

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیاں	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
155	پوٹن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
187	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
191	گردش	7.3
198	نلکی محدد میں گردش	7.3.1
204	عمومی محدد میں گردش کی مساوات	7.3.2
205	کروی محدد میں گردش کی مساوات	7.3.3
206	مسئلہ سٹوکس	7.4
210	مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	7.5
216	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
221	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
222	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
223	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
227	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
227	متحرک چارج پر قوت	8.1
228	تفرقی چارج پر قوت	8.2
231	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
232	قوت اور مروڑ	8.4
237	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
238	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
241	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
242	مقناطیسی دور	8.8
245	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
246	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
250	مشترکہ امالہ	8.11

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی مکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	برقی و مقناطیسی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوٹنٹنگ سمتیہ
289	10.4	موصل میں امواج
295	11	سوالات

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدان یعنی میدانوں پر غور کیا گیا۔ یہاں سے آگے اس کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

دونے اصول پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ قانون فیراڈے¹ کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(9.1) \quad \text{محرك برقی دباو} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی بند راہ سے گزرتی مقناطیس بہاؤ میں تبدیلی اس راہ پر برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباؤ روایتی طور پر محرک برقی دباؤ² پکاری جاتی ہے۔ محرک برقی دباؤ کی قیمت وقت کے ساتھ بند راہ سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کے تبدیلی کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباؤ کی اکائی وولٹ V ہے۔ ضروری نہیں کہ بند راہ موصل مادے کی ہی ہو، یہ فرضی بند لکیر بھی ہو سکتی ہے۔

محرک برقی دباؤ مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو، بند راہ میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی جس کی سمت، راہ میں پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ کے سمت، کی الٹ ہوتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے کہ بند راہ میں محرک برقی دباؤ سے پیدا برقی رو ایسا مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتی ہے جو پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ کے الٹ سمت رکھتی ہے۔ اس اصول کو لینز⁴ کا اصول کہا جاتا ہے۔

کسی بھی بند راہ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

Faraday's law¹
electromotive force, emf²

³ محرک برقی دباؤ کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباؤ کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔

⁴ یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔

Lenz's law⁵

- وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی کثافت مقناطیسی بہاؤ جو ساکن بند راہ سے گزرتی ہو۔
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند راہ کا آپس میں اضافی حرکت۔
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند راہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاؤ گزرتی ہو تب فیڑے کے قانون کو

$$(9.2) \quad \text{محرك برقي دباو} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

برقی دباؤ کے طرز پر محرک برقی دباؤ کی تعریف

$$(9.3) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

لکھی جاتی ہے جہاں مکمل پورے بند راہ پر لینا لازم ہے۔ برقی دباؤ کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت (−) لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباؤ بند راہ پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 97 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل اس راہ پر پیدا محرک برقی دباؤ دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$(9.4) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاؤ B کا سطحی مکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند راہ کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں راہ پر چلنی کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا راہ سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہو گا۔ مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباؤ سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند راہ میں محرک برقی دباؤ پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے راہ کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباؤ پر غور کریں۔

ساکن راہ کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر B ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جایا جاسکتا ہے یعنی

$$(9.5) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح S ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند راہ ہو۔ یوں ہم دونوں جانب مختلف سطحیں لے سکتے ہیں جب تک دونوں سطحوں کے سرحد بھی بند راہ ہو۔ اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب مکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی سطح dS کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یعنی

$$(9.6) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی مکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$(9.7) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ ٹکلی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$(9.8) \quad B = B_0 e^{kt} a_z \quad (\rho < \rho_2)$$

کثافت مقناطیسی بہاؤ پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کی گول راہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے راہ پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہذا مساوات 9.5 سے

$$2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi\rho_1^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$(9.9) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

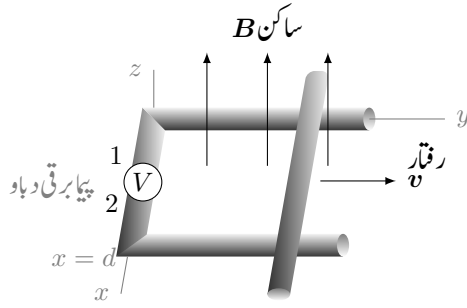
لکھی جاسکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف a_z جزو پایا جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمیل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

