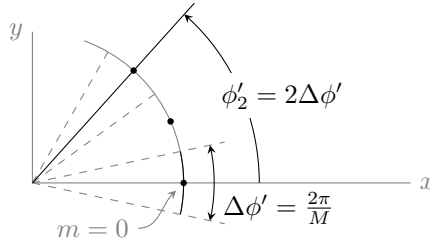
ہیں۔ یہ دونوں بیضوی مکمل¹⁵ ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی مکمل کا عددی حل¹⁶ بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی مکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی مکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

حل: اس نقطے پر

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(3 - 2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



شکل 7.16: مکمل کرے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

لکھا جائے گا۔ اس مکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.16 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ مکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m=0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi'_0 = 0$ ہو گا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m=1$ اور زاویہ $\phi'_1 = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m=2$ اور زاویہ $\phi'_2 = 2\Delta\phi' = \frac{2 \times 2\pi}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر مکمل تقریباً

$$\begin{aligned} \Delta H_y &= \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin \phi'_m \Delta\phi'}{(3 - 2 \sin \phi'_m)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin(\frac{2\pi m}{M}) \frac{2\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2\pi m}{M})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin \frac{2\pi m}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2\pi m}{M})^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔ جدول 7.1 میں $M=10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin \frac{2\pi m}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2\pi m}{M})^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} (0.00000 + 0.23852 + 0.82674 + 0.82674 + 0.23852 + 0.00000 \\ &\quad - 0.06889 - 0.08763 - 0.08763 - 0.06889) \\ &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{10} (1.8175) \\ &= 1.1420 \left(\frac{I}{4\pi a} \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ اگر $M=100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m=0$ اور $m=5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ اسی طرح $m=1$ اور $m=4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ ان تعلق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔ درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔ موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433 - 1.1420}{1.1433} \right) \times 100 = 0.11\%$$

$\frac{\sin \frac{2\pi m}{M}}{(3-2 \sin \frac{2\pi m}{M})^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
-0.06889	6
-0.08763	7
-0.08763	8
-0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

کافر ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔ گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روزمرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو¹⁷ بیان کیا جاسکتا ہے۔ البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔ یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباو¹⁸ بھی بیان کیا جاسکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ سمتی مقناطیسی دباو لینتھینا¹⁹، موج²⁰ اور مائیکروویو چولھے (خرد موج چولھے)²¹ پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔ آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 100 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہذا اسے ایمپیر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔ اس طرح

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \quad (7.73)$$

scalar magnetic potential¹⁷

vector magnetic potential¹⁸

antenna¹⁹

waveguide²⁰

microwave oven²¹

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $J = 0$ ہو یعنی

$$(7.74) \quad \mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (J = 0)$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباؤ پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔ اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہوگی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایکمیٹر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$(7.75) \quad \nabla^2 V_m = 0 \quad (J = 0)$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہوگی۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباؤ اٹل قیمت رکھتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محور پر رکھی لا محدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں a_z جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ ایسی تار کے گرد جہاں $J = 0$ ہے

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.74 اور نکلی محدود میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تاکہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔ اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے تاکہ صفر۔ تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر

سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چنے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباؤ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ہوتا ہے لہذا دو نقطوں کے مابین کیری مکمل

$$V_{ab} = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

کا دار و مدار مکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ مکمل کے راہ پر $\mathbf{J} = 0$ ہے۔ یوں مکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، مکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ ہاں اگر مکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباؤ بھی ایک قیمت رکھے گا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباؤ

$$V_{ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \quad (7.76)$$

بیان کی جاتی ہے۔ ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔ اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔ یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = - \frac{I}{2\pi} \phi \quad (-\pi < \phi \leq \pi)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔ زاویہ $\phi = \pi$ تک صرف زاویہ صفر سے بڑھاتے ہوئے پہنچا جاسکتا ہے۔ یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہوگی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوگی۔

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ہم شروع

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.77)$$

سے کرتے ہیں۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔ مساوات 7.60 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا اگر B سمتی متغیرہ A کا گردش

$$B = \nabla \times A \quad (7.78)$$

ہو تب بھی B کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times A = 0$$

ہی ہو گا۔ ہم مساوات 7.78 میں دئے A کو سمتی مقناطیسی دباؤ کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں سمتی مقناطیسی دباؤ خود بخود مساوات 7.77 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$H = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A$$

اور

$$\nabla \times H = J = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times A$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباؤ A کی اکائی ویبرنی میٹر $\frac{Wb}{m}$ ہے۔ گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 193 پر مساوات 7.35 میں حاصل کی گئی ہے۔

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ B اور A کے تعریف اور ہائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$A = \oint \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R} \quad (7.79)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم نے A کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے B یا H کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباؤ کے مساوات

