

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیاں	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.4	نقطہ چارج کی برقی دباؤ
93	4.5	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
97	4.6	برقی دباؤ کی ڈھلان
99	4.6.1	نلکی محدود میں ڈھلان
100	4.6.2	کروی محدود میں ڈھلان
102	4.7	جفت قطب
104	4.7.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
107	4.8	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی
132	5.8	توانائی باب کے سوالات
132	5.9	کپیسٹر

113	5.1	برقی رو اور کثافت برقی رو
115	5.2	استمراری مساوات
117	5.3	موصل
121	5.4	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط
124	5.5	عکس کی ترکیب
127	5.6	نیم موصل
128	5.7	ذو برق
132	5.8	توانائی باب کے سوالات
132	5.9	کپیسٹر

4.9 توانائی باب کے سوالات

سوال 4.1:

سوال 4.2: برقی میدان $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میں -0.1 C کے چارج کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0.2 J اور -0.2 J

سوال 4.3: مثال 4.7 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں محففی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad \text{جواب:}$$

4.10 کیپیسٹر

سوال 4.4: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدود کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5, 3, 1)$ پر D حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \quad \text{جواب:}$$

سوال 4.5: لا محدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \quad \text{جواب:}$$

سوال 4.6: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدود کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لا محدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5, 3, 0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$-0.1097 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \quad \text{جواب:}$$

سوال 4.7: مشق 5.3 میں 300 K درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی $10^7 \times$ سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$800 \frac{\text{S}}{\text{m}} \quad \text{جواب:}$$

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات¹ حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے جوڑ پر سرحدی شرائط² حاصل کرتے ہوئے عکس³ کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق⁴ کی تقطیب⁵ پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

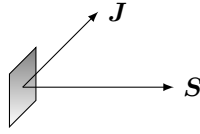
جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاؤ کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیر کہتے ہیں۔ یوں

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترجیحی ہوگی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

continuity equation¹
boundary conditions²
images³
dielectric⁴
polarization⁵



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو⁶ سے مراد برقی رونی اکائی مربع سطح $(\frac{A}{m^2})$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$(5.2) \quad \Delta I = J_n \Delta S$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$(5.3) \quad \Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو مکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$(5.4) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $S = 2a_x$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\mathbf{J} = 1a_x + 1a_y$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں \mathbf{J} مستقل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 5.4 میں مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے اور یوں اس مکمل سے

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = 2A$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

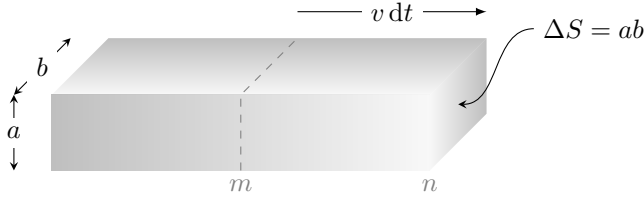
اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\mathbf{S} = -2a_x$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = -2A$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{S} کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں dt دورانیہ میں چارج $v dt$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv dt$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv dt$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv dt}{dt} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$(5.5) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزرنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نہ ہی اسے ختم کیا جاسکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کی انہیں ختم کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جاسکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب 5C اور دوسری جانب 3C- چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل 2C چارج ہے۔ اگر ہم 3C کو 3C- کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل 2C ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم 5 m^3 ہے میں حجمی کثافت چارج 3 C/m^3 ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج 1 C/m^3 رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15 \text{ C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_2 = 1 \times 5 = 5 \text{ C}$ رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے 10 C چارج خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5 \text{ A}$ ہے۔ اسی کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5 - 15)}{2} = 5 \text{ A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

جسم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمیل سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(5.6) \quad I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں جسم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمیل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q جسم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات⁷ کی مکمل شکل ہے۔ آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاؤ کو صفحہ 82 پر مساوات 3.42 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمیل کو حجمی تکمیل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh$$

