

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیاں	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدد	1.3
5	اکائی سمتیاں	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدد	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیاں کا کارتیسی اکائی سمتیاں کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیاں کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدد	
37	2 کولومب کا قانون	
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
52	2.5 چارج بردار حجم	
53	2.6 مزید مثال	

3.1	ساکن چارج	57
3.2	فیراڈے کا تجربہ	57
3.3	گاؤں کا قانون	58
3.4	گاؤں کے قانون کا استعمال	60
3.4.1	نقطہ چارج	60
3.4.2	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	62
3.5	بہم محوری تار	62
3.6	یکساں چارج بردار بموار لامحدود سطح	64
3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤں کے قانون کا اطلاق	65
3.8	پھیلاو	67
3.9	نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات	69
3.10	پھیلاو کی عمومی مساوات	71
3.11	مسئلہ پھیلاو	73

4.1	توانائی اور کام	75
4.2	لکیری تکملہ	76
4.3	برقی دباو	81
4.4	نقطہ چارج کی برقی دباو	82
4.5	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو	83
4.6	برقی دباو کی ڈھلان	87
4.6.1	نلکی محدد میں ڈھلان	89
4.6.2	کروی محدد میں ڈھلان	90
4.7	جفت قطب	92
4.7	توانائی باب کے سوالات	105

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

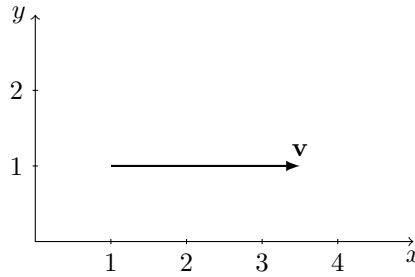
وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری¹ کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت 12°C ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت 30°C ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T ، وقت t ، کارتیسی محدود² کے متغیرات x ، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ³ کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہوگی۔ قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع سمتیہ کی مثالیں ہیں۔

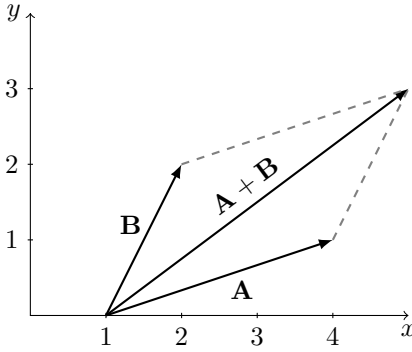
اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a, b, α, \dots یا بڑے حروف مثلاً A, B, Ψ, \dots سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو F جبکہ سمتی رفتار کو v سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو \vec{F} یا \vec{F} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|F|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت F کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

شکل 1.1 میں نقطہ $(1, 1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ v سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1, 1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں 1 cm کی لمبائی $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

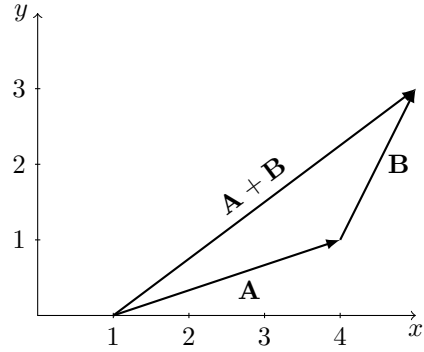
¹ scalar
² Cartesian coordinates
³ vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) سر کے ساتھ ڈم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترتیبی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے ڈم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ پہلی سمتیہ کی ڈم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔ اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں A کے سر کے ساتھ B کی ڈم ملائی گئی ہے۔ دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو سر سے ڈم جوڑنا⁴ کہتے ہیں۔ شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے ڈم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع⁵ سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $A + B = B + A$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل⁶ پر پورا اترتا ہے۔ اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی⁷

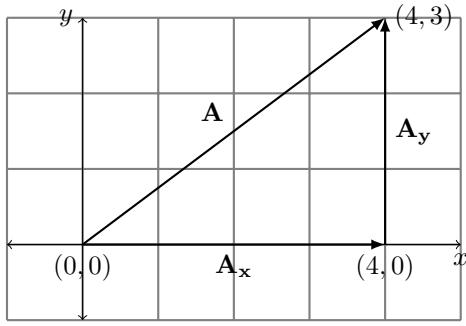
$$(1.1) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

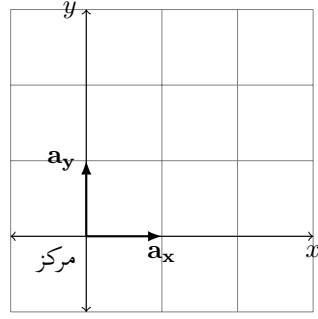
سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہم $A - B$ کو $A + (-B)$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-B$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ B کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔ یوں $A - B$ حاصل کرنے کی خاطر B کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو A کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ A کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس سمتیہ A کو منفی مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی |k| گنا ہو جاتی ہے۔

head to tail rule⁴
parallelogram law⁵
commutative law⁶
associative law⁷



(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔



(ا) اکائی سمتیہ

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $A = B$ تب ہو گا جب $A - B = 0$ ہو۔

ہم سمتی میدان کے متغیرات کو آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔ یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر ہم سمتی میدان کی بات نہ کر رہے ہوں تب ہم مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لے سکتے ہیں۔ یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نیچے سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

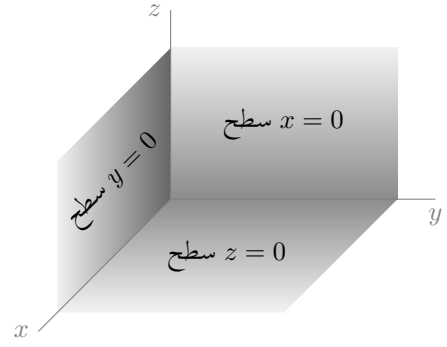
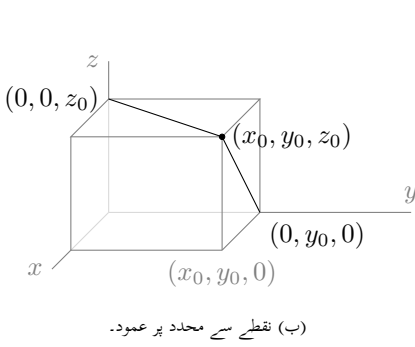
1.3 کارتیسی محدود

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدود⁸ کہلاتا ہے۔ سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدود سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ خلاء تین طرفہ⁹ ہے لہذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدود سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدود پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ اکائی سمتیہ a_x کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ a_y کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔ شکل-ب میں A دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں A کو A_x اور A_y کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

$$A = A_x + A_y \quad (1.2)$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی¹⁰ دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدود اور دوسری لکیر کو y محدود تصور کیا جا سکتا ہے۔ زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔ x محدود کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدود کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدود کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدود کے مرکز سے پہلے x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدود کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدود کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدود کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جاسکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدود پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدود پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدود پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدود اور z محدود پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدود پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدود کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدود کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

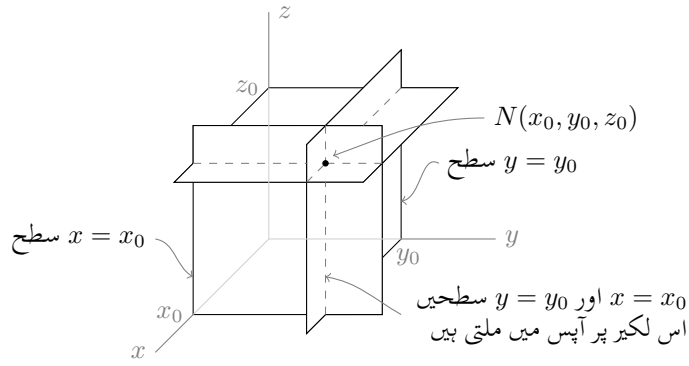
نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جاسکتا ہے جسے کارتیسی محدود میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x = x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

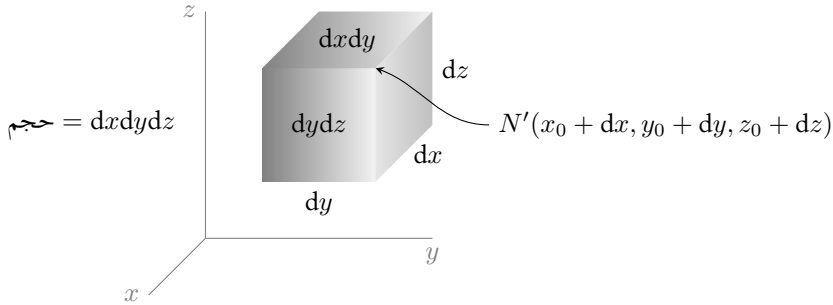
لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحیں آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحیں ایک نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھونگیں۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدود میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحیہ مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + dx$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + dy$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + dz$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحیہ ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف dx ، dy اور dz ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $dx dy$ ہے۔ اسی طرح اس کی چھلی سطح کا رقبہ بھی $dx dy$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $dy dz$ رقبہ رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبہ $dx dz$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $dx dy dz$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ہے۔

کار تیزی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

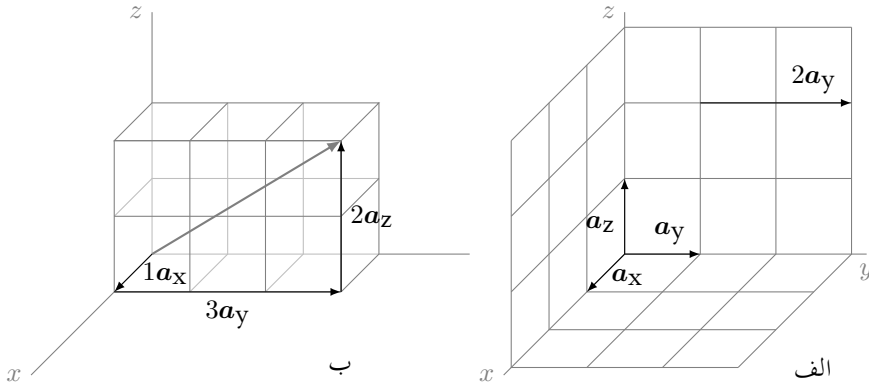
(1.3)

$$dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

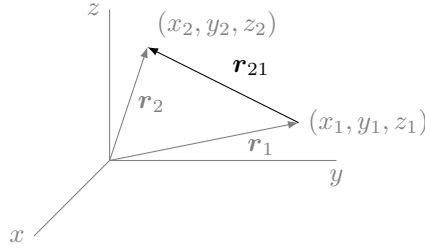
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتیہ لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کار تیزی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کار تیزی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کار تیزی نظام کے تین اکائی سمتیات a_x ، a_y اور a_z لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



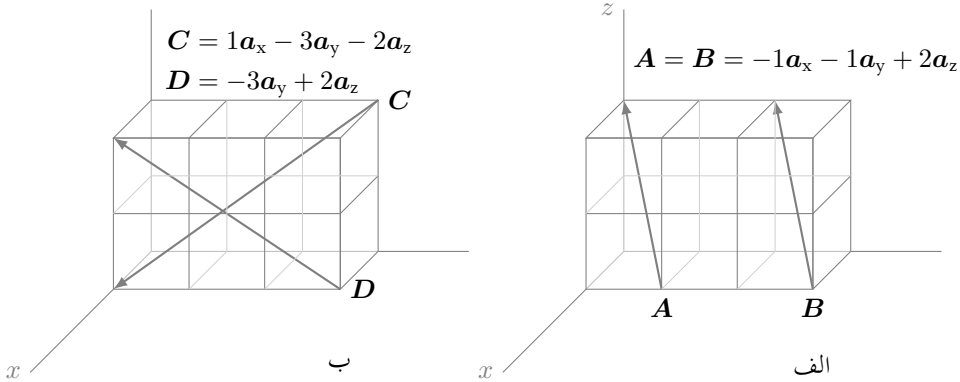
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



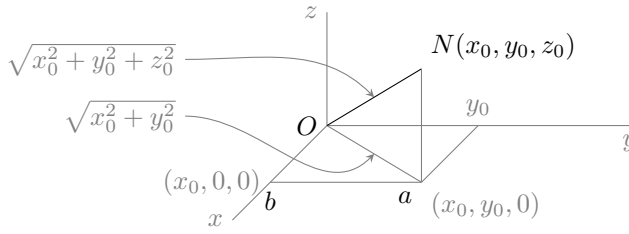
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ a_x کی سمت x محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح a_y کی سمت y محدود کے بڑھتے جانب کو اور a_z کی سمت z محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0, 1, 2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ a_y کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدود کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جاسکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $r_1 = x_1 a_x + y_1 a_y + z_1 a_z$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $r_2 = x_2 a_x + y_2 a_y + z_2 a_z$ دکھائی گئی ہے جس کی ڈم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے ڈم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $r_2 = r_{21} + r_1$ لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(1.4) \quad \begin{aligned} r_{21} &= r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ r_{21} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی ڈم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور ڈم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔ یوں سمتیہ r_{21} کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)a_x$ ، $(y_2 - y_1)a_y$ اور $(z_2 - z_1)a_z$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

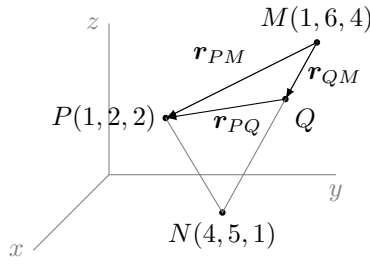
شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے یعنی $1a_x + 3a_y + 2a_z$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی ڈم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات A اور B دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہذا $A = B = -1a_x - 1a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ شکل 1.9-ب میں C کی ڈم سے a_x جانب ایک قدم اور یہاں سے $-a_y$ جانب تین قدم اور آخر کار a_z جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $C = 1a_x - 3a_y - 2a_z$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح D کی ڈم سے $-a_y$ جانب تین قدم اور پھر a_z جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $D = -3a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ سمتیہ D کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث¹¹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ a سے x محور پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تینوں O میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔ یوں فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تینوں ON میں a پر 90° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔ اس میں دئے سمتیہ r_{21} کی دُم محدود کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$(1.5) \quad |r_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