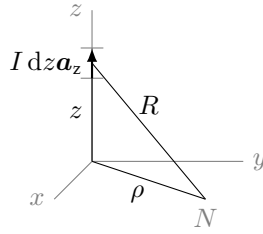
$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.79 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ A واقع سمتی مقناطیسی دباؤ ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری مکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی روا اور دوسرا کشاف چارج کا لکیری مکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے dL کا اثر R کے بالعکس تناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.79 کی تفرق شکل

$$dA = \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R} \quad (7.80)$$

بھی لکھی جاسکتی ہے جب تک dL سے حاصل dA کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند مکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل A کوئی معنی نہیں رکھتا۔



شکل 7.17: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباؤ۔

شکل 7.17 میں z محدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ dL دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$dA = \frac{\mu_0 I dz a_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

یا

$$(7.81) \quad dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad dA_\rho = 0, \quad dA_\phi = 0$$

سمتی مقناطیسی دباؤ پیدا کرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباؤ تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نکلی محدود میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned} dH &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times dA = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) a_\phi \\ &= \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho a_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔ یہی مساوات شکل 7.17 کو دیکھتے ہوئے بائیوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جاسکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباؤ A کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جاسکتے ہیں۔ یوں سطحی کثافت برقی رو K کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I dL = K dS$$

اور حجمی کثافت برقی رو J کے لئے

$$I dL = J dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I dL$ لکھا جاتا ہے۔ یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔ اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح dS اور تفرقی حجم dh کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔ یوں A کے دیگر کلیے

$$(7.82) \quad A = \int_S \frac{\mu_0 K dS}{4\pi R}$$

اور

$$(7.83) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباؤ مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباؤ کی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \rightarrow \infty$ پر $A \rightarrow 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \rightarrow \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباؤ پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر B حاصل کرتے ہوئے A بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہذا اس دائرے پر $B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ B کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں A کے گردش کو مساوات 7.49 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی رو a_z سمت میں ہے لہذا A کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M مکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بائوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$H = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (7.84)$$

سمتی مقناطیسی دباؤ کے تعریف

$$B = \nabla \times A \quad (7.85)$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کے تعلق

$$B = \mu_0 H \quad (7.86)$$

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ

سمتی مقناطیسی دباؤ A کی مساوات

$$(7.87) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بائوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.84 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.83 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباؤ دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارنا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو dh_1 لکھیں گے جو $dx_1 dy_1 dz_1$ کے برابر ہو گا۔ مکمل کے متغیرات x_1, y_1, z_1 اور z_1 ہیں۔ یوں

$$(7.88) \quad A_2 = \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times A_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہذا گردش کے متغیرات بھی x_2, y_2, z_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 100 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق y_2, x_2, z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.88 سے A_2 پر کرتے ہوئے

$$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں مکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ مکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا ہم تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جاسکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے۔ یوں

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{J_1 dh_1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں $dh_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ اس کے علاوہ اس کا x_2, y_2, z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(7.89) \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{J_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

یہاں سمتیہ J ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ S اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$(7.90) \quad \nabla \times (MS) \equiv (\nabla M) \times S + M(\nabla \times S)$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.89 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ J_1 اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$(7.91) \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times J_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times J_1) \right] dh_1$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں J_1 صرف x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہذا J_1 کے تمام تفرق جو x_2, y_2, z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times J_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 101 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$H_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{a}_{R21} \times \mathbf{J}_1}{R_{21}^2} dh_1$$

یا

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس میں $J_1 dh_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1 dL_1$ پر کرتے ہوئے اور بند مکمل لکھ کر جانی پہچانی بائیوٹ سیوارٹ مساوات

$$H_2 = \oint_h \frac{I dL_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.88 درست ہے اور یہ مساوات، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیٹر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.92) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

کو بائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.85 اور مساوات 7.86 سے جن سے

$$(7.93) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 193 پر مساوات 7.35 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.94) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاؤ اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاؤ کو پہلے حل کرتے ہیں۔ مساوات 7.88 کی پھیلاؤ

$$(7.95) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ صفحہ 112 پر مثال 4.7 میں سمتیہ D اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ J_1 جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہذا اس مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(7.96) \quad \nabla \cdot \left(\frac{J_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot J_1) + J_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right)$$

جس کی مدد سے

$$(7.97) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot J_1) + J_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

ہو گا۔

چونکہ J_1 صرف متغیرات x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہذا اس کے x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہذا $\nabla_2 \cdot J_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 101 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.98) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-J_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.96 کے دوبارہ استعمال سے

$$(7.99) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot J_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{J_1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.61 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot J = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$(7.100) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{J_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.101) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{J_1}{R_{21}} \cdot dS_1$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تاکہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.102) \quad \nabla \cdot A = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباؤ کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاؤ بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.94 حل کرنے کی خاطر پھیلاؤ اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاؤ حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباؤ اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho \, dh}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x \, dh}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں بھی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$(7.103) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.94 میں مساوات 7.102 اور مساوات 7.103 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.104) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباؤ کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباؤ کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور \mathbf{A} کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور \mathbf{A} کی تعریف