یعنی

$$(9.10) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس راہ پر a_ϕ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو a_z کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند راہ حرکت کر رہی ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباؤ ناپنے کی آلہ، یعنی پیمائش برقی دباؤ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند راہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیمائش برقی دباؤ نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاؤ B بند راہ کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت B کی صورت میں B کی سمت ہی بند راہ سے گھیری گئی سطح کی سمت ہوگی اور بند راہ کی سمت گھڑی کے الٹ ہوگی۔ یوں راہ کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاؤ

$$\Phi = Bdy = Bdv$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$$

محرک برقی دباؤ پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباؤ $E \cdot dL$ کو کہتے ہیں لہذا مندرجہ بالا جواب راہ پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔ پینا برقی دباؤ کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہذا تکمل کی قیمت پینا برقی دباؤ پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پینا برقی دباؤ کی لمبائی کو dL لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $E \cdot dL = -Bdv$ ہونا ہو گا۔ چونکہ $dL = dLa_x$ کے برابر ہے لہذا E کی سمت a_x کے الٹ ہو گی۔ یوں پینا برقی دباؤ پر E کی سمت پینا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پینا پر برقی دباؤ کا مثبت سراپینا کا دوسرا سرا ہے۔

پینا کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو a_z کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباؤ تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$F = Qv \times B$$

یا حرکی شدت $E_{حرکی}$

$$(9.11) \quad E_{حرکی} = \frac{F}{Q} = v \times B$$

عمل کرتی ہے۔ حرکی شدت a_x سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر a_x کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-a_x$ ۔ جانب برقی میدان کی شدت E پیدا کرے گا۔ الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ E اور $E_{حرکی}$ برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکی برقی دباؤ

$$(9.12) \quad \oint E_{حرکی} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$

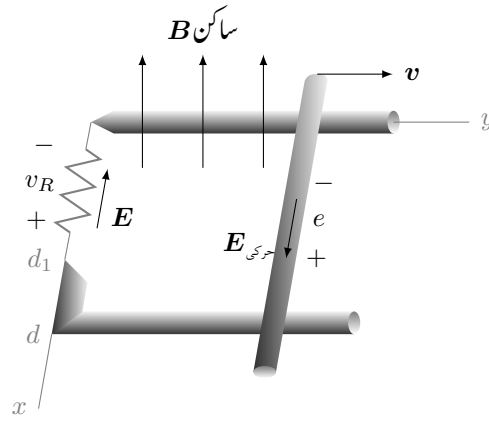
سے حاصل ہو گی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند راہ کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہذا محرک برقی دباؤ صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_a^0 vB dx = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ B اذ خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہذا ابھی کل محرک برقی دباؤ ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند راہ میں محرک برقی دباؤ حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $E_{حرکی}$ کے استعمال سے محرک برقی دباؤ یوں

$$(9.13) \quad \oint E \cdot dL = \oint E_{حرکی} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$



شکل 9.2: محرک برقی دباؤ اور برقی دباؤ کا موازنہ۔

حاصل کی جاسکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباؤ کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباؤ

$$(9.14) \quad \text{محرک برقی دباؤ} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

سے حاصل ہوگی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباؤ} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیا برقی دباؤ کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباؤ کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.11 محرک سلاخ پر پیدا ہونے والی \mathbf{E} دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُزلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباؤ v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت \mathbf{E} پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پرلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

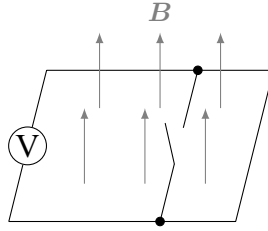
آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\mathbf{E} = -E\mathbf{a}_x$ سے برقی دباؤ v_R یوں

$$(9.15) \quad v_R = - \int_0^{d_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{d_1} E dx = Ed_1$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\mathbf{E}_{حرکی} = E\mathbf{a}_x$ سے حرکی دباؤ e یوں

$$(9.16) \quad e = \oint \mathbf{E}_{حرکی} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d \mathbf{E}_{حرکی} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d E_{حرکی} dx = E_{حرکی} d$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباؤ کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباؤ کے بند تکمیل میں راہ کے بقایا اطراف پر تکمیل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمیل لیا گیا ہے۔



شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند راہ سے بی پیدا ہو سکتی ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند راہ کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند راہ میں مقناطیسی بہاؤ کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند راہ کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $B = 0.5a_z$ ٹسلا، رفتار $100ya_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21} ،
- پیمائش برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $10 \mu A$ ، $100 V$ ، $4.017 \frac{m}{s}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$(9.17) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمیل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.18)$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاؤ ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.19)$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.18 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.18 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.18 میں نا معلوم جزو G کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.18 یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

لکھی جائے گی۔ آئیں دوبارہ اس کی پھیلاؤ حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔ اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \mathbf{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

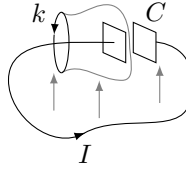
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.20)$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔ جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.20 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ کی بعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بعد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو⁸ کا نام دیا اور \mathbf{J}_d سے ظاہر کیا یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$(9.21) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$(9.22) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

شامل ہیں۔ مساوات 9.20 میں \mathbf{J} سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج \mathbf{H} کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\mathbf{J} = 0$ ہوتا ہے لہذا غیر موصل میں

$$(9.23) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہو گا۔ مساوات 9.23 اور مساوات 9.17 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

مقناطیسی شدت \mathbf{H} اور برقی شدت \mathbf{E} کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو \mathbf{D} اور کثافت بہاؤ \mathbf{B} بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی عمل

$$(9.24) \quad I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

سے حاصل ہو گی۔ مساوات 9.20 کے سطحی عمل

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$(9.25) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے اینپیسٹر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دو سرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان \mathbf{B} محرک برقی دباؤ

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔ یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega CV_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں ϵ, S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔ آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند راہ k پر ایمپیسر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

اب بند راہ k اور اس راہ پر \mathbf{H} حقیقی مقدار ہیں اور مکمل سے حاصل رو I_k اس راہ سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔ یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔ کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہذا

$$I_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S I_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہوگی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیسر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔ اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مشق 9.2: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔ اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔ پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

$$\text{حل: } I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t \text{ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح } \frac{I_d}{I_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16} \text{ ہے۔}$$

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$(9.26) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اور

$$(9.27) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$(9.28) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

$$(9.29) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.28 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند راہ پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا ناتو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور ناتو یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.29 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاؤ کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاؤ ناتو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور ناتو یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا ایک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاؤ اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$(9.30) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$(9.31) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$(9.32) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$(9.33) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کی جگہ

$$(9.34) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$(9.35) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$(9.36) \quad \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

اور

$$(9.37) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

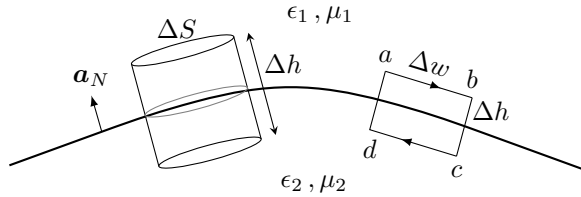
لکھا جاسکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$(9.38) \quad \mathbf{F} = \rho_h (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباؤ \mathbf{V} اور سمتی مقناطیسی دباؤ \mathbf{A} انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل

مساوات 9.26 کے سطحی کھل پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کرتے ہوئے فیڈے کا قانون

$$(9.39) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 9.27 اسی طریقہ کار سے امپیر کا دوری قانون

$$(9.40) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے لئے گاؤس کے قوانین مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کے تمام حجم پر حجمی کھل اور مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

$$(9.41) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \rho_h dh$$

اور

$$(9.42) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا چار مساوات سے \mathbf{E} ، \mathbf{H} اور \mathbf{B} کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل راہ پر مساوات 9.39 کے اطلاق سے

$$(E_{m1} - E_{m2}) \Delta w = - \frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد راہ کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔ اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے۔ ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$(9.43) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

یعنی

$$(9.44) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی dL پر برقی رو کو $I = K \cdot dL$ لکھی جاسکتی ہے۔ یوں شکل 9.5 میں مستطیل راہ پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2}) \Delta w = K_{\perp} \Delta w + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں K_{\perp} سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے لہذا اس جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(9.45) \quad H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$(9.46) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_{\perp}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو K صفر ہوتی ہے۔ لہذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$(9.47) \quad H_{m1} = H_{m2}$$

