

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ . . . . .	1.1
2	سمتی الجبرا . . . . .	1.2
3	کارتیسی محدود . . . . .	1.3
5	اکائی سمتیات . . . . .	1.4
9	میدانی سمتیہ . . . . .	1.5
9	سمتی رقبہ . . . . .	1.6
10	غیر سمتی ضرب . . . . .	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . . .	1.8
17	گول نلکی محدود . . . . .	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . . .	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . . .	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . . .	
27	1.10 کروی محدود . . . . .	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع . . . . .	
41	2.2 برقی میدان کی شدت . . . . .	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . . .	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .	
53	2.5 چارج بردار حجم . . . . .	
54	2.6 مزید مثال . . . . .	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط . . . . .	
63	2.8 سوالات . . . . .	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج . . . . .
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ . . . . .
66	3.3	گاؤس کا قانون . . . . .
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال . . . . .
68	3.4.1	نقطہ چارج . . . . .
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح . . . . .
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر . . . . .
71	3.5	ہم محوری تار . . . . .
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . . .
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق . . . . .
76	3.8	پھیلاؤ . . . . .
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات . . . . .
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات . . . . .
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ . . . . .
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام . . . . .
86	4.2	لکیری تکملہ . . . . .
91	4.3	برقی دباؤ . . . . .
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ . . . . .
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ . . . . .
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ . . . . .
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ . . . . .
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلان . . . . .
100	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلان . . . . .
101	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلان . . . . .
103	4.6	جفت قطب . . . . .
105	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط . . . . .
108	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی . . . . .

113	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
113	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
115	5.2 استمراری مساوات	
117	5.3 موصل	
122	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
125	5.5 عکس کی ترکیب	
128	5.6 نیم موصل	
129	5.7 ذو برق	
134	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
138	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
138	5.10 کیپسٹر	
139	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
141	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
141	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
142	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
144	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
151	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
153	6.1 مسئلہ یکنائی	
154	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
155	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
156	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
162	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
165	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
172	6.7 عددی دہرانے کا طریقہ	
177	برقرار مقناطیسی میدان	7
177	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
180	7.2 ایمپیئر کا دوری قانون	
184	7.3 گردش	
188	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
193	سوالات	8
193	8.1 توانائی باب کے سوالات	
193	8.2 کیپسٹر	
195	8.3 لاپلاس	
195	8.4 بایوٹ-سیوارٹ	





## باب 6

### پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$(6.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

میں  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  اور حاصل جواب میں  $\mathbf{E} = -\nabla V$  پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$(6.2) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں<sup>1</sup> خاصیت کے خطے میں  $\epsilon$  اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن<sup>2</sup> مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدود میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیر  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$  کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ہوگا۔



عموماً  $\nabla \cdot \nabla^2$  کو لکھا جاتا ہے۔ اس طرح پوٹنسن مساوات کی کار تینسی شکل

$$(6.4) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی  $\rho_h = 0$  کی صورت میں مساوات 6.2

$$(6.5) \quad \nabla^2 V = 0$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس<sup>3</sup> مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جاسکتی ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ کار تینسی محدود میں لاپلاس کی مساوات

$$(6.6) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صورت رکھتی ہے۔  $\nabla^2$  کو لاپلاسی عامل<sup>4</sup> کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت  $\nabla^2 V = 0$  ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباؤ  $V_1, V_0, V_2$  وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا  $E$  معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔ اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباؤ اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاؤ دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔ اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباؤ معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاؤ یا برقی دباؤ حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتانا ضروری ہے کہ  $V = 0$  لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ حل برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباؤ پائی جائے۔ اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظر انداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباؤ کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

## 6.1 مسئلہ یکنائے

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات  $V_1$  اور  $V_2$  حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(6.7) \quad \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباؤ  $V_s$  ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 109 پر مساوات 4.80

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری  $V$  اور کسی بھی سمتیہ  $D$  کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم  $V_1 - V_2$  کو مقداری اور  $\nabla(V_1 - V_2)$  کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل پورے حجم کے لئے

$$(6.8) \quad \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] dh + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh$$

ہو گا۔ صفحہ 83 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاؤ بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی مکمل کو بند سطحی مکمل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dh = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot dS = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر  $V_{1s} = V_{2s}$  ہونے کی بنا پر  $V_{1s} - V_{2s} = 0$  ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت  $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$  ہے اور صفر کا مکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی مکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں مکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں  $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$  کا مکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہذا موجودہ مکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ مکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا مکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب  $\nabla(V_1 - V_2) = 0$  کا مطلب ہے کہ  $V_1 - V_2$  کی ڈھلان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب  $V_1 - V_2$  کی قیمت کسی بھی محدود کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر مکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$(6.9) \quad V_1 = V_2$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوٹنسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوٹنسن مساوات کے دو جوابات  $V_1$  اور  $V_2$  پوٹنسن مساوات پر پورا اتریں گے لہذا  $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$  اور  $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$  لکھے جا سکتے ہیں جن سے  $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی  $V_{1s} - V_{2s} = 0$  ہو گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوٹنسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

## 6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل  $V_1$  اور  $V_2$  حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں  $c_1$  اور  $c_2$  مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی<sup>5</sup> ہے۔

## 6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدود میں ڈھلان کی مساوات صفحہ 101 پر مساوات 4.54 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= -E_\rho \mathbf{a}_\rho - E_\phi \mathbf{a}_\phi - E_z \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (6.10)$$

لکھتے ہیں جہاں  $E = -\nabla V$  کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات صفحہ 80 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ  $E$  کے لئے

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ  $E = -\nabla V$  اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \quad (6.11)$$

لکھا جاسکتا ہے جو نلکی محدود میں لاپلاس کی مساوات ہے۔

کروی محدود میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \quad (6.12)$$

جبکہ عمومی محدود میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{k_2 k_3}{k_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{k_1 k_3}{k_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad \text{عمومی} \quad (6.13)$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

## 6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ مکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ مکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدود کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدود کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارتیسی محدود میں  $x$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے  $y$  یا  $z$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح  $x$  محدود سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔ یوں کارتیسی محدود میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور  $x$  سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہذا کارتیسی محدود میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔ نکلی محدود میں  $z$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدود میں دیکھ لیں گے لہذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدود میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ  $V$  صرف  $x$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ  $V$  صرف  $x$  محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔ چونکہ  $V$  کی قیمت صرف  $x$  پر منحصر ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ مکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \quad (6.14)$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو  $x$  کہا جائے گا۔  $A$  اور  $B$  دو درجی مکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباؤ کا دار و مدار صرف  $x$  پر ہے جبکہ  $y$  اور  $z$  کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔  $x$  کی کسی بھی قیمت پر یعنی  $x = x_0$  سطح پر  $V$  کی قیمت اٹل ہو گی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں  $x$  محدود کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباؤ اور چادروں کا  $x$  محدود پر مقام بیان کرتے ہوئے  $A$  اور  $B$  کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر  $x_1$  پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ  $V_1$  ہے اور اسی طرح دوسری چادر  $x_2$  پر ہے جبکہ اس پر برقی دباؤ  $V_2$  ہے تب

$$V_1 = Ax_1 + B$$

$$V_2 = Ax_2 + B$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$

$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان

$$(6.15) \quad V = \left( \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو  $x = 0$  اور دوسری چادر کو  $d$  پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباؤ کو صفر اور  $V_0$  کہتے تب ہمیں

$$(6.16) \quad V = \frac{V_0 x}{d}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباؤ اور کپیسٹنس حاصل کئے۔ موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ برقی دباؤ سے میدان بذریعہ  $E = -\nabla V$  اور بہاؤ بذریعہ  $D = \epsilon E$  حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاؤ کے برابر ہے۔ سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے  $C = \frac{Q}{V}$  حاصل کیا جاتا ہے۔ ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباؤ  $V$  حاصل کریں۔

• مکمل کے سرحدی شرائط سے مکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔

• برقی دباؤ سے برقی میدان اور برقی بہاؤ بذریعہ  $E = -\nabla V$  اور  $D = \epsilon E$  حاصل کریں۔

• کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاؤ کی قیمت  $D_S = D_n a_N$  حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔

• چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاؤ برابر ہوتے ہیں لہذا  $\rho_S = D_n$  ہو گا۔ مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاؤ کا چادر میں دخول ہو گا۔

• سطح پر چارج بذریعہ سطحی مکمل حاصل کریں۔

• کپیسٹنس  $C = \frac{Q}{V}$  ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہذا

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

اور

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

چونکہ بہاؤ کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہذا مثبت چادر  $x = d$  پر جبکہ منفی چادر  $x = 0$  پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$D_S = \mathbf{D} \Big|_{x=d} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\mathbf{a}_N = -\mathbf{a}_x$$

ہے لہذا برقی بہاؤ چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon \frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ  $S$  ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S dS = \int \epsilon \frac{V_0}{d} dS = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 140 پر مساوات 5.54 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو  $y$  یا  $z$  محدود پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہذا کارتیسی محدود کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نکلی محدود میں  $z$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدود کے مثال کی طرح ہی ہے لہذا ہم باری باری  $\rho$  اور  $\phi$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف  $\rho$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

یا

$$(6.17) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

صورت اختیار کر لے گی۔ یوں یا

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

ہو گا جس سے

$$(6.18) \quad \rho = \infty$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ہو گا۔ اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمیل لے کر حل کرتے ہیں۔ پہلی بار تکمیل لیتے ہوئے

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

یا

$$dV = A \frac{d\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$V = A \ln \rho + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہم قوہ سطحیں نکلی شکل کے ہیں۔ یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباؤ دیتی ہے۔ ہم محوری تار کے بیرونی تار  $\rho = b$  کو برقی زمین اور اندرونی تار  $\rho = a$  کو  $V_0$  برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے

$$(6.20) \quad V = V_0 \frac{\ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباؤ صفر ہی ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔ یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$E = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} a \rho$$

اور

$$D_n = D \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$



حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 141 پر مساوات 5.55 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو  $\rho$  سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب  $\rho \neq 0$  ہو۔ یاد رہے کہ  $\rho = 0$  کی صورت میں  $\frac{\rho}{\rho} = \frac{0}{0}$  ہو گا جو غیر معین<sup>6</sup> ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر  $\rho \neq 0$  ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \quad \rho \neq 0 \quad (6.22)$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباؤ نکلی محدود کے متغیر  $\phi$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل  $\rho = \infty$  حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی  $\rho = 0$  کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو  $\rho^2$  سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\rho = 0$  کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباؤ ممکن نہ ہو گا۔ یوں  $\rho = 0$  قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں  $\phi = 0$  کو برقی زمین جبکہ  $\phi = \phi_0$  پر  $V_0$  برقی دباؤ کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \quad \rho \neq 0 \quad (6.23)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$E = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کمپیشننس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.4: کروی محدب میں  $\phi$  کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے  $r$  اور بعد میں  $\theta$  کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباؤ کی مساوات

$$(6.24) \quad V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

اور پتیشنس کی مساوات

$$(6.25) \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

حاصل کریں جہاں  $r = b$  پر برقی زمین اور  $r = a$  پر  $V_0$  برقی دباؤ ہے اور  $b > a$  ہے۔

مثال 6.5: کروی محدب میں  $\theta$  کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.26) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر  $r \neq 0$  اور  $\sin \theta \neq 0$  ہوں تب اس مساوات کو  $r^2 \sin \theta$  سے ضرب دیتے ہوئے

$$(6.27) \quad \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔  $\sin \theta$  اس صورت صفر کے برابر ہوگا جب  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  ہوں۔ اس کے پہلی بار تکمیل سے

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

یا

$$dV = \frac{A d\theta}{\sin \theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمیل سے

$$(6.28) \quad V = A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} + B = A \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم توہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔ اگر  $\theta = \frac{\pi}{2}$  پر  $V = 0$  اور  $\theta = \theta_0$  پر  $V = V_0$  ہوں جہاں  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$  ہے تب ہمیں

$$(6.29) \quad V = V_0 \frac{\ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کیپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔ پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$(6.30) \quad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \mathbf{a}_\theta$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_s = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r \sin \theta_0 \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin \theta_0 \ln \left( \tan \frac{\theta_0}{2} \right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta_0 d\phi dr}{r}$$

ہو گا۔ مکمل میں رداس کا محدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی محدود حاصل ہوتی ہے جس سے محدود کیپیسٹنس حاصل ہو گا۔ حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہذا ہم رداس کے حدود  $r_1$  تا  $r_2$  لیتے ہیں۔ ایسی صورت میں

$$(6.31) \quad C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln \left( \cot \frac{\theta_0}{2} \right)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے محدود سطح سے شروع کیا تھا لہذا چارج کی مساوات بھی صرف محدود سطح کے لئے درست ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کیپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی ناکہ بالکل درست قیمت۔

## 6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال

پوٹنسن مساوات تب حل کیا جاسکتا ہے جب  $\rho_h$  معلوم ہو۔ حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباؤ وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں  $\rho_h$  ہی درکار ہوتی ہے۔ ہم پوٹنسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں  $\rho_h$  معلوم ہو۔

سیلیکان<sup>7</sup> کی پتہری میں  $p$  اور  $n$  اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے  $p$  اور  $n$  سیلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ ایک ہی سیلیکان پتہری پر آپس میں جڑے ہوئے  $p$  اور  $n$  خطے ڈایوڈ<sup>8</sup> کو جنم دیتے ہیں۔  $x$  محدود پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ تصور کریں کہ  $x < 0$  خطہ  $p$  اور  $x > 0$  خطہ  $n$

قسم کا ہے۔ مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ  $p$  یا  $n$  خطہ از خود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ  $p$  خطے میں آزاد خول<sup>9</sup> اور  $n$  خطے میں آزاد الیکٹران<sup>10</sup> پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف  $p$  جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف  $n$  جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحے ہی آزاد خول  $p$  سے  $n$  جانب اور آزاد الیکٹران  $n$  سے  $p$  جانب نفوذ<sup>11</sup> کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چارج کے اس حرکت سے جلد  $p$  اور  $n$  کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی  $x > 0$  جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔ یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح  $E = -Ea_x$  پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان  $E$  چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے  $E$  بڑھتی رہے گی۔ آخر کار  $E$  کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ انہیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں  $p$  اور  $n$  خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$(6.32) \quad \rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت  $\rho_0$  ہے جو  $x = 0.881a$  پر پائی جاتی ہے۔ انہیں اس چارج کثافت کے لئے پونسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی بار مکمل لیتے ہوئے

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل کے مستقل  $A$  کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جاسکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا  $x \rightarrow \pm\infty$  پر  $E_x \rightarrow 0$  ہو گا جس سے  $A = 0$  حاصل ہوتا ہے لہذا

$$(6.33) \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

کے برابر ہے۔ دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے  $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.34) \quad V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left( \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب جہی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباؤ دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباؤ  $V_0$  کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.35) \quad V_0 = V_{x \rightarrow +\infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کل مثبت چارج

$$(6.36) \quad Q = S \int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش  $S^{12}$  ہے۔ مساوات 6.35 سے  $a$  کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$(6.37) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت  $C = \frac{Q}{V_0}$  لکھ کر نہیں حاصل کی جاسکتی البتہ

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

سے

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہوگی۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ  $S$  اور چادروں کے مابین فاصلہ  $2\pi a$  ہو۔ یوں برقی دباؤ سے کپیسٹنس کے گٹھنے کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ برقی دباؤ بڑھانے سے  $a$  بڑھتا ہے۔