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $B = \mu_0 H$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 193 پر مساوات 7.35 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.102 کی مدد سے

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (7.105)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

باب 8

سوالات

8.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 8.1:

سوال 8.2: برقی میدان $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میں -0.1 C کے چارج کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0.2 J ، -0.2 J اور 0 J

سوال 8.3: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ جواب}$$

8.2 کیپسٹر

سوال 8.4: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی کیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5, 3, 1)$ پر D حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \text{ جواب}$$

سوال 8.5: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \text{ جواب:}$$

سوال 8.6: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محور کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5, 3, 0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{nC}{m^2}$$

سوال 8.7: مشق 5.3 میں $300 K$ درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 15×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{S}{m}$$

سوال 8.8: صفحہ 129 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی کثافت سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -Q$$

سوال 8.9: صفحہ 120 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپئیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

$$\text{جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔}$$

$$\text{سوال 8.10: مساوات 5.71 میں } \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b} \text{ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔}$$

سوال 8.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نکلی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نکلی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نکلی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 12 m, 3.46 \frac{nC}{m}, 13.4 m, 18 m, 1.65 \frac{pF}{m^2} \text{ اور } 0.73 \frac{pF}{m^2}$$

8.3 لاپلاس

سوال 8.12: صفحہ 157 پر مساوات 6.13 عمومی محدود میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 8.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کمپیوٹیشن حاصل کریں۔

سوال 8.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 8.15: مساوات 6.28 کے مکمل کو حل کریں۔

سوال 8.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 8.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 8.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 8.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباؤ چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ ڈبے کے وسط میں برقی دباؤ کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

8.4 بایوٹ-سیوارٹ

سوال 8.20: مساوات 7.9 حاصل کریں۔

سوال 8.21: شکل 7.7 کے لامحدود سطح سے پیدا متناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.22: مساوات 7.17 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.8 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}(-\frac{\Delta x}{2})$ تبدیلی رونما ہوگی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔

سوال 8.23: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتمی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 8.24: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے ملکی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 8.25: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر متناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.72 میں دئے بیضوی مکمل حاصل کئے گئے۔ ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔ بالکل اسی طرز پر مکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0, a, a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525 \left(\frac{1}{4\pi a} \right)$

جدول 8.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 8.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عمیر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	تقطیر شدہ پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 8.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بہرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بہرت (supermalloy)

جدول 8.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

- divergence theorem, 83
- donor, 128
- doping, 128
- dot product, 10
- drift velocity, 117
- easy axis, 132
- electric constant, 38
 - relative, 133
 - vacuum, 133
- electric field intensity, 42
- electric flux, 65
- electrons
 - free, 163
- electrostatic, 122
- equipotential surface, 93
- Farad, 139
- Faraday shield, 60
- ferroelectric, 132
- Fourier series, 171
- fringing, 140
- Gauss's law, 66
- gaussian surface, 67
- gradient, 100
- gravitational constant, 37
- gravity, 41
- ground, 92
- group, 128
- head to tail rule, 2
- hole, 128
- holes
 - free, 163
- homogeneous, 151
- image, 126
- isotropic, 132
- kinetic energy, 108
- Laplace equation, 152
- Laplacian operator, 152
- latitude, 28
- linear, 41, 154
- longitude, 28
- acceptor, 128
- Ampere's circuital law, 181
- anisotropic, 132
- area
 - cross sectional, 164
- associative law, 2
- Biot-Savart law, 177
- bound charge, 130
- capacitance, 139
- capacitor, 51
 - mica, 140
- Cartesian coordinates, 1
- coaxial cable, 71
- coefficient, 167
- commutative law, 2
- conductivity, 118
- cone, 28
- conservative field, 86, 98
- continuity equation, 116
- continuous, 135
- coordinates, 3
 - generalized, 80
- coplanar, 3
- copper, 118
- cross product, 14
- curl, 185, 188
- cylindrical
 - coordinates, 17
- density
 - current, 114
 - electric flux, 65
 - line charge, 44
 - surface charge, 49
- deposit, 140
- determinant, 188
- dielectric, 130
- diffusion, 163
- diode, 162
- dipole, 24, 103
- dipole moment, 104
- discontinuous, 135, 136
- displacement vector, 13
- divergence, 76

reference point, 92
resistance, 120
right hand rule, 14

scalar, 1
scalar product, 10
separation constant, 165
shielded, 72
silicon, 162
static electric field, 98
step, 135
Stokes theorem, 198
streamlines, 105
susceptibility, 133