ہوگا۔ صفحہ 241 پر شکل 8.8 میں سطحی کثافت برقی رو K دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.41 اور مساوات 9.42 سے سرحدی عمودی شرائط

$$(9.48) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$$

اور

$$(9.49) \quad \mathbf{a}_N \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر J محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$(9.50) \quad \mathbf{E} = 0$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$(9.51) \quad \mathbf{H} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود J کی قیمت

$$(9.52) \quad \mathbf{J} = 0$$

حاصل ہوتی ہے لہذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو K ممکن ہے۔ یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.43 تا مساوات 9.49 سے

$$(9.53) \quad E_{m1} = 0$$

$$(9.54) \quad H_{m1} = 0$$

$$(9.55) \quad D_{n1} = \rho_s$$

$$(9.56) \quad B_{n1} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو K صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔ کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.53 تا مساوات 9.56 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت بغیر سرحد کے خطے میں لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔ اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔ میکس ویل مساوات کا یہ سب سے آسان استعمال ہے چونکہ ان میں کسی قسم کے سرحدی شرائط لاگو نہیں ہوتے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں تاخیری دباو⁹ کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج¹⁰ کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$(9.57) \quad V = \int_h \frac{\rho_h dh}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{برقی سکون})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو A کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$(9.58) \quad A = \int_h \frac{\mu J dh}{4\pi R} \quad (\text{یک سمتی رو})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$(9.59) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$(9.60) \quad \nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{یک سمتی رو})$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$(9.61) \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad (\text{برقی سکون})$$

اور گردش

$$(9.62) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{ایک سمتی رو})$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور ایک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباؤ حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ہو گا۔ صفحہ 209 پر مساوات 7.62 کے تحت گردش کی پھیلاؤ لازماً صفر ہوتی ہے لہذا مساوات 9.62 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.62 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 218 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.61 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بائیں ہاتھ $\nabla \times \mathbf{E}$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.26 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.61 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.61 کے دائیں جانب متغیرہ N جمع کریں

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \mathbf{N}$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال N ایک نامعلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times \mathbf{N} \\ &= 0 + \nabla \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.62 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ہے لہذا اب ہم

$$(9.63) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.27

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.28

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ اور $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

یا

$$(9.64) \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.63 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.28 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_h$$

یا

$$(9.65) \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 سے بالترتیب مساوات 9.60 اور مساوات 9.59 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ ان سے B اور E بذریعہ مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 حاصل کئے جاسکتے ہوں۔ البتہ A اور V کو مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر A اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباؤ ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.62 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z = 0 a_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} a_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} a_z$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں A کے پھیلاؤ کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباؤ سے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ A کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے A کے حصول کے وقت مکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔ کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہوگا چونکہ کوئی بھی میدان لا محدود فاصلے پر صفر ہی ہوگا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لا محدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں A کی پھیلاؤ بیان کریں۔ ہم مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں A کے پھیلاؤ کے لئے سادہ ترین تعامل

$$(9.66) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.64

$$(9.67) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.65

$$(9.68) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔ باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(9.69) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(9.70) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(9.71) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$(9.72) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

کے برابر ہوتی ہے۔ خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔ اس سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطے N_2 پر دباؤ کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔ کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔ اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.57 کی نئی شکل

$$(9.73) \quad V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} dh$$

ہوگی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباؤ کا حصول درکار ہو۔

اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.58 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباؤ کی مساوات

$$A = \int_h \frac{\mu[J]}{4\pi R} dh \quad (9.74)$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباؤ کو تاخیری دباؤ¹¹ کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباؤ کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ہمیں ρ اور J معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.73 اور مساوات 9.74 سے V اور A حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.69 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.71 حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اگر ہمیں ρ اور J کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباؤ، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔

برقی و مقناطیسی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیل سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی¹ موج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی تعدد² کا دار و مدار چارج یا رو (یادو نوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω زاویائی تعدد³ پر سائن نمائش میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نمائش موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی⁴ کہلاتی ہے۔ سائن نمائش موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے λ ⁵ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس⁶، شعاعی انحراف⁷ اور انکسار امواج⁸ کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے

electromagnetic¹
frequency²
angular frequency³
light⁴
time period⁵
reflection⁶
refraction⁷
diffraction⁸

ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 263 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(10.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(10.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(10.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(10.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

جہاں $D = \epsilon E$ اور $B = \mu H$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات \mathbf{E} اور \mathbf{H} کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو \mathbf{J} صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہوگی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہوگی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار ہے $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیت⁹ کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہذا پہلے دوری سمتیت پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نمائندگی کی عمومی شکل

$$(10.5) \quad E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

ہے جہاں

$$(10.6) \quad \omega = 2\pi f$$

زاویائی تعدد¹⁰ اور ϕ زاویائی فاصلہ¹¹ ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x, y, z اور ω کا تابع تفاعل¹² ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز¹³ ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

⁹ phasor
¹⁰ angular frequency
¹¹ phase angle
¹² dependent function
¹³ Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل¹⁴ کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد¹⁵ ہے۔ آزاد متغیرہ $\psi + \omega t$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جاسکتا ہے جو حقیقی¹⁶ اور خیالی¹⁷ اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل¹⁸ ہے۔ یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t + \psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد¹⁹ ہے۔ ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہوگا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

Euler's identity¹⁴
imaginary number¹⁵
real¹⁶
imaginary¹⁷
complex function¹⁸
complex frequency¹⁹

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔ اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(10.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(10.8) \quad \nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$(10.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$(10.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$(10.11) \quad \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \gamma^2 \mathbf{E}_s$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(10.12) \quad \gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)}$$

حرکی مستقل²⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$(10.13) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(10.14) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتیہ پلم ہولٹز مساوات^{22 21} کہلاتی ہے۔ کارتیسی محدود میں بھی سمتیہ پلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔ کارتیسی محدود میں اس کی x مساوات

$$(10.15) \quad \nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs}$$

²⁰propagation constant
²¹vector Helmholtz equation

²²ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

یعنی

$$(10.16) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں ناتوا x اور ناہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$(10.17) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$(10.18) \quad E_{xs} = Ae^{-\gamma z}$$

اور

$$(10.19) \quad E_{xs} = Be^{\gamma z}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$E_x = \left[Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha + j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ = \left[Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$(10.20) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ موج کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$(10.21) \quad E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

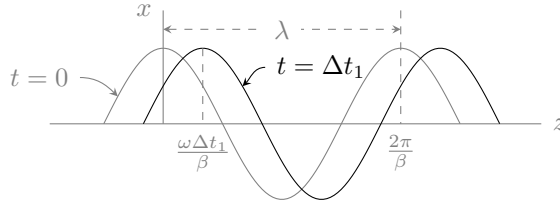
حاصل ہوتی۔

مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$(10.22) \quad E_s = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

لکھی جاسکتی ہے جو صرف \mathbf{a}_x جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے متحرک موج²³ پر اب غور کریں۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدود کے متوازی ہے۔ اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹی ہے لہذا α تقابلی مستقل²⁴ کہلاتا ہے۔ تقابلی مستقل کو نیپر²⁵ فی میٹر $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ میں ناپا²⁶ جاتا ہے۔ یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد²⁷ مقدار نیپر Np میں ہوگی۔ موج کے مساوات میں βz - زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈین²⁸ میں ناپا جاتا ہے لہذا β زاویائی مستقل²⁸ کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈین فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدود کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج²⁹ پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.23)$$

ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.24)$$

لکھا جاسکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \quad (10.25)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \quad (10.26)$$

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

²⁴attenuation constant

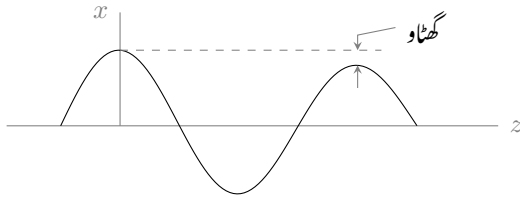
²⁵neper

²⁶تقابلی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔

²⁷dimensionless

²⁸phase constant

²⁹wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$(10.27) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$(10.28) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہوگی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{dz}{dt}$ کو کہتے ہیں لہذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

