برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 13

ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔ اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔ عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہو بہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔ یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

13.1 ترچھی آمد

عمودی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_\perp$

شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمد موج دکھائی گئی ہے۔ سرحد $y = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے لہٰذا y محدد، سرحد کے عمودی ہے۔ پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_i زاویہ آمد[1] بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_r زاویہ انعکاس[2] بناتی ہے۔ ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدد کے ساتھ θ_t زاویہ بناتی ہے۔ ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہٰذا θ_t اصطلاحاً زاویہ انحراف[3] کہلاتی ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

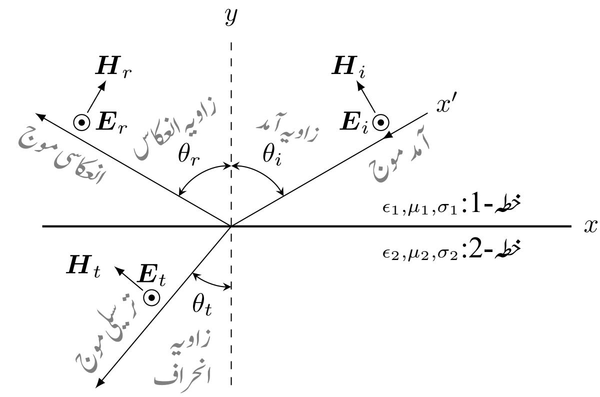
ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہو گی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہو گی۔ ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج[4] اور متوازی قطب موج[5] کہلائیں گے۔ شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔ کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

منفی z سمت میں حرکت کرتی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ میدان کی برقی موج

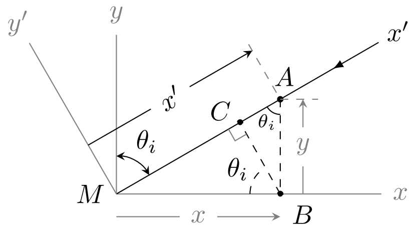
$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} e^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

---

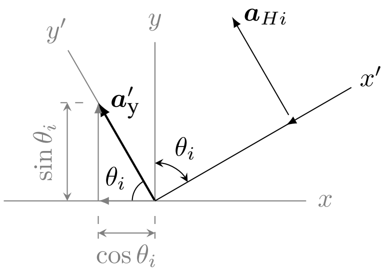
[1] incidence angle
[2] reflection angle
[3] refraction angle
[4] perpendicular polarized
[5] parallel polarized



شکل 13.1: ترچھی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ا) فاصلے کا کارتیسی محدد میں اظہار۔



(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدد میں لکھنے کا طریقہ۔

لکھی جاتی ہے۔اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات $\boldsymbol{a}_X$ سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اب $\boldsymbol{a}_X$ اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ سمت کا میدان جو z محدد کی بجائے لکیر l پر گھٹتے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a} e^{j(\omega t + \beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔اب شکل 13.1 میں $\boldsymbol{E}_i$ پر دوبارہ غور کریں۔یہ برقی میدان $\boldsymbol{a}_Z$ سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر x' پر حرکت کر رہی ہے لہٰذا اس موج کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_Z e^{j(\omega t + \beta_1 x')} \tag{13.1}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد x, y کے مرکز سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔آئیں مساوات 13.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

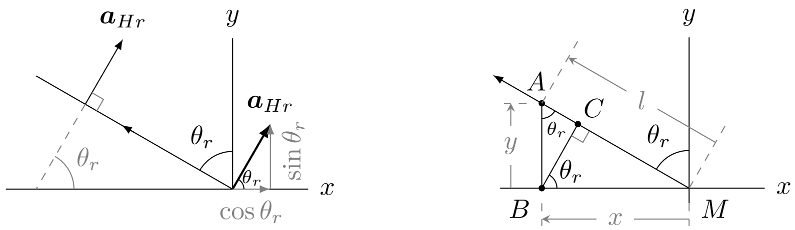
شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدد دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔اس شکل میں لکیر x' کو کارتیسی محدد x', y' کا حصہ دکھایا گیا ہے۔لکیر x' پر نقطہ A کا مرکز سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x \sin\theta_i$ اور $CA = y\cos\theta_i$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$x' = x\sin\theta_i + y\cos\theta_i \tag{13.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_Z e^{j[\omega t + \beta_1 (x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)]} \tag{13.3}$$

لکھ سکتے ہیں۔اس مساوات میں موج گھٹتے x' کی طرف رواں ہے۔



(ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔ (ا) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔برقی میدان کی سمت a_{Z} (یا a'_{Z}) ہے جہاں a_{Z} اور a'_{Z} دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_i$ کی اکائی سمتیہ a_{Hi} محدد y' کی سمت میں ہے۔یوں $a_{Hi} = a'_y$ لکھا جا سکتا ہے۔آئیں a'_{y} کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔اکائی سمتیہ a'_{y} کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لٰہذا شکل میں تکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔یوں تکون کا قاعدہ $\cos\theta_i$ اور اس کا عمود $\sin\theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$a'_{\text{y}} = -\cos\theta_i a_{\text{X}} + \sin\theta_i a_{\text{Y}} \tag{13.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} a'_{\text{y}} e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1}(-\cos\theta_i a_{\text{X}} + \sin\theta_i a_{\text{Y}}) e^{j[\omega t + \beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)]} \tag{13.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_{si} = a_{\text{Z}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = (-\cos\theta_i a_{\text{X}} + \sin\theta_i a_{\text{Y}}) \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.7}$$

مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔عین سرحد پر عمودی ($\perp$) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$\begin{aligned} \Gamma_\perp &= \frac{E_r}{E_i} \\ \tau_\perp &= \frac{E_t}{E_i} \end{aligned} \tag{13.8}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔مرکز M سے موج کا فاصلہ l لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = -x\sin\theta_r$ اور $CA = y\cos\theta_r$ کے برابر ہیں لٰہذا

$$l = -x\sin\theta_r + y\cos\theta_r \tag{13.9}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ منفی محدد پر x کی قیمت منفی ہو گی لہٰذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہو گی۔یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{sr} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1 l} \\ &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)}\end{aligned} \tag{13.10}$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے l کی جانب حرکت کی بنا پر e کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_H$ دکھائی گئی ہے جو x محدد کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔اکائی سمتیہ کو محدد کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$\boldsymbol{a}_{Hr} = \cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{13.11}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_{sr} = (\cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\Gamma_{\perp}\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)} \tag{13.12}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جا سکتے ہیں

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.13}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = (-\cos\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\tau_{\perp}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.14}$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدد کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل β_2 اور η_2 استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 264 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں $y=0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+0\cos\theta_r)} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \Gamma_{\perp}e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau_{\perp}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.15}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی x کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $x=0$ کے لئے بھی درست ہو گی۔اس میں $x=0$ پر کرنے سے

$$1+\Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \tag{13.16}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.15 میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے درست ہو گی جب مساوات میں تینوں e کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} = e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.17}$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.18}$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$\beta_2 \sin\theta_t = \beta_1 \sin\theta_r \tag{13.19}$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i$$

اور صفحہ 281 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}\sin\theta_i \tag{13.20}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\sin\theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\mu_0\epsilon_{r1}\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2}\mu_0\epsilon_{r2}\epsilon_0}}\sin\theta_i\\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}\sin\theta_i\end{aligned}$$

یا

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \tag{13.21}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}n_1 &= \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}\\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}\end{aligned} \tag{13.22}$$

انحرافی مستقل[6] کہلاتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل n اور قدرتی رکاوٹ η میں فرق کر پائیں گے۔

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔مساوات 13.21 جسے ابن سہل[7] کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل[8] سے جانا جاتا ہے۔بصریات[9] کے میدان میں قانون ابن سہل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے $\theta_i = 30°$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔پانی میں انحرافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہو گا۔شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل: خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}}\sin 30° = 0.32969$$

---

[6] index of refraction
[7] بغداد کے أبو سعد العلاء ابن سهل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔
[8] Snell's law
[9] optics

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}} \sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 265 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔ شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان a_{x} اور a_{y} اجزاء پر مشتمل ہیں۔ان میں صرف a_{x} اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہٰذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے a_{x} اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos\theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r)} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t)}$$

یا

$$-\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos\theta_i + \cos\theta_i \Gamma_\perp = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس میں مساوات 13.16 سے $\tau_\perp$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{13.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 298 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_\perp = -1$ حاصل ہوتا ہے۔اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت $(\epsilon_2 > \epsilon_1)$ میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہٰذا $\sin^2\theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے $\Gamma_\perp$ حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2\theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہٰذا $\Gamma_\perp$ خیالی عدد ہو گا۔ایسی صورت میں $|\Gamma_\perp| = 1$ ہوتا ہے اور

سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس[10] سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔ جس زاویہ آمد پر $\Gamma_\perp = 1$ ہو اسے زاویہ فاصل[11] پکارا جاتا ہے۔ یوں زاویہ فاصل

