برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 14

مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی TEM[1] امواج کی بات کرتے آرہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں میوج[2] کہلاتے ہیں۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مویج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی مویج تک بات بڑھائی جائے گی۔ان مویج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مویج پر غور کیا جائے گا۔آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

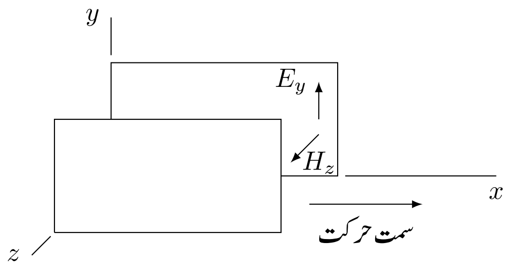
کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد (10^{16} Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

[1] transverse electromagnetic, TEM

[2] waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے نا کہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

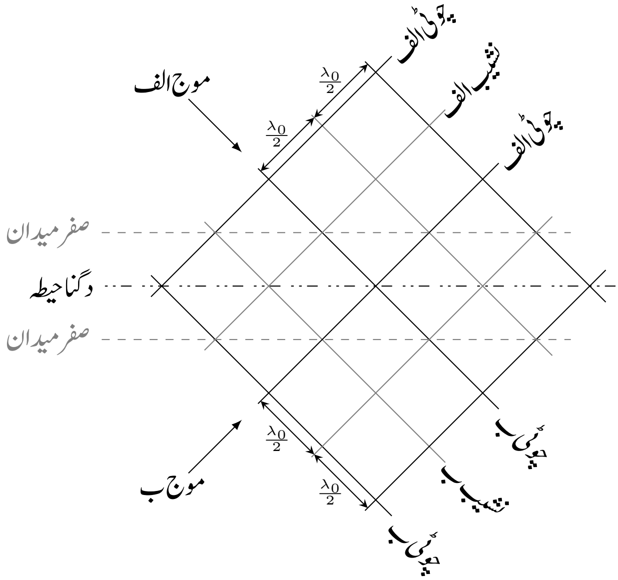
14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز[4] کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے مویج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو عرضی برقی انداز[5] (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

low cutoff frequency[3]
higher order mode[4]
transverse electric mode, TE mode[5]



شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

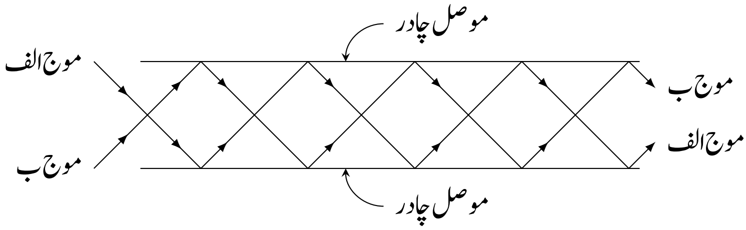
عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

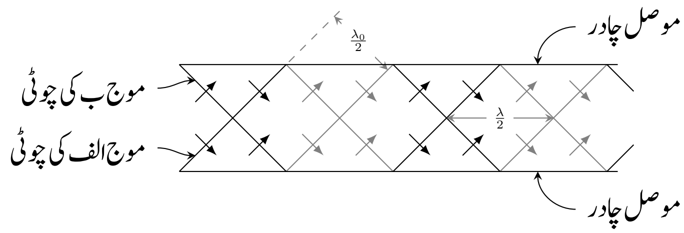
صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں مویج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔خالی خلاء میں طول موج اور مویج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو بہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ مویج سے نہیں گزر سکتی۔طول کی یہ حد انقطاعی طول[6] پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

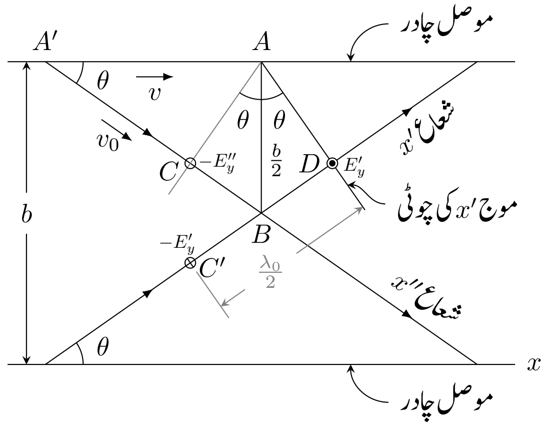
[6] cutoff wavelength



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور مویج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے مویج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E'_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{14.1}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{14.2}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ان حقائق پر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔شکل 14.5 میں تکون ABC سے

$$AB\sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n}\sin\theta \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{14.4}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{14.5}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ کم تر درجے کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

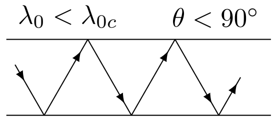
$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔$n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

$$\lambda_{0c} = b \tag{14.6}$$

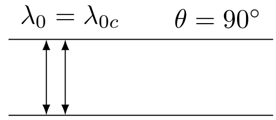
ہو گا۔یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کے لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصل موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

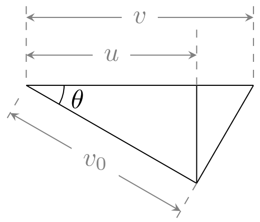
$$\lambda_0 = \lambda_{0c}\sin\theta \tag{14.7}$$



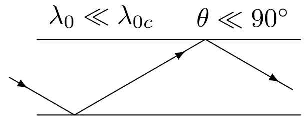
(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{14.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90°$ حاصل ہوتا ہے۔اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت $90°$ سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{14.9}$$

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔ شکل 14.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

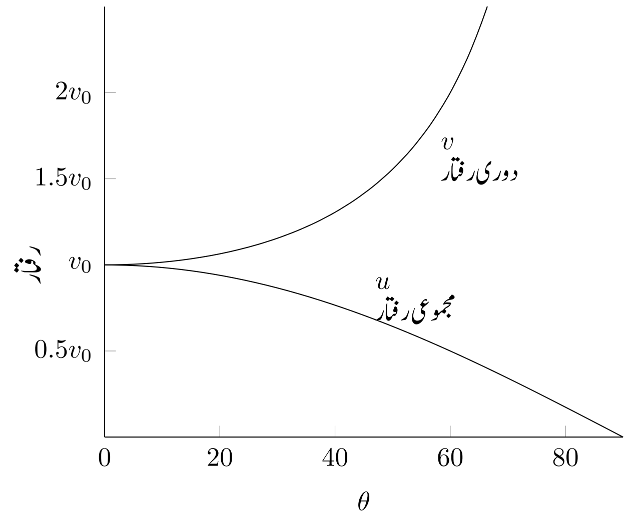
$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{14.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتٰی کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی

[7] phase velocity



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں مویج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos\theta \tag{14.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار در حقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \tag{14.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

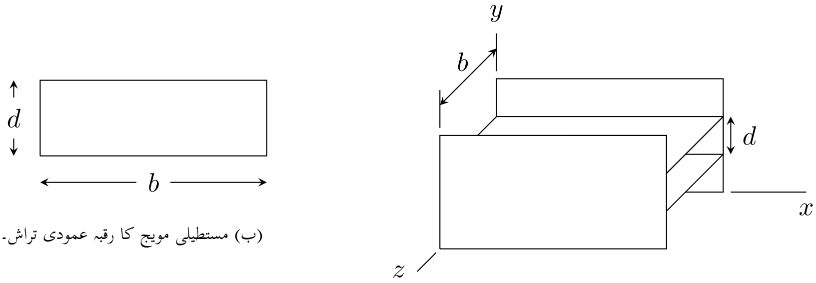
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت $90°$ کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