## 6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدود کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباؤ کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔ اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباؤ ایک سے زیادہ محدود کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ تصور کریں کہ  $V$  کارٹیزی محدود کے  $x$  اور  $y$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$(6.38) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔ تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل  $X(x)$  اور  $Y(y)$  کے حاصل ضرب  $X(x)Y(y)$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جہاں  $X$  تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف  $x$  اور  $Y$  تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف  $y$  ہو۔ یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ ایسا ہی ایک سادہ حل  $V = x + y$  اور دوسرا نسبتاً مشکل حل  $V = G(x) + H(y)$  ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ ہم  $V = x + y$  کو  $V = V_1 + V_2$  لکھ سکتے ہیں جہاں

$$V_1 = X_1(x)Y_1(y) = 1x$$

$$V_2 = X_2(x)Y_2(y) = 1y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $Y_1(y) = 1$  اور  $X_2(x) = 1$  کے برابر ہیں۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم  $x$  کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح  $y$  کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ  $x + y$  بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے  $V = x + y$  جواب کو ہر گز رد نہیں کیا۔ ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ  $V = G(x) + H(y)$  جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔ اگر  $V = XY$  مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$(6.39) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف  $x$  متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف  $y$  متغیرہ پایا جاتا ہے۔ یوں  $x$  تبدیل کرنے سے صرف بائیں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔ اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو  $x$  تبدیل کرنے سے بائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی  $y$  تبدیل کرنے سے دائیں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو  $m^2$  لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔  $m^2$  کو علیحدگی مستقل<sup>13</sup> کہا جاتا ہے۔

$$(6.40) \quad \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = m^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -m^2$$

یا

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔ اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔ یوں  $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$  ہو گا لہذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔  $\omega$  کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$(6.42) \quad X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$(6.43) \quad Y(y) = C \cos my + D \sin my$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$(6.44) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔ البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ  $X(x)$  تفاعل کو طاقتی سلسلے<sup>14</sup>

$$(6.45) \quad X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں  $a_0, a_1, a_2$  وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

اور

$$(6.46) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x^1 + 4 \times 3a_4x^2 + \dots = m^2 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)$$

جہاں ہم  $m^2 X$  کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔ یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت  $x$  کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب  $x$  کے برابر طاقت کے ضربیہ<sup>15</sup> عین برابر ہوں یعنی جب

$$2 \times 1a_2 = m^2 a_0$$

$$3 \times 2a_3 = m^2 a_1$$

$$4 \times 3a_4 = m^2 a_2$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔ جفت ضربیہ کو  $a_0$  کی صورت میں یوں

$$a_2 = \frac{m^2}{2 \times 1} a_0$$

$$a_4 = \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left( \frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left( \frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0$$

$$a_6 = \frac{m^6}{6!} a_0$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ جفت})$$

لکھا جا سکتا ہے۔ طاق ضربیہ کو  $a_1$  کی صورت میں

$$a_3 = \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}$$

$$a_5 = \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \quad (n \text{ طاق})$$

لکھی جا سکتی ہے۔ انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{n \text{ جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{n \text{ طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$



یا

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقی سلسلہ دراصل  $\cosh mx$  کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \dots$$

اور دوسرا طاقی سلسلہ  $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \dots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $a_0$  اور  $\frac{a_1}{m}$  یا ان کی جگہ لکھے گئے  $A$  اور  $B$  کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$  اور  $\sinh mx$  کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$

$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں  $A'$  اور  $B'$  دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقی سلسلہ  $\cos my$  اور دوسرا  $\sin my$  کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$(6.47) \quad Y = C \cos my + D \sin my$$

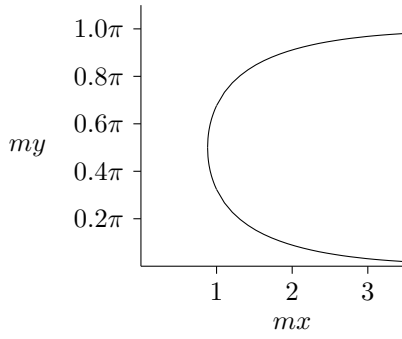
لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$(6.48) \quad V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx) (C \cos my + D \sin my)$$

یا

$$(6.49) \quad V = XY = (A' e^{mx} + B' e^{-mx}) (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 6.1:  $my = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sinh mx} \right)$  کی مساوات۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ان میں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔ پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں  $A$  اور  $B$  دونوں یا  $C$  اور  $D$  دونوں صفر کے برابر ہیں۔ ایسی صورت میں  $V = 0$  حاصل ہو گا جو برقی دباؤ کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً برقی دباؤ کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ ان میں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ  $A$  اور  $C$  صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \quad (6.50)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $BD = V_0$  لکھا گیا ہے۔ چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2} (e^{mx} - e^{-mx})$$

ہے لہذا  $x = 0$  پر  $\sinh mx = 0$  ہو گا جبکہ بڑھتے  $x$  کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً  $e^{mx}$  کے تعلق سے بڑھتی ہے۔  $\sin my$  کی قیمت  $y = 0$ ،  $y = \frac{2\pi}{m}$ ،  $y = \frac{\pi}{m}$  وغیرہ پر صفر کے برابر ہوگی۔ یوں صفر برقی دباؤ کے ہم قوہ سطحیں  $x = 0$  اور  $y = \frac{n\pi}{m}$  پر رکھی جاسکتی ہیں جہاں  $n = 0, 1, \dots$  ہو سکتا ہے۔ ہم ایسی ہم قوہ سطحیں  $x = 0$  اور  $y = \frac{\pi}{m}$  پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ آخر میں  $V_0$  ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں  $V = V_0$  پر کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

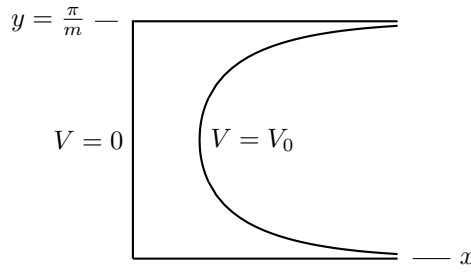
یا

$$my = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh mx}$$

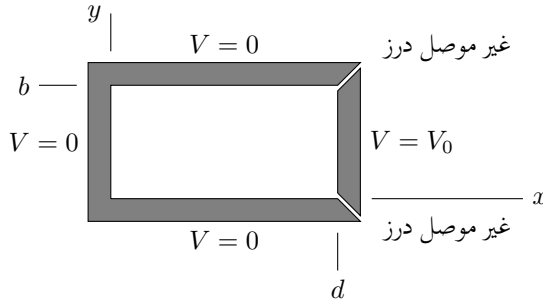
$x$  کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے  $y$  کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصول ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔ یہ سطحیں  $z$  محور کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباؤ مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباؤ پیدا کرے گی۔ حقیقت میں عموماً موصول ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباؤ درکار ہو گا۔ ان میں ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.2: ہم قوه سطحیں اور ان پر برقی دباؤ۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباؤ دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں  $z$  سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباؤ حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔  $x=0$ ،  $y=0$  اور  $y=b$  پر برقی دباؤ صفر ہے جبکہ  $x=d$  پر برقی دباؤ  $V_0$  ہے۔ دونوں ہم قوه سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباؤ مختلف ہو سکتے ہیں۔ انس درز کے اثر کو نظر انداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباؤ صرف  $x$  اور  $y$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں  $x=0$  پر برقی دباؤ صفر پر کرنے سے

$$0 = (A \cosh 0 + B \sinh 0) (C \cos my + D \sin my)$$

$$0 = A (C \cos my + D \sin my)$$

حاصل ہوتا ہے۔  $y$  کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔  $y=0$  پر صفر برقی دباؤ پر کرنے سے

$$0 = B \sinh mx (C \cos 0 + D \sin 0)$$

$$0 = BC \sinh mx$$

لکھا جائے گا جو  $x$  کی ہر قیمت کے لئے صرف  $BC=0$  کی صورت میں درست ہو گا۔ اب چونکہ  $A=0$  ہے لہذا  $B$  صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباؤ صفر حاصل ہو گا۔ یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباؤ کے بارے میں علم حاصل ہو۔ اس لئے  $C=0$  کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD \sinh mx \sin my$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس مساوات میں  $y = b$  پر صفر برقی دباؤ پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD \sinh mx \sin mb$$

