برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔ یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ اسی طرح قوت چارج کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔ اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 لورنز مساوات قوت[21] کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

8.2 تفرقی چارج پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج $\mathrm{d}Q$ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

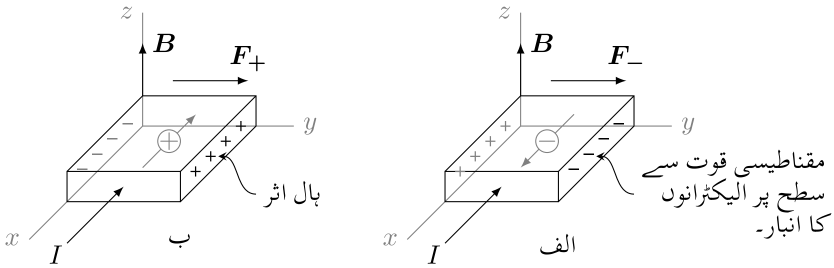
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔ مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت اور منفی چارج کے مابین کولومب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

[1] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔
[2] Lorentz force equation



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے ہال اثر[3] کے نام[4] سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے لہٰذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند $-$ علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہٰذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں قوت $\boldsymbol{F}_-$ عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[5] ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباو[6] پایا جائے گا۔ تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول[7] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[8] وغیرہ۔

سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔ اس مساوات کو صفحہ 117 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے چارج کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{8.6}$$

[3] Hall effect

[4] ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔

[5] uncovered

[6] Hall voltage

[7] free holes

[8] magnetic flux meter

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \,\mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم مساوات 7.5 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB\sin\alpha \tag{8.14}$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔یہاں تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right]\\ &= -108.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

ہو گا۔اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right]\\ &= 54.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

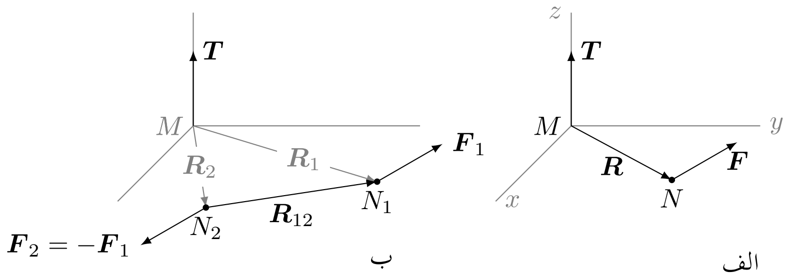
قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right]\\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2\end{aligned} \tag{8.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں B کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{B} \times \oint \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ[9] یعنی قوت کا معیار اثر[10] عموماً صفر نہیں ہوتا۔قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چُول[11] کا جاننا ضروری ہے۔شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کر رہا ہے۔ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}$ قوت کا بازو[12] کہلاتا ہے۔قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{T}$

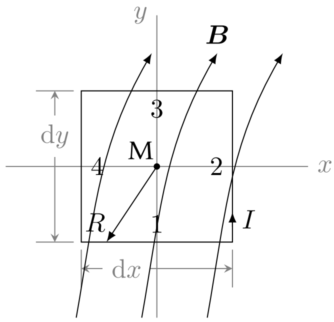
$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} \tag{8.17}$$

کے برابر ہے۔مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \\
&= \boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{F}_1
\end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں مروڑ حاصل کریں۔تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔اس تار کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right]
\end{aligned}$$

torque[9]
moment of force[10]
pivot[11]
moment arm[12]

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکلارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}$$

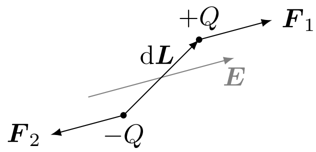
ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

کے برابر ہے۔بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

حاصل ہوتا ہے۔یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{B}_0)$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.19}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[13] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.20}$$

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.21}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہو گی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔مثبت چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{E}$ اور منفی چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_2 = -Q\boldsymbol{E}$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times Q\boldsymbol{E}\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ برقی جفت قطب ہے۔مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان $\boldsymbol{E}$ کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

[13] differential magnetic dipole moment

مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

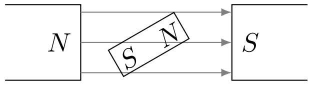
ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