---

[8] group velocity



(ا) لامحدود متوازی چادر مویج سے مستطیلی مویج کا حصول۔

(ب) مستطیلی مویج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 14.8: مستطیلی مویج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی مویج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی مویج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہٰذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی مویج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا مویج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل مویج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے مویج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل مویج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج

مستطیل مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی مویج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ مویج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی[10] TE موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی[11] TM موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی ناکہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی مویج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

[9] حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔
[10] transverse electric, TE
[11] transverse magnetic, TM

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14.15}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{14.16}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{14.17}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{14.18}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{14.20}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{14.21}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.23}$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
E_y &= E_1 e^{j\omega t-\gamma x} \\
H_x &= H_1 e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.24}
$$

لکھے جائیں گے جہاں

γ حرکی مستقل $(\gamma = \alpha + j\beta)$

α تضعیفی مستقل

β زاویائی مستقل

ہیں۔مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.16

$$
\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t-\gamma z} = 0
$$

یا

$$
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{14.25}
$$

لکھا جائے۔اسی طرح مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.17 تا مساوات 14.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$
\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{14.26}
$$

$$
-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{14.27}
$$

$$
\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \tag{14.28}
$$

$$
\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \tag{14.29}
$$

$$
-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \tag{14.30}
$$

$$
-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.31}
$$

$$
-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.32}
$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$
Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{14.33}
$$

$$
Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{14.34}
$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}-ZH_x=0 \tag{14.35}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z}+\gamma E_z-ZH_y=0 \tag{14.36}$$
$$-\gamma E_y-\frac{\partial E_x}{\partial y}-ZH_z=0 \tag{14.37}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-YE_x=0 \tag{14.38}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z}+\gamma H_z-YE_y=0 \tag{14.39}$$
$$-\gamma H_y-\frac{\partial H_x}{\partial y}-YE_z=0 \tag{14.40}$$

$$-\gamma E_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14.41}$$
$$-\gamma H_x+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{14.42}$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو مویج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x=0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}-ZH_x=0 \tag{14.43}$$
$$\gamma E_z-ZH_y=0 \tag{14.44}$$
$$-\gamma E_y-ZH_z=0 \tag{14.45}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=0 \tag{14.46}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z}+\gamma H_z-YE_y=0 \tag{14.47}$$
$$-\gamma H_y-\frac{\partial H_x}{\partial y}-YE_z=0 \tag{14.48}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14.49}$$
$$-\gamma H_x+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{14.50}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.44 اور 14.45 سے

$$\frac{E_z}{H_y}=-\frac{E_y}{H_z}=\frac{Z}{\gamma} \tag{14.51}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔چونکہ مساوات 14.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہٰذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ[12] Z_{yz} کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{14.52}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.52 کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.52 کو مساوات 14.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 14.53 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.55}$$

اور مساوات 14.54 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

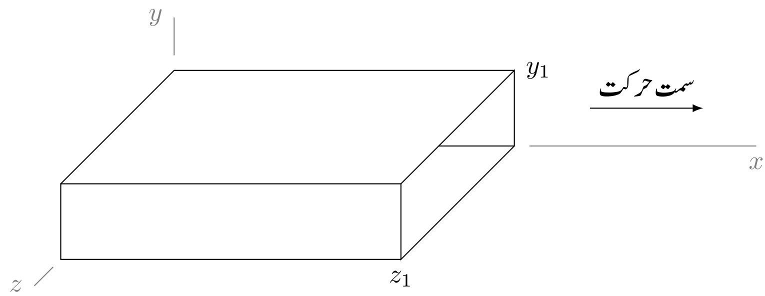
$$k^2 = \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) \tag{14.57}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \tag{14.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.58 مویج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔مویج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

[12] transverse-wave impedance



شکل 14.9: مستطیل مویج۔

ساتویں قدم میں موئج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موئج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا موئج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔یوں موئج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔اسی طرح موئج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.58 کا حل درکار ہے۔علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{14.59}$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔مساوات 14.59 کے استعمال سے مساوات 14.58

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \tag{14.60}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \tag{14.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو نا قابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \tag{14.62}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \tag{14.63}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 14.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \tag{14.64}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.62 اور مساوات 14.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔مساوات 14.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{14.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_2، m_1 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.65 کو واپس مساوات 14.62 میں پر کرنے سے

$$b_1=\sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.62 کا حل

$$Y=c_1\cos\sqrt{A_1}y+c_2\sin\sqrt{A_1}y \tag{14.66}$$

ہے۔اسی طرح مساوات 14.63 کا حل

$$Z=c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z \tag{14.67}$$

ہے۔ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.59 کو

$$H_x=\left(c_1\cos\sqrt{A_1}y+c_2\sin\sqrt{A_1}y\right)\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z\right) \tag{14.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 14.55 میں پر کرنے سے

$$E_z=\frac{Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\sqrt{A_1}\left(-c_1\sin\sqrt{A_1}y+c_2\cos\sqrt{A_1}y\right)\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y=0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z=0$ ہو گا لہٰذا $y=0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0=\frac{Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_2\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

یعنی

$$c_2=0 \tag{14.69}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_z=\frac{-Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_1\sin\sqrt{A_1}y\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y=y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z=0$ پر کرتے ہوئے

$$0=\frac{-Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_1\sin\sqrt{A_1}y_1\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z+c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x=0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی مویج سے، لہٰذا ہم

$$c_1\neq 0 \tag{14.70}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1}y_1=n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.71}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1 \cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(c_3 \cos\sqrt{A_2}z + c_4 \sin\sqrt{A_2}z\right) \tag{14.72}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 14.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(-c_3 \sin\sqrt{A_2}z + c_4 \cos\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لٰہذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos\frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لٰہذا

$$c_4 = 0 \tag{14.73}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos\frac{n\pi y}{y_1} \sin\sqrt{A_2}z$$

ہو گا۔مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لٰہذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0\frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos\frac{n\pi y}{y_1} \sin\sqrt{A_2}z_1$$

لکھا جائے گا۔اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لٰہذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{14.74}$$

چنتے ہیں۔اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2}z_1 = m\pi \tag{14.75}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.76}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos\frac{n\pi y}{y_1} \cos\frac{m\pi z}{z_1} \tag{14.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہٰذا

$$H_x(x,y,z,t) = H_0 \cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.78}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.79}$$

$$H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.80}$$

$$E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.81}$$

$$E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.82}$$

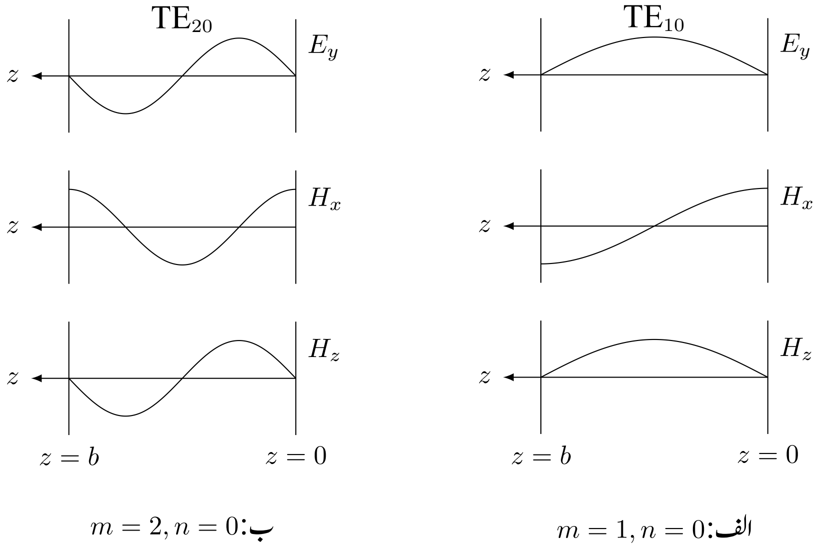
$$E_x = 0 \tag{14.83}$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی مویج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی مویج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں H_y، E_z اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔یوں موبج میں صرف H_x، H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔شکل 14.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔شکل 14.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 14.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔یوں شکل 14.10-الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 14.10-ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔مستطیلی مویج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE10 موج:

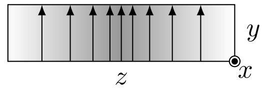
مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m=1$ اور $n=0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= 0\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= 0\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.84}
$$

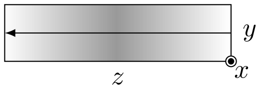
ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x=0$، در حقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ان امواج کو شکل 14.10-الف میں $t=0$ اور $x=0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔TE_{10} تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔شکل 14.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں $z=\frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE20 موج:

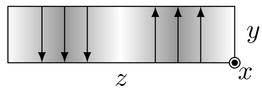
شکل 14.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔



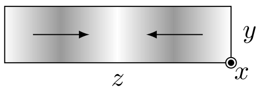
TE$_{10}$ کا E_y میدان۔



TE$_{10}$ کا H_z میدان۔



TE$_{20}$ کا E_y میدان۔



TE$_{20}$ کا H_z میدان۔

شکل 14.11: TE$_{10}$ اور TE$_{20}$ کے E_y اور H_z میدان۔

بلند درجی TE$_{11}$ موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE$_{11}$ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.85}
$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل مویج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی مویج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار مویج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور مویج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.64، مساوات 14.71 اور مساوات 14.76 کو ملا کر

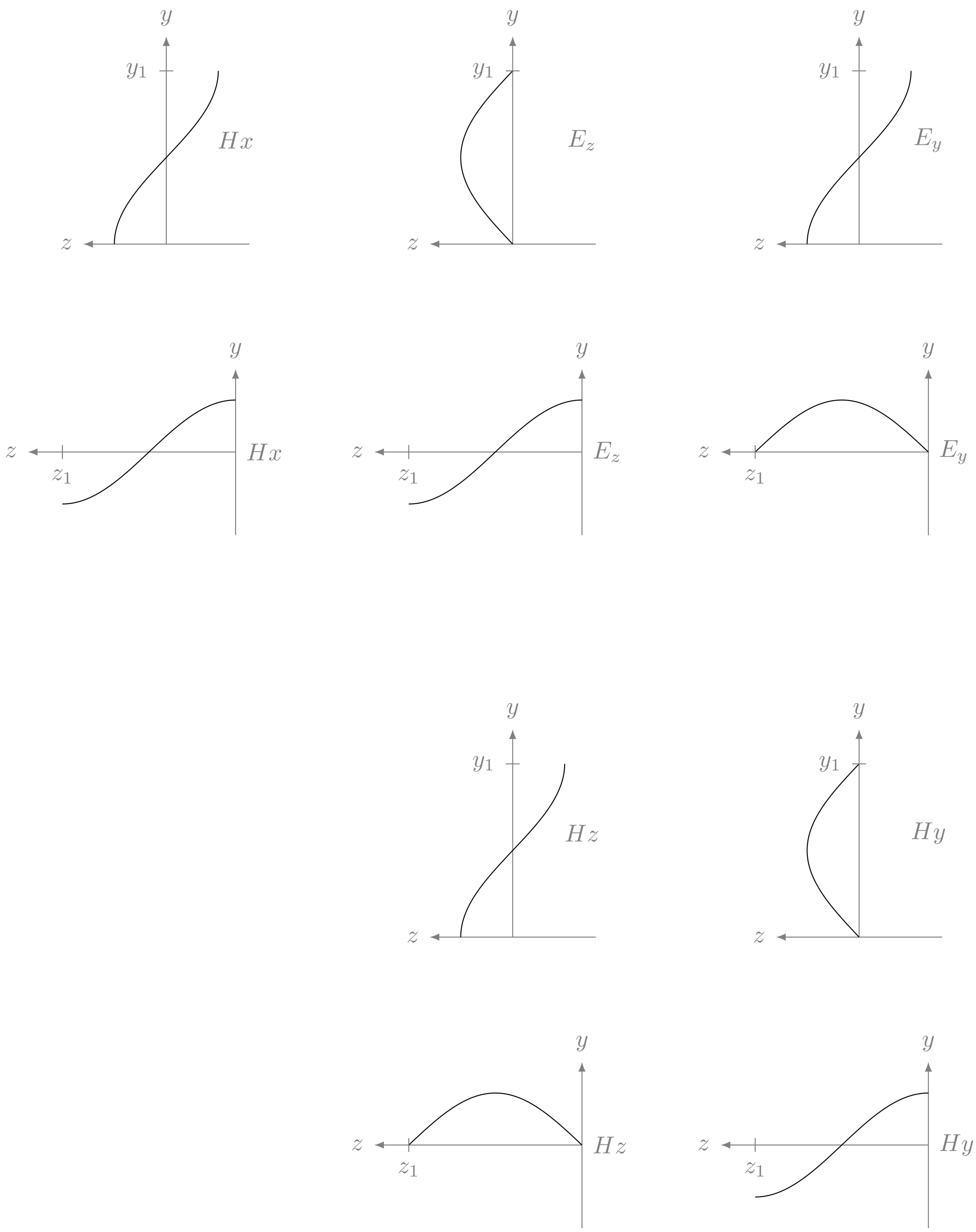
$$
k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.86}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 14.33، مساوات 14.52 اور مساوات 14.57 سے

$$
k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{14.87}
$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع ذو برق میں $\sigma = 0$ لیا جا سکتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$
\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.88}
$$



شکل 14.12: TE_{11} میدان.

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ مویج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو انقطاعی تعدد[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، مویج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ مویج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔مویج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔
- مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔یہ انقطاعی تعدد ہے۔
- زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔مویج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.88 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو مویج میں پایا جاتا ہے۔یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{14.89}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$
$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$
$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\beta_0 > k$ ہو گا لہٰذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{14.90}$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{مویج میں زاویائی مستقل}$$
$$\lambda \quad \text{مویج میں طول موج}$$

ہیں۔کافی بلند تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا اور یوں مویج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $k > \beta_0$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{14.91}$$

---

[13] cutoff frequency

حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا لہٰذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہٰذا $\gamma = 0$ ہو گا۔یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.92}$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد[14]

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \qquad (\text{Hz}) \tag{14.93}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \qquad (\text{m}) \tag{14.94}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.95}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج[15] پکارا جاتا ہے۔مساوات 14.93 اور مساوات 14.94 سے کھوکھلے مستطیلی مویج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = 2z_1 \tag{14.96}$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $(\beta_0 > k)$ پر

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.97}$$

کے برابر ہے۔اب $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 14.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.98}$$

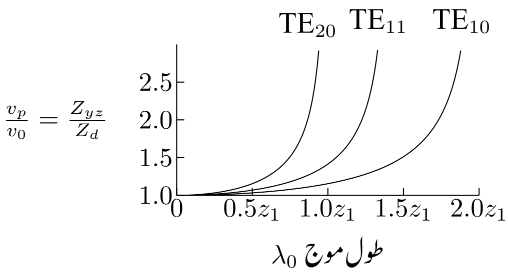
لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.99}$$

---

[14] cutoff frequency

[15] cutoff wavelength



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی مویج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0۔

اور مویج میں دوری رفتار v_p [16]

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \tag{14.100}$$

یا

$$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.101}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_o لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ہے،

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں مستطیلی مویج کے دونوں اطراف برابر لمبائی $(y_1 = z_1)$ کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجزیے میں مویج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ مویج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے مویج میں صفر کرتے ہیں۔حقیقت میں مویج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہٰذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے مویج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ایسے مویج میں طاقت کا ضیاع صرف مویج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی مویج کے طول موج λ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت مویج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