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.25}$$

کے برابر ہے۔ غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے $(\theta_i > \theta_{i,\text{ف}})$ کی صورت میں مساوات 13.20 سے $\sin\theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos\theta_t$ خیالی عدد حاصل ہو گا

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i} = jA \tag{13.26}$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔ یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + yjA)}\\ &= \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 Ay} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\end{aligned}$$

یا

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_\text{z}\tau_\perp E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.27}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\alpha = \beta_2 A = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{13.28}$$

کے برابر ہے۔ یہ میدان کم کثافت خطے میں $x-$ جانب بے ضیاع حرکت کرتی ہے۔ سرحد پر $E_\perp$ کی مقدار $\tau_\perp E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔ مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج[12] کہتے ہیں۔ سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55°$ زاویہ رکھتی ہے۔ ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔ سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$، $\mu_r = 1$ اور $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42°$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہٰذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔ مساوات 13.20 سے

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0\times 80\times\epsilon_0}{\mu_0\times 1\times\epsilon_0}}\sin 55° = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos\theta_t = jA = \sqrt{1-7.327^2} = j7.258$$

---

total internal reflection[10]
critical angle[11]
surface wave[12]

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0} 7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0}\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544\underline{/-54.746^\circ}$$

- اس طرح ہوا میں سرحد پر $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔
- ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4}} = 12.9\,\frac{\mathrm{\mu V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔یاد رہے کہ $\sin\theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos\theta_t$ خیالی عدد ہے۔مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \\
\boldsymbol{H}_{st} &= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\tau_\perp \frac{E_0}{\eta_2} e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \\
&= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\tau_\perp \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{\left(j\beta_2 x \sin\theta_t - j\theta_\eta\right)}
\end{aligned}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$ کا استعمال کیا گیا۔ہوا میں سرحد سے دور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اس کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو لیا جائے گا۔جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_s^*$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{H}_s$ میں تمام مقامات پر j کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t}\right] \times \left[jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\tau_\perp \frac{E_0}{|\eta_2|} e^{-\beta_2 A y} e^{\left(-j\beta_2 x \sin\theta_t + j\theta_\eta\right)}\right] \\
&= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y}\left[j\cos\theta_\eta - \sin\theta_\eta\right]
\end{aligned}$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \frac{\tau_\perp^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin\theta_\eta$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہوا میں η حقیقی عدد ہے لہٰذا $\theta_{\eta} = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\text{y}} \frac{\tau_{\perp}^2 E_0^2}{2|\eta_2|} e^{-2\beta_2 A y} \sin 0^\circ = 0$$

صفر ہو گی۔ یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ ایسی امواج کو فنا پذیر امواج[13] کہتے ہیں۔

کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جزو اور برقی $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ – سمت میں حرکت کریں گے۔ ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار} = \frac{\text{پانی میں رفتار موج}}{\sin \theta_i}$$

سرحدی موج در حقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

متوازی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_{\|}$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔ یاد رہے کہ موج کی سمت پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ کی سمت ہی ہوتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پوئنٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔ متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 13.4 میں $\boldsymbol{E}_i$ کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔ یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج $\boldsymbol{E}_r$ کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔ برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 13.2 اور مساوات 13.4 کی مدد سے شکل 13.4 کے لئے

$$\boldsymbol{E}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_{\text{y}}) E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.29}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = -\boldsymbol{a}_{\text{z}} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + y\cos\theta_i)} \tag{13.30}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}_{sr} = -(\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{y}}) \Gamma_{\|} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{13.31}$$

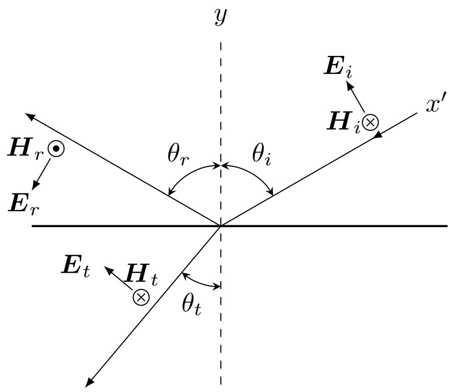
$$\boldsymbol{H}_{sr} = \boldsymbol{a}_{\text{z}} \Gamma_{\|} \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)} \tag{13.32}$$

$$\boldsymbol{E}_{st} = (-\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta_t \boldsymbol{a}_{\text{y}}) \tau_{\|} E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.33}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = -\boldsymbol{a}_{\text{z}} \tau_{\|} \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + y\cos\theta_t)} \tag{13.34}$$

---

[13] evanescent wave



شکل 13.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

لکھے جا سکتے ہیں۔ سرحد ($y=0$) پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جزو کو استعمال کیا جائے گا لہٰذا

$$-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} - \cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \Gamma_{\|} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)} = -\cos\theta_t \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tau_{\|} E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_{\|} e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \cos\theta_t \tau_{\|} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں e کے طاقت، x کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$j\beta_1 x\sin\theta_i = j\beta_1 x\sin\theta_r = j\beta_2 x\sin\theta_t \tag{13.36}$$

ہو۔ اس مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.37}$$

اور

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i \tag{13.38}$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔ مساوات 13.35 میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1+\Gamma_{\|} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_{\|} \tag{13.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہٰذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔ اس طرح

$$-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\|}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\tau_{\|}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} - \Gamma_{\|}e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau_{\|}\frac{\eta_1}{\eta_2}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1-\Gamma_{\parallel}=\tau_{\parallel}\frac{\eta_1}{\eta_2} \tag{13.40}$$

ملتا ہے۔ مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 حل کرتے ہوئے

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{\eta_2\cos\theta_t-\eta_1\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t} \tag{13.41}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{13.42}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\Gamma_{\parallel}=-1$ حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر $\Gamma_{\parallel}=0$ حاصل ہو لہٰذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔ اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ[14] کہتے[15] ہیں۔ مساوات 13.42 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔ عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔ عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہٰذا انحرافی موج غیر قطبی ہو گی۔ زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت[16] بھی کہتے ہیں۔

مثال 13.3: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔ زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔ پانی کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r=80$ لیں۔

حل:

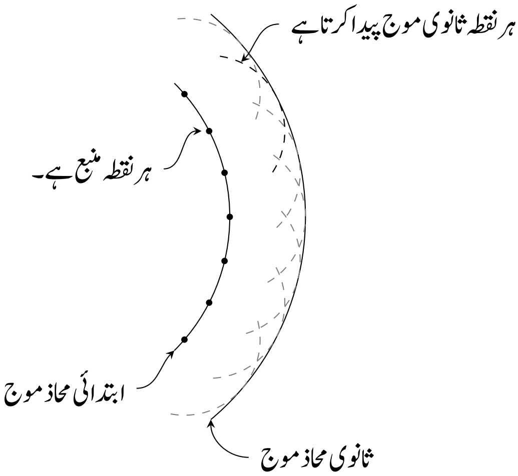
$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{80}{1}}=83.6^{\circ} \tag{13.44}$$

---

[14] Brewster angle

[15] یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔

[16] polarizing angle



شکل 13.5: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

مشق 13.1: شکل 13.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس $\Gamma_{\|}$ حاصل کریں۔چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\Gamma_{\|}$ کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہو گی۔

جواب: صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}_{sr} = (\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\Gamma_{\|} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}$$
$$\boldsymbol{H}_{sr} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Gamma_{\|}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}$$

شرح انعکاس $\frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$ حاصل ہو گا۔

13.2 ترسیم ہائی گن

ہائی گن [17] کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 13.5 میں اس اصول کو دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائے گئے ہیں۔یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جا سکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انحراف کے زمرے میں آتا ہے۔

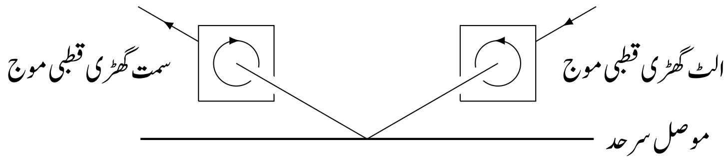
شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int \mathrm{d}E \tag{13.45}$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدد پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان $\mathrm{d}E$ کے برابر ہے۔

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{r}e^{-j\beta(r+\delta)}\,\mathrm{d}x \tag{13.46}$$

Huygen's principle[17]



شکل 13.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

سے

$$E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^{\infty} e^{-j\beta\delta} \, \mathrm{d}x \tag{13.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $r \gg \delta$ ہو تب

$$\delta = \frac{x^2}{2r} \tag{13.48}$$

کے برابر ہو گا۔یوں $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$ اور $u = kx$ لیتے ہوئے

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^{\infty} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \tag{13.49}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left(\int_0^{\infty} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}} \, \mathrm{d}u \right) \tag{13.50}$$