Taylor series, 74, 186
tensor, 133
Tesla, 200
time constant, 121

undefined, 160
uniform, 86

vector, 1
vector area, 9
vector product, 14
volt, 91
voltage, 91

wireless, 38
work, 85

magnetic constant, 200
Maxwell equation, 76, 189
mobility
 electron, 117

nabla, 77
non homogeneous, 133
non polar, 129
numerical iteration, 172

ohm, 120
Ohm's law, 118
ohm's law, 120

parallelogram law, 2
periodic table, 128
permeability, 38, 200
permittivity, 38
 relative, 133
point charge, 37
Poisson equation, 151
polar, 129
polarization, 130
potential energy, 86
power series, 166
Pythagoras theorem, 7

quadrant, 89

حوالہ	آزاد الیکٹران، 163
نقطہ، 92	آسان سمت، 132
	آسان محور، 132
خط	
سمت بہاؤ، 105	استمراری مساوات، 116
طول بلد، 28	اوبم، 120
عرض بلد، 28	قانون، 120
خطی، 154، 41	ایمپیٹر
خول، 128	دوری قانون نقطہ شکل، 188
آزاد، 163	ایمپیٹر کا دوری قانون، 181
دائیں ہاتھ	بایوٹ-سیوارٹ، 177
قانون، 14	برقی بہاؤ، 65
دوری جدول، 128	برقی چال، 132
	برقی دباؤ، 91
ڈایوڈ، 162	برقی رو
ڈھلان، 100	کثافت، 114
ذو برق، 130	برقی زمین، 92
ذو برقی مستقل، 133	برقی سکون، 122
	برقی مستقل، 38
ربع اول، 89	خالی خلاء، 133
رفتار بہاؤ، 117	برقی میدان کی شدت، 42
رقبہ	بقائی میدان، 98
عمودی تراش، 164	بلا جوڑ، 135
	بند تکملہ، 67
ساکن برقی میدان، 98	بے تار، 38
سر سے ڈم جوڑنا، 2	پناہ دار تار، 72
سلیکان، 162	پوٹنسن مساوات، 151
سمتی رقبہ، 9	پھولنا، 140
سمتی ضرب، 14	پھیلاؤ، 76
سمتیہ، 1	
سیڑھی نما، 135	تانبا، 118
	تجاذب، 37
صلیبی ضرب، 14	تجاذبی مستقل، 37
	تجاذبی میدان، 41
ضربہ، 167	تقطیب، 130
	تناوی مستقل، 133
طاقتی سلسلہ، 166	
عددی دہرانا، 172	ٹسلا، 200
عطا کنندہ، 128	ٹیلر تسلسل، 74، 186
عکس، 126	
عکس کی ترکیب، 126	جزوی برقی مستقل، 133
علیحہدگی مستقل، 165	جفت قطب، 24، 103، 129
	معیار اثر، 104
غیر سمتی ضرب، 10	نقطہ، 104
غیر قطبی، 129	جماعت، 128
غیر معین، 160	جوڑ دار، 135، 136
فوریر تسلسل، 171	چارچ
فیثاغورث، 7	مقید، 130
فیراڈ، 139	چڑھا، 140
فیراڈے حفاظتی سطح، 60	
	حرکت پذیری
قالب	الیکٹران، 117
حتمی قیمت، 188	حرکی توانائی، 108

قانون	مقام تعین کنندہ
اوبہ، 118	سمتیہ، 13
قانون تبادل، 2	مقداری، 1
قانون تلازمی، 2	مقداری ضرب، 10
قائم میدان، 86	مقناطیسی مستقل، 38، 200
قبول کنندہ، 128	ملاوٹ، 128
قطبی، 129	موصلیت
کارتیسی محدود، 1	مستقل، 118
کام، 85	میکس ویل مساوات، 76، 189
کپیسٹر، 51	ناہم سموت، 132
ایرق، 140	نرم محور، 132
کپیسٹنس، 139	نفوذ، 163
کثافت	نقطہ چارج، 37
برقی بہاو، 65	نقطہ ضرب، 10
سطحی چارج، 49	نلکی
لکیری چارج، 44	محدد، 17
کرونیکر ڈیلٹا، 10	نیپلا، 77
کشش	وقتی مستقل، 121
زمین، 41	وولٹ، 91
کولومب کا قانون، 37	
گاؤس سطح، 67	ہم سطحی، 3
گاؤس کا قانون، 66	ہم سمتی، 132
گردش، 185، 188	ہم قوہ سطح، 93
	ہم محوری تار، 71
لاپلاس مساوات، 152	یکساں، 86
لاپلاسی عامل، 152	غیر، 133
متوازی الاضلاع، 2	بر طرف، 151
محدد، 3	
عمومی، 80	
مخروط، 28	
مخففی توانائی، 86	
مزاحمت، 120	
مسئلہ پھیلاؤ، 83	
مسئلہ سٹوکس، 198	