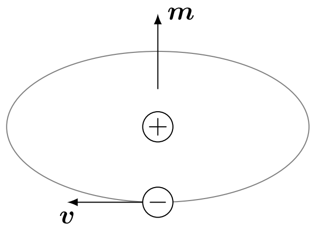
$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.22}$$

سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جا سکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔



شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔



شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

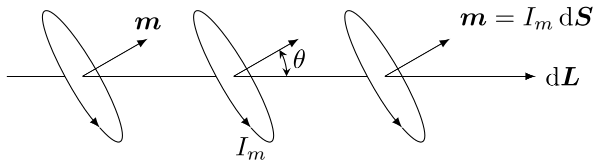
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو[14] I_m کہلائی جاتی ہے۔ اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب $\boldsymbol{m}$ کو جنم دیتی ہے۔ الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو $\boldsymbol{v}$ کے الٹ سمت میں ہو گی۔ ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات[15] سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔ یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نِکل[16] اور کوبالٹ[17] ایسے عناصر ہیں جن کا $\boldsymbol{m}$ قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔ یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء[18] کہلاتے ہیں۔ ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ ایسے ہم صف[19] خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ ان خطوں کو مقناطیسی خطے[20] کہتے ہیں۔ مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔ کسی بھی قدرتی مقناطیسی شہ میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ ہاں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_0$ لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو $\boldsymbol{B}_0$ کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔ یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔ بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔ یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔ یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال[21] کہلاتا ہے۔

---

[14] bound current
[15] quantum mechanics
[16] nickel
[17] cobolt
[18] ferromagnetic
[19] aligned
[20] magnetic domain
[21] hysteresis



شکل 8.7: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{m}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.23}$$

ہو گا۔انفرادی $\boldsymbol{m}$ مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔اجتماعی مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.24}$$

کو مقناطیسیت[22] پکارا اور $\boldsymbol{M}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مقناطیسیت کی اکائی بالکل $\boldsymbol{H}$ کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 132 پر دئے مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

شکل 8.7 میں بند راہ کا کچھ حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔چھوٹے رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $\boldsymbol{m} = I_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو جنم دیتی ہے۔بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔یوں چھوٹے حجم $\mathrm{d}S\cos\theta\,\mathrm{d}L$ یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہو گی۔آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رونما ہوتی ہے۔اگر بند راہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}$ جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہٰذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$\mathrm{d}I_m = nI_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.25}$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$I_m = \oint \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.26}$$

ہو گا۔

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔یوں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ میں جفت قطب پر قوت اور مروڑ پر رہا

[22] magnetization

ہے۔آئیں $\boldsymbol{B}$ کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$\oint \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_{\text{کل}} \tag{8.27}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$I_{\text{کل}} = I + I_m \tag{8.28}$$

کے برابر ہے۔مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{8.30}$$

جسے یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \right) \tag{8.31}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ خالی خلاء میں $\boldsymbol{M}$ صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ ہی حاصل ہوتا ہے۔مساوات 8.29 میں $\boldsymbol{H}$ کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$I = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.32}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$\begin{aligned} I_m &= \oint_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I_{\text{کل}} &= \oint_S \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I &= \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.26، مساوات 8.32 اور مساوات 8.27 کے گردش

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{J}_m \\ \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} &= \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{8.33}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.32 اور مساوات 8.33 سے غرض رہے گا۔یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.31 کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$، مقناطیسی میدان کی شدت $\boldsymbol{H}$ اور مقناطیسیت $\boldsymbol{M}$ کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔خطی[23] اور غیر سمتی خاصیت[24] کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.34}$$

---

[23] linear
[24] isotropic

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری[25] کہا جاتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}\right)\\ &= \mu_0 (1+\chi_m)\boldsymbol{H}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل[26] پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$\mu_R = 1 + \chi_m \tag{8.35}$$

یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_R \boldsymbol{H}$$

یا

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$\mu = \mu_0 \mu_R \tag{8.37}$$

مقناطیسی مستقل[27] پکارا جاتا ہے۔جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ایسے اشیاء مساوات 8.34 پر پورا اترتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت[28] کے اشیاء میں $\boldsymbol{H}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{B}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق تناوی شکل

$$\begin{aligned}B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z\\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z\\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z\end{aligned} \tag{8.38}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات صفحہ 135 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔یوں سمتی خاصیت کے اشیاء میں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔مساوات $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ اب بھی درست ہے اگرچہ $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{M}$ عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