لکھ سکتے ہیں۔

باب 14

مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی[1] TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں مویج[2] کہلاتے ہیں۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مویج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی مویج تک بات بڑھائی جائے گی۔ان مویج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مویج پر غور کیا جائے گا۔آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

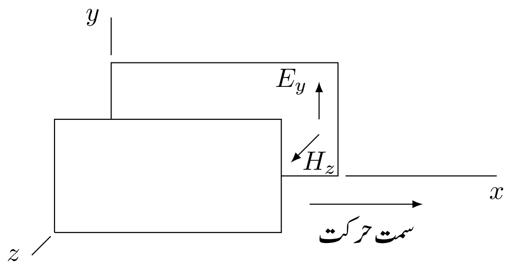
14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد $(10^{16}\,\mathrm{Hz})$ کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

[1] transverse electromagnetic, TEM
[2] waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے نا کہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

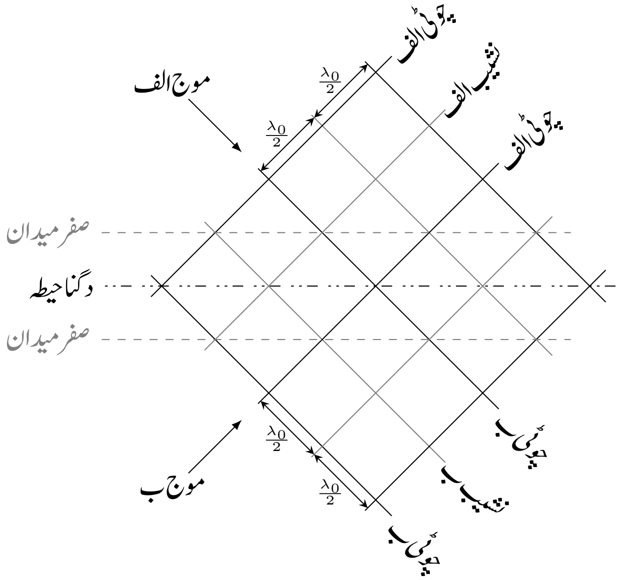
14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز[4] کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے مویج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو عرضی برقی انداز[5] (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

low cutoff frequency[3]
higher order mode[4]
transverse electric mode, TE mode[5]



شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

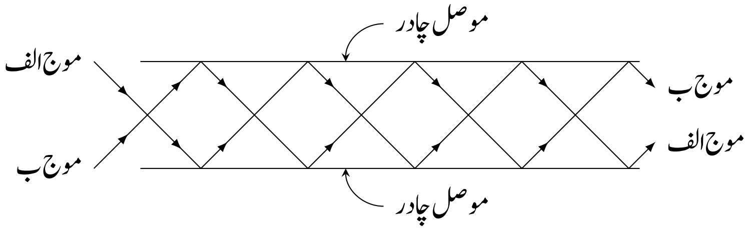
عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

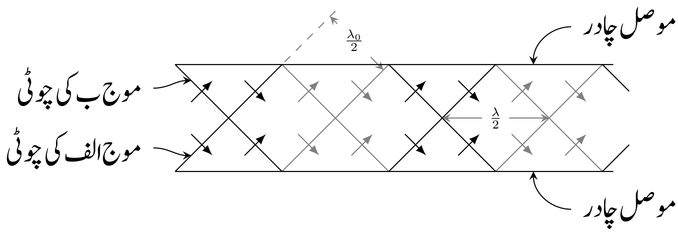
صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں مویج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور مویج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہوبہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ مویج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول[6] پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

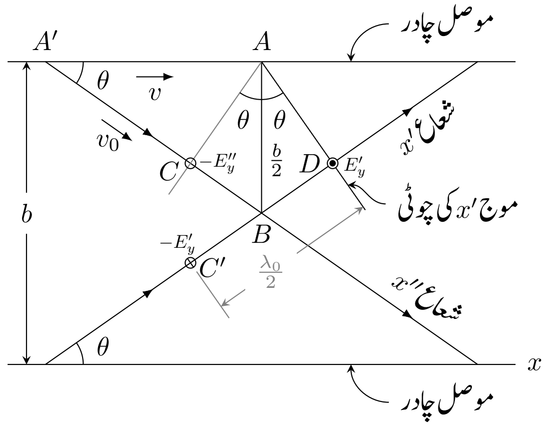
[6] cutoff wavelength



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور مویج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے مویج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E'_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{14.1}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{14.2}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ان حقائق پر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔شکل 14.5 میں تکون ABC سے

$$AB\sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n}\sin\theta \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{14.4}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{14.5}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ کم تر درجے کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

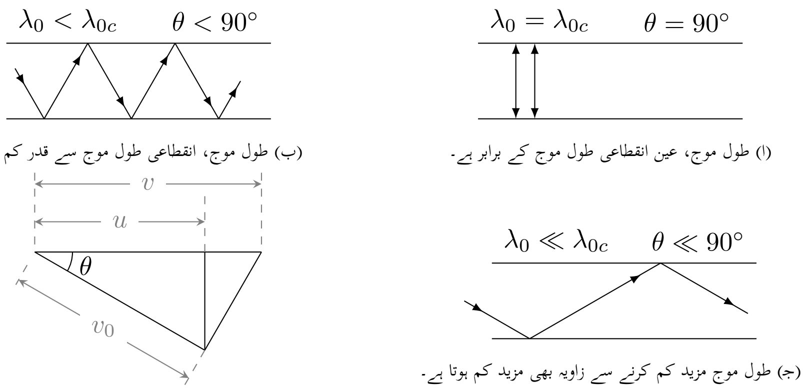
$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔$n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

$$\lambda_{0c} = b \tag{14.6}$$

ہو گا۔یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصل موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

$$\lambda_0 = \lambda_{0c}\sin\theta \tag{14.7}$$



(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔

(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔

(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{14.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت 90° سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{14.9}$$

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔ شکل 14.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

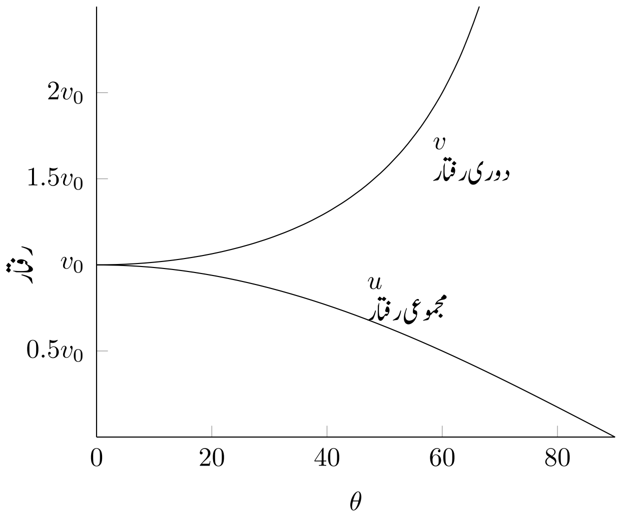
$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{14.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتٰی کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی

[7] phase velocity



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں مویج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u=v_0\cos\theta \tag{14.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار در حقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv=v_0^2 \tag{14.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.11 کو

$$f\lambda=\frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

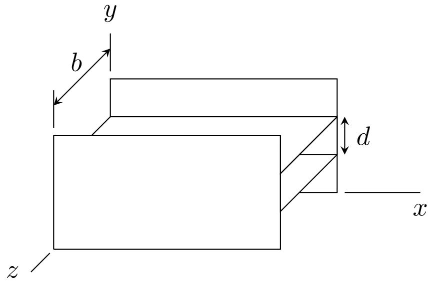
لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

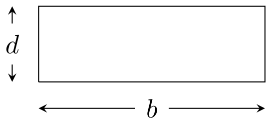
حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت $90°$ کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

[8] group velocity



(ا) لامحدود متوازی چادر مویج سے مستطیلی مویج کا حصول۔



(ب) مستطیلی مویج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 14.8: مستطیلی مویج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی مویج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی مویج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہٰذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی مویج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا مویج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل مویج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے مویج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل مویج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج

مستطیل مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی مویج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ مویج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی[10] TE موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی[11] TM موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی نا کہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی مویج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

---

[9] حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔
[10] transverse electric, TE
[11] transverse magnetic, TM

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نمارہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نمارہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14.15}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{14.16}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{14.17}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{14.18}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{14.20}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{14.21}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.23}$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t-\gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t-\gamma x} \end{aligned} \tag{14.24}$$

لکھے جائیں گے جہاں

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{حرکی مستقل} = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \text{تضعیفی مستقل} \\ \beta &= \text{زاویائی مستقل} \end{aligned}$$

ہیں۔مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t-\gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{14.25}$$