ہم  $B$  یا  $D$  کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں  $V = 0$  جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔ یہ مساوات  $x$  کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔ اس طرح  $m = \frac{n\pi}{b}$  لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$(6.52) \quad V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں  $BD$  کو  $V_1$  لکھا گیا ہے۔ مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباؤ کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔ البتہ  $x = d$  پر  $V_0$  برقی دباؤ کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔ گھبرائیں نہیں۔ ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$(6.53) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \dots)$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں  $n$  کی ہر قیمت پر منفرد  $V_1$  کو  $V_n$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔  $n$  اور  $V_n$  کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ  $x = d$  پر  $V_0$  برقی دباؤ کے شرط کو پورا کیا جائے۔ اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$(6.54) \quad V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریر تسلسل<sup>16</sup> ہے جس کے مستقل باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں  $0 < y < b$  کے خطے سے غرض ہے لہذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباؤ سے کوئی غرض نہیں۔ ایسی صورت میں ہم فوریر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم  $0 < y < b$  کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بھایا آدھے میعاد  $b < y < 2b$  پر برقی دباؤ کو  $-V_0$  تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 & (0 < y < b) \\ V &= -V_0 & (b < y < 2b) \end{aligned}$$

اسی صورت میں فوریر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b} \left[ \int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right]$$

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$c_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب چونکہ  $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$  کے برابر ہے لہذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$(6.55) \quad V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباؤ  $V(x, y)$  حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباؤ رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہوگی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں  $d = b$  اور  $V_0 = 90 \text{ V}$  ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کریں۔

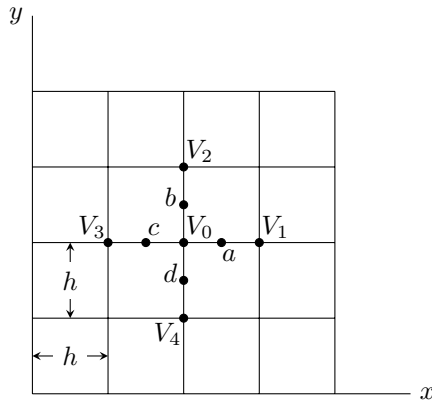
حل: ڈبے کا وسط  $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$  ہے۔ مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \times 90}{\pi} \left( \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\sinh \pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sinh \frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \frac{\sinh \frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4 \times 90}{\pi} (0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5 \text{ V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرائے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔ کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرائے<sup>17</sup> کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔ انہیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ قریبی نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف  $x$  اور  $y$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے  $h$  چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباؤ  $V_0, V_1, V_2, V_3$  اور  $V_4$  ہیں۔ اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب  $\nabla \cdot D = 0$  اور  $\nabla \cdot E = 0$  ہوں گے جس سے دو محدود

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$  اور  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$  ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ  $a$  اور نقطہ  $c$  پر  $\frac{\partial V}{\partial x}$  اور  $\frac{\partial V}{\partial y}$  کی قیمتیں تقریباً

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

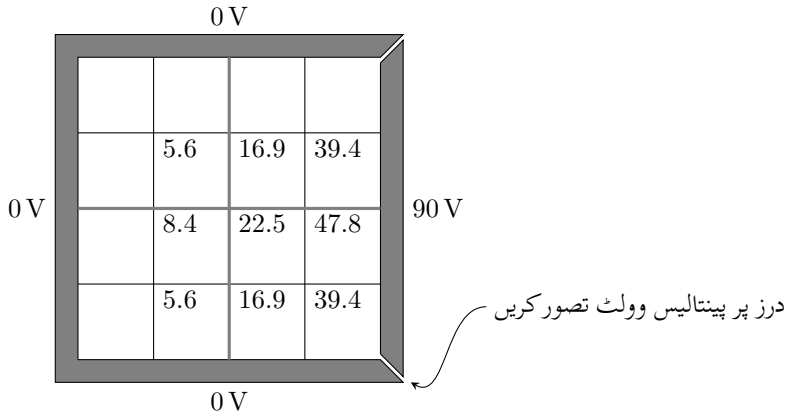
$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔ یوں ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 \doteq \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_b - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباؤ ہو گا۔

بھی لکھ سکتے ہیں۔ ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$(6.56) \quad V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

حاصل ہوتا ہے۔  $h$  لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔  $h$  کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباؤ اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباؤ کا اوسط ہوتا ہے۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباؤ حاصل کی جاتی ہے حتیٰ کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جاسکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ اس کے چار اطراف صفر برقی دباؤ پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔ اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جاسکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔ اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباؤ حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباؤ صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباؤ زیر استعمال آئے گی۔ اب دو کونوں پر صفر برقی دباؤ ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔ درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45 + 45 + 0 + 0}{4} = 22.5 \text{ V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

0 V				90 V
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6	
	8.7 8.8 8.8	22.3 22.4 22.4	47.5 47.4 47.4	
	6.3 6.4 6.4	16.7 16.8 16.8	38.7 38.6 38.6	
0 V				



اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 0 + 16.9 + 47.8}{4} = 38.7 \text{ V}$$

ہو جائے گی۔ اوپر اور نیچے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نئی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 38.7 + 22.5 + 38.7}{4} = 47.5 \text{ V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} = 16.7 \text{ V}$$

ہو گی جو قطار کے نیچے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5 + 16.7 + 8.4 + 16.7}{4} = 22.3 \text{ V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباؤ 22.4 V حاصل ہوا ہے۔ مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباؤ حتمی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔ یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کئے۔ اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔ اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباؤ حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ با آسانی سمجھا جاسکے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چنے سے حاصل ہوتا ہے تاکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔ دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔ یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

## باب 7

### برقرار مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

#### 7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ کا قانون<sup>2</sup>

$$(7.1) \quad dH = \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت  $H$  کی اکائی ایمپیر فی میٹر ( $\frac{A}{m}$ ) حاصل ہوتی ہے۔ آئیں اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون ہر ایک تار کے انتہائی چھوٹے حصے  $dL$  جس میں  $I$  برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ  $P$  پر پیدا سمتی برقی میدان  $H$  دیتا ہے۔ نقطہ  $P$  ہر ایک تار کے چھوٹی لمبائی سے  $R$  فاصلے پر ہے۔ ہر ایک تار سے مراد ایسی ٹھوس ٹکلی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس اتنا کم کر دیا جائے کہ یہ صفر کے قریب تر ہو۔  $dL$  کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ  $I dL$  منبع مقناطیسی میدان ہے۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب ہر ایک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب  $R$  اور  $dL$  کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ  $R$  کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل  $\frac{1}{4\pi}$  ہے۔

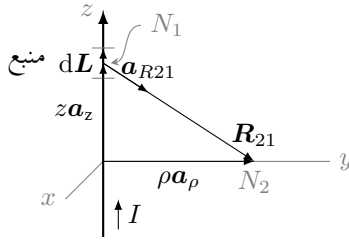
بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

$$dE_2 = \frac{dQ_1 a_{R21}}{4\pi \epsilon_0 R_{21}^2}$$

<sup>1</sup>Biot-Savart law

<sup>2</sup>یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

ان مساوات میں زیر نوشت میں 12 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہے ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی روتب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی مکمل شکل

$$(7.2) \quad H = \oint \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

یہ تجرباتی طور ثابت کی جاسکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.2 لکھی جاسکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.2 میں مکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جاسکتا ہے جس کا بند مکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہذا مساوات 7.2 میں  $\nabla G$  کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔  $G$  کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔ اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احقمانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو سطحی کثافت برقی رو  $K$  یا کثافت برقی رو  $J$  کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(7.3) \quad I dL = K dS = J dv$$

لکھا جائے گا۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$(7.4) \quad H = \int_S \frac{K \times a_R dS}{4\pi R^2}$$

یا

$$(7.5) \quad H = \int_h \frac{J \times a_R dh}{4\pi R^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.1 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ  $N$  پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو  $N$  کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ  $N$  پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ  $N_1$  پر تار کے چھوٹے حصے  $dL$  کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ  $N_2$  پر مقناطیسی میدان لکھی جاسکتی ہے۔ چونکہ

$$\mathbf{R}_{21} = \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$R_{21} = |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ نکلی محدود میں چھوٹی لمبائی