اگر جسم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{d}{dt} \int_h \rho_h dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $\frac{d}{dt}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات تکمیل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور جسم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{d(uv)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہوگی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہوگا اور یوں $\frac{d}{dt}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے مکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم dh کے لئے مکمل

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

یہ ہے جس سے

$$(5.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاؤ کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاؤ فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ انہیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان E میں الیکٹران پر قوت

$$(5.8) \quad F = -eE$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہوگی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہوگی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ E کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار v_d حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔ v_d کو رفتار بہا⁸ کہتے ہیں۔ رفتار بہا کا دار و مدار E کی قیمت پر ہے لہذا ہم

$$(5.9) \quad v_d = -\mu_e E$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری⁹ کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ v_d کو میٹر فی سیکنڈ اور E کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہذا حرکت پذیری کو $\frac{m^2}{Vs}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 115 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$(5.10) \quad \mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$(5.11) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$(5.12) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

لکھا گیا ہے۔ σ کو موصلیت کا مستقل¹⁰ کہتے ہیں اور اس کی اکائی¹¹ $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ میٹر فی سیمینز ہے۔ سیمینز کو بڑے S سے جبکہ سینڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 129 پر جدول 5.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تا بنے¹² کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت 8940 kg/m^3 اور ایٹمی کمیت 63.5 g ہیں۔ اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تا بنے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہا حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول¹³ ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں 8940 kg ہیں لہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہذا 0.1 nm اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

ہوگی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ کو $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہا

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران \mathbf{E} کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار¹⁴ سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً 300 K پر تا بنے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ہوتی ہے۔

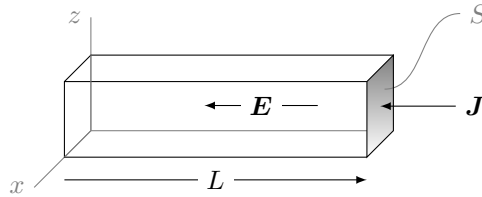
¹⁰ conductivity

¹¹ یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمینز (1816-1892) کے نام پر جنہوں نے موجودہ سیمینز کمپنی کا بنیاد رکھا۔

¹² copper

¹³ mole

¹⁴ کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے نکھوں کا جھنڈ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے حرارتی توانائی کی وجہ سے سمت تبدیل کرتے ہوئے حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$ ، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار 15 میں 11 الیکٹران ہو گا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔ سلاخ کو ay سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $E = -Eay$ اور کثافت برقی رو $J = -Jay$ پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباؤ کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = - \int_0^L E \cdot dL = \int_0^L Eay \cdot dyay = \int_0^L E dy = E \int_0^L dy = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $S = -Say$ لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔ برقی رو

$$I = \int_S J \cdot dS = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

(5.13)

¹⁵ چونہیے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

(5.14)

$$V = IR$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.13 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت¹⁶ دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم¹⁷ ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔ اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہوگا اور ایسی صورت میں مساوات 5.13 استعمال نہیں کیا جاسکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.14 کی مدد سے برقی دباؤنی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$(5.15) \quad R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

سے حاصل ہوگی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباؤ والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی مکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000 \text{ m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61 \Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ (الف) برقی میدان کی شدت $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں 2 A برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ، $3.82 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ اور $2.55 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

5.4. موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان E پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون 18 کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جاسکتا ہے۔ انہیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے متوازی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ سطح کے متوازی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہوگی۔ یوں ہم

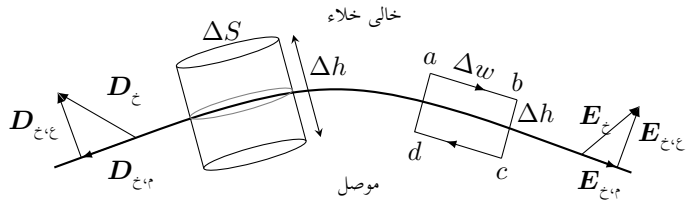
$$E_{\text{متوازی}} = 0 \quad (5.16)$$

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاؤ کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہذا سطح پر چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D \Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_s \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_s \quad (5.17)$$

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء کی جانب E اور D دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں E کو E_m اور E_c کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے متوازی اور عمودی E کے اجزاء ہیں۔ اسی طرح D کو بھی متوازی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر E اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ انہیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں E کی قیمت حاصل کریں۔ ہم E کے مجموعے E_m اور E_c حاصل کریں گے۔ پہلے E_m حاصل کرتے ہیں۔



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط.