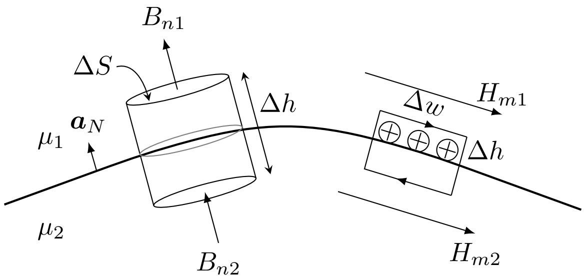
8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔بالکل انہیں کی طرح شکل 8.8 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔سرحد پر چھوٹے نلکی ڈبے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

---

[25] magnetic susceptibility
[26] relative magnetic constant, relative permeability
[27] magnetic constant, permeability
[28] anisotropic



شکل 8.8: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$B_{n2} = B_{n1} \tag{8.39}$$

یا

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \tag{8.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں عمودی $\boldsymbol{B}$ سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی $\boldsymbol{H}$ سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.41}$$

$$\boldsymbol{a}_N \cdot \left(\boldsymbol{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1\right) = 0 \tag{8.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی $\boldsymbol{M}$ کا تعلق سرحد پر عمودی $\boldsymbol{H}$ کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} M_{n1} \tag{8.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_{\perp}\Delta w$$

یعنی

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{8.44}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_\perp$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.45}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی $\boldsymbol{B}$ کے لئے یوں

$$\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_\perp \tag{8.46}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی $\boldsymbol{M}$ کے لئے

$$M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_\perp \tag{8.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔ کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔ برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8.49}$$

ہے۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \tag{8.50}$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔ منبع برقی دباو کو محرک برقی دباو پکارا جاتا ہے۔اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباو کو محرک مقناطیسی دباو پکارا جائے گا۔ متحرک مقناطیسی دباو کی اکائی ایمپیئر ہے۔ حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباو استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیئر-چکر[29] لی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباو کے فرق کو

$$V_{AB} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.51}$$

---

[29] ampere-turns

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباو کے فرق کو

$$V_{mAB} = -\int_B^A \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.52}$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 218 پر مساوات 7.79 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے دوران مندرجہ بالا تکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{8.53}$$

سے کون خبر دار نہیں ہے۔یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.54}$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمل

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.55}$$

حاصل ہوتی ہے۔کل مقناطیسی بہاو بھی ایسے ہی تکمل سے حاصل ہو گا لہٰذا

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.56}$$

لکھا جائے گا۔یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$V = IR \tag{8.57}$$

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباو اور مقناطیسی بہاو کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے $\Re$ سے ظاہر کیا جائے گا لہٰذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$V_m = \Phi \Re \tag{8.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیئر-چکر فی ویبر $(\mathrm{A \cdot t/Wb})$ ہے۔

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{8.59}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$\Re = \frac{d}{\mu S} \tag{8.60}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جا سکے۔

مثال 8.2: ایک سلاخ جس کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $1\,\mathrm{mm}$ ہے کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے پر $220\,\mathrm{V}$ برقی دباو لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8\,\Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5\,\mathrm{A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$$

مثال 8.3: ایک سلاخ کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $2\,\mathrm{cm}$ ہے کی جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔ اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں $0.5\,\mathrm{A}$ برقی رو ہو مقناطیسی دباو لاگو کرتا ہے۔ سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاو بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\Re = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94\,988\,\mathrm{A \cdot t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \frac{V_m}{\Re} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53\,\mathrm{mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاو ہو گی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42\,\mathrm{T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ چارج پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولومب کا قانون اخذ کیا۔اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h \tag{8.61}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جاسکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی، یعنی، ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمتیہ[30] سے حاصل کی جائے گی۔یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صفر پیش کرتے ہیں

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \tag{8.62}$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ پر کرنے سے

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \tag{8.63}$$

اور

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \tag{8.64}$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے ناممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر $\mathrm{J/m^3}$ میں ناپا جائے گا۔

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، کپیسٹر اور امالہ کردار ادا کرتے ہیں۔مزاحمت اور کپیسٹر پر ہم بات کر چکے ہیں۔برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دارومدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر چارج کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباو کی شرح کو کپیسٹنس کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ کپیسٹر کے قیمت کا دارومدار کپیسٹر کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔یوں مزاحمت اور کپیسٹر کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔اس حصے میں ہم امالہ L پر غور کریں گے۔نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا

[30] Poynting vector

ہے۔امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دارومدار امالہ کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاو[31] کا ذکر ضروری ہے۔تصور کریں کہ N چکر لا لچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتی ہے۔یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاو ہر چکر سے گزرتی ہے۔یوں پہلے چکر سے Φ بہاو گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاو گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاو گزرتی ہے۔ارتباط بہاو سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاو کا مجموعہ۔

ارتباط بہاو اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔اگر ارتباط بہاو اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ[32] کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاو دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ[33] کہتے ہیں۔اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{8.65}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاو تمام چکر سے گزرتی ہے۔امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاو اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتا۔ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔صفحہ 188 پر مساوات 7.12

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاو

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S B_\phi \,\mathrm{d}S \\
&= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z}{2\pi\rho} \\
&= \frac{\mu_0 I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}
\end{aligned}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ مقناطیسی بہاو دونوں تاروں کے درمیانے خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{8.66}$$

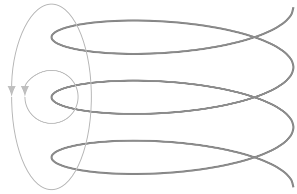
ہو گی۔یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاو پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاو پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاو حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاو لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاو} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

---

[31] flux linkage
[32] self inductance
[33] mutual inductance



شکل 8.9: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاو مختلف ہو سکتی ہے۔

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

پیدا ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مقناطیسی دباو ہے جسے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو Φ کو تکمل

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس تکمل میں $\boldsymbol{B}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ بایوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں بند تکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔اس مساوات میں $\boldsymbol{A}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.67}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دارومدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی تکمل لیا گیا۔ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرہ مشکل[34] سے بنتی ہے۔ سطحی تکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جا سکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

[34] آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بایوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔ تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔ جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہٰذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظرانداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.4: لامحدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کے تار کو z محدد پر تصور کرتے ہیں۔ تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi\rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ رداس ρ پر $\mathrm{d}\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$\mathrm{d}\Phi = B_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho$$

بہاو گزرے گی۔ اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاو صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہٰذا یہ تفرقی بہاو صرف

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho$$

دیتی ہے۔ اگر تفرقی بہاو تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔ یوں تکمل سے اندرونی ارتباط بہاو

$$\text{ارتباط بہاو} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi} \tag{8.68}$$

یا $\frac{\mu}{8\pi}$ ہینری فی میٹر حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 189 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
I_{\text{گھیرا}} &= \left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I \\
H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) \\
\mathrm{d}\Phi &= \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ تفرقی بہاو ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تفرقی ارتباط بہاو

$$
\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)^2 \mathrm{d}\rho
$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$
L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.69}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.68 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔ یوں کم تعدد پر مساوات 8.66، مساوات 8.68 اور مساوات 8.69 کا مجموعہ ہم محوری تار کا امالہ فی میٹر تار ہو گا۔ جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہو جاتی ہے۔ یوں بلند تعدد پر مساوات 8.66 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

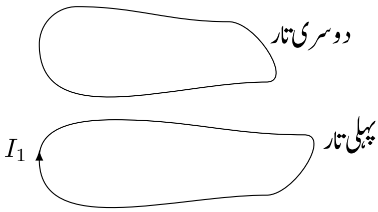
آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$
W = \frac{LI^2}{2} \tag{8.70}
$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.62، مساوات 8.63 یا مساوات 8.64 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
L = \frac{2W}{I^2} &= \frac{1}{I^2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{I^2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{I^2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h
\end{aligned} \tag{8.71}
$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.2 میں لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.3 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔



شکل 8.10: مشترکہ امالہ۔

8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.10 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔ آئیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاو کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین مشترکہ امالہ حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاو کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاو کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} \tag{8.72}$$

ہے جس سے

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \tag{8.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رو لی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاو حاصل کی جاتی تب

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \tag{8.74}$$

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دو درجی تکمل میں اندرونی تکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمل پہلی راہ پر ہے۔ تکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمل لیا جائے تو تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.73 ملتا ہے لٰہذا

$$M_{21} = M_{12} \tag{8.75}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوال 8.1: صفحہ 189 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left[\rho_2^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}+\frac{\rho_3^4-\rho_2^4}{4}-\rho_2^2\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)\right]$

سوال 8.2: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.71 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.3: صفحہ 248 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔اسی کو دوبارہ مساوات 8.71 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: بیرونی تار میں $H=\frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)$ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدان یعنی میدانوں پر غور کیا گیا۔یہاں سے آگے اس کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