[16] phase velocity

آخر میں مستطیلی مویج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 14.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.102}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\Omega) \tag{14.103}$$

ہو گا جہاں

Z_z موتج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7\,\Omega$ کے برابر ہے۔ چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالکل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہٰذا شکل 14.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 14.1: TE_{10}، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی موتج کے لئے حاصل کریں۔

- ہوا سے بھرا موتج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔
- ہوا سے بھرا موتج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا موتج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا موتج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

---

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 364 پر بتلائے گئے۔انہیں آٹھ قدم سے شکل 14.9 کے مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x=0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x=0$ ہو۔آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہٰذا مساوات 14.14 تا مساوات 14.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔چوتھے قدم میں $H_x=0$ پر کرنے سے

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \tag{14.104}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}+\gamma E_z-ZH_y=0 \tag{14.105}$$

$$-\gamma E_y-\frac{\partial E_x}{\partial y}-ZH_z=0 \tag{14.106}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-YE_x=0 \tag{14.107}$$

$$\gamma H_z-YE_y=0 \tag{14.108}$$

$$-\gamma H_y-YE_z=0 \tag{14.109}$$

$$-\gamma E_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14.110}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{14.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.108 اور مساوات 14.109 سے

$$Z_{yz}=\frac{E_y}{H_z}=-\frac{E_z}{H_y}=\frac{\gamma}{Y} \tag{14.112}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا مساوات 14.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہو گی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔مساوات 14.112 کو مساوات 14.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_y=\frac{Y}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.113}$$

اور اسی طرح مساوات 14.112 کو مساوات 14.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_z=\frac{-Y}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.114}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان دو مساوات اور مساوات 14.112 سے

$$E_y=\frac{-\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.115}$$

$$E_z=\frac{-\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.116}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 14.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 14.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2+YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2+YZ)E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{14.117}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma\left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}}\right) \tag{14.118}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 14.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.119}$$

اور میدان

$$E_x = E_0 \sin\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 14.113 تا مساوات 14.116 میں پر کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2+YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.121}$$

$$H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2+YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.122}$$

$$E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2+YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.123}$$

$$E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2+YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.124}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان جوابات کے ساتھ

$$H_x = 0 \qquad \text{TM}_{mn}\ \text{موج ہونے کا شرط} \tag{14.125}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.120 تا مساوات 14.125 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع $\sigma = 0$ ذو برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 14.118، مساوات 14.119 اور مساوات 14.33 سے

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \\ &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2}\end{aligned} \tag{14.126}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لا محدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \qquad (k > \beta_0) \\ \beta &= 0\end{aligned} \tag{14.127}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \qquad (k < \beta_0)\end{aligned} \tag{14.128}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس صورت میں موج، بغیر گھٹے مویج میں صفر کرے گی۔انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔مساوات 14.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2\mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.129}$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \tag{14.130}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \tag{14.131}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.132}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہو بہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\beta_0 > k$ کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.133}$$

ہو گا جس سے مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{موج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.134}$$

اور مویج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p = \frac{\omega}{\beta} &= \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2-\left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \tag{14.135}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_0 لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو بہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 14.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.136}$$

ہو گا جہاں

Z_z مویج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

کے برابر ہیں۔مساوات 14.136 کا مساوات 14.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز مویج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو مویج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 14.1 مستطیلی مویج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 14.1: مستطیلی مویج میں TEmn امواج کے متغیرات کے تعلق۔

نام تفاعل	اکائی	تعلق
انقطاعی تعدد	Hz	$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$
انقطاعی طول موج	m	$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$
مویج میں طول موج	m	$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
دوری رفتار	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
عرضی موج کی رکاوٹ	Ω	$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$

14.5 کھوکھلی نالی مویج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نلکی محدد میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسے مویج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نلکی محدد ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 364 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نلکی مویج z محدد پر رکھا گیا ہے لہٰذا اس میں امواج z جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو نلکی محدد میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$
$$= -\mu\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{\partial H_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$
$$= \sigma\left(E_\rho\boldsymbol{a}_\rho + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi + E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right) + \epsilon\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{\partial E_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{14.137}$$
$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{14.138}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{14.139}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \sigma E_\rho + \epsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{14.140}$$
$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \sigma E_\phi + \epsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{14.141}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = \sigma E_z + \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{14.142}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے میں پھیلاو کے دو مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.143}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.144}$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 14.137 تا مساوات 14.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند $(E_\phi = E_1 e^{j\omega t-\gamma z})$ بناتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \gamma E_\phi - ZH_\rho = 0 \tag{14.145}$$

$$-\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial\rho} - ZH_\phi = 0 \tag{14.146}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(E_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\phi} - ZH_z = 0 \tag{14.147}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \gamma H_\phi - YE_\rho = 0 \tag{14.148}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial\rho} - YE_\phi = 0 \tag{14.149}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} - YE_z = 0 \tag{14.150}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.151}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial\phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.152}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/\mathrm{m})$ سلسلہ وار رکاوٹ

$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (\mathrm{S/m})$ متوازی فراوانی

$\gamma = \alpha + j\beta$ حرکی مستقل

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں $E_z = 0$

ہو گا جس سے

$$\gamma E_\phi - ZH_\rho = 0 \tag{14.153}$$

$$-\gamma E_\rho - ZH_\phi = 0 \tag{14.154}$$

$$\frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - ZH_z = 0 \tag{14.155}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - YE_\rho = 0 \tag{14.156}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - YE_\phi = 0 \tag{14.157}$$

$$\frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0 \tag{14.158}$$

$$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{14.159}$$

$$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.160}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 14.147 میں $\frac{\partial(E_\phi \rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_\phi + \rho \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 14.153 اور مساوات 14.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ $Z_{\rho\phi}$

$$Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.161}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 14.161 سے E_ρ مساوات 14.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\phi = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.162}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.161 سے E_ϕ مساوات 14.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.163}$$

حاصل ہوتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 14.161 سے

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.164}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.165}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 14.164 کا ϕ تفرق، مساوات 14.165 کا ρ تفرق اور مساوات 14.165 کو مساوات 14.155 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0 \tag{14.166}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس میں

$$\frac{Z\left(\gamma - YZ_{\rho\phi}\right)}{Z_{\rho\phi}} = -k^2 \tag{14.167}$$

یعنی

$$k^2 = \gamma^2 + YZ \tag{14.168}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$\rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} \tag{14.169}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$H_z(\rho, \phi) = M(\rho) N(\phi) \tag{14.170}$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 M N = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بایاں ہاتھ کا متغیرہ ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیرہ ϕ ہے۔یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2 \tag{14.171}$$

$$-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2 \tag{14.172}$$

مندرجہ بالا میں نچلی مساوات کا حل

$$N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \tag{14.173}$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 14.171 کو

$$\rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0 \tag{14.174}$$

لکھا جا سکتا ہے جو بیسل مساوات[17] کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 N_n(k\rho) \tag{14.175}$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔

[17] Bessel's equation

یوں مساوات 14.170 سے

$$H_z = \left[c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho) \right] \left(c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \right) \tag{14.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

کائنات میں کہیں پر بھی لامحدود میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا نلکی مویج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہو گی۔اس کے علاوہ موصل نلکی سطح پر برقی میدان صفر ہو گا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$، جہاں نلکی کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔

پہلے شرط کے تحت نلکی محدد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \to \infty$ کی قیمت لامحدود ہوتی ہے لہٰذا مساوات 14.176 میں

$$c_4 = 0 \tag{14.177}$$

ہو گا۔اگر $c_2 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi = 0°$ پر ہو گی اور اگر $c_1 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $n\phi = 90°$ پر ہو گی۔کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) \tag{14.178}$$