لکھا جائے۔اسی طرح مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.17 تا مساوات 14.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{14.26}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{14.27}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \tag{14.28}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \tag{14.29}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \tag{14.30}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.31}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.32}$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{14.33}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{14.34}$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.35}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.36}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0 \tag{14.37}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0 \tag{14.38}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.39}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.40}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.41}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.42}$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو مویج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.43}$$

$$\gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.44}$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0 \tag{14.45}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \tag{14.46}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.47}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.48}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.49}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.50}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.44 اور 14.45 سے

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma} \tag{14.51}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔چونکہ مساوات 14.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہٰذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ[12] Z_{yz} کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{14.52}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.52 کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.52 کو مساوات 14.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 14.53 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.55}$$

اور مساوات 14.54 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

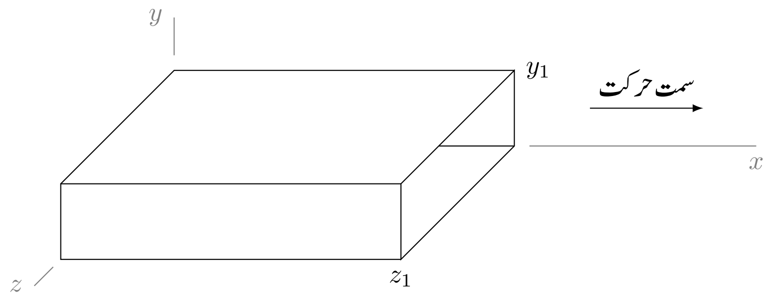
$$k^2 = \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) \tag{14.57}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \tag{14.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.58 مویج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔مویج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

[12] transverse-wave impedance



شکل 14.9: مستطیل مویج۔

ساتویں قدم میں مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی مویج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مویج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔یوں مویج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔اسی طرح مویج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.58 کا حل درکار ہے۔علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{14.59}$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔مساوات 14.59 کے استعمال سے مساوات 14.58

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \tag{14.60}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \tag{14.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو نا قابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \tag{14.62}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \tag{14.63}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 14.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \tag{14.64}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.62 اور مساوات 14.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔مساوات 14.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{14.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں m_1، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.65 کو واپس مساوات 14.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.62 کا حل

$$Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \tag{14.66}$$

ہے۔اسی طرح مساوات 14.63 کا حل

$$Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \tag{14.67}$$

ہے۔ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.59 کو

$$H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y\right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right) \tag{14.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 14.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y\right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا للذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

یعنی

$$c_2 = 0 \tag{14.69}$$

حاصل ہوتا ہے للذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا للذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی مویج سے، للذا ہم

$$c_1 \neq 0 \tag{14.70}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.71}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right) \tag{14.72}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 14.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(-c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہٰذا

$$c_4 = 0 \tag{14.73}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہٰذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{14.74}$$

چنتے ہیں۔اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2} z_1 = m\pi \tag{14.75}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.76}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \tag{14.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہٰذا

$$H_x(x,y,z,t)=H_0\cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.78}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$H_y=\frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.79}$$

$$H_z=\frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.80}$$

$$E_z=-\frac{\gamma Z_{yz}H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.81}$$

$$E_y=\frac{\gamma Z_{yz}H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.82}$$

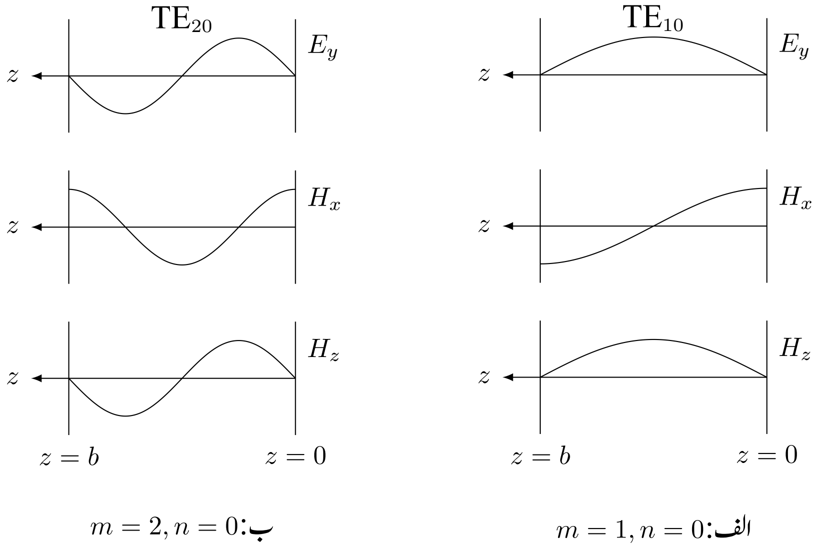
$$E_x=0 \tag{14.83}$$

جہاں آخر میں $E_x=0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی مویج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی مویج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔اگر $m=1$ اور $n=0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں E_z، H_y اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔یوں موج میں صرف H_x، H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔دائیں چادر، یعنی $z=0$، پر $E_y=0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z=\frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔شکل 14.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z=0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z=z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ان دو اطراف کے عین درمیان $z=\frac{z_1}{2}$ پر $H_x=0$ پایا جاتا ہے۔شکل 14.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں $m=1$ اور $n=0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m=2$ اور $n=0$ کی صورت میں میدان شکل 14.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔یوں شکل 14.10-الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 14.10-ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔مستطیلی مویج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE10 موج:

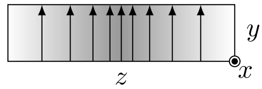
مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m=1$ اور $n=0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= 0\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= 0\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.84}
$$

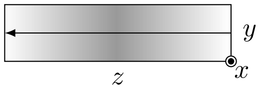
ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x=0$، در حقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ان امواج کو شکل 14.10-الف میں $t=0$ اور $x=0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔TE_{10} تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔شکل 14.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں $z=\frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE20 موج:

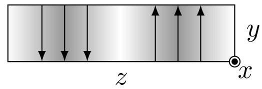
شکل 14.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔



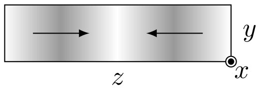
TE$_{10}$ کا E_y میدان۔



TE$_{10}$ کا H_z میدان۔



TE$_{20}$ کا E_y میدان۔



TE$_{20}$ کا H_z میدان۔

شکل 14.11: TE$_{10}$ اور TE$_{20}$ کے E_y اور H_z میدان۔

بلند درجی TE$_{11}$ موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE$_{11}$ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.85}
$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل مویج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی مویج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار مویج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور مویج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.64، مساوات 14.71 اور مساوات 14.76 کو ملا کر

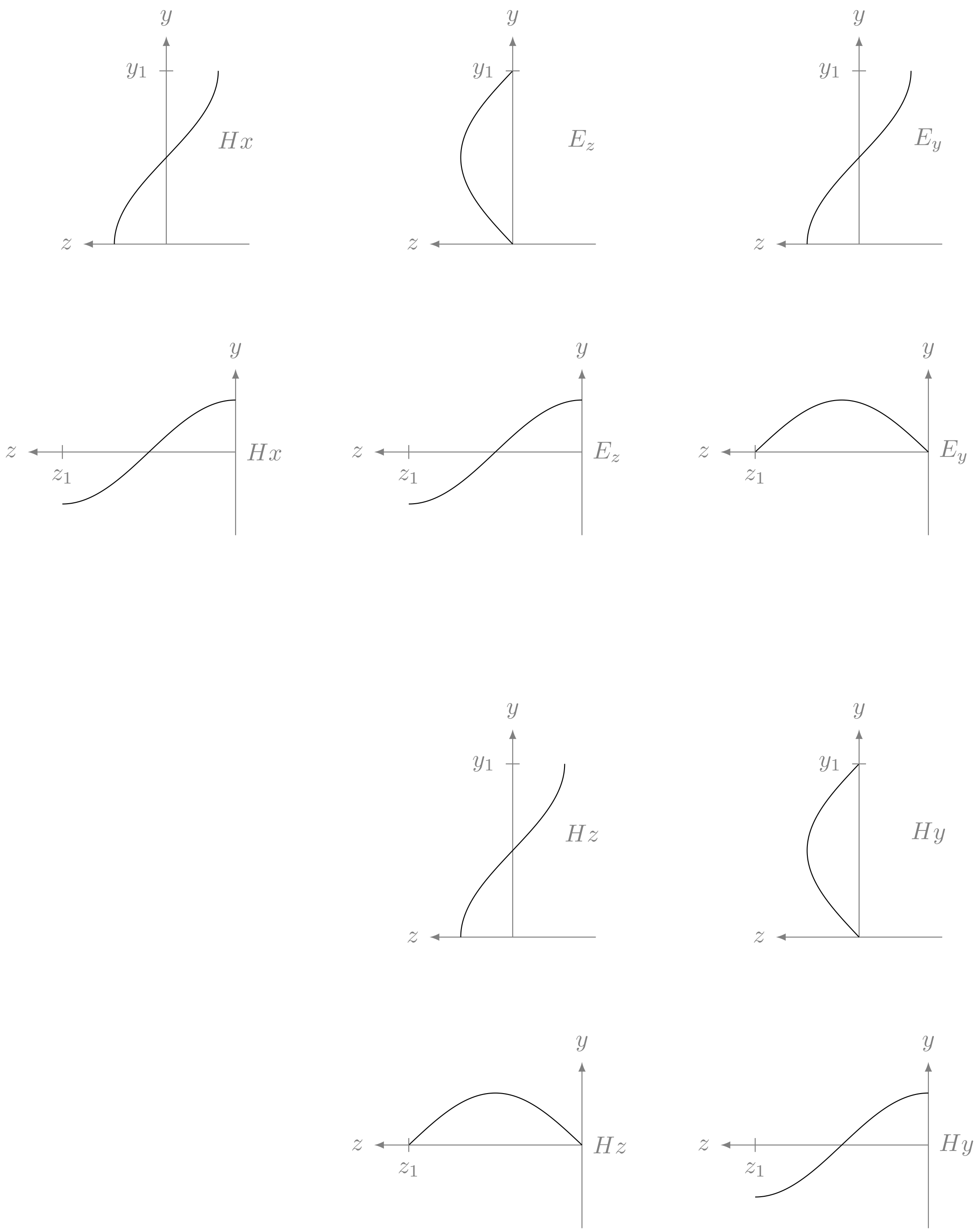
$$
k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.86}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 14.33، مساوات 14.52 اور مساوات 14.57 سے