دو نئے اصول پر غور کیا جائے گا۔پہلا اصول مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔قانون فیراڈے[1] کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی بند راہ سے گزرتی مقناطیس بہاو میں تبدیلی اس راہ پر برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ایسی برقی دباو روایتی طور پر محرک برقی دباو[2] پکاری جاتی ہے۔محرک برقی دباو[3] کی قیمت وقت کے ساتھ بند راہ سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے تبدیلی کے برابر ہوتی ہے۔محرک برقی دباو کی اکائی وولٹ V ہے۔ضروری نہیں کہ بند راہ موصل مادے کی ہی ہو، یہ فرضی بند لکیر بھی ہو سکتی ہے۔

محرک برقی دباو مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، بند راہ میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی جس کی سمت، راہ میں پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے سمت، کی الٹ ہوتی ہے۔مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے کہ بند راہ میں محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو ایسا مقناطیسی بہاو پیدا کرتی ہے جو پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے الٹ سمت رکھتی ہے۔اس اصول کو لینز[5][4] کا اصول کہا جاتا ہے۔

کسی بھی بند راہ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

---

[1] Faraday's law
[2] electromotive force, emf
[3] محرک برقی دباو کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباو کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔
[4] یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔
[5] Lenz's law

- وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی کثافت مقناطیسی بہاو جو ساکن بند راہ سے گزرتی ہو۔
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند راہ کا آپس میں اضافی حرکت۔
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند راہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$\text{محرک برقی دباو} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی دباو کے طرز پر محرک برقی دباو کی تعریف

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.3}$$

لکھی جاتی ہے جہاں تکمل پورے بند راہ پر لینا لازم ہے۔ برقی دباو کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت $(-)$ لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباو بند راہ پر بیان کی جاتی ہے۔ صفحہ 97 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل اس راہ پر پیدا محرک برقی دباو دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کا سطحی تکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند راہ کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں راہ پر چلنے کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا راہ سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہو گا۔ مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباو سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند راہ میں محرک برقی دباو پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے راہ کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباو پر غور کریں۔

ساکن راہ کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر $\boldsymbol{B}$ ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ سطح S ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند راہ ہو۔یوں ہم دونوں جانب مختلف سطحیں لے سکتے ہیں جب تک دونوں سطحوں کے سرحد یہی بند راہ ہو۔اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب تکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی سطح $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے لئے بھی درست ہے۔تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

یعنی

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔میکس ویل کے پہلی مساوات کی تکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=0 \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.7}$$

اور

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔تصور کریں کہ $\rho<\rho_2$ نلکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$\boldsymbol{B}=B_0e^{kt}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad (\rho<\rho_2) \tag{9.8}$$

کثافت مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ہم $z=0$ سطح پر ρ_1 رداس کی گول راہ لیتے ہیں۔مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے راہ پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہٰذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباو}=2\pi\rho_1E_\phi=-kB_0e^{kt}\pi\rho_1^2$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{2}kB_0e^{kt}\rho\boldsymbol{a}_\phi \tag{9.9}$$

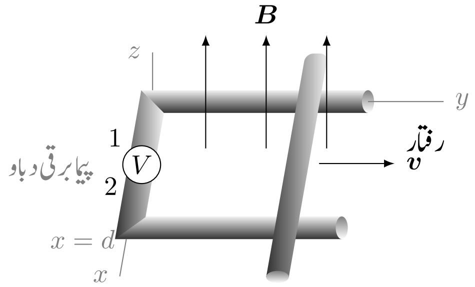
لکھی جا سکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو پایا جاتا ہے لہٰذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہٰذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial\rho}=-kB_0e^{kt}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمل لے کر

$$\rho E_\phi=-kB_0e^{kt}\frac{\rho^2}{2}$$



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

یعنی

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \boldsymbol{a}_\phi \tag{9.10}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس راہ پر $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند راہ حرکت کر رہی ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں v سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباو ناپنے کی آلہ[6] یعنی پیما برقی دباو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند راہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیما برقی دباو نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ بند راہ کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}$ کی سمت ہی بند راہ سے گھیری گئی سطح کی سمت ہو گی اور بند راہ کی سمت گھڑی کے الٹ ہو گی۔یوں راہ کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdvt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bdv$$