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے متوازی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہے جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہے۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہیں۔ صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.25

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

کو $abcd$ پر استعمال کرتے ہیں۔ اس مکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{x,m} \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{b,x}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_{b,x} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ c سے d تک مکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $E = 0$ ہے۔

$$\int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{a,x}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{a,x} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{x,m} \Delta w + (E_{a,x} - E_{b,x}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہوگا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہوگا۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{x,m} \Delta w = 0$$

یعنی

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب $E_{\text{ع,ع}}$ حاصل کریں۔ $E_{\text{ع,ع}}$ کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

کی مدد سے $E_{\text{ع,ع}}$ کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر بیلن دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی Δh اور سیدھی سطحوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاؤ کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نکلی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نچلا سرا}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{اوپر سرا}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب بیلن کی نکلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہذا

$$\int_{\text{نچلا سرا}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.18 کے تحت سرحد پر خلاء میں متوازی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہو گا۔ بیلن کے اوپر والے سرے پر

$$\int_{\text{اوپر سرا}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{\text{ع,ع}} \Delta S$$

ہو گا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{\text{ع,ع}} \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{\text{ع,ع}} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہذا یوں

$$(5.19) \quad D_{\text{ع,ع}} = \epsilon_0 E_{\text{ع,ع}} = \rho_S$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.18 اور مساوات 5.19 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔ موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے متوازی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔ یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا مکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ ہو گا۔ یاد رہے کہ برقی میدان کا مکمل برقی دباؤ دیتا ہے جو مکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جاسکتا ہے جہاں $E_{\text{متوازی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے مکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $E = 210a_x - 350a_y + 99a_z \frac{V}{m}$ کے برابر ہے۔ اس نقطے پر متوازی E ، عمودی E اور ρ_s حاصل کریں۔

جوابات: $0, 420 \frac{V}{m}$ اور $3.71 \frac{nC}{m^2}$

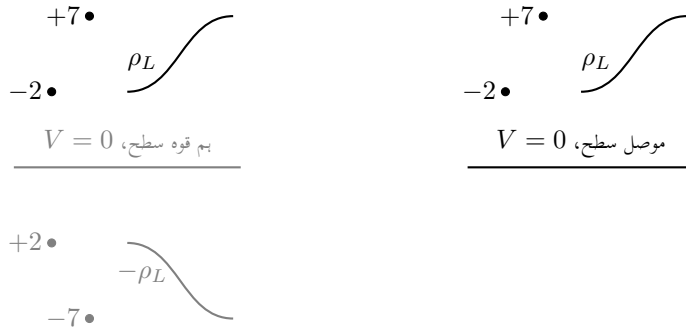
5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 105 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب کے درمیان سے گزرتی لا محدود سطح، برقی زمین ہوتی ہے اور برقی میدان اس سطح پر عمودی ہوتا ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لا محدود موصل سطح رکھی جاسکتی ہے۔ ایسی موصل سطح پر برقی دباؤ صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔ موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔ یوں اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تو تب بھی سطح کے اوپر جانب میدان عمودی ہی ہو گا اور سطح صفر وولٹ پر ہی ہو گی۔ موصل سطح کے اوپر جانب میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔ اسی طرح سطح کے اوپر جانب سے جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔ فرض کریں کہ لا محدود موصل سطح یا برقی زمین کے اوپر مثبت نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں سطح کے اوپر جانب برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہذا ہم برقی زمین کے چٹلی جانب عین مثبت چارج کے نیچے اور اتنے ہی فاصلے پر برابر مگر منفی چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔ یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس¹⁹ کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لا محدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جاسکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ لہذا لا محدود برقی زمین یا لا محدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لا محدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لا محدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