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں  $d\rho = 0$  اور  $d\phi = 0$  ہیں لہذا  $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$  لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$dH_2 = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے مکمل سے حاصل ہوگا جہاں مکمل  $-\infty$  تا  $+\infty$  حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$  جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$  لکھے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات میں مکمل کے اندر  $\mathbf{a}_\phi$  پر نظر رکھنا ہوگا۔ اگرچہ  $\mathbf{a}_\phi$  اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا مکمل کا متغیر یعنی  $z$  تبدیل کرنے سے  $\mathbf{a}_\phi$  کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\mathbf{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $z$  تبدیل کرنے سے  $\mathbf{a}_\phi$  پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہذا  $\mathbf{a}_\phi$  کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$H_2 = \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \left. \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

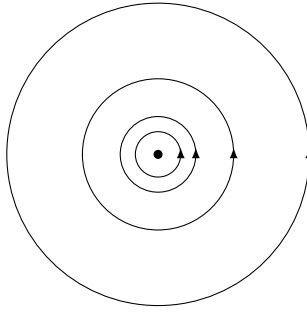
(7.6)

سے

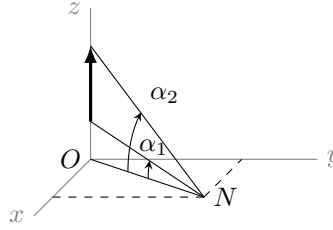
$$H_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

(7.7)

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.2 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگلی برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نانو  $z$  اور نائی زاویہ  $\phi$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔



شکل 7.2: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.3: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

اگر شکل 7.1 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.3 میں مکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$(7.8) \quad H = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) a_\phi$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.3 میں  $\alpha_1$  اور  $\alpha_2$  کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا  $xy$  سطح یعنی  $z = 0$  سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں  $\alpha_1$  کی قیمت منفی ہوگی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور  $\alpha_2$  کے لئے بھی درست ہے۔

## 7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے متشکل چارج سے پیدا ہونے والے برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متشکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون<sup>3</sup> کہتے ہیں۔ اس قانون کو بائوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آگے جا کر حاصل کیا گیا ہے۔ فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔ اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔ یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ  $H$  کا لکیری بند مکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہوگا یعنی

$$(7.9) \quad \oint H \cdot dL = I$$

لکیری بند مکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ  $H$  کے لکیری مکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں  $dL$  میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر  $H$  کی قیمت استعمال کرتے ہوئے  $H \cdot dL$  حاصل کر کے تمام  $H \cdot dL$  کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ مقناطیسی شدت  $H$  کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔ یوں کسی ایک نقطے پر  $H \cdot dL$  کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے  $H \cdot dL$  سے مختلف ہو گی۔ ایمپیسر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ ایک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ  $H \cdot dL$  کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔ اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔ یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ ایمپیسر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جاسکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل ایک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

آئیں شکل 7.1 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیسر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.9 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتے ہیں کہ اس پر  $H$  اور  $dL$  یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا  $H$  کی قیمت قطعی اور اس کی سمت  $dL$  کے متوازی ہو۔ پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور  $\cos 90 = 0$  ہوتا ہے لہذا  $H \cdot dL$  صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور  $\cos 0 = 1$  ہوتا ہے لہذا  $H \cdot dL$  کو  $H dL$  لکھا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے  $H$  کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں راہ کے اس راستے پر مکمل کی قیمت  $HL$  کے برابر ہو گی جہاں  $L$  راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ  $\phi$  پر اور نا ہی محدود  $z$  پر منحصر ہے۔ تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف  $\rho$  پر منحصر ہو سکتی ہے۔ اسی طرح باؤٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت  $\alpha_\phi$  سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف  $H_\phi$  جزو پایا جائے گا۔ یوں اگر  $\rho$  تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ  $H$  کی حتمی قیمت  $H_\phi$  تبدیل نہیں ہو گی۔ ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر  $dL = \rho d\phi \alpha_\phi$  اور  $H_\phi \alpha_\phi$  آپس میں متوازی ہوں گے لہذا ایمپیسر کے دوری قانون سے

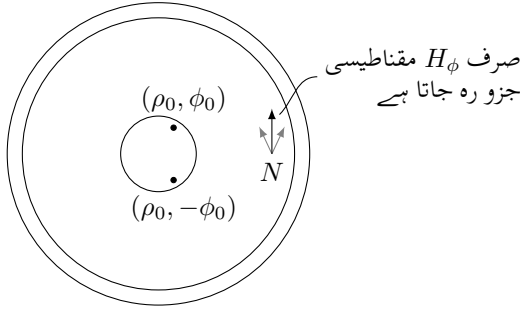
$$\oint H \cdot dL = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

یا

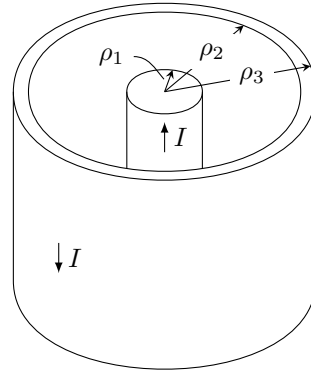
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیسر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.4 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ  $z$  محدود پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں  $I$  اور اس کے بیرونی سطح میں  $-I$  برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ انہیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ  $N$  پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ  $N$  کو کارٹیزی محدود کے  $x$  محور پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں  $H_z$  جزو



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویاتی جزو رہ جاتا ہے۔



(ل) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.4: ہم محوری تار۔

نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو  $(\rho_0, \phi_0)$  پر پایا جاتا ہو  $N$  پر  $\Delta H_\rho$  اور  $\Delta H_\phi$  اجزاء پیدا کرے گا۔ اسی طرح  $(\rho_0, -\phi_0)$  پر پتی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویاتی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویاتی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہذا  $N$  پر صرف زاویاتی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس  $\rho$  اندرونی تار کے رداس  $\rho_1$  سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس  $\rho_2$  سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش  $\pi\rho_1^2$  ہے لہذا اس میں کثافت برقی رو  $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$  ہوگی۔ اگر  $\rho$  کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس  $\rho_1$  سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

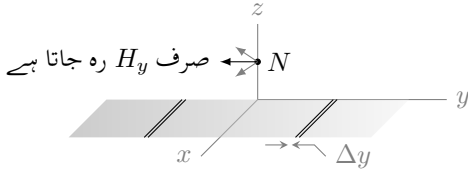
$$I_{\text{گھیرے}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2} \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

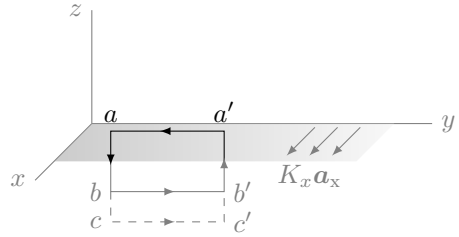
$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \quad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر  $\rho$  کو بیرونی تار کے بیرونی رداس  $\rho_3$  سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے  $+I$  اور بیرونی تار کے  $-I$  کو گھیرے گی لہذا یہ کل  $I - I = 0$  برقی رو کو گھیرے گا لہذا

$$H_\phi = 0 \quad (\rho_3 < \rho)$$



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے  $H_z$  اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے  $H_y$  اجزاء جمع ہوتے ہیں۔



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

شکل 7.5: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب  $\rho$  بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گہرے}} = I - \left( \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I = \left( \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

برقی رو گہرے گی لہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left( \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \quad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو  $I$  اور بیرونی تار کے برقی رو  $I$  دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.5-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں  $z = 0$  لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر  $K_x a_x$  سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ  $N$  پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے  $x = +\infty$  سرے سے  $x = -\infty$  سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں  $z = +\infty$  اور  $z = -\infty$  پر پائی جاتی ہیں۔ اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ  $N$  پر نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

موصل سطح کو  $\Delta y$  چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل 7.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار  $K_x \Delta y a_x$  برقی رو گزارے گی۔ لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو  $H_x$  جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر  $N$  کے ایک جانب فرضی تار کا  $H_z$  جزو سطح پر  $N$  کے دوسری جانب فرضی تار کے  $H_z$  جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے  $H_y$  اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف  $H_y$  جزو ممکن ہے۔