محرک برقی دباو e پیدا کرے گا۔

[6] وولٹ میٹر
[7] voltmeter

اب محرک برقی دباو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو کہتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا جواب راہ پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔پیما برقی دباو کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہٰذا تکمل کی قیمت پیما برقی دباو پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیما برقی دباو کی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -Bdv$ ہونا ہو گا۔چونکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}L\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{E}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ ہو گی۔یوں پیما برقی دباو پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت پیما کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیما پر برقی دباو کا مثبت سرا پیما کا دوسرا سرا ہے۔

پیما کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباو تصور کرتے ہوئے حل کریں۔مقناطیسی میدان میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{9.11}$$

عمل کرتی ہے۔حرکی شدت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہے۔حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ پیدا کرے گا۔الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ برابر ہو جائیں۔ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکی برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.12}$$

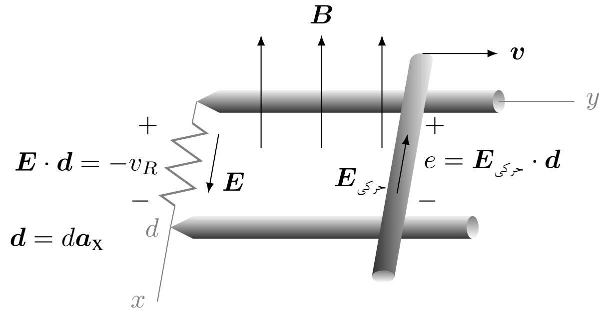
سے حاصل ہو گی۔مساوات کے دائیں ہاتھ بند راہ کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا محرک برقی دباو صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

$$\oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 vB\,\mathrm{d}x = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{B}$ از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہٰذا یہی کل محرک برقی دباو ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند راہ میں محرک برقی دباو حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ کے استعمال سے محرک برقی دباو یوں

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.13}$$



شکل 9.2: محرک برقی دباو اور برقی دباو کا موازنہ۔

حاصل کی جا سکتی ہے۔البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباو کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.14}$$

سے حاصل ہو گی۔یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیما برقی دباو کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباو کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 9.11 محرک سلاخ پر پیدا $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے پرلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباو v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے اُرلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے برقی دباو v_R یوں

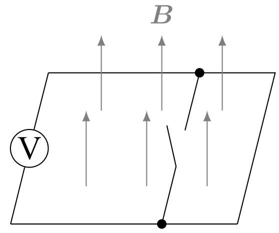
$$v_R = -\int_d^0 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_d^0 E\,\mathrm{d}x = Ed \tag{9.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = -E_{\text{حرکی}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سے حرکی دباو e یوں

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 -E_{\text{حرکی}}\,\mathrm{d}x = E_{\text{حرکی}}d \tag{9.16}$$

حاصل ہوتی ہے۔یاد رہے کہ شکل میں v_R اور e دونوں مثبت قیمت رکھتے ہیں اور مثبت قیمتیں صرف مندرجہ بالا دو مساوات سے ہی حاصل ہوتی ہیں۔یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کے حصول میں منفی کی علامت استعمال کی گئی جبکہ e کے حصول میں ایسا نہیں کیا گیا۔حرکی دباو کے بند تکمل میں راہ کے بقایا اطراف پر تکمل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند راہ کا کوئی حصہ متحرک ہے۔البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند راہ میں مقناطیسی بہاو کم اور زیادہ کیا جا



شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند راہ سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند راہ کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $\boldsymbol{B} = 0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ٹسلا، رفتار $100y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21}،
- پیما برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $4.017\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $100\,\mathrm{V}$، $10\,\mu\mathrm{A}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.17}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{9.18}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔اس مساوات کی پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاو ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.19}$$

ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.18 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہٰذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.18 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔تصور کریں کہ مساوات 9.18 میں نا معلوم جزو $\boldsymbol{G}$ کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 9.18 یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

لکھی جائے گی۔آئیں دوبارہ اس کی پھیلاو حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \left(\nabla \cdot \boldsymbol{D}\right)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

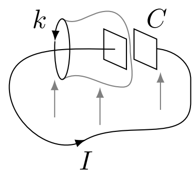
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.20}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.20 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو[8] کا نام دیا اور $\boldsymbol{J}_d$ سے ظاہر کیا یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d$$
$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

[8] displacement current density



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.21}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.22}$$

