برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔دو اجسام کے جوڑ پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس [3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر کہتے ہیں۔یوں

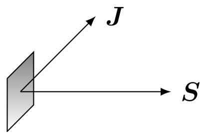
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

---

[1] continuity equation
[2] boundary conditions
[3] images
[4] dielectric
[5] polarization



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو[6] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta S \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل: چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

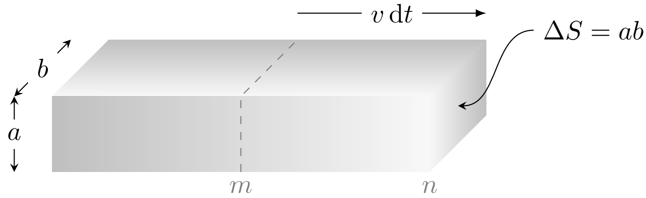
حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{S}$ کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں چارج $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں

---

[6] current density



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کر انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ چارج ہے۔ اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m^3}$ ہے میں حجمی کثافت چارج $3\,\mathrm{C/m^3}$ ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج $1\,\mathrm{C/m^3}$ رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ چارج خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔ اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات[7] کی تکمل شکل ہے۔ آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 82 پر مساوات 3.42 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h$$

اگر حجم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[7] continuity equation

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔نہایت چھوٹی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔$\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[8] کہتے ہیں۔رفتار بہاو کا دارومدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[9] کہتے ہیں۔حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔چونکہ $\boldsymbol{v}_d$ کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$ کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہٰذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

---

drift velocity[8]
mobility[9]

مساوات 5.9 کو صفحہ 115 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e \mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ρ_e منفی مقدار ہے۔یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔σ کو موصلیت کا مستقل[10] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[11] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 135 پر جدول 6.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[12] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940\,\mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5\,\mathrm{g}$ ہیں۔اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[13] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940\,\mathrm{kg}$ ہیں لہٰذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہٰذا $0.1\,\mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

ہو گی۔ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$$

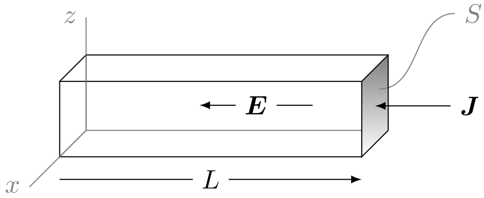
حاصل ہوتا ہے جہاں $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2\,S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ لکھا گیا ہے۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔اس رفتار[14] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً $300\,\mathrm{K}$ پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

---

[10] conductivity
[11] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز کمپنی کا بنیاد رکھا۔
[12] copper
[13] mole
[14] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔امید ہی سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار[15] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔سلاخ کو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = -J\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائے جاتے ہیں۔یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 91 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = -\int_0^L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^L E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \int_0^L E \,\mathrm{d}y = E\int_0^L \mathrm{d}y = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھتے ہیں۔یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔برقی رو

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma\frac{V}{L}$$

---

[15] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

یا

$$V = I\frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R = \frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V = IR \tag{5.15}$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[16] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[17] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83\times10^{-7}\,\mathrm{m^2}$ اور $\sigma = 5.8\times10^7$ ہے لہٰذا

$$R = \frac{1000}{5.8\times10^7\times2.83\times10^{-7}} = 0.61\,\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔(ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔(پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$، $3.82\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$ اور $2.55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m^2}}$

---

[16] resistance
[17] ohm

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹوں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چپٹا رہتا ہے۔یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون[18] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔پہلا جزو سطح کے متوازی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ سطح کے متوازی جزو صفر ہو گا۔اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔یوں ہم

$$E_{\text{متوازی}} = 0 \tag{5.17}$$

لکھ سکتے ہیں۔سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔چونکہ سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر چارج سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