شکل 7.5-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ  $a'b'bb'$  دکھائی گئی ہے جس کے اطراف  $y_1$  اور  $2z_1$  لمبائی رکھتے ہیں۔ اس راہ کے  $z_1$  حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا مکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔ راہ کے  $y_1$  اطراف سطح سے دونوں جانب  $z_1$  فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بائوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو



موصول سطح کے اوپر جانب  $-H_{ya}a_y$  جبکہ اس کے نیچے جانب  $+H_{yb}a_y$  مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ  $Ky_1$  برقی رو کو گھیرتی ہے لہذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$(7.10) \quad H_{ya} + H_{yb} = K_x$$

ہو گا۔ اب اگر موصول سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا  $y_1$  حصہ قدر دور کرتے ہوئے  $z_2$  فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ  $H_{yb}$  اور  $H_{yc}$  عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہرگز نہیں ہے۔ اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت  $z$  پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی  $z$  پر پائے جاتے ہوں۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی  $|H_{ya}| = |H_{yb}|$  ہو گا۔ اس طرح مساوات 7.10 سے  $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$  لکھتے ہوئے

$$H_y = -\frac{1}{2}K_x a_x \quad (z > 0)$$

$$H_y = +\frac{1}{2}K_x a_x \quad (z < 0)$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$(7.11) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $a_N$  موصول سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر  $z = -h$  پر دوسری لامحدود موصول سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو  $-K_x a_x$  ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

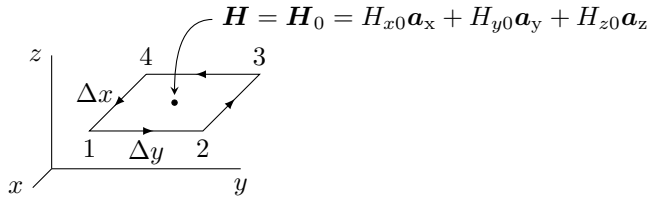
$$(7.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N & (-h < z < 0) \\ \mathbf{H} &= 0 & (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned}$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

### 7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش کی مساوات حاصل کریں گے۔



شکل 7.6: گردش کی تعریف۔

کارٹیزیی محدود میں ہم کسی نقطے  $N$  پر  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.6 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ  $\Delta x \Delta y$  کو گھیرتی ہے۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ  $(x_0, y_0, z_0)$  پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{a}_x + H_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{a}_y + H_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{a}_z \\ &= H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y + H_{z0}\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا مکمل رقبہ  $\Delta x \Delta y$  سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔ آئیں اس مکمل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔ یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر مکمل تقریباً

$$(7.13) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{12} = H_{y12}\Delta y$$

کے برابر ہو گا جہاں  $\Delta y$  لمبائی پر مقناطیسی شدت کے قیمت میں تبدیلی کو رد کرتے ہوئے اسے پوری لمبائی پر  $H_{y12}$  کے برابر لیا گیا۔ ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل<sup>5</sup> بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں  $\frac{\partial f}{\partial x}$  اور دیگر تفرق نقطہ  $x$  پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اگر اس میں  $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$  پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ  $(x_0, y_0, z_0)$  پر تفاعل  $H_y$  کی قیمت  $H_y(x_0, y_0, z_0)$  ہو تب نقطہ  $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$  پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں  $\frac{\partial H_y}{\partial x}$  کو نقطہ  $(x_0, y_0, z_0)$  پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$(7.14) \quad H_{y12} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

مساوات 7.13 کو

$$(7.15) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{12} \doteq \left( H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.14 کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں  $x$  کے ساتھ  $H_y$  تبدیل ہونے کی شرح  $\frac{\partial H_y}{\partial x}$  ہے۔ یوں اگر  $x$  میں  $\Delta x$  تبدیلی پیدا ہو تب  $H_y$  میں تبدیلی تقریباً  $\frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$  ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً  $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$  ہوگی۔ اسی طرح اگر  $x$  میں  $\frac{\Delta x}{2}$  تبدیلی پیدا ہو تب  $H_y$  میں تبدیلی تقریباً  $\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$  ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً  $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$  ہوگی۔ اب رقبے کے وسط سے  $\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}$  فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیان نقطہ ہے لہذا یہاں

$$(7.16) \quad H_{y12} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

ہوگا جو عین مساوات 7.14 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(7.17) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{23} = H_{x23}(-\Delta x) \doteq - \left( H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(7.18) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{34} = H_{34}(-\Delta y) \doteq - \left( H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

اور 4 تا 1 پر

$$(7.19) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{41} = H_{x41}\Delta x \doteq \left( H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.15، مساوات 7.17، مساوات 7.18 اور مساوات 7.19 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا مکمل

$$(7.20) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$$

ہو تب اس رقبے سے  $J_z \Delta x \Delta y$  برقی رو گزرے گی۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا مکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہوگا جسے

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ  $\Delta x \rightarrow 0$  اور  $\Delta y \rightarrow 0$  کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت  $\approx$  کی جگہ بالکل برابر  $=$  کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$(7.21) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدود کے بقایا دو محدود کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$(7.22) \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

اور

$$(7.23) \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.22 میں چھوٹے رقبے کے اطراف  $\Delta y$  اور  $\Delta z$  ہیں جس سے  $J_x \Delta y \Delta z$  برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.23 میں چھوٹے رقبے کے اطراف  $\Delta x$  اور  $\Delta z$  ہیں جس سے  $J_y \Delta z \Delta x$  برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.21، مساوات 7.22 اور مساوات 7.23 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند مکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند مکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش<sup>6</sup> کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند مکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند مکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند مکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدود پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$H_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں  $H$  کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں  $\Delta S_n$  وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد  $H$  کا بند مکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ  $\Delta S_n$  لکھتے ہوئے زیر نوشت میں  $n$  اسی حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدود میں گردش  $H$  کے  $x, y$  اور  $z$  اجزاء مساوات 7.22، مساوات 7.23 اور مساوات 7.21 بالترتیب دیتے ہیں لہذا

$$(7.24) \quad H_{\text{گردش}} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت<sup>7</sup> کی شکل میں

$$(7.25) \quad H_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 77 پر مساوات 3.29 نیبلا  $\nabla$  کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$(7.26) \quad H_{\text{گردش}} = \nabla \times \mathbf{H}$$

لکھی جاسکتی ہے۔

### 7.3.1 نلکی محدود میں گردش

نلکی محدود میں  $J_z$  کثافت برقی رو کے عمودی سیدھی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں۔ ایسے رقبے کے اطراف  $\Delta\rho$  اور  $\rho\Delta\phi$  ہوں گے۔ اس رقبے کو وسط میں

$$\mathbf{H}_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + H_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + H_{z 0} \mathbf{a}_z$$

ہوگا۔ کارٹیزی محدود میں رقبے کے وسط سے  $+\frac{\Delta x}{2}$  اور  $-\frac{\Delta x}{2}$  فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محدود میں رقبے کے وسط سے  $+\frac{\Delta\rho}{2}$  فاصلے پر طرف کی لمبائی  $\Delta\phi$  ( $\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}$ ) جبکہ وسط سے  $-\frac{\Delta\rho}{2}$  فاصلے پر طرف کی لمبائی  $\Delta\phi$  ( $\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2}$ ) ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 12} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 34} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2}$$

ہوگی جہاں  $\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}$  چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر مکمل

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{12} &\doteq \left( H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} \right) \left( \rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\phi \\ &\doteq \left[ H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left( \frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \right] \Delta\phi \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{34} &\doteq \left( H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} \right) \left[ - \left( \rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2} \right) \Delta\phi \right] \\ &\doteq \left[ -H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta\rho}{2} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left( \frac{\Delta\rho}{2} \right)^2 \right] \Delta\phi \end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے  $+\frac{\Delta\phi}{2}$  یا  $-\frac{\Delta\phi}{2}$  پر اطراف  $\Delta\rho$  لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 23} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 41} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر مکمل

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{23} \doteq \left( H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta\phi}{2} \right) (-\Delta\rho)$$

اور

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{41} \doteq \left( H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta\phi}{2} \right) \Delta\rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا مکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$(7.27) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta\rho \Delta\phi$$