ہو گا جہاں $c_1 c_3 = H_0$ لکھا گیا ہے۔اب چونکہ $\phi = 0$ اور $\phi = 2\pi$ ریڈیئن نلکی مویج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔یوں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 1$ کی صورت میں نلکی میں $\phi = 0$ تا $\phi = 2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔اسی طرح $n = 2$ کی صورت میں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔یوں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نلکی مویج میں موج کی مساوات

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.179}$$

ہو گی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔اس کو مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - Y Z_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d} J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نلکی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا مساوات 14.180 میں ρ_0 پر $E_\rho = 0$ پر کرتے ہوئے

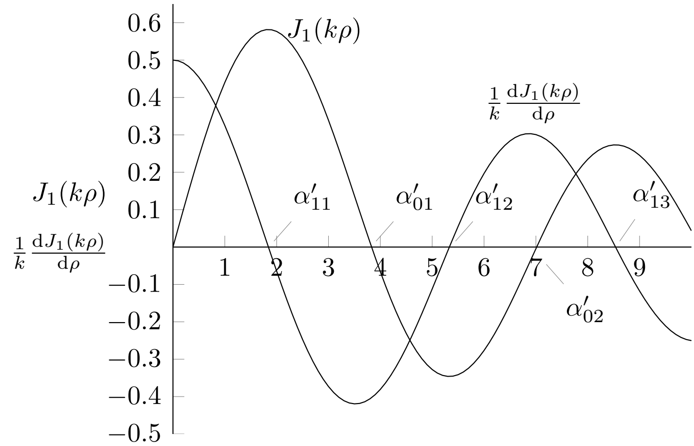
$$\left. \frac{\mathrm{d} J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right|_{\rho_0} = 0 \tag{14.181}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0 = \alpha'_{nm} \tag{14.182}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{\mathrm{d} J_n(\alpha'_{nm})}{\mathrm{d}\rho} = 0 \tag{14.183}$$



شکل 14.14: بیسل تفاعل۔

مساوات 14.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm} = \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14.184}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.185}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 14.162 تا مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.186}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.187}$$

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.188}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.189}$$

$$E_z = 0 \tag{14.190}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11}، TE_{12} اور TE_{13} بلند عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 14.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔ بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔ شکل میں یوں $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.184 کو مساوات 14.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.191}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔

- کم تعدد پر حقیقی γ ہو گا لہٰذا مویج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma = 0$ حاصل ہو گا۔یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔
- بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 14.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{k'_{nm}}{\rho_0} \qquad \text{(Hz)} \tag{14.192}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \qquad \text{(m)} \tag{14.193}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11} = 1.84$ سے $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔

انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہٰذا اسے

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \qquad \text{(rad/m)} \tag{14.194}$$

لکھا جائے گا۔مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں مویج میں طول موج

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m)} \tag{14.195}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0 مویج کے ذو برق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔موتج میں دوری رفتار $v_p = f\lambda_g$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\text{m/s}) \tag{14.196}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 14.195 اور مساوات 14.196 ہو بہو مستطیلی موتج کے مساوات ہیں۔یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے موتج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہٰذا نلکی موتج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔اس کے برعکس مستطیلی موتج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ نلکی موتج میں TE_{11} تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہٰذا اسے غالب[18] بلند درجی انداز کہتے ہیں۔TE_{01} بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہٰذا کم موصلیت کے چادر کی بنی موتج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موتج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔مستطیلی موتج میں مساوات 14.127

$$\alpha = \sqrt{k^2-\beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \tag{14.197}$$

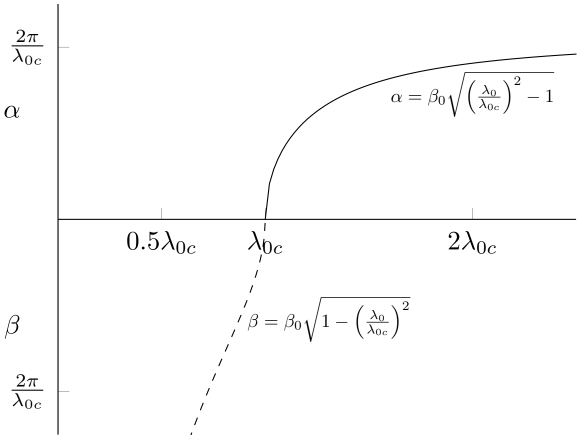
انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 14.131 کی مدد سے

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1} = \beta_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1} \quad (\text{Np/m}) \tag{14.198}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

λ_0 لا محدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج



شکل 14.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

ہیں۔مساوات 14.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد ($\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$) کی صورت میں مساوات 14.198 سے

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \qquad (\text{Np/m}) \tag{14.199}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 14.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لامحدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ ہے۔

مثال 14.1: ایک مویج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c} = 50\,\text{mm}$ ہے۔اس مویج میں $\lambda_0 = 2\,\text{m}$ کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ہے لہٰذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68\,\text{Np/m}$$

ہو گا۔یوں مویج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

---

[18] dominant mode

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا موجی بے ضیاع ہوتا ہے لہٰذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔ مساوات 14.128 سے

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} \\
&= \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}
\end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.200}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.200 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موجی کے لئے درست ہے۔ شکل 14.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 14.15 میں طول موج کو افقی محدد اور حرکی مستقل کو عمودی محدد پر رکھا گیا ہے۔ عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لا محدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی موجی کامل نہیں ہوتے لہٰذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔ بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے موجی میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔ آئیں حقیقی موجی میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 289 پر مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔ کسی بھی موجی میں میدان، مثلاً صفحہ 374 پر مساوات 14.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x}e^{j(\omega t - \beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔ یوں $Z = \frac{E}{H}$ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_h}e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2}Z_h|H|^2\,e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x} \tag{14.201}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $|E|^2 = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^*$ لکھے گئے ہیں۔ اس مساوات سے

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}}{P} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.202}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کو P لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.202 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔ تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موجی کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع (I^2R_c) ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موجی کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل در آمد نہیں ہوتا۔ کم انقطاعی تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.202 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کامل ذو برق سے بھرے موبیج میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ایسی صورت میں صرف موبیج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا للذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\int\int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}S = \int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}l \tag{14.203}$$

ہو گا جہاں $\mathscr{P}_{\text{چادر}}$ سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موبیج کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔مساوات 14.203 میں سطح کا چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}S$ موبیج کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔اس رقبے کی لمبائی $\mathrm{d}x$ اور چوڑائی $\mathrm{d}l$ ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔شکل 14.9 کے مستطیلی موبیج کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$\mathscr{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2}Z_{ch}|H_m|^2 \tag{14.204}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور Z_c چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو Z_{ch} ہے۔چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت $|H_m|$ ہے۔چونکہ موصل میں $j\omega\epsilon \ll \sigma$ ہوتا ہے للذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} =\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{ch} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.203 کو

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{Z_{ch}}{2}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l \tag{14.205}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