$$
k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{14.87}
$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع ذو برق میں $\sigma = 0$ لیا جا سکتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$
\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.88}
$$



شکل 14.12: TE_{11} میدان۔

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ مویج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو انقطاعی تعدد[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، مویج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ مویج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔مویج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔
- مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔یہ انقطاعی تعدد ہے۔
- زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔مویج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.88 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ در حقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو مویج میں پایا جاتا ہے۔یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{14.89}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \qquad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$
$$\lambda_0 \qquad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$
$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $k < \beta_0$ ہو گا لہٰذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{14.90}$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \qquad \text{مویج میں زاویائی مستقل}$$
$$\lambda \qquad \text{مویج میں طول موج}$$

ہیں۔کافی بلند تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا اور یوں مویج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $k > \beta_0$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{14.91}$$

[13] cutoff frequency

حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا لہٰذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہٰذا $\gamma = 0$ ہو گا۔یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.92}$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد[14]

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \qquad (\mathrm{Hz}) \tag{14.93}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \qquad (\mathrm{m}) \tag{14.94}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.95}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج[15] پکارا جاتا ہے۔مساوات 14.93 اور مساوات 14.94 سے کھوکھلے مستطیلی مویج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = 2z_1 \tag{14.96}$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $(\beta_0 > k)$ پر

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.97}$$

کے برابر ہے۔اب $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 14.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

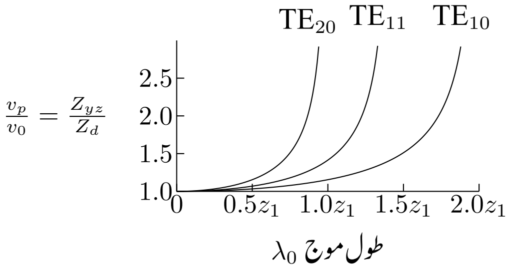
$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.98}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.99}$$

---

[14] cutoff frequency
[15] cutoff wavelength



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی مویج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0۔

اور مویج میں دوری رفتار[16] v_p

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \tag{14.100}$$

یا

$$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.101}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ لامحدود خطے میں دوری رفتار

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں مستطیلی مویج کے دونوں اطراف برابر لمبائی $(y_1 = z_1)$ کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجزیے میں مویج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ مویج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے مویج میں صفر کرتے ہیں۔حقیقت میں مویج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہٰذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے مویج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ایسے مویج میں طاقت کا ضیاع صرف مویج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔اچھے موصل مثلاًتانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی مویج کے طول موج λ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت مویج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی مویج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 14.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.102}$$

[16] phase velocity

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\Omega) \tag{14.103}$$

ہو گا جہاں

$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ موتج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7\,\Omega$ کے برابر ہے۔چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالقل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہٰذا شکل 14.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 14.1: TE_{10}، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی موتج کے لئے حاصل کریں۔

- ہوا سے بھرا موتج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔
- ہوا سے بھرا موتج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا موتج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا موتج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

---

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 364 پر بتلائے گئے۔انہیں آٹھ قدم سے شکل 14.9 کے مستطیلی موتج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہٰذا مساوات 14.14 تا مساوات 14.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔چوتھے قدم میں $H_x=0$ پر کرنے سے

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \tag{14.104}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}+\gamma E_z-ZH_y=0 \tag{14.105}$$

$$-\gamma E_y-\frac{\partial E_x}{\partial y}-ZH_z=0 \tag{14.106}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-YE_x=0 \tag{14.107}$$

$$\gamma H_z-YE_y=0 \tag{14.108}$$

$$-\gamma H_y-YE_z=0 \tag{14.109}$$

$$-\gamma E_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14.110}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{14.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.108 اور مساوات 14.109 سے

$$Z_{yz}=\frac{E_y}{H_z}=-\frac{E_z}{H_y}=\frac{\gamma}{Y} \tag{14.112}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا مساوات 14.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہو گی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔مساوات 14.112 کو مساوات 14.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_y=\frac{Y}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.113}$$

اور اسی طرح مساوات 14.112 کو مساوات 14.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_z=\frac{-Y}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.114}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان دو مساوات اور مساوات 14.112 سے

$$E_y=\frac{-\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.115}$$

$$E_z=\frac{-\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.116}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 14.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 14.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x-\frac{\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ)E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{14.117}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma\left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}}\right) \tag{14.118}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 14.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.119}$$

اور میدان

$$E_x = E_0 \sin\frac{n\pi y}{y_1} \sin\frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 14.113 تا مساوات 14.116 میں پر کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.121}$$

$$H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.122}$$

$$E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.123}$$

$$E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.124}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان جوابات کے ساتھ

$$H_x = 0 \qquad \text{TM}_{mn} \text{ موج ہونے کا شرط} \tag{14.125}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.120 تا مساوات 14.125 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع $\sigma = 0$ ذو برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 14.118، مساوات 14.119 اور مساوات 14.33 سے

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \\ &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2}\end{aligned} \tag{14.126}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لا محدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \qquad (k > \beta_0) \\ \beta &= 0 \end{aligned} \tag{14.127}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔ اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \qquad (k < \beta_0) \end{aligned} \tag{14.128}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس صورت میں موج، بغیر گھٹے مویج میں صفر کرے گی۔ انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔ مساوات 14.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2 \mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.129}$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \tag{14.130}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \tag{14.131}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.132}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہوبہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.133}$$

ہو گا جس سے مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.134}$$

اور مویج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p = \frac{\omega}{\beta} &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \tag{14.135}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$ لامحدود خطے میں دوری رفتار

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو بہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 14.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.136}$$

ہو گا جہاں

$$Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$ مویج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

λ_{0c} انقطاعی طول موج

کے برابر ہیں۔مساوات 14.136 کا مساوات 14.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز مویج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو مویج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 14.1 مستطیلی مویج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 14.1: مستطیلی مویج میں TE_{mn} امواج کے متغیرات کے تعلق۔

نام تفاعل	اکائی	تعلق
انقطاعی تعدد	Hz	$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$
انقطاعی طول موج	m	$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$
مویج میں طول موج	m	$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
دوری رفتار	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
عرضی موج کی رکاوٹ	Ω	$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$

14.5 کھوکھلی نالی مویج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نلکی محدد میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسے مویج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نلکی محدد ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 364 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نلکی مویج z محدد پر رکھا گیا ہے لہٰذا اس میں امواج z جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو نلکی محدد میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\ =-\mu\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial H_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\ =\sigma\left(E_\rho\boldsymbol{a}_\rho+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi+E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)+\epsilon\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial E_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{14.137}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}=-\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{14.138}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{14.139}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}=\sigma E_\rho+\epsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{14.140}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}=\sigma E_\phi+\epsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{14.141}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}=\sigma E_z+\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{14.142}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ چارج سے خالی $\rho_h=0$ خطے میں پھیلاو کے دو مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14.143}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{14.144}$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 14.137 تا مساوات 14.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند $(E_\phi = E_1 e^{j\omega t - \gamma z})$ بناتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0 \tag{14.145}$$

$$-\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - Z H_\phi = 0 \tag{14.146}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0 \tag{14.147}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0 \tag{14.148}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0 \tag{14.149}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - Y E_z = 0 \tag{14.150}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.151}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.152}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$Z = -j\omega\mu$	(Ω/m)	سلسلہ وار رکاوٹ
$Y = \sigma + j\omega\epsilon$	$(\mathrm{S/m})$	متوازی فراوانی
$\gamma = \alpha + j\beta$		حرکی مستقل