ہوگا۔ اس چھوٹے رقبے سے  $J_z \rho_0 \Delta\rho \Delta\phi$  برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left( H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta\rho \Delta\phi \doteq J_z \rho_0 \Delta\rho \Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta\rho \Delta\phi} \doteq \left( \frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $\Delta\rho$  اور  $\Delta\phi$  کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہوگا اور تقریباً برابر کی علامت  $\doteq$  کی جگہ برابر کی علامت  $=$  استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$(7.28) \quad \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta\rho \Delta\phi} = \left( \frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) = J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، انہیں مساوات 7.27 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ اگر ہم کسی نقطے کے  $-\frac{\Delta\phi}{2}$  سے نقطے کے  $+\frac{\Delta\phi}{2}$  تک حرکت کریں تو ہم  $\rho \Delta\phi$  فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر مکمل تقریباً

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{\phi} \rho \Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔ اس مکمل کو تفاعل  $g$  تصور کرتے ہوئے یعنی  $g = H_\phi \rho \Delta \phi$  لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں  $\frac{\Delta \rho}{2} +$  حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(H \cdot dL) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں  $\frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho}$  کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس  $\rho_0$  کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس مکمل کی قیمت  $H_{\phi 0} \rho_0 \Delta \phi$  کے برابر ہے لہذا وسط سے  $\frac{\Delta \rho}{2}$  فاصلے پر مکمل کی قیمت

$$(7.29) \quad H \cdot dL_{12} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

ہو گی۔ اسی طرح اگر ہم کسی نقطے کے  $\frac{\Delta \phi}{2} +$  سے نقطے کے  $\frac{\Delta \phi}{2} -$  تک حرکت کریں تو اس راہ پر مکمل

$$H \cdot dL = H_\phi (-\rho \Delta \phi)$$

کے برابر ہو گا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے  $\frac{\Delta \rho}{2} -$  فاصلے پر یہی مکمل

$$(7.30) \quad \begin{aligned} H \cdot dL_{34} &= -H_\phi \rho \Delta \phi - \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \left( -\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ &= -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح کسی بھی نقطے پر  $\frac{\Delta \rho}{2} -$  تا  $\frac{\Delta \rho}{2} +$  حرکت کرتے ہوئے مکمل کی قیمت  $H_\rho \Delta \rho$  ہو گی۔ اس نقطے سے  $\frac{\Delta \phi}{2} -$  پر مکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

$$\Delta(H \cdot dL) = \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \left( -\frac{\Delta \phi}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے اور یوں مکمل کی نئی قیمت

$$H \cdot dL = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہو گی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر مکمل دیتا ہے یعنی

$$(7.31) \quad H \cdot dL_{41} = H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

اسی طرح کسی بھی نقطے پر  $\frac{\Delta \rho}{2} +$  تا  $\frac{\Delta \rho}{2} -$  حرکت کرتے ہوئے مکمل کی قیمت

$$H \cdot dL = H_\rho (-\Delta \rho)$$

ہو گی۔ اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے  $\frac{\Delta \phi}{2} +$  پر یہی مکمل

$$(7.32) \quad H \cdot dL_{23} = -H_\rho \Delta \rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.29، مساوات 7.30، مساوات 7.31 اور مساوات 7.32 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا مکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial \rho} \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial \phi} \Delta\phi \\ (7.33) \qquad &= \left[ \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi \end{aligned}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[ H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.27 ہی ہے۔ یاد رہے کہ  $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho}$  کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔ یوں رداس  $\rho_0$  اور مقناطیسی شدت  $H_{\phi 0}$  کے برابر ہوں گے۔

آئیں اب نکلی محدود میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔





## باب 8

### سوالات

8.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 8.1:

سوال 8.2: برقی میدان  $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$  میں  $-0.1 \text{ C}$  کے چارج کو نقطہ  $(1, 0, 2)$  سے نقطہ  $(0, 0, 2)$  اور یہاں سے نقطہ  $(0, 1, 2)$  لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات:  $0.2 \text{ J}$ ،  $-0.2 \text{ J}$  اور  $0 \text{ J}$

سوال 8.3: مثال 4.7 کے طرز پر  $L$  لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس  $a$  جبکہ بیرونی تار کا رداس  $b$  ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ جواب}$$

8.2 کیپسٹر

سوال 8.4:  $N(0, 0, 2)$  سے گزرتی  $y$  محدد کے متوازی کیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے  $M(5, 3, 1)$  پر  $D$  حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \text{ جواب}$$

سوال 8.5: لامحدود موصل زمینی سطح  $z = 0$  رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \text{ جواب:}$$

سوال 8.6:  $N(0, 0, 2)$  سے گزرتی  $y$  محور کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ  $z = 0$  پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے  $M(5, 3, 0)$  مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{nC}{m^2}$$

سوال 8.7: مشق 5.3 میں  $300 K$  درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی  $1 \times 10^7$  سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت  $15 \times 10^{28}$  ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{S}{m}$$

سوال 8.8: صفحہ 127 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح  $z = 0$  میں  $(0, 0, z)$  پر پائے جانے والے نقطہ چارج  $Q$  سے پیدا سطحی چارج کثافت  $\rho_S$  حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی کثافت سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -Q$$

سوال 8.9: صفحہ 118 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپئیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

$$\text{جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔}$$

$$\text{سوال 8.10: مساوات 5.71 میں } \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b} \text{ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔}$$

سوال 8.11: پانچ میٹر رداس کی موصل نکلی کا محور برقی زمین سے تیرا میٹر پر ہے۔ نکلی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا  $\rho_L$  حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نکلی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نکلی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 12 m, 3.46 \frac{nC}{m}, 13.4 m, 18 m, 1.65 \frac{pF}{m^2} \text{ اور } 0.73 \frac{pF}{m^2}$$

## 8.3 لاپلاس

سوال 8.12: صفحہ 155 پر مساوات 6.13 عمومی محدود میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 8.13: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کیپیٹنس حاصل کریں۔

سوال 8.14: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 8.15: مساوات 6.28 کے مکمل کو حل کریں۔

سوال 8.16: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 8.17: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 8.18: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

سوال 8.19: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباؤ چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ ڈبے کے وسط میں برقی دباؤ کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

## 8.4 بایوٹ-سیوارٹ

سوال 8.20: مساوات 7.8 حاصل کریں۔

سوال 8.21: شکل 7.5 کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.22: مساوات 7.16 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.6 میں 3 تا 4 پر  $H_{y34}$  حاصل کریں۔

جواب: شرح  $\frac{\partial H_y}{\partial x}$  ہے۔ یوں  $-\frac{\Delta x}{2}$  تبدیلی سے  $\frac{\partial H_y}{\partial x}(-\frac{\Delta x}{2})$  تبدیلی رونما ہوگی اور یوں نئی قیمت  $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$  ہوگی۔



جدول 8.1:  $\sigma$ 

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
$7 \times 10^4$	گرفتار	$6.17 \times 10^7$	چاندی
1200	سلیکان	$5.80 \times 10^7$	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	$4.10 \times 10^7$	سونا
5	سمندری پانی	$3.82 \times 10^7$	المونیم
$10^{-2}$	چھونا پتھر	$1.82 \times 10^7$	ٹنگسٹن
$5 \times 10^{-3}$	چکنی مٹی	$1.67 \times 10^7$	جست
$10^{-3}$	تازہ پانی	$1.50 \times 10^7$	پیتل
$10^{-4}$	تقطیر شدہ پانی	$1.45 \times 10^7$	نکل
$10^{-5}$	ریتیلی مٹی	$1.03 \times 10^7$	لوہا
$10^{-8}$	سنگ مرمر	$0.70 \times 10^7$	قلعی
$10^{-9}$	بیک لائٹ	$0.60 \times 10^7$	کاربن سٹیل
$10^{-10}$	چینی مٹی	$0.227 \times 10^7$	مینگنیز
$2 \times 10^{-13}$	بیرا	$0.22 \times 10^7$	جرمنیم
$10^{-16}$	پولیسٹرین پلاسٹک	$0.11 \times 10^7$	سٹینلس سٹیل
$10^{-17}$	کوارٹس	$0.10 \times 10^7$	نائیکروم