موبیج میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P = \frac{Z_{yz,h}}{1}\int\int |H_\perp|^2\,\mathrm{d}S \tag{14.206}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $H_\perp$ سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔اس میدان کو موبیج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں Z_{yz} موبیج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha = \frac{Z_{ch}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l}{2Z_{yz,h}\int\int |H_\perp|^2}\,\mathrm{d}S \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.207}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.207 تمام مویج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔ کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 14.207 میں پر کئے جائیں گے۔ بہتر موصل سے بنے مویج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ مساوات 14.207 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.2: دو متوازی چادروں کے مویج کو صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس مویج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔ چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 14.207 سے

$$\alpha = \frac{2Z_{ch}\int_0^{y_1}|H_m|^2\,\mathrm{d}y}{2Z_{yz,h}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1}|H_\perp|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔ اس مویج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔ یوں مقناطیسی میدان $H\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔ یوں H_m اور $H_\perp$ دونوں $H\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہی ہیں لہٰذا

$$\alpha = \frac{Z_{ch}y_1}{Z_{yz,h}y_1z_1} = \frac{Z_{ch}}{z_1Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔ تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned}
Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}\\
&= \sqrt{\frac{j2\times\pi\times 450\times 10^6}{5.8\times 10^7 + j2\times\pi\times 450\times 10^6\times 8.854\times 10^{-12}}}\\
&= 0.0055 + j0.0055
\end{aligned}$$

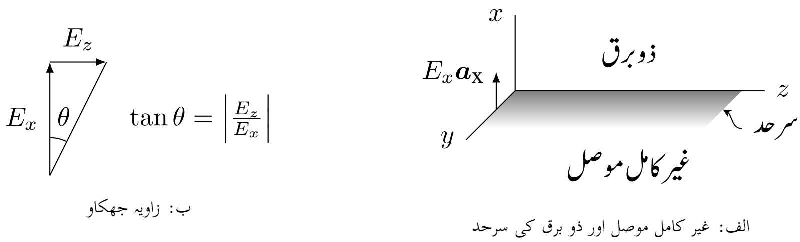
حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{ch} = 0.0055$ اوہم ہے۔ ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7\,\Omega$ ہے۔ ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2\times 376.7} = 73\,\mu\mathrm{Np/m}$$

ہو گا۔ یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔

14.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 14.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔ سطح کے نیچے $(x < 0)$ غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر $(x > 0)$ ذو برق ہے۔ سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔



شکل 14.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔ چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہٰذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.208}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 14.16 تا مساوات 14.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \tag{14.209}$$

$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \tag{14.210}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \tag{14.211}$$

$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \tag{14.212}$$

$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \tag{14.213}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \tag{14.214}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \tag{14.215}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \tag{14.216}$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔ موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے E_z کو مساوات 14.210 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1} H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1\right) H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y \tag{14.217}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_1^2 = -\left(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1\right) \tag{14.218}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.217 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to \infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لٰہذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2 = 0$ لیا جاتا ہے۔اور یوں

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \tag{14.219}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\gamma_2 E_y + j\omega\mu_2 H_x = 0 \tag{14.220}$$

$$-\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_y = 0 \tag{14.221}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_z = 0 \tag{14.222}$$

$$\gamma_2 H_y - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_x = 0 \tag{14.223}$$

$$-\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_y = 0 \tag{14.224}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_z = 0 \tag{14.225}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0 \tag{14.226}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0 \tag{14.227}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے E_Z کو مساوات 14.221 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[\gamma_2^2 - j\omega\mu_2 \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right)\right] H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y \tag{14.228}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \tag{14.229}$$

$$\gamma_m^2 = j\omega\mu_2 \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) \tag{14.230}$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 14.228 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to -\infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3 = 0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \qquad \text{موصل خطہ} \tag{14.231}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات میدان برابر ہوں گے لہٰذا $x = 0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 14.219 اور مساوات 14.231 برابر ہوں گے جس سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 \tag{14.232}$$

$$c_1 = c_4 \tag{14.233}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے ذو برق میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{-k_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \end{aligned} \tag{14.234}$$

مساوات

کم نہیں

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے موصل میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{موصل خطہ} \end{aligned} \tag{14.235}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $c_4 = c_1$ اور $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کئے گئے ہیں۔

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2 \tag{14.236}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.218 سے

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - k_1^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 k_2^2 \\ &= -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right)^2 \left(-\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \right) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 14.236 اور دوسرے قدم پر مساوات 14.229 کا استعمال کیا گیا ہے۔اس میں مساوات 14.232 سے $\gamma_1 = \gamma_2$ پر کرتے ہوئے

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}\right)^2\gamma_m^2}{1+\left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}\right)^2}} \tag{14.237}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.234 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔شکل 14.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1}\left|\frac{-k_1}{\gamma_1}\right| \tag{14.238}$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاو کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon_0\\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\ \sigma_2 &= 5.8\times10^7\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33356\\ k_1 &= 0.9215(1-j)\times10^{-6}\\ k_2 &= 6.038(1-j)\times10^4\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0.9215(1-j)\times10^{-6}}{j0.33356}\right| = 0.00022385^\circ$$

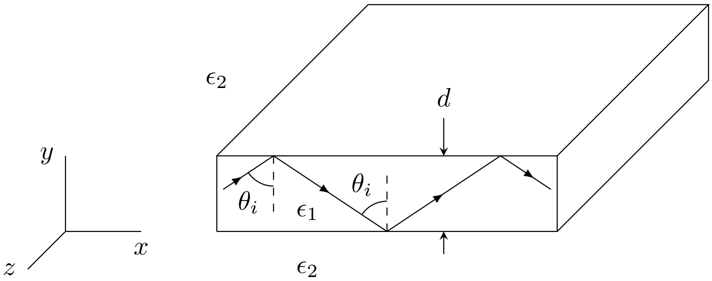
زاویہ حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_0\\ \epsilon_2 &= 78\epsilon_0\\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\ \sigma_2 &= 0\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33144\\ k_1 &= j0.037528\\ k_2 &= 2.9272\end{aligned}$$



شکل 14.17: ذو برق تختی مویج میں اندرونی مکمل انعکاس سے موج صفر کرتی ہے۔

حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{j0.037528}{j0.33144}\right| = 6.46^\circ$$

زاویہ دیتا ہے۔ ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاو باآسانی ناپی جاسکتی ہے۔

14.9 ذو برق تختی مویج

اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے مویج پر غور کرتے رہے ہیں۔ اس حصے میں ذو برق سے بنائے گئے مویج پر غور کیا جائے گا۔ شکل 14.17 میں d موٹائی اور لامحدود وسعت کے ذو برق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔ اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخل کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہ موج تختے میں بائیں سے دائیں یعنی بڑھتے x جانب حرکت کرے گی۔ جب تک ذو برق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ یوں ذو برق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج صفر کرے گی۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔ حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذو برق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذو برق کے باہر میدان لامحدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذو برق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔

اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج ذو برق میں صفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔ موج مخصوص زاویوں پر ہی صفر کر پاتی ہے۔ آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔ دونوں فاصل زاویے سے زیادہ زاویے پر آمد ہیں یعنی $\theta > \theta_{ic}$ ہے۔ یوں

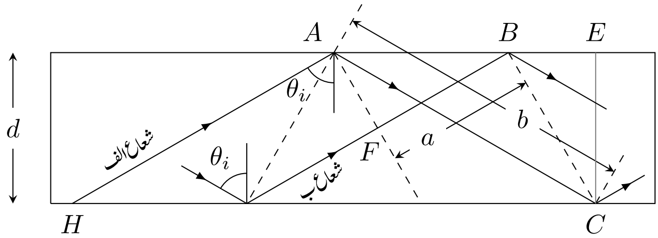
$$\theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \tag{14.239}$$

ہو گا جہاں

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ اور

ϵ_1 ذو برق تختے کا برقی مستقل،

ϵ_2 ذو برق تختے کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل



شکل 14.18: ذو برق تختے کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

ہیں۔

شکل 14.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی فاصلہ a دوسری موج کے زاویائی فاصلے b کے برابر ہو اور یا ان میں فرق $2m\pi$ ہو جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔زاویائی فاصلے ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔اس شرط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi \tag{14.240}$$