شکل 5.5 میں لا محدود موصل سطح کے اوپر جانب مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لا محدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ $M(2, 4, 3)$ پر E حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5 \mu\text{C}$ کا عکس $-5 \mu\text{C}$ لا محدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5, 7, -2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب N سے M تک سمتیہ $R_{MN} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $R_{MP} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$ ہے۔ یوں $5 \mu\text{C}$ نقطہ M پر

$$E_+ = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔ اسی طرح $-5 \mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$E_- = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔ چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں نقطہ M پر کل میدان

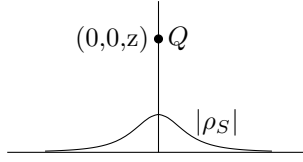
$$E_{\text{کل}} = E_+ + E_- = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔ موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔ موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔ یوں موصل کی سطح پر

$$D = \epsilon_0 E = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13 \times 10^{-9}a_z$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔ یوں مساوات 5.19 کے تحت سطح پر

$$\rho_s = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu C$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2, 4, 3)$ پر میدان E_+ ہوتا۔ لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی E ہو جاتی ہے۔ درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z = 0$ میں Q پر $(0, 0, z)$ نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0, 0, -z)$ پر Q - چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho, \phi, 0)$ پر Q اور Q - چارج

$$E_+ = \frac{Q(\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_- = \frac{-Q(\rho a_\rho + z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔ $D = \epsilon_0 E$ استعمال کرتے ہوئے میدان کی کل کثافت

$$D = \frac{-2Qz a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمت $-a_z$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$(5.20) \quad \rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{C}{m^2}$$

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلیکان اور جرمنیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ²⁰ سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول²¹ کے چوتھے جماعت²² سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ²³ عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھادی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ²⁴ عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول²⁵ کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاؤ $v_d = \mu_h E$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول E کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہذا اس کے رفتار بہاؤ کی سمت E کی سمت ہی ہوگی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$(5.21) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سیلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{m}{V_s}$ جبکہ خول کی رفتار بہاؤ $0.025 \frac{m}{V_s}$ ہے۔ جرمنیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36 \frac{m}{V_s}$ اور $0.17 \frac{m}{V_s}$ ہیں۔ خالص سیلیکان اور خالص جرمنیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348 \frac{mS}{m}$ اور $2 \frac{S}{m}$

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباؤ لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔ آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

ذو برقی ایسے اشیاء کو کہتے ہیں جن میں مثبت اور منفی چارج قریب قریب رہتے ہوئے علیحدہ نہیں ہوتے۔ بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو قطبی²⁶ اشیاء کہتے ہیں۔ مثبت اور منفی چارج کی ہر جوڑی جفت قطب ہوتا ہے۔ قطبی اشیاء پر بیرونی میدان E لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو غیر قطبی²⁷ کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔ مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔

دونوں اقسام کے اشیاء میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو بندھا چارج²⁸ کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

جدول 5.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 5.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عمیر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	تقطیر شدہ پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 5.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر مرکز
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 5.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار خالی خلاء میں

5.8 توانائی باب کے سوالات

سوال 5.1:

سوال 5.2: برقی میدان $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میں -0.1 C کے چارج کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0.2 J اور -0.2 J

سوال 5.3: مثال 4.7 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں محففی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

$$W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \text{ جواب}$$

5.9 کپیسٹر

سوال 5.4: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدود کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5, 3, 1)$ پر D حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26} \text{ جواب}$$

سوال 5.5: لا محدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884} \text{ جواب}$$

سوال 5.6: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدود کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لا محدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5, 3, 0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$-0.1097 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \text{ جواب}$$

سوال 5.7: مشق 5.3 میں 300 K درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 15×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$800 \frac{\text{S}}{\text{m}} \text{ جواب}$$