جدول 8.2:  $\sigma/\omega\epsilon$  and  $\epsilon_R$ 

$\sigma/\omega\epsilon$	$\epsilon_R$	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عمیر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرن
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا $\text{SiO}_2$
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	تقطیر شدہ پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 8.3:  $\mu_R$ 

$\mu_R$	چيز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پيرافين
0.999 999 5	لڪڙي
0.999 999 81	چاندي
1.000 000 65	المونيم
1.000 000 79	بيريليم
50	نڪل
60	ڏهلوان لوها
300	مشتين سٽيل
1000	فيرائٽ (عمومي قيمت)
2500	پرم بهرت (permalloy)
3000	ٽرانسفارمر پٿري
3500	سيلڪان لوها
4000	خالص لوها
20 000	ميو ميٽل (mumetal)
30 000	سنڊسٽ (sendust)
100 000	سوپرم بهرت (supermalloy)

جدول 8.4: اهم مستقل

قيمت	علامت	چيز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	اليڪٽران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	اليڪٽران ڪميت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	$\epsilon_0$	برقي مستقل (خالي خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	$\mu_0$	مقناطيسي مستقل (خالي خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالي خلاء)





- divergence theorem, 83
- donor, 128
- doping, 128
- dot product, 10
- drift velocity, 117
- easy axis, 132
- electric constant, 38
  - relative, 133
  - vacuum, 133
- electric field intensity, 42
- electric flux, 65
- electrons
  - free, 163
- electrostatic, 122
- equipotential surface, 93
- Farad, 139
- Faraday shield, 60
- ferroelectric, 132
- Fourier series, 171
- fringing, 140
- Gauss's law, 66
- gaussian surface, 67
- gradient, 100
- gravitational constant, 37
- gravity, 41
- ground, 92
- group, 128
- head to tail rule, 2
- hole, 128
- holes
  - free, 163
- homogeneous, 151
- image, 126
- isotropic, 132
- kinetic energy, 108
- Laplace equation, 152
- Laplacian operator, 152
- latitude, 28
- linear, 41, 154
- longitude, 28
- acceptor, 128
- Ampere's circuital law, 180
- anisotropic, 132
- area
  - cross sectional, 164
- associative law, 2
- Biot-Savart law, 177
- bound charge, 130
- capacitance, 139
- capacitor, 51
  - mica, 140
- Cartesian coordinates, 1
- coaxial cable, 71
- coefficient, 167
- commutative law, 2
- conductivity, 118
- cone, 28
- conservative field, 86, 98
- continuity equation, 116
- continuous, 135
- coordinates, 3
  - generalized, 80
- coplanar, 3
- copper, 118
- cross product, 14
- curl, 184, 187
- cylindrical
  - coordinates, 17
- density
  - current, 114
  - electric flux, 65
  - line charge, 44
  - surface charge, 49
- deposit, 140
- determinant, 187
- dielectric, 130
- diffusion, 163
- diode, 162
- dipole, 24, 103
- dipole moment, 104
- discontinuous, 135, 136
- displacement vector, 13
- divergence, 76

- آزاد الیکٹران، 163  
 آسان سمت، 132  
 آسان محور، 132
- استمراری مساوات، 116  
 اوبم، 120  
 قانون، 120  
 ایمپیئر کا دوری قانون، 180
- بایوٹ-سیوارٹ، 177  
 برقی بہاؤ، 65  
 برقی چال، 132  
 برقی دباؤ، 91  
 برقی رو  
 کثافت، 114  
 برقی زمین، 92  
 برقی سکون، 122  
 برقی مستقل، 38  
 خالی خلاء، 133  
 برقی میدان کی شدت، 42  
 بقائی میدان، 98  
 بلا جوڑ، 135  
 بند تکملہ، 67  
 بے تار، 38
- پناہ دار تار، 72  
 پوٹنسن مساوات، 151  
 پھولنا، 140  
 پھیلاؤ، 76
- تانبا، 118  
 تجاذب، 37  
 تجاذبی مستقل، 37  
 تجاذبی میدان، 41  
 تقطیب، 130  
 تناوی مستقل، 133
- ٹیلر تسلسل، 74، 185
- جزوی برقی مستقل، 133  
 جفت قطب، 24، 103، 129  
 معیار اثر، 104  
 نقطہ، 104  
 جماعت، 128  
 جوڑ دار، 135، 136
- چارچ  
 مقید، 130  
 چڑھا، 140
- حرکت پذیری  
 الیکٹران، 117  
 حرکی توانائی، 108  
 حوالہ  
 نقطہ، 92
- Maxwell equation, 76  
 mobility  
 electron, 117
- nabla, 77  
 non homogeneous, 133  
 non polar, 129  
 numerical iteration, 172
- ohm, 120  
 Ohm's law, 118  
 ohm's law, 120
- parallelogram law, 2  
 periodic table, 128  
 permeability, 38  
 permittivity, 38  
 relative, 133  
 point charge, 37  
 Poisson equation, 151  
 polar, 129  
 polarization, 130  
 potential energy, 86  
 power series, 166  
 Pythagoras theorem, 7
- quadrant, 89
- reference point, 92  
 resistance, 120  
 right hand rule, 14
- scalar, 1  
 scalar product, 10  
 separation constant, 165  
 shielded, 72  
 silicon, 162  
 static electric field, 98  
 step, 135  
 streamlines, 105  
 susceptibility, 133
- Taylor series, 74, 185  
 tensor, 133  
 time constant, 121
- undefined, 160  
 uniform, 86
- vector, 1  
 vector area, 9  
 vector product, 14  
 volt, 91  
 voltage, 91
- wireless, 38  
 work, 85

قانون تلازمی، 2	خط
قائم میدان، 86	سمت بہاؤ، 105
قبول کنندہ، 128	طول بلد، 28
قطبی، 129	عرض بلد، 28
کارتیسی محدد، 1	خطی، 41، 154
کام، 85	خول، 128
کپیسٹر، 51	آزاد، 163
ایرق، 140	دائیں ہاتھ
کپیسٹنس، 139	قانون، 14
کثافت	دوری جدول، 128
برقی بہاؤ، 65	ڈائیوڈ، 162
سطحی چارج، 49	ڈھلان، 100
لکیری چارج، 44	ذو برق، 130
کرونیکر ڈیلٹا، 10	ذو برقی مستقل، 133
کشش	ربیع اول، 89
زمین، 41	رفتار بہاؤ، 117
کولومب کا قانون، 37	رقبہ
گاؤس سطح، 67	عمودی تراش، 164
گاؤس کا قانون، 66	ساکن برقی میدان، 98
گردش، 184، 187	سر سے دُم جوڑنا، 2
لاپلاس مساوات، 152	سلیکان، 162
لاپلاسی عامل، 152	سمتی رقبہ، 9
متوازی الاضلاع، 2	سمتی ضرب، 14
محدد، 3	سمتیہ، 1
عمومی، 80	سیڑھی نما، 135
مخروط، 28	صلیبی ضرب، 14
مخفقی توانائی، 86	ضربییہ، 167
مزاحمت، 120	طاقتی سلسلہ، 166
مسئلہ پھیلاؤ، 83	عددی دہرانا، 172
مقام تعین کنندہ	عطا کنندہ، 128
سمتیہ، 13	عکس، 126
مقداری، 1	عکس کی ترکیب، 126
مقداری ضرب، 10	علیحدگی مستقل، 165
مقناطیسی مستقل، 38	غیر سمتی ضرب، 10
ملاوٹ، 128	غیر قطبی، 129
موصلیت	غیر معین، 160
مستقل، 118	فوریر تسلسل، 171
میکس ویل مساوات، 76	فیثاغورث، 7
ناہم سموت، 132	فیراڈ، 139
نرم محور، 132	فیراڈے حفاظتی سطح، 60
نفوذ، 163	قالب
نقطہ چارج، 37	حتمی قیمت، 187
نقطہ ضرب، 10	قانون
نلکی	اوپم، 118
محدد، 17	قانون تبادُل، 2
نیپلا، 77	
وقتی مستقل، 121	
وولٹ، 91	
ہم سطحی، 3	

ہم سمتی، 132

ہم قوہ سطح، 93

ہم محوری تار، 71

یکساں، 86

غیر، 133

ہر طرف، 151