کے برابر ہے۔ اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہوگی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی۔ یوں r_{21} کو $|r_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے r_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ $a_{r_{21}}$ حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(1.6) \quad a_{r_{21}} = \frac{r_{21}}{|r_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔ اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جاسکتا۔ میدان سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جارہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x, y, z) کے مقام کو $r = xa_x + ya_y + za_z$ لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت F کو بالکل اسی طرح $F = F_xa_x + F_ya_y + F_za_z$ لکھا جاتا ہے جہاں F_xa_x ، F_ya_y اور F_za_z اس کے تین اجزاء ہیں۔ اس طرح قوت کی مقدار $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہوگی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔ اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $r = -5a_x + 2a_y - 1a_z$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|r| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$ ہے۔ یوں اکائی سمتیہ $a_r = \frac{-5a_x + 2a_y - 1a_z}{\sqrt{30}}$ ہوگا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔ Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{NM} &= (4 - 1)a_x + (5 - 6)a_y + (1 - 4)a_z \\ &= 3a_x - 1a_y - 3a_z \end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ r_{QM} اور r_{NM} ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|r_{QM}| = \frac{1}{3}|r_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$r_{QM} = \frac{1}{3}r_{NM} = \frac{1}{3}(3a_x - 1a_y - 3a_z) = 1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{PM} &= (1-1)a_x + (2-6)a_y + (2-4)a_z \\ &= -4a_y - 2a_z \end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $r_{QM} + r_{PQ} = r_{PM}$ لہذا

$$\begin{aligned} r_{PQ} &= r_{PM} - r_{QM} \\ &= (-4a_y - 2a_z) - (1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z) \\ &= -1a_x - \frac{11}{3}a_y - 1a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5a_x - 4a_y + 12a_z$ ، $-1a_x + 4a_y + 12a_z$ اور $-6a_x + 12a_z$

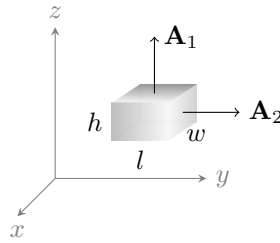
1.5 میدانِ سمتیہ

لکھنا ہے

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جاسکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود a_N اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-a_N$ بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً a_N کو سطح کی سمت ¹² تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ Sa_N ¹³ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبے A_1 اور A_2 دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

¹² عمود سطح کے ساتھ نوئے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ a_N کے زیر نوشت میں N ، لفظ نوئے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
¹³ vector area



$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= A_1 \mathbf{a}_{N1} = wla_z \\ \mathbf{A}_2 &= A_2 \mathbf{a}_{N2} = wha_y \end{aligned}$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب¹⁴ سے مراد A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$(1.7) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ¹⁵ بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $A \cdot B$ کو " A نقطہ B " پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $A \cdot B$ کو $B \cdot A$ بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارٹیزی اکائی سمتیات a_x, a_y, a_z آپس میں عمودی ہیں لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.8) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = 0, \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہذا مساوات 1.7 کے تحت a_x اور a_x کا غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = (|\mathbf{a}_x|)(|\mathbf{a}_x|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہوگا۔ بقایا دو کارٹیزی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$(1.9) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = 1, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = 1, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کروئیکر ڈیلٹا¹⁶ δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.10) \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$$

جہاں

$$(1.11) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

scalar product¹⁴

dot product¹⁵

¹⁶ یہ لیپولڈ کروئیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔ یوں $a_x \cdot a_y$ کی صورت میں $a_x \cdot a_z$ اور $a_z \cdot a_z$ ہیں لہذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \cdot a_z$ کی صورت میں $i = a_z$ اور $j = a_z$ ہیں لہذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارٹیزی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ یوں اگر $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$(1.12) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ \mathbf{A} کا خود غیر سمتی ضرب

$$(1.13) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(1.14) \quad \theta_{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \right)$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں نکتوں دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ ہیں۔ M پر زاویہ حاصل کریں۔

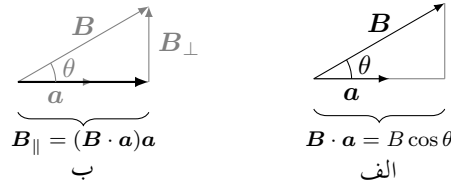
حل: مثال 1.2 میں $r_{NM} = 3a_x - 1a_y - 3a_z$ اور $r_{PM} = 0a_x - 4a_y - 2a_z$ حاصل کئے گئے۔ $|r_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|r_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\mathbf{r}_{NM} \cdot \mathbf{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

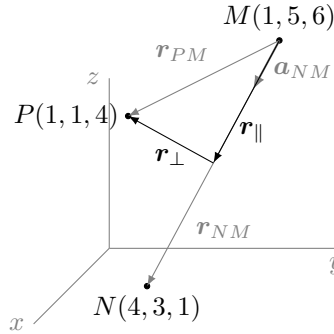
کے برابر ہے۔ یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}} \right) = 1.0321 \text{ rad}$$

یا 59.137° ہے۔



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ B اور اکائی سمتیہ a دکھائے گئے ہیں۔ ان کا غیر سمتی ضرب

$$B \cdot a = |B||a| \cos \theta = B \cos \theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی a کی سمت میں B کے جزو کا طول B_{\parallel} ¹⁷ ہے۔ یوں کسی بھی سمت میں B کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر B اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔ یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(B \cdot a)a$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں B کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں a کی سمت میں B کا سمتی جزو B_{\parallel} دکھایا گیا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ B سے $B_{\parallel}a$ منفی کرنے سے B_{\perp} حاصل ہوتا ہے جو B کا وہ جزو ہے جو a کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔ پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔ دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1, 5, 6)$ ، $N(4, 3, 1)$ اور $P(1, 1, 4)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $r_{NM} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ہے جس کا طول $|r_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $a_{NM} = \frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔ اسی طرح M سے P تک سمتیہ $r_{PM} = -4a_y - 2a_z$ ہے۔ a_{NM} کی سمت میں r_{PM} کا طول

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= r_{PM} \cdot a_{NM} = (-4a_y - 2a_z) \cdot \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) \\ &= \frac{0 + 8 + 10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

¹⁷ B_{\parallel} لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتاتی ہیں کہ B کا یہ وہ حصہ ہے جو a کے متوازی ہے۔ اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً \perp کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں a_{NM} سمت میں r_{PM} کا سمتی جزو

$$r_{\parallel} = r_{\parallel} a_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}} \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z)$$

ہے۔ r_{PM} سے r_{\parallel} منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ r_{\perp} حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= r_{PM} - r_{\parallel} = (-4a_y - 2a_z) - \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \\ &= \frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2 + 58^2 + 7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔ یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

r_{\parallel} اور r_{\perp} آپس میں عمودی ہیں لہذا ان کا نقطہ ضرب

$$r_{\parallel} \cdot r_{\perp} = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \cdot \left(\frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \right) = \frac{18}{722} (-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر r_{NM} کی دُم رکھی جائے تب r_{NM} کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔ عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہوگی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0, 0, 0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $r_M = 1a_x + 5a_y + 6a_z$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ a_{NM} گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔ اکائی سمتیہ a_{NM} کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ sa_{NM} ہے۔ یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $r_Q = r_M + sa_{NM}$ ہوگا۔

$$r_Q = (1a_x + 5a_y + 6a_z) + s \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right)$$

اس مساوات میں s متغیر ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جاسکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1a_z$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

حل: نقطہ $N_1(0, 0, z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x, y, z)$ تک کا سمتیہ $r_{21} = xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1a_z \cdot [xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو r_{21} میں پُر کرتے ہوئے $r_{21} = xa_x + ya_y$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $r_{10} = z_0a_z$ ہے لہذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $r_{20} = xa_x + ya_y + z_0a_z$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2, 1, 3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

$$2x + y + 3z = 14: \text{جواب}$$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات A اور B کے سمتی ضرب¹⁹ کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔ حاصل سمتیہ A اور B سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ a_N سے ظاہر کیا جائیگا۔

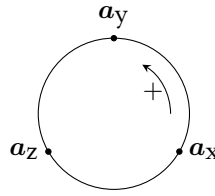
$$(1.15) \quad A \times B = |A||B| \sin \theta_{AB} a_N$$

جس سیدھی سطح پر A اور B دونوں پائے جائیں، a_N اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ a_N کو دائیں ہاتھ کے قانون²⁰ سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقیہ چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو A اور دوسری انگلی کو B کی سمت میں رکھیں۔ اس صورت میں انگوٹھا a_N کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی ڈم ایک ہی جگہ پر نہ ہوتے ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان \times سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب²¹ بھی کہا جاتا ہے اور

vector product¹⁹
right hand rule²⁰
cross product²¹



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$A \times B$ کو " A صلیب B " پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$(1.16) \quad A \times B = -B \times A$$

اکائی سمتیات a_x اور a_y کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت a_z حاصل ہوتی ہے۔ یوں $a_x \times a_y = a_z$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_z = a_x$ اور $a_z \times a_x = a_y$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $a_x \times a_x = -a_z$ ، $a_y \times a_y = -a_x$ اور $a_z \times a_z = -a_y$ لکھے جاسکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہذا $a_x \times a_x = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_y = 0$ اور $a_z \times a_z = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$(1.17) \quad \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z & a_y \times a_z &= a_x & a_z \times a_x &= a_y \\ a_x \times a_x &= 0 & a_y \times a_y &= 0 & a_z \times a_z &= 0 \end{aligned}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $a_x \times a_y$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں a_x سے شروع ہو کر a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_z حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ a_x سے a_y جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہذا جواب مثبت یعنی a_z ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \times a_y$ حاصل کرنے کی خاطر a_z سے a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_x حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہذا جواب $-a_x$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ اور $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \times (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x a_x \times a_x + A_x B_y a_x \times a_y + A_x B_z a_x \times a_z \\ &\quad + A_y B_x a_y \times a_x + A_y B_y a_y \times a_y + A_y B_z a_y \times a_z \\ &\quad + A_z B_x a_z \times a_x + A_z B_y a_z \times a_y + A_z B_z a_z \times a_z \end{aligned}$$

کو

$$(1.18) \quad A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.19) \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

یوں اگر $A = 2a_x - 3a_y + 1a_z$ اور $B = 6a_x + 5a_y - 4a_z$ ہیں تب

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(-4) - (1)(5)]a_x - [(2)(-4) - (1)(6)]a_y + [(2)(5) - (-3)(6)]a_z \\ &= 7a_x + 14a_y + 28a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2, 3, 1)$ ، $N_2(1, 6, 5)$ اور $N_3(-2, -3, 2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} r_{21} &= (1 - 2)a_x + (6 - 3)a_y + (5 - 1)a_z = -1a_x + 3a_y + 4a_z \\ r_{31} &= (-2 - 2)a_x + (-3 - 3)a_y + (2 - 1)a_z = -4a_x - 6a_y + 1a_z \end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} r_N &= (-1a_x + 3a_y + 4a_z) \times (-4a_x - 6a_y + 1a_z) \\ &= 6a_z + 1a_y + 12a_z + 3a_x - 16a_y + 24a_x \\ &= 27a_x - 15a_y + 18a_z \end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x, y, z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ N_1 سے N_4 تک سمتیہ $r_{41} = (x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z$ کے استعمال سے

$$r_{41} \cdot r_N = [(x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z] \cdot (27a_x - 15a_y + 18a_z) = 0$$

لکھ کر

$$27(x - 2) - 15(y - 3) + 18(z - 1) = 0$$

سے

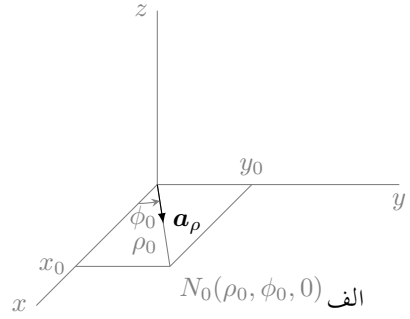
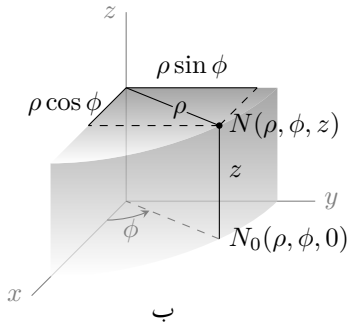
$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ایسی مساوات میں x ، y اور z کے مختلف عمودی سمتیہ میں a_x ، a_y اور a_z کے مختلف 27، 15، اور 18 ہوتے ہیں۔

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9 - 9x + 5y}{6}$ لکھا جاسکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $r = xa_x + ya_y + za_z$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$r = xa_x + ya_y + \left(\frac{9 - 9x + 5y}{6} \right) a_z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $A = 1a_x + 3a_y - 2a_z$ اور $B = 5a_x - 2a_y - 3a_z$ کی صورت میں $A \times A \times A \times B \times A \times A \times A \times A \times B$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارٹیزی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔ ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ ہم اس کتاب میں کارٹیزی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔ انہیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارٹیزی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x, y, z اور z سطحوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔ آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

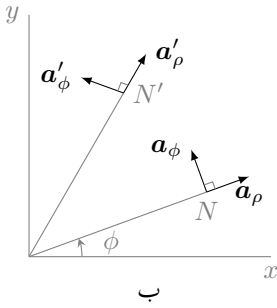
شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارٹیزی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔ اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد²² کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔ اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔ اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_ρ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\rho = \rho_0 a_\rho \quad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \quad (1.20)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نلکی اور کارٹیزی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-ب سے کارٹیزی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارٹیزی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.21)$$



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.22)$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_ρ لکھا جاتا ہے، نلکی محدود کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 2π یا 0 ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $d\phi$ کی صورت میں $\rho d\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو a_ϕ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_z لکھا جاتا ہے، نلکی محدود کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدود کے تین اکائی سمتیات a_ϕ ، a_ρ اور a_z مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدود کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ a_ρ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح a_ϕ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ سطح کا مماس ہے۔ a_z اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