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $E_z = 0$ ہو گا جس سے

$$\gamma E_\phi - Z H_\rho = 0 \tag{14.153}$$

$$-\gamma E_\rho - Z H_\phi = 0 \tag{14.154}$$

$$\frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0 \tag{14.155}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0 \tag{14.156}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0 \tag{14.157}$$

$$\frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0 \tag{14.158}$$

$$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{14.159}$$

$$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.160}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 14.147 میں $\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_\phi + \rho \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 14.153 اور مساوات 14.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ $Z_{\rho\phi}$

$$Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.161}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 14.161 سے E_ρ مساوات 14.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\phi = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.162}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.161 سے E_ϕ مساوات 14.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.163}$$

حاصل ہوتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 14.161 سے

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.164}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.165}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 14.164 کا ϕ تفرق، مساوات 14.165 کا ρ تفرق اور مساوات 14.165 کو مساوات 14.155 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0 \tag{14.166}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس میں

$$\frac{Z\left(\gamma - YZ_{\rho\phi}\right)}{Z_{\rho\phi}} = -k^2 \tag{14.167}$$

یعنی

$$k^2 = \gamma^2 + YZ \tag{14.168}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$\rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} \tag{14.169}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$H_z(\rho, \phi) = M(\rho) N(\phi) \tag{14.170}$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 MN = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بایاں ہاتھ کا متغیرہ ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیرہ ϕ ہے۔یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2 \tag{14.171}$$

$$-\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2 \tag{14.172}$$

مندرجہ بالا میں نچلی مساوات کا حل

$$N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \tag{14.173}$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 14.171 کو

$$\rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0 \tag{14.174}$$

لکھا جا سکتا ہے جو بیسل مساوات[17] کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 N_n(k\rho) \tag{14.175}$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔

یوں مساوات 14.170 سے

$$H_z = \left[c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho) \right] \left(c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \right) \tag{14.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

کائنات میں کہیں پر بھی لامحدود میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا نلکی مویج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہو گی۔اس کے علاوہ موصل نلکی سطح پر برقی میدان صفر ہو گا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$، جہاں نلکی کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔

پہلے شرط کے تحت نلکی محدد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \to \infty$ کی قیمت لامحدود ہوتی ہے لہٰذا مساوات 14.176 میں

$$c_4 = 0 \tag{14.177}$$

[17] Bessel's equation

ہو گا۔اگر $c_2=0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi=0^\circ$ پر ہو گی اور اگر $c_1=0$ ہو تب میدان کی چوٹی $n\phi=90^\circ$ پر ہو گی۔کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔یوں

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k\rho) \tag{14.178}$$

ہو گا جہاں $H_0=c_1c_3$ لکھا گیا ہے۔اب چونکہ $\phi=0$ اور $\phi=2\pi$ ریڈیئن نلکی مویج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں للہٰذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔یوں

$$n=0,1,2,\cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n=1$ کی صورت میں نلکی میں $\phi=0$ تا $\phi=2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔اسی طرح $n=2$ کی صورت میں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔یوں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نلکی مویج میں موج کی مساوات

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{14.179}$$

ہو گی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔اس کو مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi=\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}H_0\cos n\phi\frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نلکی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا للہٰذا مساوات 14.180 میں ρ_0 پر $E_\rho=0$ پر کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho_0}=0 \tag{14.181}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0=\alpha'_{nm} \tag{14.182}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{\mathrm{d}J_n(\alpha'_{nm})}{\mathrm{d}\rho}=0 \tag{14.183}$$

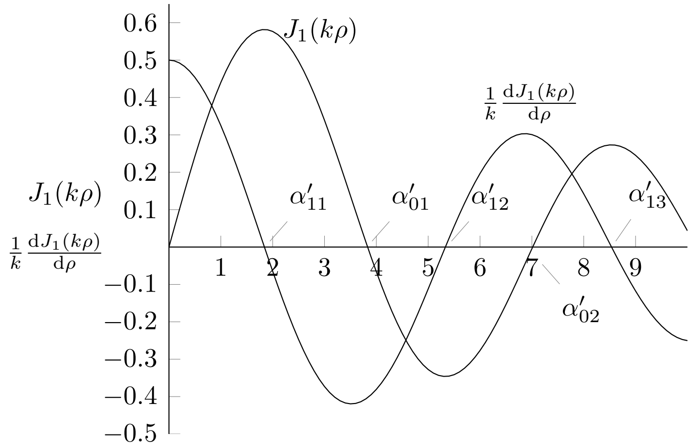
مساوات 14.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm}=\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \qquad (m=1,2,3,\cdots) \tag{14.184}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.185}$$



شکل 14.14: بیسل تفاعل۔

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 14.162 تا مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{n}{\rho}H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.186}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho}e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.187}$$

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{n}{\rho}H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.188}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho}e^{j\omega t-\gamma z} \tag{14.189}$$

$$E_z = 0 \tag{14.190}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11}، TE_{12} اور TE_{13} بلند عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 14.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔ بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔ شکل میں یوں $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.184 کو مساوات 14.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.191}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔

- کم تعدد پر حقیقی γ ہو گا لہٰذا مویج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma = 0$ حاصل ہو گا۔ یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔
- بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 14.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k'_{nm}}{\rho_0} \qquad \text{(Hz)} \tag{14.192}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \qquad \text{(m)} \tag{14.193}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11} = 1.84$ سے $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔

انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہٰذا اسے

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \qquad \text{(rad/m)} \tag{14.194}$$

لکھا جائے گا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں مویج میں طول موج

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m)} \tag{14.195}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0	مویج کے ذو برق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج
λ_{0c}	انقطاعی طول موج

ہیں۔ مویج میں دوری رفتار $v_p = f\lambda_g$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m/s)} \tag{14.196}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

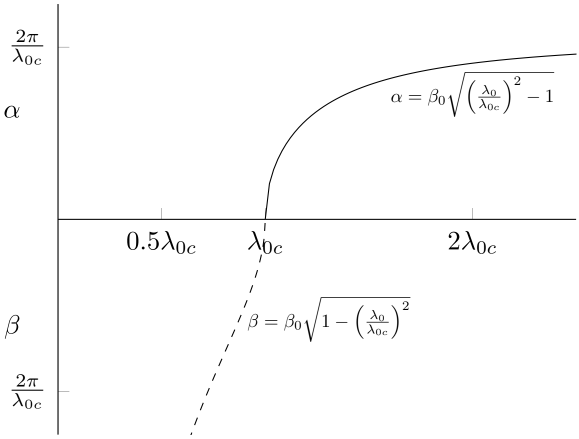
$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 14.195 اور مساوات 14.196 ہو بہو مستطیلی مویج کے مساوات ہیں۔ یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہٰذا نلکی مویج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔ اس کے برعکس مستطیلی مویج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ نلکی مویج میں TE_{11} تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہٰذا اسے غالب[18] بلند درجی انداز کہتے ہیں۔ TE_{01} بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہٰذا کم موصلیت کے چادر کی بنی مویج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

[18] dominant mode



شکل 14.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موئج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔مستطیلی موئج میں مساوات 14.127

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \tag{14.197}$$

انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 14.131 کی مدد سے

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} = \beta_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 - 1} \quad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.198}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

لا محدود خطے میں طول موج	λ_0
انقطاعی طول موج	λ_{0c}

ہیں۔مساوات 14.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موئج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد ($\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$) کی صورت میں مساوات 14.198 سے

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.199}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 14.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لا محدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ ہے۔

مثال 14.1: ایک مویج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c} = 50\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس مویج میں $\lambda_0 = 2\,\mathrm{m}$ کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\lambda_{0c} \gg \lambda_0$ ہے لہٰذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68\,\mathrm{Np/m}$$

ہو گا۔یوں مویج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا مویج بے ضیاع ہوتا ہے لہٰذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔مساوات 14.128 سے

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2}\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}\end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.200}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.200 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ہے۔شکل 14.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 14.15 میں طول موج کو افقی محدد اور حرکی مستقل کو عمودی محدد پر رکھا گیا ہے۔عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لامحدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی مویج کامل نہیں ہوتے لہٰذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے مویج میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔آئیں حقیقی مویج میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔کسی بھی موبیج میں میدان، مثلاً صفحہ 374 پر مساوات 14.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x} e^{j(\omega t-\beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔یوں $Z = \frac{E}{H}$ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_h} e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2} Z_h |H|^2 e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x} \tag{14.201}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^* = |E|^2$ لکھے گئے ہیں۔اس مساوات سے