جہاں

$m = 0, 1, 2, \cdots$

n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ جبکہ

ϕ سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق،

λ_0 خالی خلاء میں طول موج

ہیں۔شکل 14.18 کو دیکھ کر

$$b = \frac{d}{\cos\theta_i} \tag{14.241}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح تکون ΔAEC، تکون ΔBEC اور تکون ΔAFB سے بالترتیب

$$\begin{aligned} AB + BE &= d\tan\theta_i \\ \tan\theta_i &= \frac{d}{BE} \\ \sin\theta_i &= \frac{a}{AB} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 14.240 کو

$$\frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\cos\theta_i} - \sin\theta_i\left(\tan\theta_i - \frac{1}{\tan\theta_i}\right)\right] + \phi = 2m\pi \tag{14.242}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کی سادہ صورت

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi \tag{14.243}$$

ہے۔ عمودی برقی میدان $\boldsymbol{E}_{\perp}$ کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ صفحہ 348 پر مساوات 13.24 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Gamma_{\perp}=\frac{\cos\theta_i-j\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i+j\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}=1\underline{/\phi} \tag{14.244}$$

جہاں

$$\phi=-2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i} \tag{14.245}$$

کے برابر ہے۔

اس طرح شرح انعکاس Γ کی حتمی قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے پیدا زاویائی فرق ϕ ہے۔ مساوات 14.244 کو مساوات 14.243 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0}-2m\pi=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\epsilon_2}{\epsilon-1}}}{\cos\theta_i} \tag{14.246}$$

یا

$$\tan\left(\frac{2\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0}-m\pi\right)=\frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_i-n_2^2}}{n_1\cos\theta_i} \tag{14.247}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$m=0,1,2,3,\cdots$ جبکہ

n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1=\sqrt{\epsilon_{R1}}$ ہے،

n_2 ذو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2=\sqrt{\epsilon_{R2}}$ ہے،

d ذو برق تختے کی موٹائی،

θ_i آمدی زاویہ اور

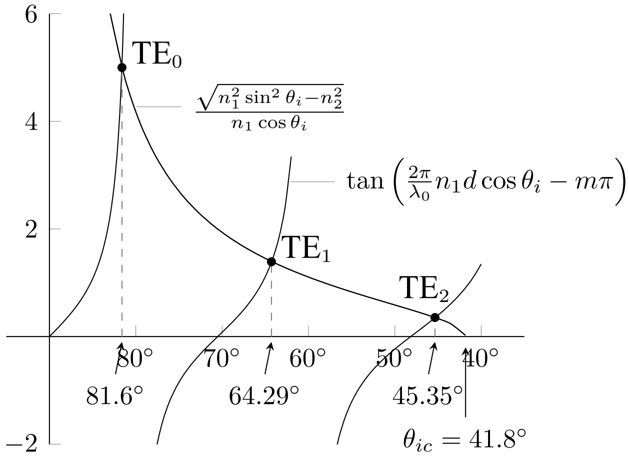
λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

ہیں۔

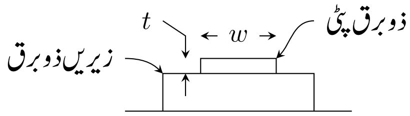
چادر کی چوڑائی کم کرتے ہوئے w کرنے سے ذو برقی پٹی مویج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.20 میں دکھایا گیا ہے جہاں $w \gg t$ ہے۔ ذو برق پٹی سے کم انحرافی مستقل کے زیریں ذو برقی[19] پر عموماً یہ نسب کئے جاتے ہیں۔

مثال 14.3: ذو برق کے 10 mm موٹی تختے کو بطور مویج استعمال کیا جا رہا ہے۔ اس تختے کا انحرافی مستقل $n_1=1.5$ ہے جبکہ تختے سے اوپر اور نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2=1$ ہے۔ برقی میدان تختے کے متوازی ہے یعنی شکل 14.17 میں x سمت کو ہے۔ طول موج $\lambda_0=10\,\mathrm{mm}$ کی صورت میں آمدی زاویہ θ_i حاصل کریں۔

[19] dielectric substrate



شکل 14.19: تختی مویج میں شعاع کے ممکن زاویے۔



شکل 14.20: ذو برق پٹی مویج

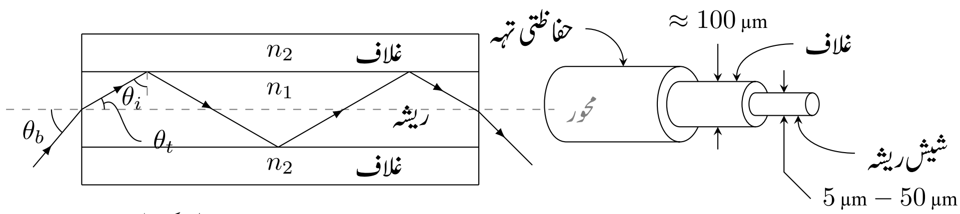
حل: برقی میدان تختے کے متوازی لیکن موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہے۔ مساوات 14.239 سے زاویہ فاصل

$$\theta_{ic} = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} = 41.8° \tag{14.248}$$

حاصل ہوتا ہے۔ زاویے کو θ_{ic} سے زیادہ رکھتے ہوئے، مساوات 14.247 کے بائیں اور دائیں ہاتھ کو شکل 14.19 میں کھینچا گیا ہے جس سے ممکنہ زاویے °45.35، °64.29 اور °81.6 حاصل ہوتے ہیں۔ یہ زاویے TE_0، TE_1 اور TE_2 امواج کے لئے ہیں۔ تینوں امواج بیک وقت مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔ تختے کی موٹائی کم یا زیادہ کرنے سے امواج کی ممکنہ تعداد بالترتیب زیادہ یا کم ہو گی۔ اسی طرح طول موج زیادہ (کم) کرنے سے ممکنہ امواج کی تعداد کم (زیادہ) ہو گی۔ ہاں کسی بھی صورت کم از کم ایک موج ضرور ممکن ہو گی لہٰذا تعدد کم کرتے کرتے صفر تک پہنچتے ہوئے بھی کوئی نہ کوئی موج ضرور ممکن ہو گی۔

14.10 شیش ریشہ

ذو برق تختی مویج پر غور کے بعد ذو برق نلکی مویج پر غور کرتے ہیں۔ ذرائع ابلاغ کے نظام میں اس طرز کے نلکی مویج جنہیں شیش ریشہ[20] کہتے ہیں، عام استعمال ہوتے ہیں۔ بصری طول موج یا اس کے قریب طول موج پر استعمال کئے جانے والے نلکی مویج کا رداس انتہائی کم ہوتا ہے۔ یہ n_1 شرح انحراف کے انتہائی شفاف شیشے سے بنایا جاتا ہے جسے قدر کم شرح انحراف n_2 کے شیشے کا غلاف پہنایا جاتا ہے۔ ان دونوں پر غیر شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ شیش ریشے کے مرکزی ریشے کا عمومی قطر 25 µm ہے جو انسانی سر کے بال جتنی موٹائی ہے۔ ایک شیش ریشہ ہزار سے زائد دو طرفہ گفتگو کی ترسیل



ب: شیش ریشے میں شعاع کے زاویے

الف: شیش ریشے کی بنیادی ساخت

شکل 14.21: شیش ریشے کی ساخت اور ممکنہ آمدی زاویے

کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔روشنی یا زیریں بصری[21] شعاعوں کے لئے شیش ریشے کی تضعیفی مستقل $1.15 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہوتی ہے جو ایک انتہائی کم مقدار ہے۔بصری اور زیریں بصری شعاعوں کے طول موج تقریباً $400\,\mathrm{nm}$ تا $1000\,\mathrm{nm}$ ہے۔