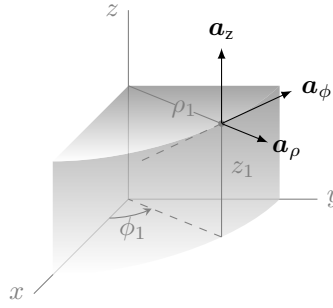
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$a_\rho \times a_\phi = a_z, \quad a_\phi \times a_z = a_\rho, \quad a_z \times a_\rho = a_\phi \quad (1.23)$$

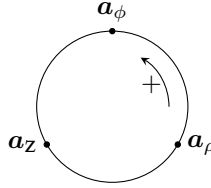
لکھا جاسکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$a_\rho \times a_\rho = 0, \quad a_\phi \times a_\phi = 0, \quad a_z \times a_z = 0 \quad (1.24)$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(1.25) \quad a_\rho \cdot a_\rho = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1, \quad a_z \cdot a_z = 1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.26) \quad a_\rho \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_z = 0, \quad a_z \cdot a_\rho = 0$$

غیر سمتی ضرب کو کروئیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

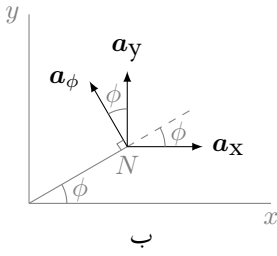
$$(1.27) \quad a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$$

جہاں

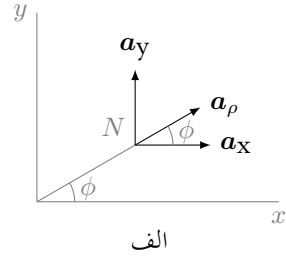
$$(1.28) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ, ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہوگی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دار و مدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو مکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ مکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر مکمل کے باہر لے جائے جاسکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے a_ρ اور a_ϕ اکائی سمتیات کو مکمل کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے a_ρ اور a_ϕ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے a'_ρ اور a'_ϕ آپس میں عمودی ہوں گے۔



ب



الف

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	a_ρ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ρ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ρ اور a_x کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہذا

$$(1.29) \quad a_\rho \cdot a_x = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

ہے۔ a_ρ اور a_y کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہذا

$$(1.30) \quad a_\rho \cdot a_y = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin \phi$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ϕ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ϕ اور a_x کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہذا

$$(1.31) \quad a_\phi \cdot a_x = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin \phi$$

ہے۔ a_ϕ اور a_y کے مابین زاویہ ϕ ہے لہذا

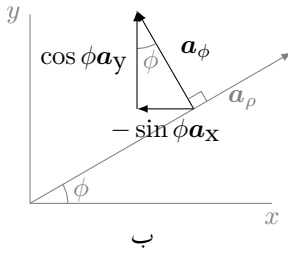
$$(1.32) \quad a_\phi \cdot a_y = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

کے برابر ہے۔ a_z کا a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

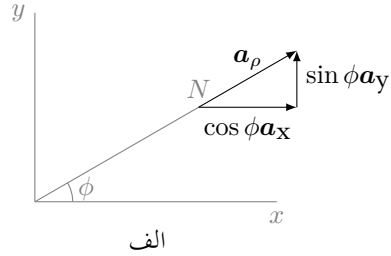
1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ρ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ a_ρ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$(1.33) \quad \begin{aligned} a_\rho &= \cos \phi a_x + \sin \phi a_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

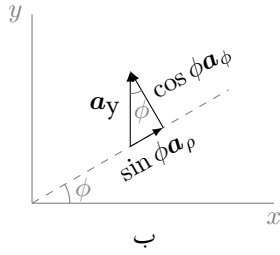


ب

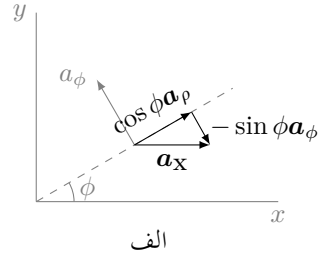


الف

شکل 1.21: a_ρ اور a_ϕ کا کارٹیزیسی نظام میں تبادلہ۔



ب



الف

شکل 1.22: a_x اور a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارٹیزیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارٹیزیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.34) \quad \begin{aligned} a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارٹیزیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں a_x کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر a_x کی ڈم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر a_ρ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ a_ϕ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، a_x کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ a_x کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ a_ρ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ a_ϕ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$(1.35) \quad a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر a_y کی ڈم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$(1.36) \quad a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ A کو کارٹیزیسی یا نلکی محدود میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(1.37) \quad \begin{aligned} A &= A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \\ &= A_\rho a_\rho + A_\phi a_\phi + A_z a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلی مساوات کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_x \cdot A &= A_x a_x \cdot a_x + A_y a_x \cdot a_y + A_z a_x \cdot a_z = A_x \\ a_y \cdot A &= A_x a_y \cdot a_x + A_y a_y \cdot a_y + A_z a_y \cdot a_z = A_y \\ a_z \cdot A &= A_x a_z \cdot a_x + A_y a_z \cdot a_y + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.38)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ A کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x, A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری a_ϕ, a_ρ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_\rho \cdot A &= A_\rho a_\rho \cdot a_\rho + A_\phi a_\rho \cdot a_\phi + A_z a_\rho \cdot a_z = A_\rho \\ a_\phi \cdot A &= A_\rho a_\phi \cdot a_\rho + A_\phi a_\phi \cdot a_\phi + A_z a_\phi \cdot a_z = A_\phi \\ a_z \cdot A &= A_\rho a_z \cdot a_\rho + A_\phi a_z \cdot a_\phi + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.39)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں A کو نکلی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ, A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

آئیں a_ρ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔ یوں $A = a_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔ مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $a_x \cdot A$ لینا ہو گا۔ جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = a_x \cdot A = a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = a_y \cdot A = a_y \cdot a_\rho = \sin \phi$$

اور

$$A_z = a_z \cdot A = a_z \cdot a_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں کارتیسی نظام میں $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہوئے

$$a_\rho = \cos \phi a_x + \sin \phi a_y$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

a_ϕ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$A_x = a_x \cdot a_\phi = -\sin \phi$$

$$A_y = a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$$

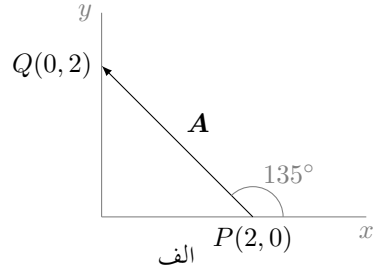
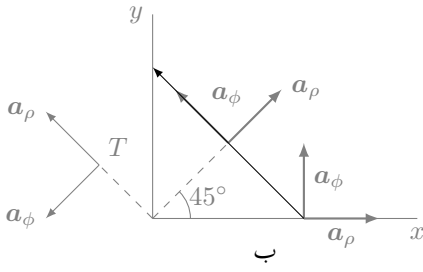
$$A_z = a_z \cdot a_\phi = 0$$

یوں

$$a_\phi = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔ اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

مشق 1.5: a_x ، a_y اور a_z کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

$$a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

$$a_z = a_z$$

شکل 1.23 میں $P(2, 0)$ سے $Q(0, 2)$ تک سمتیہ A دکھایا گیا ہے۔ کارتیسی نظام میں

(1.40)

$$A = -2a_x + 2a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(-2a_x + 2a_y) \cdot (-2a_x + 2a_y)} = \sqrt{8}$$

ہے۔ آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ ایسا کرنے کی خاطر a_ρ اور a_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $a_\rho \cdot A$ اور $a_\phi \cdot A$ حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\rho = a_\rho \cdot (-2a_x + 2a_y) = -2 \cos \phi + 2 \sin \phi$$

$$A_\phi = a_\phi \cdot (-2a_x + 2a_y) = 2 \sin \phi + 2 \cos \phi$$

یوں

(1.41)

$$A = 2(-\cos \phi + \sin \phi)a_\rho + 2(\sin \phi + \cos \phi)a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔ اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $a_\rho \cdot a_\rho = 1$ اور $a_\phi \cdot a_\phi = 1$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{A \cdot A} \\ &= \sqrt{2^2(-\cos \phi + \sin \phi)^2 + 2^2(\sin \phi + \cos \phi)^2} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 2 \cos \phi \sin \phi) + 4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 2 \cos \phi \sin \phi)} \\ &= \sqrt{8(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدود کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نکلے محدود کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔ آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔ اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ ان کی ستوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔ شکل 1.23-ب میں $\phi = 0^\circ$ ، $\phi = 45^\circ$ اور $\phi = 135^\circ$ پر a_ρ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ P یعنی $\phi = 0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} A_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ + \sin 0^\circ)a_\rho + 2(\sin 0^\circ + \cos 0^\circ)a_\phi \\ &= -2a_\rho + 2a_\phi \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 0^\circ$ پر A کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ a_ρ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت a_ϕ کی سمت میں ہی ہے۔ 1.23-ب میں نقطہ P پر A کی سمت واقع بڑھتی a_ϕ اور گھٹتی a_ρ کی سمت میں ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ $\phi = 0^\circ$ پر a_ρ اور a_x برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح a_ϕ اور a_y برابر ہوتے ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں a_x کی جگہ a_ρ اور a_y کی جگہ a_ϕ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$\phi = 45^\circ \text{ پر مساوات 1.41}$$

$$\begin{aligned} A_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)a_\rho + 2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\phi \end{aligned}$$

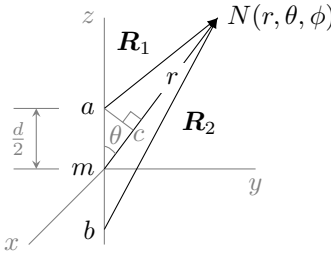
صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر A صرف اور صرف a_ϕ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔ شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر A کی سمت a_ϕ ہی ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ شکل میں اکائی سمتیات کو عین A کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جاسکے۔

آپ نے دیکھا کہ نکلے محدود میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔ آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کیسا لکھا جائے گا۔ مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} A_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)a_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\rho \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کو a_ρ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محور پر نقطہ $a(0, 0, \frac{d}{2})$ پر مثبت چارج Q اور نقطہ $b(0, 0, -\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب²³ کہتے ہیں۔ دکھائے گئے سمتی فاصلوں R_1 اور R_2 کو کروئی محدود میں لکھیں۔



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ a_r ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروئی محدود کے اکائی سمتیہ a_θ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2} \cos \theta$ اور $ac = \frac{d}{2} \sin \theta$ لکھے جاسکتے ہیں۔ یوں R_1 کو ہم a سے c تک سمتیہ a_θ اور N سے c تک سمتیہ a_r کے مجموعے کی شکل میں

$$R_1 = \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta + \left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) a_r \quad (1.42)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے R_2 کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں R_2 کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$R_2 = \frac{d}{2} a_z + r a_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود کی اکائی سمتیہ a_z اور کروئی محدود کی اکائی سمتیہ a_r استعمال کئے گئے۔ کروئی محدود میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$R_2 = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں $A_r = R_2 \cdot a_r$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r\right) \cdot a_r = \frac{d}{2} \cos \theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = R_2 \cdot a_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

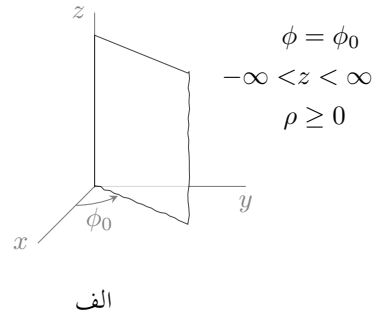
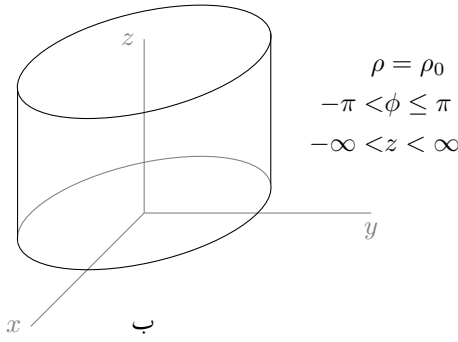
$$A_\theta = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r\right) \cdot a_\theta = -\frac{d}{2} \sin \theta$$

اسی طرح $A_\phi = R_2 \cdot a_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

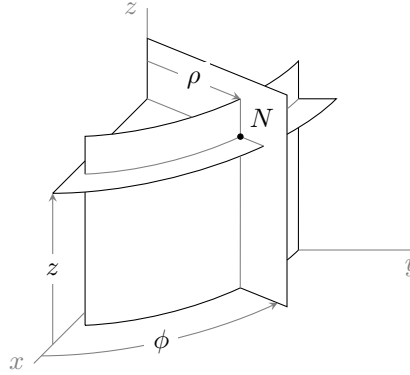
$$R_2 = \left(\frac{d}{2} \cos \theta + r\right) a_r - \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta \quad (1.43)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدود کے تین سطحیں۔

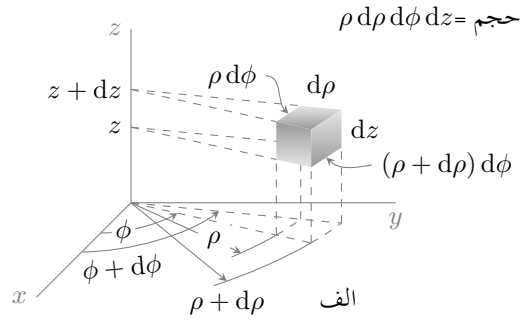
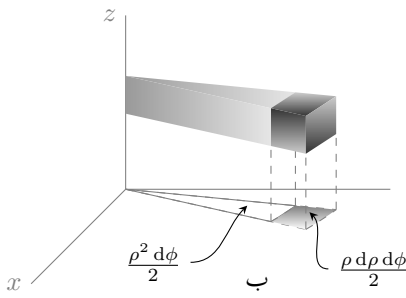
ہے۔ ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔ یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180° درجہ ہے جبکہ اس کا منفی حد $-\pi$ یعنی -180° درجہ ہے۔ نلکی محدود اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں a_z کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں a_ϕ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدود میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدود کے متغیرات کو $d\phi$ اور dz بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $d\rho$ جبکہ a_z سمت کے اطراف کی لمبائی dz ہے۔ a_ϕ سمت میں z محدود کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho d\phi$ جبکہ محدود سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + d\rho) d\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدود تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $d\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 d\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + d\rho$