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}}{P} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.202}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کو P لکھا گیا ہے۔مساوات 14.202 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موبیج کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع $(I^2 R_c)$ ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موبیج کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل درآمد نہیں ہوتا۔کم انقطاعی تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.202 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کامل ذو برق سے بھرے موبیج میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ایسی صورت میں صرف موبیج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہٰذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\int\int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}S = \int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}l \tag{14.203}$$

ہو گا جہاں $\mathscr{P}_{\text{چادر}}$ سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موبیج کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔مساوات 14.203 میں سطح کا چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}S$ موبیج کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔اس رقبے کی لمبائی $\mathrm{d}x$ اور چوڑائی $\mathrm{d}l$ ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔شکل 14.9 کے مستطیلی موبیج کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$\mathscr{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2} Z_{ch} |H_m|^2 \tag{14.204}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور Z_c چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو Z_{ch} ہے۔چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت $|H_m|$ ہے۔چونکہ موصل میں $\sigma \gg j\omega\epsilon$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} =\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{ch} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.203 کو

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{Z_{ch}}{2}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l \tag{14.205}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مویج میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P = \frac{Z_{yz,h}}{1} \int \int |H_{\perp}|^2 \, \mathrm{d}S \tag{14.206}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $H_{\perp}$ سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔اس میدان کو مویج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں Z_{yz} مویج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha = \frac{Z_{ch} \int |H_m|^2 \, \mathrm{d}l}{2 Z_{yz,h} \int \int |H_{\perp}|^2} \, \mathrm{d}S \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.207}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.207 تمام مویج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 14.207 میں پر کئے جائیں گے۔بہتر موصل سے بنے مویج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔مساوات 14.207 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.2: دو متوازی چادروں کے مویج کو صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔اس مویج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 14.207 سے

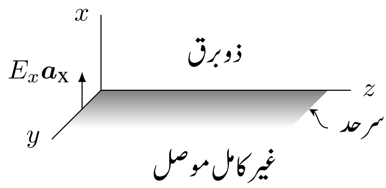
$$\alpha = \frac{2 Z_{ch} \int_0^{y_1} |H_m|^2 \, \mathrm{d}y}{2 Z_{yz,h} \int_0^{y_1} \int_0^{z_1} |H_{\perp}|^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔اس مویج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔یوں مقناطیسی میدان $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔یوں H_m اور $H_{\perp}$ دونوں $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہی ہیں لہٰذا

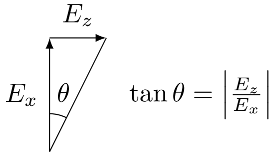
$$\alpha = \frac{Z_{ch} y_1}{Z_{yz,h} y_1 z_1} = \frac{Z_{ch}}{z_1 Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 450 \times 10^6}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 450 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} \\ &= 0.0055 + j0.0055 \end{aligned}$$



الف: غیر کامل موصل اور ذو برق کی سرحد



ب: زاویہ جھکاو

شکل 14.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $0.0055 = Z_{ch}$ اوہم ہے۔ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7\,\Omega$ ہے۔ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2 \times 376.7} = 73\,\mu\text{Np/m}$$

ہو گا۔یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔

14.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 14.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔سطح کے نیچے $(x < 0)$ غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر $(x > 0)$ ذو برق ہے۔سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رو نما نہیں ہوتی۔یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہٰذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.208}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 14.16 تا مساوات 14.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \tag{14.209}$$
$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \tag{14.210}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \tag{14.211}$$
$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \tag{14.212}$$
$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \tag{14.213}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \tag{14.214}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \tag{14.215}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \tag{14.216}$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے E_z کو مساوات 14.210 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1}H_y-\frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+j\omega\mu_1 H_y=0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\left(\gamma_1^2+\omega^2\mu_1\epsilon_1\right)H_y=0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}=k_1^2 H_y \tag{14.217}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_1^2=-\left(\gamma_1^2+\omega^2\mu_1\epsilon_1\right) \tag{14.218}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.217 کا حل

$$H_y=c_1e^{-k_1x}+c_2e^{k_1x}$$

ہے۔ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to \infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2=0$ لیا جاتا ہے۔اور یوں

$$H_y=c_1e^{-k_1x}e^{j\omega t-\gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \tag{14.219}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\gamma_2 E_y+j\omega\mu_2 H_x=0 \tag{14.220}$$

$$-\gamma_2 E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}+j\omega\mu_2 H_y=0 \tag{14.221}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}+j\omega\mu_2 H_z=0 \tag{14.222}$$

$$\gamma_2 H_y-\left(\sigma_2+j\omega\epsilon_2\right)E_x=0 \tag{14.223}$$

$$-\gamma_2 H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}-\left(\sigma_2+j\omega\epsilon_2\right)E_y=0 \tag{14.224}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\left(\sigma_2+j\omega\epsilon_2\right)E_z=0 \tag{14.225}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}-\gamma_2 E_z=0 \tag{14.226}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}-\gamma_2 H_z=0 \tag{14.227}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے E_Z کو مساوات 14.221 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}H_y-\frac{1}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+j\omega\mu_2 H_y=0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[\gamma_2^2 - j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right)\right] H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y \tag{14.228}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \tag{14.229}$$

$$\gamma_m^2 = j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) \tag{14.230}$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 14.228 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to -\infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے للٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3 = 0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \qquad \text{موصل خطہ} \tag{14.231}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات میدان برابر ہوں گے للٰذا $x = 0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 14.219 اور مساوات 14.231 برابر ہوں گے جس سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 \tag{14.232}$$

$$c_1 = c_4 \tag{14.233}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے ذو برق میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{-k_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \end{aligned} \tag{14.234}$$

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے موصل میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{موصل خطہ} \end{aligned} \tag{14.235}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $c_4 = c_1$ اور $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کئے گئے ہیں۔

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2 \tag{14.236}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.218 سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 - k_1^2 \\
&= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 k_2^2 \\
&= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \left(-\gamma_2^2 + \gamma_m^2\right)
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 14.236 اور دوسرے قدم پر مساوات 14.229 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس میں مساوات 14.232 سے $\gamma_1 = \gamma_2$ پر کرتے ہوئے

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2}} \tag{14.237}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.234 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔ کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔ شکل 14.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1}\left|\frac{-k_1}{\gamma_1}\right| \tag{14.238}$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاو کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon_0 \\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0 \\
\sigma_2 &= 5.8 \times 10^7
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33356 \\
k_1 &= 0.9215(1-j) \times 10^{-6} \\
k_2 &= 6.038(1-j) \times 10^{4}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0.9215(1-j)\times 10^{-6}}{j0.33356}\right| = 0.00022385^\circ$$

زاویہ حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_0\\
\epsilon_2 &= 78\epsilon_0\\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\
\sigma_2 &= 0
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33144\\
k_1 &= j0.037528\\
k_2 &= 2.9272
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{j0.037528}{j0.33144}\right| = 6.46^\circ$$

زاویہ دیتا ہے۔ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاو باآسانی ناپی جا سکتی ہے۔

14.9 گھمکی خلاء

موج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔اس کے برعکس گھمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔گھمکیا کو امالہ اور کپیسٹر کے گھمکی دور[19] کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل میں امالہ اور کپیسٹر کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گھمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور کپیسٹر کی قیمت کم کرنی ہو گی۔شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔اسی طرح کپیسٹر کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے دو چادروں کو دور کر دیا گیا ہے۔متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔متوازی امالہ جوڑنے کی حد شکل-ت میں دکھائی گئی ہے جہاں کپیسٹر اور امالہ مل کر بند ڈبے کی شکل اختیار کر گئے ہیں۔یہی بند ڈبی گھمکی خلاء[20] کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گھمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔صفحہ 372 پر مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موج میں تمام میدان دیتے ہیں۔ان میں $\gamma = j\beta$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں H_y کے مساوات میں $H_{y0} = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}$ لکھا گیا ہے اور یہی طریقہ کار باقی مساوات پر بھی لاگو کیا گیا

[19] resonant circuit
[20] cavity resonator

ہے تاکہ صرف ضروری معلومات پر توجہ رہے۔ مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا $+$ لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$H_x^+ = H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.239}$$

$$H_y^+ = H_{y0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.240}$$

$$H_z^+ = H_{z0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.241}$$

$$E_z^+ = -E_{z0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.242}$$

$$E_y^+ = E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.243}$$

$$E_x^+ = 0 \tag{14.244}$$

اگر مویج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔ برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے لہٰذا انعکاسی مستقل $\Gamma_{\parallel} = -1$ ہے۔ یوں یہ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔ انعکاسی برقی میدان

$$E_y^- = -E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \tag{14.245}$$

ہے۔ آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned}
E_y^+ + E_y^- &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \\
&= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} \left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x} \right)
\end{aligned}$$

یعنی

$$E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t} \tag{14.246}$$

کو جنم دیتے ہیں۔ موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.246 کا برقی میدان مویج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \cdots$ ہے۔ یوں بند سرے سے $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- مویج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 14.17 میں مستطیلی مویج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا مویج کو ہٹا لیا گیا ہے۔ یہ بند ڈبہ مستطیلی گھمکیا[21] ہے۔