شامل ہیں۔ مساوات 9.20 میں $\boldsymbol{J}$ سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج $\boldsymbol{H}$ کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\boldsymbol{J} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر موصل میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{9.23}$$

ہو گا۔ مساوات 9.23 اور مساوات 9.17 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ اور برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو $\boldsymbol{D}$ اور کثافت بہاو $\boldsymbol{B}$ بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$I_d = \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.24}$$

سے حاصل ہو گی۔ مساوات 9.20 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.25}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دو سرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ محرک برقی دباو

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظرانداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں ϵ، S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔آئیں انتقالی رو کو نظرانداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند راہ k پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_k$$

اب بند راہ k اور اس راہ پر $\boldsymbol{H}$ حقیقی مقدار ہیں اور تکمل سے حاصل رو I_k اس راہ سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لٰہذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لٰہذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظرانداز ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مشق 9.2: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $\frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.26}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.27}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{9.28}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.29}$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.28 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند راہ پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا نا تو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.29 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاو کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاو نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا یک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاو اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{9.30}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9.31}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.33}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کی جگہ

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \right) \tag{9.35}$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E} \tag{9.36}$$

اور

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{9.37}$$

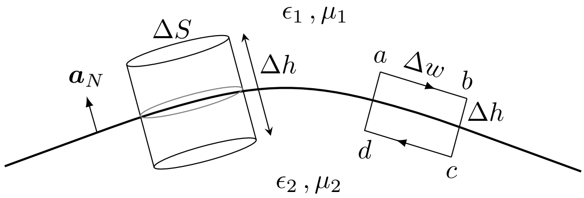
لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$\boldsymbol{F} = \rho_h \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{9.38}$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباو V اور سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل

مساوات 9.26 کے سطحی تکمل پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کرتے ہوئے فیراڈے کا قانون

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{S} \tag{9.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 9.27 اسی طریقہ کار سے ایمپیئر کا دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے لئے گاؤس کے قوانین مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کے تمام حجم پر حجمی تکمل اور مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{9.41}$$

اور

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{9.42}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا چار مساوات سے $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{H}$، $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہٰذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل راہ پر مساوات 9.39 کے اطلاق سے

$$\left(E_{m1}-E_{m2}\right)\Delta w = -\frac{\partial B_n}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد راہ کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{9.43}$$

یعنی

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{9.44}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی رو کو $I = \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں شکل 9.5 میں مستطیل راہ پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2})\,\Delta w = K_{\perp}\Delta w + \frac{\partial D}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے لہٰذا اس جزو کو نظرانداز کرتے ہوئے

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{9.45}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{9.46}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ صفر ہوتی ہے۔لہٰذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$H_{m1} = H_{m2} \tag{9.47}$$

ہو گا۔صفحہ 241 پر شکل 8.8 میں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.41 اور مساوات 9.42 سے سرحدی عمودی شرائط

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{9.48}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{9.49}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر $\boldsymbol{J}$ محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.50}$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.51}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود $\boldsymbol{J}$ کی قیمت

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{9.52}$$

حاصل ہوتی ہے لہٰذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ ممکن ہے۔یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.43 تا مساوات 9.49 سے

$$E_{m1} = 0 \tag{9.53}$$
$$H_{m1} = 0 \tag{9.54}$$
$$D_{n1} = \rho_S \tag{9.55}$$
$$B_{n1} = 0 \tag{9.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.53 تا مساوات 9.56 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت بغیر سرحد کے خطے میں لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔میکس ویل مساوات کا یہ سب سے آسان استعمال ہے چونکہ ان میں کسی قسم کے سرحدی شرائط لاگو نہیں ہوتے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں تاخیری دباو[9] کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج[10] کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$V = \int_h \frac{\rho_h \,\mathrm{d}h}{4\pi\epsilon R} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.57}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu \boldsymbol{J} \,\mathrm{d}h}{4\pi R} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.58}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.59}$$

اور

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.60}$$

ہیں۔

---

[9] retarded potentials
[10] radiation

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.61}$$

اور گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.62}$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو گا۔ مساوات 9.62 اس شرط پر پورا اترتی ہے چونکہ گردش کی پھیلاو لازماً صفر کے برابر ہی ہوتی ہے۔ یوں مساوات 9.62 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

باب 10

سوالات

جدول 10.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 10.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عمبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
تقطیر شدہ پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 10.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 10.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$