²⁴حقیقت میں منفی حد -180° کو نہیں چھوٹا۔ اگر منفی حد -180° کو چھوٹے تب منفی x محدود دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدود میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+d\rho)^2 d\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کارقبہ dS

$$\begin{aligned} dS &= \frac{(\rho + d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \frac{\rho^2 d\phi + 2\rho d\rho d\phi + (d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \rho d\rho d\phi + \frac{(d\rho)^2 d\phi}{2} \\ &\approx \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہاں آخری قدم $d\rho$ کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔ یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(d\rho)^2 d\phi}{\rho d\rho d\phi} = \frac{d\rho}{2\rho}$ ہو گی۔ $d\rho$ کو کم سے کم 25 کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں $\rho d\rho d\phi$ رقبہ اور dz بلندی کے مکعب کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho d\phi$ ، $d\rho$ اور dz لی جاتی ہے۔ یوں مکعب کے چٹائی اور اوپر سطح کارقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho d\rho d\phi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کارقبہ $d\rho dz$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کارقبہ $\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho, \phi, z)$ کو $N'(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$ کو تبدیل کرنے سے N' تک سمتیہ کو

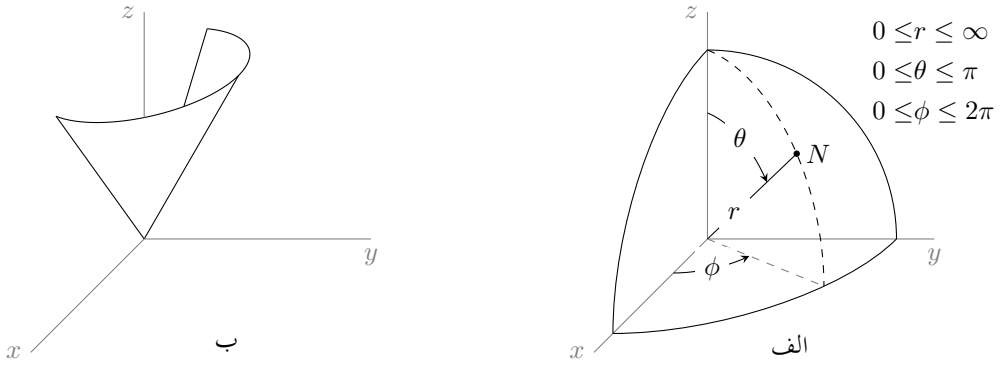
$$dL = d\rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z \quad (1.44)$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

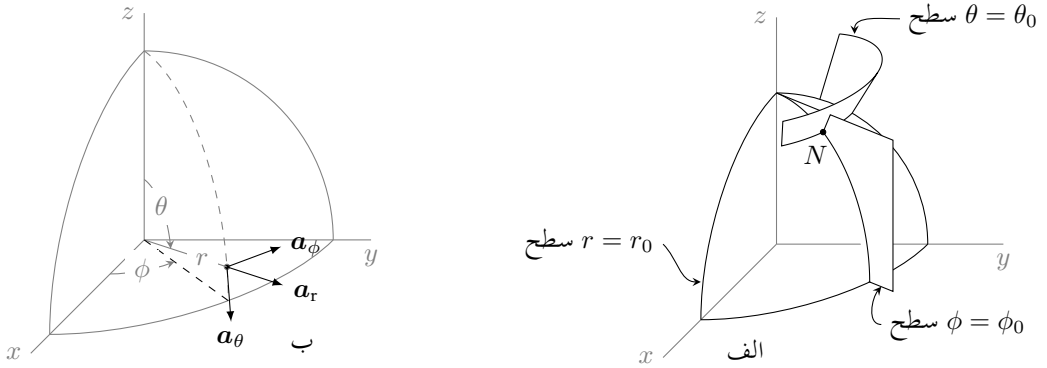
1.10 کروی محدود

سیدھی لکیریوں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدود میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدود بہتر ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدود میں باآسانی لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

²⁵ کسی بھی متغیر ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $d\rho$ لکھا جاتا ہے۔ $d\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $d\rho \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدود کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔

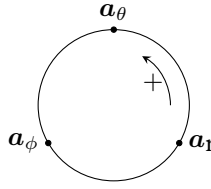


شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدود کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدود کے متغیرات r, θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدود کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدود سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدود سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نیکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدود سے شروع ہو کر منفی z محدود پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد²⁶ تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدود کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد²⁷ پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نیکی محدود کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نیکی محدود کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات a_r ، a_θ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ a_r ہوگی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ a_θ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ a_ϕ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے اکائی سمتیات کو بھی محدودی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ a_r سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح a_θ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ a_ϕ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

a_r ، a_θ اور a_ϕ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $a_r \times a_\theta = a_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ٹکلی محدود میں یہ انگلیاں ρ ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدود میں x ، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$(1.45) \quad a_r \times a_\theta = a_\phi, \quad a_\theta \times a_\phi = a_r, \quad a_\phi \times a_r = a_\theta$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح

$$(1.46) \quad a_r \cdot a_r = 1, \quad a_\theta \cdot a_\theta = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1$$

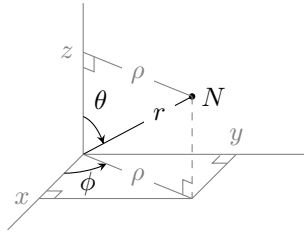
اور

$$(1.47) \quad a_r \cdot a_\theta = 0, \quad a_\theta \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_r = 0$$

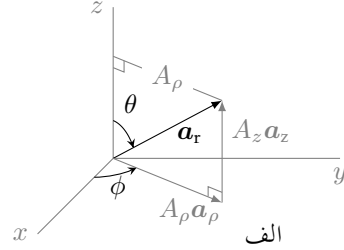
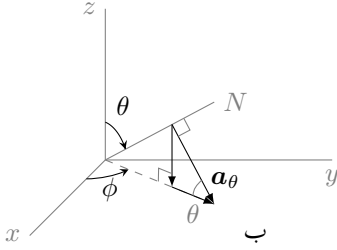
بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدود سے فاصلہ ρ ہے جو ٹکلی محدود کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin \theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r \cos \theta$ لکھی جاسکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho \cos \phi$ اور $y = \rho \sin \phi$ لکھے جاسکتے ہیں۔ $\rho = r \sin \theta$ پُر کرنے سے

$$(1.48) \quad \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جاسکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.50)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.51)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.52)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ a_r کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$a_r = A_\rho a_\rho + A_z a_z \quad (1.53)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں a_r کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin \theta$ اور $A_z = \cos \theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_r = \sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z \quad (1.54)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_\rho &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\rho = \sin \theta \\ a_r \cdot a_\phi &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.55)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $a_z \cdot a_\rho = 0, a_\rho \cdot a_\rho = 1$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔ یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیہ اور ٹکلی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_x &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_x = \sin \theta \cos \phi \\ a_r \cdot a_y &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_y = \sin \theta \sin \phi \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.56)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $a_r \cdot a_z$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی رداسی سمتیہ اور کارٹیسائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_r کو کارٹیسائی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_r = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_r$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_r$ اور $A_z = a_z \cdot a_r$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$a_r = \sin \theta \cos \phi a_x + \sin \theta \sin \phi a_y + \cos \theta a_z \quad (1.57)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے a_θ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔ جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر a_θ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho a_\rho$ اور a_θ کے مابین زاویہ θ ہے۔ $B_\rho a_\rho$ اور $-B_z a_z$ مل کر ٹکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$B_\rho = \cos \theta$$

$$B_z = \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_\theta = \cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z \quad (1.58)$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_\rho &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\rho = \cos \theta \\ a_\theta \cdot a_\phi &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.59)$$

a_θ اور ٹکلی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_x &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_x = \cos \theta a_\rho \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi \\ a_\theta \cdot a_y &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_y = \cos \theta a_\rho \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta a_z \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.60)$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_ϕ	a_ρ	
$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	a_r
$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	a_θ
0	1	0	a_ϕ

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارٹیزیائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \phi$	$\sin \theta \cos \phi$	a_r
$-\sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	a_θ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات a_θ اور کارٹیزیائی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_θ کو کارٹیزیائی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_\theta = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_\theta$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_\theta$ اور $A_z = a_z \cdot a_\theta$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$(1.61) \quad a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

کروی محدود a_ϕ اور نلکی محدود a_ϕ یکساں ہیں۔ اسے کارٹیزیائی نظام میں

$$(1.62) \quad a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.63) \quad \begin{aligned} a_\phi \cdot a_x &= -\sin \phi \\ a_\phi \cdot a_y &= \cos \phi \\ a_\phi \cdot a_z &= 0 \end{aligned}$$

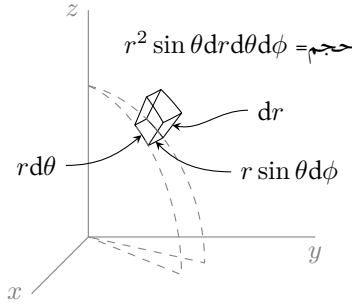
لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ a_ϕ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدود کے متغیرات dr ، $d\theta$ اور $d\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا مخرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ a_r سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں dr ہے۔ a_θ سمت میں z محدود کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + dr) d\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r d\theta + dr d\theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو بہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{dr}{r} = \frac{dr d\theta}{r d\theta}$ کے برابر ہے۔ dr کو کم سے کم 29 کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $dr d\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے a_ϕ اطراف کی

²⁹ کسی بھی متغیرہ r میں چھوٹی سی تبدیلی Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو dr لکھا جاتا ہے۔ dr کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $dr \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r \sin \theta d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جاسکتا ہے جس کے $r = r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin \theta dr d\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r dr d\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r, \theta, \phi)$ کو $N'(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ تک سمتیہ کو $d\phi$ کوئے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$(1.64) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

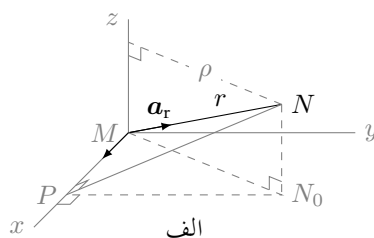
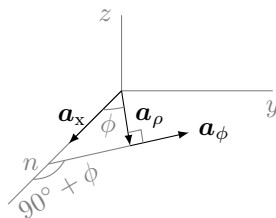
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف \mathbf{a}_r ہیں جن میں $-\mathbf{a}_r$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r = r_0 + dr$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں \mathbf{a}_r ہیں جن میں \mathbf{a}_r سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ جبکہ $r = r_0 + dr$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ ہے۔ اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$ جبکہ $\theta = \theta_0 + d\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$ اور $\phi = \phi_0 + d\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$ ہو گا۔

مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin(\theta + d\theta) d\phi$, $r \sin \theta d\phi$ اور $(r + dr) \sin(\theta + d\theta) d\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات \mathbf{a}_1 اور \mathbf{a}_2 کا غیر سمتی ضرب $\cos \alpha_{12} (1)(1) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کو سائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x$ اور $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z$ حاصل کریں۔



شکل 1.35: کروی اور کارٹیسے، اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.34 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہذا $a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی ڈم نقطہ n پر آٹھڑے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90^\circ + \phi$ ہے۔ یوں $a_x \cdot a_\phi = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin \phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح a_y اور a_ϕ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ a_z ان دونوں ٹکلی اکائی سمتیوں کے عمودی ہے لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوگا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر a_r کا a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35- الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں a_x اور a_r بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $a_x \cdot a_r = \cos \angle NMP$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\angle NMP$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدود پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے a_x سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہذا اگر کارٹیسز نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدود پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ مکنون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP} = x$ اور زاویہ $\angle NPM = 90^\circ$ ہیں لہذا $\cos \angle NMP = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی a_x اور a_r کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدود پر عمود بناتے ہوئے یوں $a_y \cdot a_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدود پر عمود سے $a_z \cdot a_r = \frac{z}{r}$ لکھے جاسکتے ہیں۔ چونکہ $x = r \sin \theta \cos \phi$ ، $y = r \sin \theta \sin \phi$ اور $z = r \cos \theta$ کے برابر ہیں لہذا ہم

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi$$

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر a_θ کا a_x کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_θ جبکہ محدود کے مرکز M پر a_x دکھائے گئے ہیں۔ $a_\theta \cdot a_x$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محور پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $a_\theta \cdot a_x = \cos \angle ABC$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\angle DMC = \phi$ اور $\angle BMN = \theta$ $\angle BMC$ کر دی محدود کے زاویے ہیں۔ $\triangle BMN$ میں زاویہ $\angle MNB$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\angle NBM = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\angle NBM = \angle CBM$ ہیں۔ اس طرح $\triangle BMC$ میں $\angle BMC = 90^\circ$ جبکہ $\angle CBM = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\angle MCB = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے $\triangle BMC$ کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ $\triangle MDC$ سے

$$\overline{MD} = \overline{MC} \cos \phi = \frac{l \cos \phi}{\tan \theta}$$

شکل سے واضح ہے کہ \overline{MD} اور \overline{AB} برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$ یوں $\triangle BAC$ سے

$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l \cos \phi}{\tan \theta} \right)}{\left(\frac{l}{\sin \theta} \right)} = \cos \theta \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $a_r \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi$ لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $a_\theta \cdot a_y$ اور $a_\theta \cdot a_z$ حاصل کریں۔

جوابات: $\sin \theta \cos \phi$ اور $-\sin \theta$

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون¹ سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔ کولومب کا قانون² اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$(2.1) \quad F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکروں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکروں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔ تناسب کے جزو مستقل G لکھا اور تجاذبی مستقل³ پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔ یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہوگی۔ ایسے چارج کو نقطہ چارج⁴ کہا جاتا ہے۔