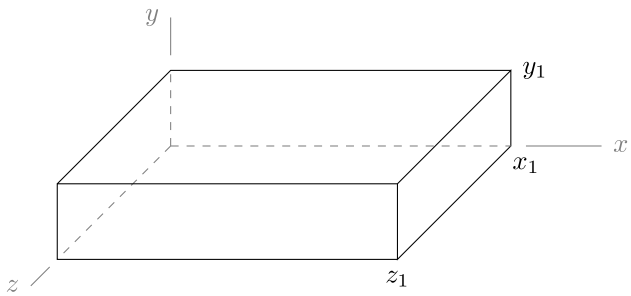
شکل 14.17 میں گھمکیا کا بایاں سرا $x = 0$ اور دایاں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$x_1 = \frac{l\lambda}{2} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14.247}$$

ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2} = l\pi$$

[21] rectangular resonator



شکل 14.17: مستطیلی گھمکیا

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\beta = \frac{l\pi}{x_1} \tag{14.248}$$

ملتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.246

$$E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t} \tag{14.249}$$

لکھا جائے گا۔اس مساوات میں گھمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائے جاتے ہیں، y سمت میں n آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور z سمت میں m آدھے طول موج پائے جاتے ہیں۔

مساوات 14.249 میں $x = 0$ یا $x = x_1$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 14.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.250}$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu\epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہٰذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu\epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2 \frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2}} \tag{14.251}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل k یوں

$$k_{xyz}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.252}$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}} \tag{14.253}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

یوں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی TE_{lnm} کہلائیں گے اور گھمکی طول موج λ_{lnm} لکھی جائے گی۔

14.10 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{14.254}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{14.255}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{14.256}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.257}$$

سے شروع کرتے ہیں۔مساوات 14.255 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 14.254 اور مساوات 14.257 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \boldsymbol{H}\right)$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{14.258}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x,y,z,t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔ علیحدگی متغیرات[22] استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$E_x(x,y,z,t) = M(x,y,z)T(t) \tag{14.259}$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x، y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیرہ ہے۔ یوں مساوات 14.258 سے

$$T\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = M\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{T}\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا بایاں ہاتھ خلاء کے متغیرات x، y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔ یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہٰذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔ یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{T}\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = -k^2$$

جس سے دو مساوات

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+k^2 T = 0 \tag{14.260}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+k^2 M = 0 \tag{14.261}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.260 کا حل $T = e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$\left(\mu\epsilon p^2+\mu\sigma p+k^2 T\right)e^{pt} = 0$$

سے

$$p = \frac{-\sigma \mp \sqrt{\sigma^2 - 4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ ہو گا جس سے

$$p = \mp\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.262}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t) = c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}+c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

[22] separation of variables

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1}، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔اس میں

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.263}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$T(t)=c_{t1}e^{-j\omega t}+c_{t2}e^{j\omega t} \tag{14.264}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.261 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔یوں

$$M(x,y,z)=X(x)N(y,z) \tag{14.265}$$

لیتے ہوئے

$$N\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+k^2XN=0$$

یا

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل $-k_x^2$ کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+k_x^2X=0 \tag{14.266}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+(k^2-k_x^2)N=0 \tag{14.267}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$N(y,z)=Y(y)Z(z) \tag{14.268}$$

لکھتے ہوئے

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+(k^2-k_x^2)YZ=0$$

یا

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-k^2+k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کو نئے مستقل $-k_y^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-k_y^2Y \tag{14.269}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-(k^2-k_x^2-k_y^2)Z=-k_z^2Z \tag{14.270}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$ یا

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{14.271}$$

لیا گیا ہے۔مساوات 14.266، مساوات 14.269 اور مساوات 14.270 کے حل

$$X(x) = c_{x1}e^{-jk_x x} + c_{x2}e^{jk_x x} = c'_{x1}\cos k_x x + c'_{x2}\sin k_x x \tag{14.272}$$

$$Y(y) = c_{y1}e^{-jk_y y} + c_{y2}e^{jk_y y} = c'_{y1}\cos k_y y + c'_{y2}\sin k_y y \tag{14.273}$$

$$Z(z) = c_{z1}e^{-jk_z z} + c_{z2}e^{jk_z z} = c'_{z1}\cos k_z z + c'_{z2}\sin k_z z \tag{14.274}$$

ہیں۔

مساوات 14.265، مساوات 14.268 اور مساوات 14.259 سے ظاہر ہے کہ

$$E_x(x,y,z,t) = TXYZ \tag{14.275}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.275 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔یوں $k_x = 0.32$ یا $k_x = -7.59$ ہو سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لامحدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباو صفر ہو گا۔یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔مساوات 14.274 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$c'_{z1} = 0 \tag{14.276}$$

$$k_z = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.277}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 1, 2, 3 \cdots \tag{14.278}$$

کے برابر ممکن ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح $y = 0$ اور $y = y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 364 پر دکھایا شکل 14.8 حاصل ہوتا ہے۔ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔اس طرح مساوات 14.273 سے

$$c'_{y1} = 0 \tag{14.279}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.280}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$n = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.281}$$

کے برابر ممکن ہیں۔اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔یوں مستطیلی مویج میں موج کی مساوات

$$E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)} \tag{14.282}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t - k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t + k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 14.277 اور مساوات 14.280 کے تحت ہوں گی۔ جیسے آپ جلد مساوات 14.296 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔یوں جس تعدد کی موج مستطیلی مویج سے گزر رہی ہو مساوات 14.296 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 14.271 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 14.272 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 14.272 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔ بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x \to \infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $c_{x1} = 0$ لیا جائے گا۔ مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_x اور k_y سے 14.271 k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر $x = 0$ اور $x = x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 401 پر دکھایا شکل 14.17 حاصل ہو گا۔چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے لہٰذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا ہوں۔آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھکے ہوں گے لہٰذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \tag{14.283}$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \tag{14.284}$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.285}$$

کے برابر ممکن ہے۔

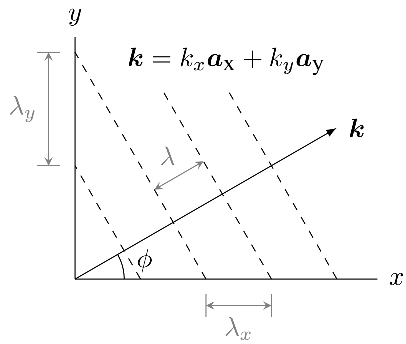
ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 14.17 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{14.286}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک بار پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔ مساوات 14.272 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{-jk_x x}$ اور $e^{jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔اسی طرح مساوات 14.273 اور مساوات 14.274 بھی مجموعے ہیں۔ مساوات 14.275 میں X، Y اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 14.272، مساوات 14.273 اور مساوات 14.274 کے پہلے جزو چنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j\omega t - k_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - k_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - k_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}} \tag{14.287}$$



شکل 14.18: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

حاصل ہوتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطہ (x, y, z) کو سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + y\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{14.288}$$

ظاہر کرتی ہے۔ ہم k_x، k_y، k_z اور k کو سمتیہ

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + k_y\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + k_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{14.289}$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 14.271 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{14.290}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 14.287 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{14.291}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{14.292}$$

اصل موج دیتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے $\boldsymbol{k}$ کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 14.18 میں موج کے حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔ یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جا سکتی ہے۔ یوں x محدد پر نقطہ $(x_0, 0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد f ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0, y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔ اسی طرح $\boldsymbol{k}$ پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ ان تمام کو شکل 14.18 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $v = f\lambda$ لکھی جا سکتی ہے۔ سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.293}$$

ہو گا۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.294}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 14.263 پر کرنے سے

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{14.295}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{14.296}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma = 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہٰذا $\alpha = 0$ اور

$$\gamma = 0 + j\beta = jk \tag{14.297}$$

کے برابر ہے۔اس طرح k کو β جبکہ k_x، k_y اور k_z کو بالترتیب β_x، β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 14.296 کی طرح $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔شکل 14.18 کو دیکھ کر $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos\phi = \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \tag{14.298}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح ہم

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \tag{14.299}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \tag{14.300}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے مجموعی رفتار[23] کہتے ہیں

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \tag{14.301}$$

کے برابر ہے۔موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔اس کے برعکس کارتیسی محدد پر دوری رفتار[24]

$$v_x = f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x}$$
$$v_y = f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y}$$
$$v_z = f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z}$$

ہوں گے۔ شکل 14.18 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور یوں v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ $\phi = 0$ پر $v_y = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہٰذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز صفر نہیں کر سکتی۔

---

[23] group velocity
[24] phase velocity

باب 15

سوالات

مویج

سوال 15.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $0.00177°$

سوال 15.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1 GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $6.46°$

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$