سے رفتار

$$(10.29) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہذا $\alpha = 0.001 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کی صورت میں 1 km کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $\frac{e^{-1}}{e^0} = 0.368$ گنا رہ گئی ہوگی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج E_s سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

یا

$$\mathbf{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} H_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \\ (10.30) \quad &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$(10.31) \quad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

لکھی³⁰ گئی³¹ ہے۔ اس مساوات کو

$$(10.32) \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(10.33) \quad \frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباؤ $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جاسکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R ، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_Z} = |Z| \angle \theta_Z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہوگا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہوگا۔ مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہوگا۔ اس دور میں برقی رد دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \psi - \theta_Z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی رو ایک ہی تعداد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباؤ اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| e^{j\theta_Z} = Z$$

³⁰ یونانی حروف تہجی η اپنا پڑھا جاتا ہے۔
³¹ η eta

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباؤ کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η ، قدرتی رکاوٹ³² کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$(10.34) \quad H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$(10.35) \quad \eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدود کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدود کے متوازی ہے لہذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج³³ کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 0$ ہیں لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$(10.36) \quad c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم 9×10^9 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377 \Omega \quad (10.37)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہوگی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \\ H_y = \frac{E_0}{120\pi} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور ناوقت اور ناہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہذا مساوات 10.12 سے ثابت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$(10.38) \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R \mu_0 \epsilon_R \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔ چونکہ ذو برق میں $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہوگی۔ خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$(10.39) \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$(10.40) \quad E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$(10.41) \quad H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

ہیں۔

مثال 10.1: پانی کے لئے $\epsilon_R = 80$ اور $\mu_R = 1$ $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{80}} = 0.3354 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3354 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.18 \text{ cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1 \text{ m}$ ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 56.2 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{80} = 42.15 \Omega$$

ہیں۔ امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 56.2z)$$

$$H_y = \frac{0.05}{42.15} \cos(6\pi 10^8 t - 56.2z) = 0.00119 \cos(6\pi 10^8 t - 56.2z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ جیلے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا جیلے۔

جوابات: $1.62 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور 162.1Ω ، $272.6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 23 cm ، $1.29 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برقی میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برقی پر بات کرنا ضروری ہے لہذا مقطر پانی کو مثال بناتے ہوئے 10 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔

اس تعدد پر مقطر پانی کے مستقل $\epsilon_R = 53$ ، $\mu_R = 1$ اور $\frac{\sigma}{\omega} = 20$ ہیں۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.678$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 10 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 53}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.678} \\ &= 1842.386 / 72.932^\circ \\ &= 540.8 + j1761 \quad \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تقلیلی مستقل

$$\alpha = 540.8 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{540.8}$ میٹر یعنی 1.8 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹے گئیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار³⁴ پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 1761 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $1525 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 3 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 3.57 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

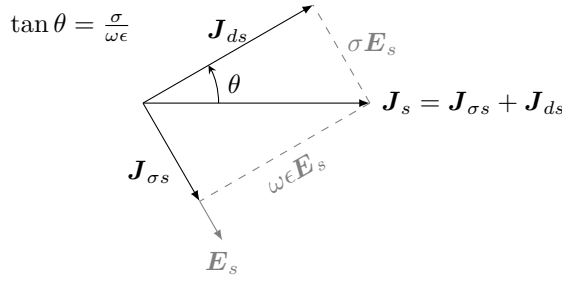
$$\eta = \frac{377}{\sqrt{53} \sqrt{1 - j0.678}} = 42.9 / 17.1^\circ = 41 + j12.6 \quad \Omega$$

ہے لہذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 17.1° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{os} + \mathbf{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت \mathbf{J}_s دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تھکون۔

رو سے 90° آگے رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کردی محدود کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (10.42)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اس تھکون کو طاقت کے ضیاع کا تھکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجٹ³⁵ یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذوبرق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذوبرق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذوبرق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی³⁶

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(-j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (10.43)$$