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی

Law of Universal Gravitation¹
Coulomb's law²
gravitational constant³
point charge⁴

جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔ مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁶ ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔ خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$(2.3) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل⁷ ہے۔ یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$(2.4) \quad c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(2.5) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

ہیں۔ یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$(2.6) \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

کے برابر ہے۔ اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$(2.7) \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9$$

لیا جائے گا۔ ϵ_0 کی اکائی فی راڈ فی میٹر $\frac{\text{F}}{\text{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین 9.8 N کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔ زمین کا رداس 6370 km لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24} \text{ kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000 \text{ km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔ اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225 \text{ N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل:

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \text{ N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدود کے مرکز سے سمتی فاصلہ r_1 پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ r_2 پر دکھائے گئے ہیں۔ چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ R_{21} ہے جہاں

$$(2.8) \quad R_{21} = r_2 - r_1$$

کے برابر ہے۔ سمتیہ R_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ a_{21} یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$(2.9) \quad a_{21} = \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{R_{21}}{R_{21}} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

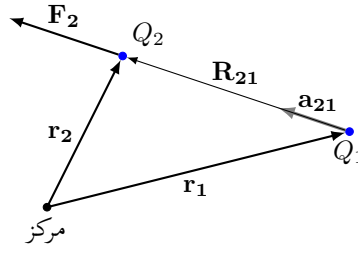
چارج Q_2 پر قوت F_2 کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ a_{21} کے سمت میں ہوگی۔ اس طرح یہ قوت

$$(2.10) \quad \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا۔ مساوات 2.10 کو کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔ چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہذا Q_1 پر قوت F_1 یوں لکھا جائے گا

$$(2.11) \quad \begin{aligned} F_1 &= -F_2 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} a_{12} \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $a_{12} = -a_{21}$ کے برابر ہے۔ دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت a_{21} کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-a_{21}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3, 2, 4)$ پر $20 \mu C$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1, 5, 9)$ پر $-50 C$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= (1 - 3)\mathbf{a}_x + (5 - 2)\mathbf{a}_y + (9 - 4)\mathbf{a}_z \\ &= -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \\ R_{21} &= |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{38} \\ &= 6.1644 \end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21} &= \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{-2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{6.1644} \\ &= -0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \left(\frac{-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}}{38} \right) (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \\ &= -0.237 (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \text{ N} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت \mathbf{a}_{21} کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$(2.12) \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

2.2. برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہوگی جسے زمین کی کشش⁸ یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔ زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8 \frac{m}{s^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (2.13)$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان⁹ پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p ¹⁰ رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دار و مدار پیمائشی کمیت m_p ¹¹ پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جاسکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر 1.96 N قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔
حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad (2.14)$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \quad (2.15)$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

چار جوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے۔ اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج q_p ¹² پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔ مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا

⁸ gravity
⁹ gravitational field

¹⁰ m_p لکھتے ہوئے زیر نوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔

¹¹ test mass

¹² test charge

مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت¹³ یا صرف برقی میدان پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$E = \frac{F}{q_p} \quad (2.16)$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہوگا۔ کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی E تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ E_1, E_2, E_3, \dots کا سمتی مجموعہ

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \dots \quad (2.17)$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی E ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے چارج Q سے سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_R}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^3} \quad (2.18)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج کو کروی محد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r \quad (2.19)$$

جہاں a_r کروی محد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x', y', z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \quad (2.20)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں

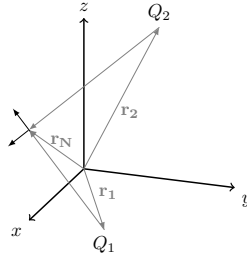
$$r = xa_x + ya_y + za_z$$

$$r' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$$

$$R = r - r' = (x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z$$

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4, 1, 1)$ پر $100 \mu C$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1, 4, 2)$ پر $50 \mu C$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2, 2, 5)$ پر Q_1 سے



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

پیدا E_1 اور Q_2 سے پیدا E_2 حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی E کیا ہوگا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا E_1 حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned} R_{31} &= R_3 - R_1 = (2 - 4)a_x + (2 - 1)a_y + (5 - 1)a_z \\ &= -2a_x + 1a_y + 4a_z \end{aligned}$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned} R_{31} &= |R_{31}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{21} = 4.583 \\ a_{31} &= \frac{R_{31}}{R_{31}} = \frac{-2a_x + 1a_y + 4a_z}{\sqrt{21}} \\ &= -0.436a_x + 0.218a_y + 0.873a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} (-0.436a_x + 0.218a_y + 0.873a_z) \\ &= -18686a_x + 9343a_y + 37414a_z \quad \frac{V}{m} \end{aligned}$$

ہوتا ہے۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

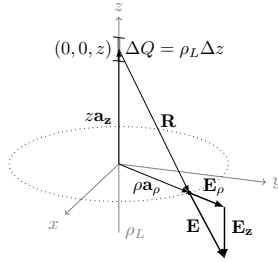
$$\begin{aligned} R_{32} &= (2 - 1)a_x + (2 - 4)a_y + (5 - 2)a_z \\ &= 1a_x - 2a_y + 3a_z \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} R_{32} &= |R_{32}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ a_{32} &= \frac{1a_x - 2a_y + 3a_z}{\sqrt{14}} \\ &= 0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} E_2 &= 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{14} (0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z) \\ &= 8582a_x - 17196a_y + 25779a_z \quad \frac{V}{m} \end{aligned}$$



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

ملتا ہے۔ ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل E حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= (-18686a_x + 9343a_y + 37414a_z) + (8582a_x - 17196a_y + 25779a_z) \\ &= -10104a_x - 7853a_y + 63193a_z \quad \frac{V}{m} \end{aligned}$$

مساوات 2.16 کو

$$(2.21) \quad F = qE$$

لکھا جاسکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں چارج q پر قوت F دیتا ہے۔

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدود پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدود پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔ یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت ρ_L ¹⁵ کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔ لکیری چارج کثافت کی تعریف

$$(2.22) \quad \rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

ہے۔ لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔ اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہوگی۔ آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔ مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ z محدود کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔ نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دار و مدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر

¹⁴line charge density

¹⁵اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے، اس کے زیر نوشت میں S ، L یا h لکھا جائے گا۔

پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہوگی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہوگا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ E سمتی فاصلہ R کی سمت میں ہوتا ہے لہذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا E کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$E = E_\rho + E_z \quad (2.23)$$

ثابت ρ_L کی صورت میں $(0, 0, z)$ پر موجود چارج سے E_z کی سمت منفی z جانب ہوگی۔ اسی طرح $(0, 0, -z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا E کی سمت مثبت z جانب ہوگی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدود پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا E_z کا اثر کو منفی z محدود پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا E_z ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$E_z = 0 \quad (2.24)$$

ہوگا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدود پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہوگا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدود پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے E_z کو دائرے کی دوسری جانب z محدود پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کا E_z ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جاسکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہوگا۔ آئیں اس E کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ دائرے پر ΔE پیدا کرتا ہے۔ محدود کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z a_z$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ ρa_ρ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتیہ فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} R &= \rho a_\rho - z a_z \\ |R| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ a_R &= \frac{R}{|R|} = \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \Delta z (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو مکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ مکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$E = \int dE = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz \quad (2.25)$$

اس مکمل کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.26) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا مکمل E_ρ اور دوسرا مکمل E_z دیتا ہے یعنی

$$(2.27) \quad \begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا مکمل صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں مکمل کو باری باری حل کریں۔ پہلے E_ρ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مکمل کا ابتدائی حد

$$\begin{aligned} -\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\ \alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

اور اختتامی حد

$$\begin{aligned} \infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\ \alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$dz = \rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{\rho^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\
 &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha \\
 &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho
 \end{aligned}$$

(2.28)

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔ اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \, dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\sec^3 \alpha} \\
 &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \\
 &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

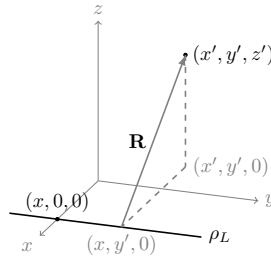
(2.29)

ملتا ہے۔ یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$E = E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho$$

(2.30)



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔ اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔ نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ ایسی صورت میں کسی بھی نقطہ پر E حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔ یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔ اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔ لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_R کو a_ρ تصور کریں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} a_R \quad (2.31)$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محور کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ (x', y', z') پر E حاصل کریں۔

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ (x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}$ ہے جبکہ

$$R = (x' - x)a_x + za_z$$

$$a_R = \frac{(x' - x)a_x + za_z}{\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}}$$

ہیں۔ یوں

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x' - x)^2 + z^2}} a_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر E حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $E = 30a_z$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 5, 0)$ اور نقطہ $N_2(7, 3, 4)$ پر E حاصل کریں۔

$$E_2 = 18 \left(\frac{3a_y + 4a_z}{5} \right) \frac{V}{m} \text{ اور } E_1 = 18a_z \frac{V}{m} \text{ جوابات:}$$

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت ρ_s کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

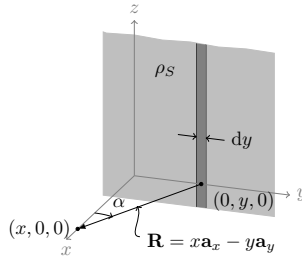
$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (2.32)$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ ہوتا رہے بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_s کی قیمت متغیر ہوگی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا E حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے E پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے E حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محور کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ dy ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی dy ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور dy چوڑائی رقبے میں $\rho_s \Delta L dy$ چارج پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_s \Delta L dy}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_s dy \quad (2.33)$$



شکل 2.5: یکساں چارج بردار بموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔ نقطہ $(x, 0, 0)$ پر \mathbf{E} حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ \mathbf{R} دکھایا گیا ہے جہاں

$$\mathbf{R} = x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y \quad (2.34)$$

کے برابر ہے جس سے

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.35)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چارج بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\rho_S dy (x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y)}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \quad (2.36)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو $d\mathbf{E} = dE_x + dE_y$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$dE_x = \frac{\rho_S x dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_x$$

$$dE_y = -\frac{\rho_S y dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} \mathbf{a}_y \quad (2.37)$$

کے برابر ہیں۔ x -محد کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدود کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا dE_y کو ختم کرے گا۔ یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے dE_y کو منفی y پر کھینچی لکیر کا dE_y ختم کرے گا۔ x محدود کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$E_y = 0 \quad (2.38)$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔ پہلے E_x حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.37 میں دئے dE_x کا مکمل لیتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر

$$y = x \tan \alpha$$

$$dy = x \sec^2 \alpha d\alpha \quad (2.39)$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 \alpha d\alpha}{x^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

میں $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \end{aligned} \quad (2.40)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_y حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے dE_y کا مکمل لیتے ہیں۔

$$E_y = \int dE_y = -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y dy}{(x^2 + y^2)}$$

مکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{df(y)}{2f(y)}$ لکھا جاسکتا ہے جس کا مکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N \quad (2.42)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں a_N اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر¹⁷ سمجھا جاسکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

• $x = 0$ پر $\rho_s +$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$E_{x>0}^+ = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x > 0$$

$$E_{x<0}^+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x < 0$$

• $x = x_1$ پر $\rho_s -$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$E_{x>x_1}^- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x > x_1$$

$$E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad x < x_1$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$ ، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_{x<0} &= E_{x<0}^+ + E_{x<x_1}^- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = 0 \\ E_{x>x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x>x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = 0 \\ E_{0<x<x_1} &= E_{x>0}^+ + E_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_x \end{aligned} \quad (2.43)$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں $\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ برقی میدان پایا جاتا ہے۔ یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔ چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہوگی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ پہلی سطح $y = 2$ پر 2 nC/m^2 ، دوسری سطح $y = 5$ پر 4 nC/m^2 اور تیسری سطح $y = 10$ پر -6 nC/m^2 کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_3(-2, 7, 11)$ ، $N_2(5, 3, 4)$ ، $N_1(0, 0, 0)$ کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_4(-7, 30, 22)$ پر E حاصل کریں۔

جوابات: 0 ، $144\pi a_y$ ، $216\pi a_y$ اور 0

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔ اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنانا ہے لہذا اسی پر غور کرتے ہیں۔ لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔ حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیر تصور کرتے ہیں۔ یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر کسی نقطہ پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطہ پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہوگی۔ کسی بھی نقطہ پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$(2.44) \quad \rho_h = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h}$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی مکمل سے حاصل کیا جائے گا۔ کارتیسیی محد میں ایسا مکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$(2.45) \quad Q = \iiint_h \rho_h \, dx \, dy \, dz$$

جہاں مکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرز کے مکمل کو عموماً ایک درجی مکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$(2.46) \quad Q = \int_h \rho_h \, dh$$

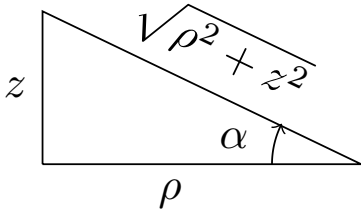
حجم میں \mathbf{r}' نقطہ پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ \mathbf{r} پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان dE مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_h \Delta h'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

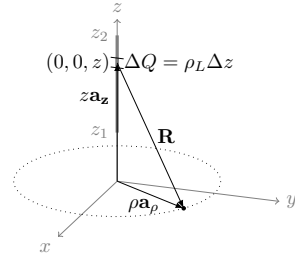
اس مساوات میں نقطہ \mathbf{r}' پر چارج کی کثافت ρ'_h لکھی گئی ہے۔ تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ \mathbf{r} پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے مکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$(2.47) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho'_h \, dh'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔ سمتیہ \mathbf{r} اس نقطہ کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔ اس نقطہ پر برقی میدان کو $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطہ کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت \mathbf{r}' پر منحصر ہے۔ \mathbf{r}' پر چھوٹی حجم dh' اور چارج کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں \mathbf{r}' اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ \mathbf{r}' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ پر \mathbf{E} حاصل کرتے وقت اسی نقطہ پر موجود چارج کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔



(ب) Z اور α کا تعلق



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر E کی حتمی قیمت |E| یکساں ہوگی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= E_\rho + E_z \end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan \alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

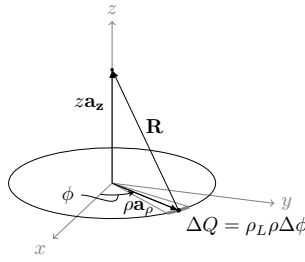
$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \arctan \frac{z_2}{\rho} \\ \alpha_1 &= \arctan \frac{z_1}{\rho} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_\rho = \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0\rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$(2.48) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) + \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔

حل: نکلی محدود استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں چارج ΔQ مقام ρa_ρ پر پایا جاتا ہے جبکہ \mathbf{E} مقام $z a_z$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ \mathbf{E} رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta E = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z a_z - \rho a_\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

پیدا ہو گا۔ دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (z a_z - \rho a_\rho) d\phi$$

تکملہ کا متغیر ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔ حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جاسکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔ E_z لکھتے ہوئے کارٹیسائی محدود کی اکائی سمتیہ a_z کو تکملہ کے باہر لے جایا جاسکتا

ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے az تبدیل نہیں ہوتا البتہ E_ρ لکھتے ہوئے نئی محدود کی اکائی سمتیہ a_ρ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔ چونکہ a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$(2.49) \quad \begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L \rho z a_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ E_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} a_\rho d\phi \end{aligned}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$(2.50) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_L\rho z a_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $a_\rho = \cos\phi a_x + \sin\phi a_y$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos\phi a_x + \sin\phi a_y) d\phi \\ &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (\sin\phi a_x - \cos\phi a_y) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ چارج نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$E_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} a_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہذا حقیقت میں صرف a_z جانب ہی E پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس تکنوں کو دیکھتے ہوئے جس کا R حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E_R کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$E_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} a_z$$

یہی حاصل ہوتا ہے۔

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مانگل فیراڈے¹ کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔ چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر Q چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھایہ گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جاسکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاؤ² کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاؤ کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \quad (3.1)$$

برقی بہاؤ کی اکائی کو لومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاؤ کی سمت الٹی ہوگی اور یہ چارج میں داخل ہوگا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاؤ خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ کو برقی بہاؤ کی کثافت D^3 کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r \quad (3.2)$$

Michael Faraday¹
electric flux²
electric flux density³

سمتیہ برقی بہاو کی کثافت پائی جائے گی۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$(3.3) \quad D = \epsilon_0 E \quad \text{خالی خلاء}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کروی محد کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر برقی بہاو کی کثافت حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$(3.4) \quad D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R$$

جہاں a_R چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام r' پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام r پر

$$\Delta D(r) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

برقی بہاو کی کثافت پیدا کرے گا۔ حجم کے تمام چارجوں سے

$$(3.5) \quad D(r) = \int_h \frac{\rho'_h dh'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 53 پر مساوات 2.47 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں D اور E کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا D اور E کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاؤس کا قانون

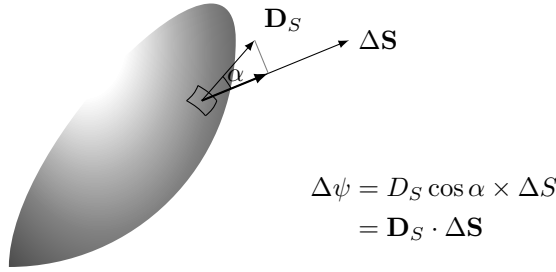
فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جاسکتا ہے جسے گاؤس کا قانون⁴ کہتے ہیں۔

کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

جناب گاؤس⁵ نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ انہیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں برقی بہاو کی کثافت اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کے کثافت کی قیمت $D_S \cos \alpha$ ہو گی لہذا

$$\Delta \psi = D_S \cos \alpha \Delta S$$



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاؤ D_S لکھتے ہوئے زیر نوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاؤ کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔ اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = D_S \cdot \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاؤ تکملہ سے حاصل ہوگی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔ یوں

$$(3.6) \quad \psi = \oint_S D_S \cdot \Delta S = Q$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ⁶ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔ اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح⁷ کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔ یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$(3.7) \quad Q = \int_h \rho_h dh$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(3.8) \quad \oint_S D_S \cdot \Delta S = \int_h \rho_h dh$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔ اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاؤ اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جاسکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$(3.9) \quad Q = \int_S \rho_S dS$$

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$(3.10) \quad Q = \int_L \rho_L dL$$

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$(3.11) \quad Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی مکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ ہمیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جاسکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدہ⁸ کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافت برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہوگی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدہ کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر D تبدیل نہیں ہوگا۔

کروی محدہ استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اسی کی سمتی شکل

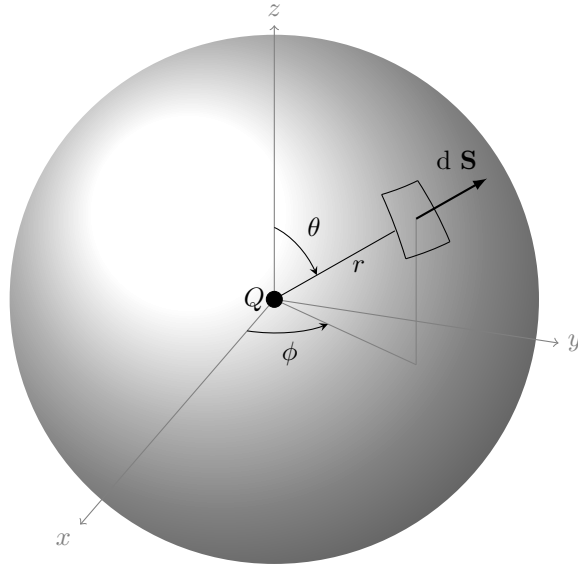
$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

ہوگی۔ اس سطح پر کثافت برقی بہاؤ کی قیمت D_S اور سمت \mathbf{a}_r ہوگی لہذا سمتی کثافت برقی بہاؤ

$$D_S = D_S \mathbf{a}_r$$

لکھی جائے گی۔ یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاؤ

$$\begin{aligned} d\psi &= D_S \cdot dS \\ &= (D_S \mathbf{a}_r) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r) \\ &= D_S r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

ہوگی۔ اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہوگی۔

$$\begin{aligned}\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left. -\cos \theta \right|_0^{\pi} d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی سمتی شکل

$$(3.12) \quad D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

اور $D = \epsilon_0 E$ سے

$$(3.13) \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا صفحہ 42 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔ اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ لامحدود لکیر کو ٹکلی محدود کی z محدود تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔ مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو a_z کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔ یوں یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کثافت برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔ آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاؤس کے قانون کی مدد سے کثافت برقی بہاؤ حاصل کریں۔

چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافت چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔ اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی ٹکلی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے⁹ بند تصور کریں۔ چونکہ برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہے لہذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ ٹکلی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافت برقی بہاؤ D_ρ ہے لہذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاؤ ہو گا جو گاؤس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔ اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$D_S = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho \quad (3.14)$$

سے

$$E_S = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho$$

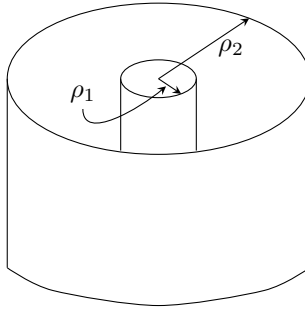
حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 47 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصبے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح محور سے r_1 فاصلے پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر ٹکلی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ ایسی تار جسے ہم محوری تار¹⁰ کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج

⁹ آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جاسکتا ہے۔ یوں اس ٹکلی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔
coaxial cable¹⁰



شکل 3.3: ہم محوری تار

ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہوگی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نکلی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہذا L لمبائی کی ایسی نکلی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$(3.15) \quad D = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho$$

$$(3.16) \quad = \frac{Q}{2\pi\rho L} a_\rho$$

پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ یوں اندرونی تار کی سطح پر

$$(3.17) \quad D_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L} a_\rho$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$(3.18) \quad D_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L} a_\rho$$

پایا جائے گا۔ بیرونی تار کے باہر فرضی نکلی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہذا ہم محوری تار کے باہر

$$(3.19) \quad D_{\text{تار کے باہر}} = 0$$

ہوگا۔ مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہ دیتا ہے۔ لہذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار¹¹ بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کثافت برقی بہاؤ $-5 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل بتار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26 \frac{nC}{m}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26 nC$ چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15 \frac{\mu C}{m^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26 nC$ چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3 \frac{\mu C}{m^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہوگی۔

شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ ان سطحوں پر آنے والے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔ سامنے سطح پر Da_x جبکہ پیچھے سطح پر $-Da_x$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو Sa_x اور $-Sa_x$ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہو گا۔ یوں حجم سے برقی بہاؤ صرف ان آنے والے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\psi_{\text{سامنے}} = Da_x \cdot Sa_x = SD$$

$$\psi_{\text{پچھے}} = (-Da_x) \cdot (-Sa_x) = SD$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔ اگر چارج بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں چارج $\rho_S S$ پایا جائے گا۔ یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

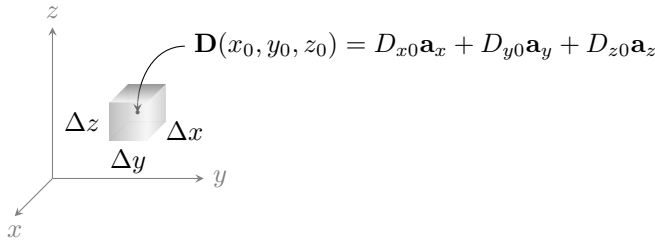
حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$D = \frac{\rho_S}{2} a_N \quad (3.20)$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں a_N سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔ یوں

$$E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N \quad (3.21)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدود پر نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx ، Δy اور Δz ہیں۔ اس چھوٹی ڈبہ پر گاؤس کے قانون

$$(3.22) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_h \rho_h dh$$

کا اطلاق کرتے ہیں۔ ڈبہ کے چھ اطراف ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \int_{\text{سامنے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{سامنے}} \\ &\doteq (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x, \text{سامنے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں D کی قیمت ڈبہ کے وسط میں معلوم ہے۔ ٹیلر تسلسل¹² کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ڈبہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\mathbf{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0} \mathbf{a}_x + D_{y0} \mathbf{a}_y + D_{z0} \mathbf{a}_z$$

کی قیمت سے وسط سے $\frac{\Delta x}{2} + \text{فاصلے پر ڈبہ کے سامنے سطح پر } D_x$ ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} D_{x, \text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\Delta x}{2} \right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \dots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x ، y اور z ہیں لہذا تسلسل میں جزوی تفرق 13 کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہذا پچلی سطح $-\Delta y \Delta z a_x$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پچھے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{پچھے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{پچھے}} \\ &= \left(D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z \right)_{\text{پچھے}} \cdot (-\Delta y \Delta z a_x) \\ &= -D_{x, \text{پچھے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x, \text{پچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{پچھے}} \doteq - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned} \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} &\doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{بائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$(3.23) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$(3.24) \quad Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta h$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $D = 2x a_x + 3y a_y + 5a_z \text{ C/m}^2$ ہو تب کارتیسی محدود کے مرکز پر 10^{-9} m^3 کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔
حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5 \text{ nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاؤ

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج فی حجم کو صحیح کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں یعنی

$$(3.25) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h$$

اور

$$(3.26) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

مساوات 3.25 میکس ویل کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ D کا پھیلاؤ¹⁴ بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف جبکہ اس کا دایاں بازو پھیلاؤ حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارتیسی محدود میں

$$(3.27) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات}$$

سے سمتیہ D کا پھیلاؤ حاصل کیا جاتا ہے۔

انجینئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ K کا $\oint_S K \cdot dS$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ D کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے D کی جگہ K لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(3.28) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S K \cdot dS}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ K پانی کا بہاؤ، ایٹموں کی رفتار یا سلیکان کی پتہری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم K کو سمتی بہاؤ کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات K کا پھیلاؤ بیان کرتا ہے۔ پھیلاؤ کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاؤ کے پھیلاؤ سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاؤ فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاؤ کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاؤ فی چھوٹی حجم کو پھیلاؤ کہتے ہیں۔ پھیلاؤ کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاؤ کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نہ ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں دھوبے نقطے پر بھی پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں دھوبہ رہے اس وقت تک یہاں پھیلاؤ صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاؤ پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور پر باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاؤ صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلا پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاؤ پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سانگل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پنچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلتی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاؤ پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاؤ سے مراد نقطے سے انخلا جبکہ منفی پھیلاؤ سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے $+$ ، ضرب کے لئے \times اور تکملہ کے لئے \int استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیپلا¹⁵ کہتے ہیں اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ تصور کریں کہ

$$(3.29) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$(3.30) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

جبکہ سمتیہ K کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$\begin{aligned} \nabla \cdot K &= \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \cdot (K_x a_x + K_y a_y + K_z a_z) \\ (3.31) \quad &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{aligned}$$

لیا جاتا ہے۔ یہ علامت انجینئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کو $\nabla \cdot D$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(3.32) \quad \nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

کے برابر ہے۔ پھیلاؤ کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔ مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(3.33) \quad \nabla \cdot D = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاؤس کے قانون کی تفریق¹⁶ شکل ہے۔ اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمیل¹⁷ شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 89 پر دیا گیا ہے۔