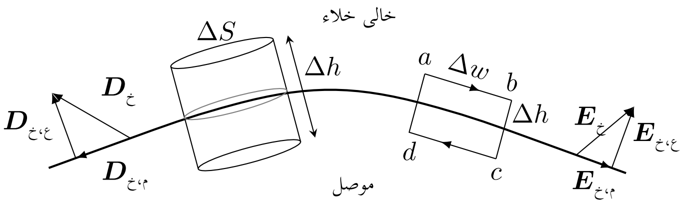
$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اس سرحد پر خلاء کی جانب $\boldsymbol{E}_{\text{خ}}$ اور $\boldsymbol{D}_{\text{خ}}$ دکھائے گئے ہیں۔خلاء میں $\boldsymbol{E}_{\text{خ}}$ کو $\boldsymbol{E}_{\text{خ،م}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{خ،ع}}$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے متوازی اور عمودی $\boldsymbol{E}_{\text{خ}}$ کے اجزاء ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{D}_{\text{خ}}$ کو بھی متوازی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}_{\text{خ}}$ کی قیمت حاصل کریں۔ہم $\boldsymbol{E}_{\text{خ}}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_{\text{خ،م}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{خ،ع}}$ حاصل کریں گے۔پہلے $\boldsymbol{E}_{\text{خ،م}}$ حاصل کرتے ہیں۔

---

[18] electrostatic



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے متوازی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہے جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہے۔ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔صفحہ 97 پر دئے مساوات 4.25

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

کو $abcd$ پر استعمال کرتے ہیں۔اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{\text{خ،م}} \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{b\text{خ،ع}}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -E_{b\text{خ،ع}} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{a\text{خ،ع}}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{a\text{خ،ع}} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{\text{خ،م}} \Delta w + \left(E_{a\text{خ،ع}} - E_{b\text{خ،ع}} \right) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{\text{خ،م}} \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_{\text{خ،م}} = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب $\boldsymbol{E}_{\text{ع،خ}}$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{E}_{\text{ع،خ}}$ کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

کی مدد سے $\boldsymbol{D}_{\text{ع،خ}}$ کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر بیلن دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی Δh اور سیدھی سطحوں کا رقبہ ΔS ہے۔اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا سرا}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{اوپر سرا}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا سرا}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں متوازی میدان صفر ہوتا ہے۔موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔بیلن کے اوپر والے سرے پر

$$\int_{\text{اوپر سرا}} \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{\text{ع،خ}} \Delta S$$

ہو گا۔ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{\text{ع،خ}} \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{\text{ع،خ}} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_{\text{ع،خ}} = \epsilon_0 E_{\text{ع،خ}} = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے متوازی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{متوازی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2,-3,5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}=210\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-350\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+99\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر $E_{\text{متوازی}}$، $E_{\text{عمودی}}$ اور ρ_S حاصل کریں۔

جوابات: 0، $420\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $3.71\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m^2}}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 105 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے اوپر جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتا ہے۔موصل سطح کے اوپر جانب میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح کے اوپر جانب سے جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

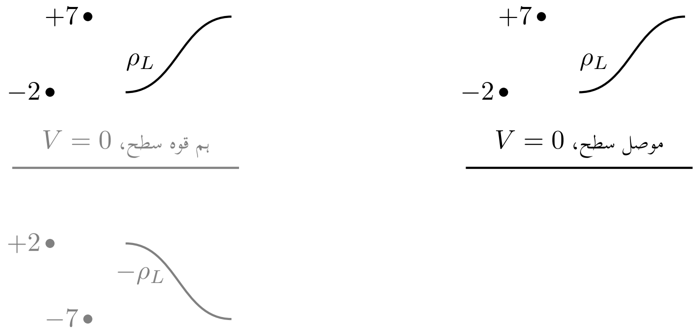
آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین کے اوپر مثبت نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح کے اوپر جانب برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم برقی زمین کے نچلی جانب عین مثبت چارج کے نیچے اور اتنے ہی فاصلے پر برابر مگر منفی چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس [19] کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔لہٰذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

---

[19] image



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح کے اوپر جانب مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z=3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5\,\mu\mathrm{C}$ کا عکس $-5\,\mu\mathrm{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔یوں $5\,\mu\mathrm{C}$ نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔اسی طرح $-5\,\mu\mathrm{C}$ چارج نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_- = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کل میدان

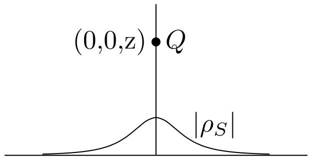
$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13\times10^{-9}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S = -14.3\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_+$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی کل $\boldsymbol{E}$ ہو جاتی ہے۔درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل:اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boldsymbol{E}_- = \frac{-Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$\boldsymbol{D} = \frac{-2Qz\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{5.21}$$