اور

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad (10.44)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.45)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right] \quad (10.46)$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) \quad (10.47)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا مقطر پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ مقطر پانی کے مستقل 10 GHz تعدد پر $\epsilon_R = 53$ ، $\mu_R = 1$ اور $\sigma = 20 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں لہذا مساوات 10.43 سے

$$\alpha = 517.5 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $540.8 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.44 سے

$$\beta = 1613 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $1761 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.45 سے حاصل جواب

$$\beta = 1526 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

نسبتاً زیادہ مختلف جواب ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.46 سے

$$\eta = 42.82 + j17.54$$

حاصل ہوتا ہے جو $41 + j12.6$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.47 سے حاصل جواب

$$\eta = 51.75 + j17.55$$

قدر مختلف ہے۔ مقطر پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.678 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $0.1 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات حاصل کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کاراز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تقلیلی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642 ، $1.13 \times 10^{-3} \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کا تقلیلی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، 6.9 m ، $0.095 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، 2.3 m

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ³⁷ درکار ہوگا لہذا پہلے اسے³⁸ حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کا \mathbf{E} کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ باآسانی کارتیسی محدود میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

کے ذریعہ

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

³⁷Poynting theorem

³⁸جان پیٹری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

یا

$$-\nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھ جاسکتے ہیں لہذا

$$-\nabla (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کے صحیحی مکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dh = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

پر مسئلہ پھیلاؤ کے اطلاق سے

$$(10.48) \quad -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ مکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر مکمل کی قیمت مثبت ہوگی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ مکمل منفی ہوگا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا مکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

ہوگا جہاں حجم گھیرتی سطح پر مکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ پونٹنگ سمتیہ³⁹ پکارا جاتا ہے

(10.49)

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پونٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر مکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا مکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر \mathcal{P} کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاؤ کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ \mathcal{H} برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہذا طاقت کی بہاؤ بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہوگی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت E اور H کے عمودی ہوتی ہے لہذا \mathcal{H} کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لحاظی کثافت سطحی بہاؤ طاقت

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z = \mathcal{P} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا مکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$(10.50) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{W}{m^2}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاؤ دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{مثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z, \text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad W$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$(10.51) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لیا گیا ہے۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 3.2، 3.45، 4.15 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $z = 100 \frac{V}{m}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاؤ $z = 0$ اور $z = 5 m$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 14.31 W، 23.7 W، 12.48 W، 24.7 W، 26.4 W، 27.1 W

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایضالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہوگی۔ نائیکروم⁴⁰ ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$-j = 1/\underline{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1/\underline{-90^\circ}} = 1/\underline{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.53) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جاسکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$(10.54) \quad E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.54 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$(10.55) \quad E_x = E_0 \cos \omega t \quad (z = 0)$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.55 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.54 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $1 \gg \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(10.56) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$(10.57) \quad J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 10.4 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت $E_0 \sigma$ کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.54 اور مساوات 10.57 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد⁴¹ کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.58) \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

یوں موصل میں

$$(10.59) \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف % 1.8 رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے لہذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $9.35 \text{ mm} = \frac{0.0661}{\sqrt{50}}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.135 = 0.368^2$ گنا کم ہوگی۔ خرد امواج⁴² کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد $0.661 \mu\text{m}$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت روتار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہوگی لہذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی ٹکلی نمنا تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5 cm یعنی 1.4 cm ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد موج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661 \mu\text{m}$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.59 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

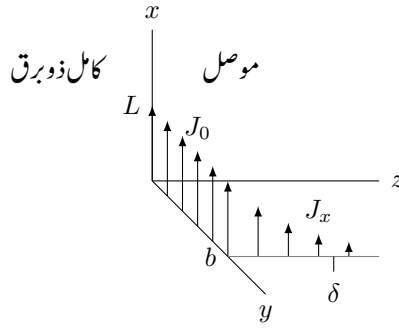
$$(10.60) \quad v = \omega\delta$$

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8 \text{ cm}$ اور $v = 2.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000 \text{ km}$ اور رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہوگی۔

موصل میں H_{y} کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہوگی۔ مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$



شکل 10.4: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی وجہ سے

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$(10.61) \quad \eta = \frac{\sqrt{2/45^\circ}}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 10.55 کو گہرائی جلد کی صورت

$$(10.62) \quad E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$(10.63) \quad H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پونٹنگ مساوات

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.4 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پونٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned} P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathcal{P}_{\text{اوسط}}|_{z=0} dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^L \frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$(10.64) \quad P_{L, \text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔

باب 11

سوالات

جدول 11.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 11.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 11.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 11.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