3.9 نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ اس حصے میں نلکی محدود استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی جائے گی۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \Delta_{S_{\text{سامنے}}} &= -\Delta \rho \Delta z a_\phi \\ \Delta_{S_{\text{پچھے}}} &= +\Delta \rho \Delta z a_\phi \\ \Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta \rho}{2}\right) \Delta \phi \Delta z a_\rho \\ \Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta \rho}{2}\right) \Delta \phi \Delta z a_\rho \\ \Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho \Delta \phi \Delta \rho a_z \\ \Delta_{S_{\text{نیچے}}} &= -\rho \Delta \phi \Delta \rho a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔ نلکی محدود میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔ اس فرق کی بنا پر نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات قدر مختلف حاصل ہوگی۔ چھوٹی حجم کے وسط میں

$$(3.34) \quad D = D_{\rho 0} a_\rho + D_{\phi 0} a_\phi + D_{z 0} a_z$$

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$D_{\text{سامنے}} = \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_{\phi}$$

$$D_{\text{پچھے}} = \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_{\phi}$$

$$D_{\text{بائیں}} = \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_{\rho}$$

$$D_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_{\rho}$$

$$D_{\text{اوپر}} = \left(D_{z 0} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_z$$

$$D_{\text{نیچے}} = \left(D_{z 0} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} = \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left. \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \right|_N = D_{\rho} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \Big|_N = D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$(3.35) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نکلی محدود میں پھیلاؤ دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہرگز حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے باوجود نکلی محدود میں بھی پھیلاؤ کے عمل کو $\nabla \cdot \mathbf{D}$ سے ہی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$(3.36) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

لیا جاتا ہے۔

3.10 پھیلاؤ کی عمومی مساوات

کارٹیزی محدود میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاؤ کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نکلی محدود میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاؤ کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی عمومی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے جو تمام محدود کے لئے کارآمد ہے۔

کارٹیزی محدود کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نکلی محدود کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدود کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدود¹⁸ استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور تین عمودی اکائی سمتیات (a_u, a_v, a_w) ہیں۔ عمومی محدود کسی بھی محدود کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارٹیزی محدود کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہوگا۔

شکل میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدود کے تین اطراف

$$dL_1 = k_1 du$$

$$dL_2 = k_2 dv$$

$$dL_3 = k_3 dw$$

ہیں۔ کارٹیزی محدود میں $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $dL_1 = dx$ کے برابر ہوگا۔ نکلی محدود میں

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = \rho$$

$$k_3 = 1$$

(3.37)

جبکہ کروی محدود میں

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = r$$

$$k_3 = r \sin \theta$$

(3.38)

کے برابر ہیں۔ اسی طرح تین سمتی رقبے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 \mathbf{a}_u \\ dL_1 dL_3 \mathbf{a}_v \\ dL_1 dL_2 \mathbf{a}_w \end{aligned}$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آنے سامنے سطحوں پر بہاؤ حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر D کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاؤ حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاؤ سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاؤ حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاؤ

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} \\ dL_1 dL_3 D_{v0} \\ dL_1 dL_2 D_{w0} \end{aligned}$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ سامنے} \\ -dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ پیچھے} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ سامنے} \\ -k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ پیچھے} \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاؤ کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) du dv dw$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$\begin{aligned} dh &= dL_1 dL_2 dL_3 \\ &= k_1 k_2 k_3 du dv dw \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right] du dv dw$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right] = \lim_{dh \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{dh}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف ہے۔ یوں پھیلاؤ کی عمومی مساوات

$$(3.39) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) \right]$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.39 سے نکلی اور کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.37 کے استعمال سے نکلی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho D_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z) \end{aligned}$$

نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.38 کے استعمال سے کروی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta D_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta D_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r D_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi) \end{aligned}$$

کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاؤ

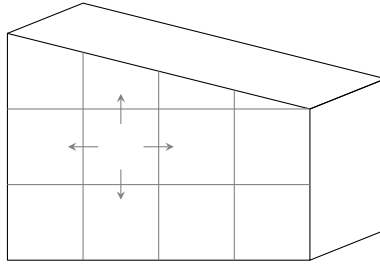
صفحہ 65 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

لکھتے ہوئے

$$(3.42) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \nabla \cdot \mathbf{D} \, dh$$

لکھا جاسکتا ہے جو مسئلہ پھیلاؤ¹⁹ بیان کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاؤ \mathbf{D} کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاؤ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ پھیلاؤ کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے باآسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاؤ قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاؤ ثابت ہوتی ہے لہذا دونوں کا مجموعی بہاؤ حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاؤ رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاؤ کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاؤ کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاؤ سے ہی جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے D سے پھیلاؤ کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروئی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ہوتا ہے۔ کروئی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لا محدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہوگی۔

باب 4

توانائی اور برقی دباؤ

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ dL طے کرنے سے

$$dW = F dL$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام¹ کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned} dW &= F \cos \alpha dL \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $F \cos \alpha dL$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ لکھا گیا ہے۔

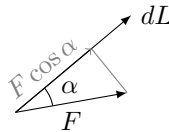
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $F_G = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{a}_r$ پایا جاتا ہے² جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $F_G = -mga_r$ لکھا جاسکتا ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h \mathbf{a}_r$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \Delta h \mathbf{a}_r = mg \Delta h$$

¹work
² \mathbf{a}_r اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہو گی۔ کام کرنے کے لئے درکار توانائی کیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے محففی توانائی³ کہتے ہیں۔ اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور محففی توانائی مکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = - \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ اختیار کردہ راستے کا محففی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین محففی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان⁴ کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ برقی میدان E میں چارج q پر قوت $F_E = qE$ عمل کرتا ہے۔ چارج کو فاصلہ dL ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\mathbf{F}_{\text{بیرونی}} = -\mathbf{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$(4.1) \quad dW = -qE \cdot dL$$

کام⁵ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$(4.2) \quad W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

توانائی درکار ہو گی۔

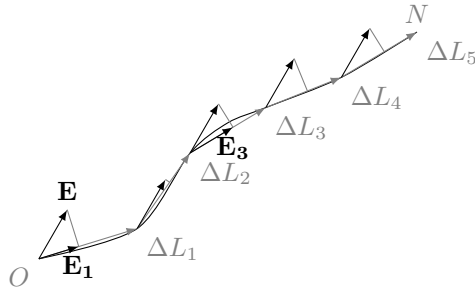
4.2 لکیری تکملہ

کار ہے۔

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں یکساں⁶ اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان E میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں E کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots$ میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں ΔL_1 کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -qE \cdot \Delta L_1$ توانائی درکار ہو گی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$(4.3) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \Delta L_1 - qE \cdot \Delta L_2 - qE \cdot \Delta L_3 - qE \cdot \Delta L_4 - qE \cdot \Delta L_5 \\ &= -qE \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5) \end{aligned}$$



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

لکھی جاسکتی ہے۔ تو سین میں بند $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ L_{ON} ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.4) \quad W = -qE \cdot L_{ON}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے dL بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو مکمل کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.5) \quad W = \int_O^N -qE \cdot dL$$

چونکہ q اور E کی قیمتیں مستقل ہیں لہذا انہیں مکمل کے باہر لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$(4.6) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \int_O^N dL \\ &= -qE \cdot L_{ON} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q ، E اور L_{ON} پر ہے جہاں L_{ON} نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

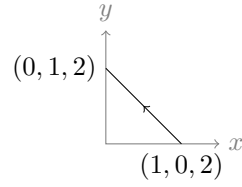
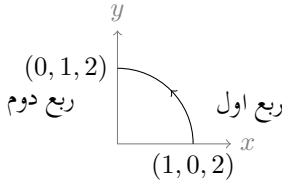
مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z \quad \frac{V}{m}$$

میں $N_1(1, 0, 2)$ سے $N_2(0, 1, 2)$ تک سیدھی لکیر پر 0.1 کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان⁷

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$



شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

ہے لہذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں لکیر کی مساوات

$$(4.7) \quad y = -x + 1$$

ہے۔ کار تیزی محدود میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$(4.8) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} [(y+z)a_x + (x+z)a_y + (x+y)a_z] \cdot (dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ &= -0.1 \int_1^0 (y+z) dx - 0.1 \int_0^1 (x+z) dy - 0.1 \int_2^0 (x+y) dz \end{aligned}$$

آخری قدم پر مکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں مکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں مکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں $(y+z)$ کا مکمل x کے ساتھ ہے لہذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یوں پہلا مکمل

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 [y+z] dx &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2] dx \\ &= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^0 \\ &= 0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا مکمل y کے ساتھ ہے لہذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔ سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 [x+z] dy &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2] dy \\ &= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y \right) \Big|_0^1 \\ &= -0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

ہو گا۔ تیسرے مکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ مکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^0 (x+y) dz = 0 \text{ J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی 0J ہوگی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے (1, 0, 2) سے (0, 1, 2) تک $\frac{V}{m}$ $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میدان میں 0.1 C کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اگائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1 \int_1^0 (y + z) dx - 0.1 \int_0^1 (x + z) dy - 0.1 \int_2^2 (x + y) dz$$

میں پہلی تکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1 - x^2}$ پُر کرنا ہوگا۔ یاد رہے کہ ربع اول⁸ میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 (y + z) dx &= -0.1 \int_1^0 (\sqrt{1 - x^2} + 2) dx \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 \\ &= -0.025\pi - 0.2 \end{aligned}$$

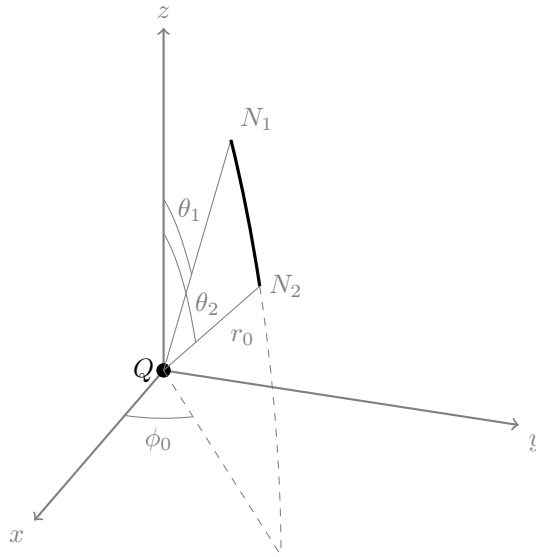
جاول، دوسرے تکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1 - y^2}$ کا استعمال ہوگا۔ یوں

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 (x + z) dy &= -0.1 \int_0^1 (\sqrt{1 - y^2} + 2) dy \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} y}{2} + \frac{y\sqrt{1 - y^2}}{2} + 2y \right) \Big|_0^1 \\ &= 0.025\pi + 0.2 \end{aligned}$$

جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x + y) dz = 0J$$

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی 0J ہوگا۔



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1, 0, 2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔
جوابات: -0.1328 J ، -0.1328 J

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.9) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہوگی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم \mathbf{a}_r یعنی E کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہذا درکار توانائی صفر کے برابر ہوگی۔ آئیں مکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(4.10) \quad \begin{aligned} dL &= dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= \rho da_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

کار تیس، نکلی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا فاصلہ دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \int_{r_0, \theta_1, \phi_0}^{r_0, \theta_2, \phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_0}^{r_0} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = 1$ کے علاوہ $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = 0$ اور $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{r_1, \theta_1, \phi_1}^{r_2, \theta_2, \phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\mathbf{E} = 3x^2yz^2\mathbf{a}_x + x^3z^2\mathbf{a}_y + 2x^3yz\mathbf{a}_z \frac{V}{m}$ میں محدود کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

• دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔

• ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی $-1200J, -1200J$ ۔

4.3 برقی دباؤ

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو برقی دباؤ کہتے ہیں۔ برقی دباؤ کے اکائی J/C کو وولٹ¹⁰ کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہذا برقی دباؤ بھی مقداری ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباؤ یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (4.11)$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B ، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ L_{ON} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباؤ V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباؤ دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔ کسی نقطے کی حتمی برقی دباؤ معنی نہیں رکھتی۔ برقی دباؤ بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔ یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ¹¹، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔ دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔ یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔ اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباؤ کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباؤ کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ ایسے نقطے کو برقی زمین¹²، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباؤ پر تصور کیا جاتا ہے۔ عموماً گرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباؤ، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہوگا جبکہ گھریلو برقی دباؤ مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباؤ ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً گرہ ارض کی برقی دباؤ کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔ طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔ یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو گرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے گرہ ارض کی برقی دباؤ حاصل کی جائے گی۔

ہمہ محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔ اسی طرح کر دی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباؤ حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباؤ V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباؤ V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباؤ

(4.12)

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

ہوگا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہوگی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

4.4 نقطہ چارج کی برقی دباؤ

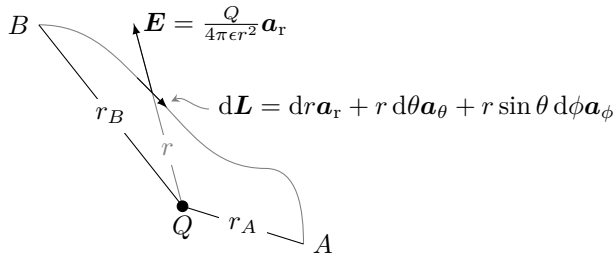
شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔ Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی dL پر اوسط برقی میدان $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ ہوگا۔ یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned} dW &= -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot (dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi) \\ &= -\frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

توانائی درکار ہوگی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباؤ۔

$$(4.13) \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نہ کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباؤ مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی $r_B = \infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty} = 0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$(4.14) \quad V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پہ اتفاق کے بعد برقی دباؤ کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہذا برقی دباؤ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.15) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

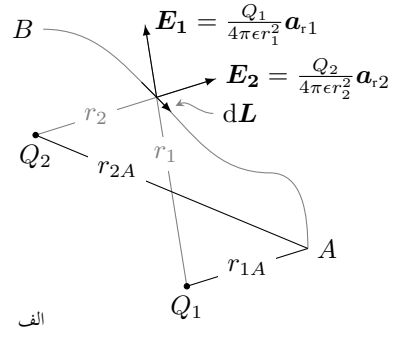
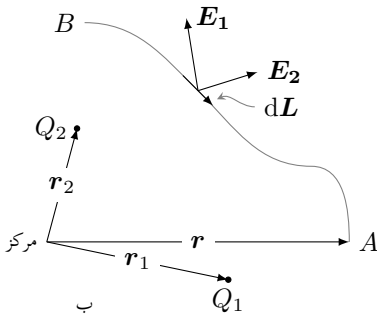
جو کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباؤ V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباؤ مقداری ہے لہذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباؤ تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح¹³ کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہوگی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.5 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ

شکل 4.6- الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پہنچائی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{a}_{r1}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ اسی



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباؤ۔

طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{a}_{r2}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_2 اس محدود کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان E_1 اور E_2 دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $E = E_1 + E_2$ ہو گا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی dL پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$(4.16) \quad dL = dr_1 \mathbf{a}_{r1} + r_1 d\theta_1 \mathbf{a}_{\theta1} + r_1 \sin \theta_1 d\phi_1 \mathbf{a}_{\phi1}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$(4.17) \quad dL = dr_2 \mathbf{a}_{r2} + r_2 d\theta_2 \mathbf{a}_{\theta2} + r_2 \sin \theta_2 d\phi_2 \mathbf{a}_{\phi2}$$

لکھا جائے گا۔ dL فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} dW &= -q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{L} \\ &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{a}_{r1} \cdot d\mathbf{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{a}_{r2} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ اس مساوات میں $\mathbf{a}_{r1} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت dL کی قیمت مساوات 4.16 سے لیتے ہوئے dr_1 ملتا ہے۔ اسی طرح $\mathbf{a}_{r2} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کرتے وقت dL کی قیمت مساوات 4.17 سے لیتے ہوئے dr_2 ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$dW = -\frac{qQ_1 dr_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2 dr_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W &= \int_B^A dW = -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{dr_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}} \right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ نقطہ B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباؤ

$$(4.18) \quad V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.18 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.18 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباؤ کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباؤ علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدود کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ r_1 جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ r_2 اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ r ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.18 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.19) \quad V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} \right)$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|r - r_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|r - r_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.19

$$(4.20) \quad \begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{Q_n}{|r - r_n|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j^n \frac{Q_j}{|r - r_j|} \end{aligned}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(r)$ میں r سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.20 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.21) \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_h(r_1)\Delta h_1}{|r - r_1|} + \frac{\rho_h(r_2)\Delta h_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{\rho_h(r_n)\Delta h_n}{|r - r_n|} \right)$$

جہاں r کو کثافت کا آزاد متغیر لیتے ہوئے مقام r_j پر کثافت کو $\rho_h(r_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی مکمل حاصل ہوتا ہے۔

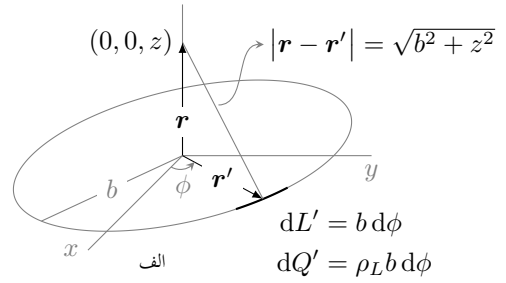
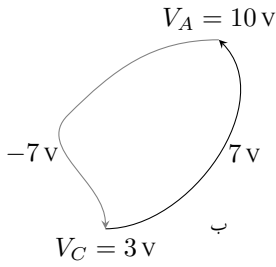
$$(4.22) \quad V(r) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(r') dh'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔ مقام r' پر چھوٹی حجم dh' میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(r') dh'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.22 نقطہ r پر برقی دباؤ دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ r تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(r)$ برابر توانائی درکار ہوگی۔

اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_s یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.23) \quad V(r) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_s(r') dS'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

$$(4.24) \quad V(r) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے Z محدد پر پیدا برقی دباؤ۔ (ب) بند دائرے کی برقی دباؤ صفر ہے۔

لکھتے۔ ان مساوات میں dh' ، dS' اور dL' غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔ تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ $N(0, 0, z)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروی نظام کارڈاس r اور نکلی محدد کارڈاس ρ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پر r' کے مقام پر چھوٹی لکیر $dL' = b d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ برقی دباؤ r پر درکار ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|r' - r| = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 4.24 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0, 0, 0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ ولٹ کا برقی دباؤ پایا جائے گا۔

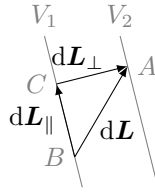
مساوات 4.2 میں B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتیٰ برقی دباؤ یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$V_C = - \int_{\infty}^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس ولٹ جبکہ V_C تین ولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات ولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7V$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات ولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7V$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباؤ میں سات ولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباؤ میں سات ولٹ ہی کمی رونما ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباؤ میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$



شکل 4.8: برقی دباؤ کی ڈھلان برقی میدان ہے۔

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے مکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جاسکتا ہے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (4.25)$$

جہاں مکمل کے نشان پر گول دائرہ بند مکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.25 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان¹⁴ کے لئے درست ہے۔ اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان¹⁵ کہتے ہیں۔ ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان¹⁶ ہے۔ یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے محض توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر محض توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہوگی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی محض توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.6 برقی دباؤ کی ڈھلان

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوه سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ ہم قوه سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوه سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ dL لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباؤ میں $-E \cdot dL$ تبدیلی رونما ہوگی جہاں برقی میدان کو E لکھا گیا ہے۔

$$dV = V_2 - V_1 = -E \cdot dL \quad (4.26)$$

چھوٹی لمبائی dL پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا ہم B سے C اور پھر A بھی جاسکتے تھے۔ B سے C تک فاصلے کو dL_{\parallel} جبکہ C سے A تک فاصلے کو dL_{\perp} لکھتے ہوئے

$$dV = -E \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp}) \quad (4.27)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ E کو ہم قوه سطح کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \quad (4.28)$$

static electric field¹⁴
conservative field¹⁵

¹⁶ یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولود اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔ اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔ آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔

جس سے

$$(4.29) \quad dV = -(E_{\parallel} + E_{\perp}) \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp}) = -E_{\parallel} dL_{\parallel} - E_{\perp} dL_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں E_{\parallel} اور dL_{\parallel} کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\parallel} \cdot dL_{\parallel} = E_{\parallel} dL_{\parallel}$ لکھا گیا ہے جبکہ E_{\parallel} اور dL_{\perp} کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\parallel} \cdot dL_{\perp} = 0$ ہے۔ اس مساوات کا پہلا جزو $E_{\parallel} dL_{\parallel}$ اور C کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے۔ ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباؤ نہیں پایا جاتا یعنی $E_{\parallel} dL_{\parallel} = 0$ صفر کے برابر نہیں ہے لہذا کسی بھی قوہ سطح پر

$$(4.30) \quad E_{\parallel} = 0$$

ہوگا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$(4.31) \quad E = E_{\perp}$$

یوں

$$(4.32) \quad dV = -E_{\perp} dL_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں E_{\perp} کی جگہ E لکھتے ہیں۔

$$(4.33) \quad dV = -E dL_{\perp}$$

اس مساوات سے

$$(4.34) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$(4.35) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباؤ کو حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہذا اسے $V(x, y, z)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات x, y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x, y, z)$ کا تفرق

$$(4.36) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی برقی دباؤ کو

$$(4.37) \quad E = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$(4.38) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.39) \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $dy = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x} dx = -E_x dx$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہوگی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جاسکتا ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.40)$$

لکھا جاسکتا ہے جسے مساوت 4.37 میں پُر کرتے

$$E = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z\right) \quad (4.41)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{کارتیسی محدد میں ڈھلان کی مساوات} \quad (4.42)$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$E = -\nabla V \quad (4.43)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباؤ کی ڈھلان¹⁷ پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.42 کا بائیں ہاتھ ڈھلان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلان کا عمل برقی دباؤ اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 69 پر مساوات 3.32 پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری¹⁸ حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاؤ کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (4.44)$$

4.6.1 نلکی محدد میں ڈھلان

نلکی محدد میں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباؤ $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.36، مساوات 4.37 اور مساوات 4.38 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

¹⁷ gradient

¹⁸ طلباء و طالبات عموماً ڈھلان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاؤ کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

$$(4.45) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$(4.46) \quad \mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z$$

$$(4.47) \quad d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

جہاں چھوٹی لمبائی $d\mathbf{L}$ کو صفحہ 27 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.48) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - (E_\rho d\rho + E_\phi \rho d\phi + E_z dz)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $d\phi = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho$ اور $E_\rho d\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا $d\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = -E_\rho d\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho d\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھے جاسکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$(4.49) \quad \begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

انہیں مساوات 4.46 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.50) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.43 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدود میں ڈھلان کی مساوات

$$(4.51) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{نلکی محدود میں ڈھلان کی مساوات}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.42 اور مساوات 4.51 کا موازنہ کریں۔ کارٹیزی محدود کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.6.2 کروی محدود میں ڈھلان

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدود میں چھوٹی لمبائی $d\mathbf{L}$ کی مساوات ہے۔ کروی محدود میں کسی بھی نقطے کے برقی دباؤ کو $V(r, \theta, \phi)$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح \mathbf{E} کو تین عمودی حصوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.36، مساوات 4.37 اور مساوات 4.38 کو کروی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.52) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$(4.53) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$(4.54) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.26 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.55) \quad \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = - \left(E_r dr + E_\theta r d\theta + E_\phi r \sin \theta d\phi \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r} dr$ اور $-E_r dr$ تبدیل ہوں گے۔ یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r} dr = -E_r dr$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta &= -E_\theta r d\theta \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi &= -E_\phi r \sin \theta d\phi \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.53 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.56) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

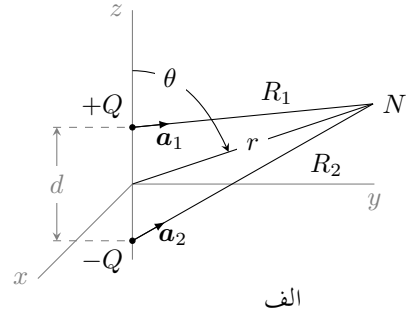
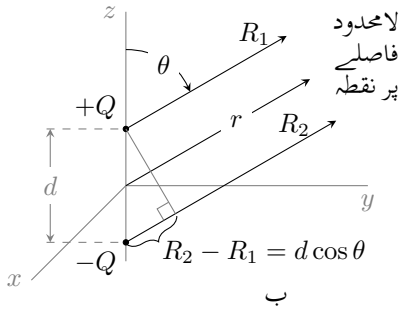
لکھا جاسکتا ہے جس سے کروی محدود میں ڈھلان کی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(4.57) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad \text{کروی محدود میں ڈھلان کی مساوات}$$

مشق 4.3: صفحہ 71 پر حصہ 3.10 میں پھیلاؤ کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ لئے گئے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{a}_u + \frac{1}{K_2} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{a}_v + \frac{1}{K_3} \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{a}_w \quad \text{ڈھلان کی عمومی مساوات}$$



شکل 4.9: جفت قطب

مثال 4.4: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.56 کے استعمال سے کروی محد میں E کی مساوات حاصل کریں۔

حل: برقی دباؤ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہذا مساوات 4.56 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔ اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.7 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محد کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محد پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔ یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ ایسی جوڑی چارجوں کو جفت قطب¹⁹ کہا جاتا ہے۔ ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباؤ کی قیمتیں درکار ہیں۔ کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔ دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔ نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔ آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباؤ اور برقی میدان حاصل کریں۔

شکل 4.9-ب میں R_1 ، R_2 اور r تینوں z محد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 R_2 - R_1 &= d \cos \theta \\
 R_1 &= r - \frac{d}{2} \cos \theta \\
 R_2 &= r + \frac{d}{2} \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباؤ V مساوات 4.19 کی مدد سے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 4.58 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d \cos \theta}{\left(1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta\right)} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نیچے قوسین میں $1 \leq \cos \theta \leq 1$ اور $r \gg d$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \gg 1$ ہوگا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.59) \quad V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.56 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$(4.60) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

ہم پہلے برقی دباؤ اور پھر ڈھلان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر مکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.5 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباؤ حاصل کئے گئے ہیں۔

مثال 4.5: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کریں۔

صفحہ 24 پر مثال 1.8 میں $\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{a}_1$ اور $\mathbf{R}_2 = R_2 \mathbf{a}_2$ سمتیوں کو کروئی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{R}_2 &= \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \end{aligned}$$

جس سے $R_1 = |\mathbf{R}_1| = \sqrt{\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2} \sin \theta\right)^2} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}} \\ &\approx r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta} \quad (d \ll r) \end{aligned}$$

آخری قدم پر $r \ll d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r} \cos \theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.61 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right)^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta + \dots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.62) \quad R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$(4.63) \quad R_2^3 = r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 42 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2}{R_2^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left[\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{\left[\left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)\mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta}{\left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)\left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $\left(1 - \frac{9d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \approx 1\right)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$(4.64) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.60 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.64 سے نقطہ $N_0(r, \theta, \phi)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty, \theta', \phi')$ سے کروئی محد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r, \theta', \phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r, \theta, \phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r, \theta, \phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروئی محد میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$(4.65) \quad dL = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا N_2 پر برقی دباؤ

$$\begin{aligned} V_{23} &= - \int_{N_3}^{N_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot d\mathbf{a}_r}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{2 \cos \theta dr}{r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{\infty, \theta', \phi'}^{r, \theta', \phi'} = \frac{Qd \cos \theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ ہم اس راستے $dr = 0$ اور $d\phi = 0$ رکھتے ہیں لہذا

$$\begin{aligned} V_{12} &= - \int_{N_2}^{N_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r d\theta \mathbf{a}_\theta}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{\sin \theta d\theta}{r^2} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \Big|_{r, \theta', \phi'}^{r, \theta, \phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\cos \theta - \cos \theta')}{r^2} \end{aligned}$$

ہو گا۔ اب N_1 سے N چلتے ہیں۔ اس راستے $dr = 0$ اور $d\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہذا

$$V_{01} = - \int_{N_1}^{N_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ اور $\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کی بدولت مکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔ یوں V_{12}, V_{23} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباؤ

$$(4.66) \quad V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.59 ہی ہے۔