پایا جائے گا۔شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جا سکتا ہے۔یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سلیکان اور جرمینیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ[20]

[20]doping

سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول[21] کے چوتھے جماعت[22] سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ[23] عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ[24] عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول[25] کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کے رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر خالص سیلکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہے۔ جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ اور $0.17\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہیں۔ خالص سیلکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

---

[21] periodic table
[22] group
[23] donor
[24] acceptor
[25] hole

5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ایسے اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہٰذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ایسے مالیکیول کو قطبی[26] مالیکیول کہتے ہیں۔قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹوں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ایسے اشیاء کو غیر قطبی[27] کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے ذو برق[28] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج[29] کہتے ہیں۔اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 103 میں دئے مساوات 4.62

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا کل معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

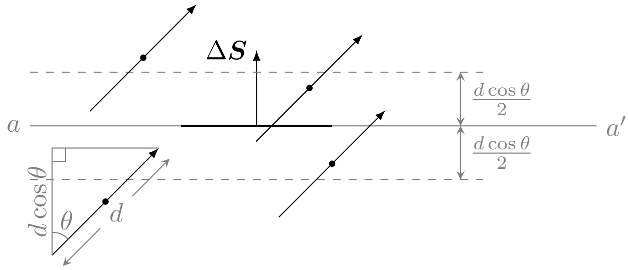
$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔تقطیب[30] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

---

[26] polar
[27] non polar
[28] dielectric
[29] bound charge
[30] polarization



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔Δv کو کم سے کم[31] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P}=0$ ہو گا۔ذو برق کے اندر تصوراتی سطح $\Delta\boldsymbol{S}$ لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p}=Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح $\Delta\boldsymbol{S}$ کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta\boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

[31] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے للٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صحہ 67 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0\boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے چارج $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} Q &= \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \\ Q_m &= \int_h \rho_m \, \mathrm{d}h \\ Q_{\text{کل}} &= \int_h \rho_{\text{کل}} \, \mathrm{d}h \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{P} &= -\rho_m \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho_{\text{کل}} \end{aligned}$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

قلم میں دوراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب ہو پاتا ہے۔ایسے اشیاء جو ہر طرف یکساں خصوصیات نہیں رکھتے ناہم سموت[32] کہلاتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال[33] کی خاصیت رکھتے ہیں۔ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ایسے اشیاء ہم سمتی[34] کہتے ہیں۔انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.36}$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

یا

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_R \epsilon_0 \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{5.37}$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔

χ_e ذو برقی مستقل[35]، ϵ_R جزوی برقی مستقل[36]، ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[37] جبکہ ϵ ان اشیاء کا برقی مستقل کہلاتے ہیں اس کتاب کے آخر میں صفحہ 136 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 6.2 میں دئے گئے ہیں۔

ناہم سموت اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \tag{5.39}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل[38] کہا جاتا ہے۔ناہم سموت اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ناہم سموت اشیاء پر یہیں بحث روکتے ہیں۔

---

[32] anisotropic
[33] ferroelectric
[34] isotropic
[35] susceptibility
[36] relative electric constant, relative permittivity
[37] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[38] tensor

باب 6

سوالات

6.1 توانائی باب کے سوالات

سوال 6.1:

سوال 6.2: برقی میدان $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں $-0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\mathrm{J}$، $-0.2\,\mathrm{J}$ اور $0\,\mathrm{J}$

سوال 6.3: مثال 4.7 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

6.2 کپیسٹر

سوال 6.4: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times26}$

سوال 6.5: لامحدود موصل زمینی سطح $z=0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D}=\frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-112\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{2\pi\times884}$

سوال 6.6: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L=5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}\qquad(-\infty<y<\infty,x=0,z=2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z=0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 6.7: مشق 5.3 میں $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر سیلکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔اگر سیلکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^7 سیلکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلکان کی موصلیت کیا ہو گی۔سیلکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔(ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لٰہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 6.8: صفحہ 126 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 6.9: صفحہ 118 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

جدول 6.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیرشدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 6.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عمبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
تقطیرشدہ پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 6.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر مرکز	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 6.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار خالی خلاء میں	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$