شکل 14.21-الف میں شیش ریشے کی ساخت دکھائی گئی ہے۔اندرونی شفاف ریشے کا انحرافی مستقل n_1 جبکہ غلاف کا انحرافی مستقل n_2 ہے۔ارد گرد خلاء کا انحرافی مستقل n_0 ہے۔جیسے شکل 14.21-ب میں دکھایا گیا ہے، بیرون تار محور کے ساتھ θ_b زاویے پر آمدی شعاع تار کے اندر θ_t زاویے پر داخل ہو گا۔یوں شفاف ریشے اور غلاف کی سرحد پر شعاع کا زاویہ θ_i ہو گا۔بیرونی اور اندرونی زاویوں کا تعلق ابن سہل کا قانون

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_b}=\frac{n_0}{n_1} \tag{14.249}$$

دیتا ہے۔جب تک مرکزی ریشے اور غلاف کے سرحد پر آمدی زاویہ θ_i، فاصل زاویے θ_{ic} سے زیادہ ہو، شعاع مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔شیش ریشے اور غلاف کی سرحد پر قانون ابن سہل

$$\sin\theta_{ic}=\frac{n_2}{n_1} \tag{14.250}$$

سے فاصل زاویہ θ_{ic} حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\sin\theta_b=\frac{n_1}{n_0}\sin\theta_t=\frac{n_1}{n_0}\sin(90^\circ-\theta_{ic})=\frac{n_1}{n_0}\cos\theta_{ic}$$

یا

$$\sin\theta_b=\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0} \tag{14.251}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

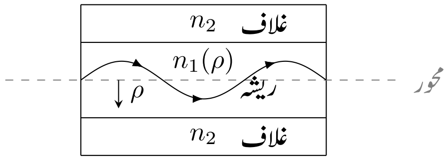
θ_b بیرون تار، محور کے ساتھ آمدی زاویہ،

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل،

n_2 شیش ریشے پر چڑھائی تہہ کا انحرافی مستقل اور

n_0 تار کے گرد خطے کا انحرافی مستقل

[20] optical fiber
[21] infrared



شکل 14.22: رداسی سمت ρ میں انحرافی مستقل مسلسل کم ہونے سے موج ہمواری کے ساتھ مڑتی ہے۔

ہیں۔خالی خلاء یا ہوا کی صورت میں $n_0 = 1$ ہو گا لٰہذا

$$\sin\theta_b = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{14.252}$$

ہو گا۔

شیش ریشے اور غلاف کے انحرافی مستقل تقریباً $n_1 = 1.5$ اور $n_2 = 1.485$ ہوتے ہیں جس سے $\theta_b = 12.2^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔یوں جو شعاع شیش ریشے کے محور پر $\theta_b < 12.2^\circ$ زاویے سے آمد ہو شیش ریشے میں پھنس جائے گی۔یہ شعاع شیش ریشے میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے صفر کرے گی۔شیش ریشے میں کئی بلند انداز شعاع ممکن ہیں اور تختی موتیج کی طرح یہاں بھی ایک عدد بلند درجی انداز ایسا ہے جس کا کوئی انقطاعی تعدد نہیں پایا جاتا۔یوں اگر

$$\lambda_0 > \frac{2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{k_{01}} = \frac{2\pi a n_1 \cos\theta_{ic}}{k_{01}} \tag{14.253}$$

ہو جہاں

k_{01} صفر درجی بیسل تفاعل J_0 کا پہلا صفر $k_{01} = 2.405$ ہے،

λ_0 لامحدود خلاء میں طول موج

a شیش ریشے کا رداس

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انحرافی مستقل

θ_{ic} شیش ریشے اور اس پر چڑھی تہہ کے سرحد پر فاصل آمدی زاویہ

کے برابر ہیں تب صرف ایک عدد بلند درجی موج شیش ریشے میں پائی جائے گی۔اس صورت میں شیش ریشہ اکائی بلند درجی انداز رکھتی ہے۔

اگر شفاف ریشے کا انحرافی مستقل محور سے رداسی ρ سمت گھٹتا ہو تب شعاع کی راہ سرحد پر انعکاس سے اچانک تبدیل ہونے کی بجائے ہمواری کے ساتھ مڑے گی۔یوں شعاع کبھی بھی ریشے اور غلاف کے سرحد کو نہیں چھوئے گی۔ شکل 14.21-ب اور شکل 14.22 میں دونوں صورت حال دکھائے ہیں۔

شیش ریشے پر مبنی ذرائع ابلاغ کا نظام شکل میں دکھایا گیا ہے۔ایک جانب نوری ڈایوڈ[22] یا لیزر[23] برقی اشارے کو شعاع میں تبدیل کرتے ہوئے شیش ریشے میں خارج کرتا ہے۔دوسری جانب یہی شعاع شیش ریشے سے خارج ہو کر نوری ٹرانزسٹر پر چمکتی ہے جو اسے واپس برقی اشارے میں تبدیل کرتا ہے۔

[22] light emitting diode, LED
[23] laser

عمومی شیش ریشے میں کم سے کم تضعیف 700 nm تا 1100 nm زیریں بصری طول موج پر پائی جاتی ہے۔انسانی آنکھ 400 nm تا 700 nm طول موج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

شیش ریشے 5 µm تا 50 µm قطر کے پائے جاتے ہیں جو کئی زیریں بصری طول موج کے برابر ہے لہٰذا اس سے شعاعی اخراج نہایت کم ہوتا ہے۔قطر کم کرنے یا طول موج بڑھانے سے شعاعی اخراج بڑھتا ہے۔ایسے شیش ریشے جن کا انحرافی مستقل 1.5 کے لگ بھگ ہو اور ان کا قطر اکائی طول موج سے زیادہ ہو بطور مویج کردار ادا کرتے ہیں جبکہ اکائی طول موج سے کم قطر کے شیش ریشوں میں توانائی بیرون ریشہ سطح کے قریب رہتے ہوئے صفر کرتی ہے لہٰذا ان سے زیادہ شعاعی اخراج ہوتا ہے۔یوں اگر اکائی طول موج سے زیادہ قطر کے شیش ریشے کا قطر کم ہوتے ہوتے اکائی طول موج سے کم ہو جائے تو توانائی شیش ریشے کے اندر سے باہر منتقل ہو گی اور ساتھ ہی ساتھ محوری سمت میں شعاعی اخراج بھی پایا جائے گا۔ایسا شیش ریشہ بطور محوری اینٹینا[24] کردار ادا کرے گا۔

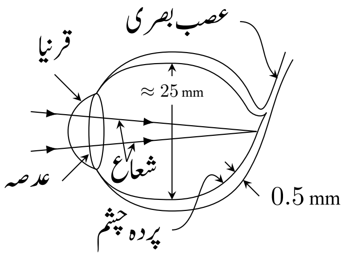
14.11 پردہ بصارت

انسانی آنکھ میں 10^8 سے زائد شیش ریشے پائے جاتے ہیں جو نا صرف بطور مویج کام کرتے ہیں بلکہ یہ ضیائی ذرے یعنی فوٹان[25] پکڑنے کا کام بھی سرانجام دیتے ہیں۔آنکھ میں دو اقسام کے شیش ریشے پائے جاتے ہیں۔آنکھ کے درمیانے خطے میں مخروط شکل کے جبکہ اطراف پر نسبتاً زیادہ تعداد میں سلاخ نما شیش ریشے پائے جاتے ہیں جنہیں بالترتیب مخروطے[26] اور سلاخ[27] کہا جاتا ہے۔ تقریباً ہر مخروط علیحدہ علیحدہ انفرادی ترسیلی عصبی ریشے[28] کے ذریعہ دماغ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے جہاں تصویر کشی کا عمل ہوتا ہے۔ مخروطے ہمیں باریک بینی اور رنگ پہچانے کی صلاحیت مہیا کرتے ہیں۔مخروطوں کے برعکس اشکال پہچانے میں سلاخ کم مدد کرتے ہیں لیکن ان کی زیادہ تعداد اور حساس پن تاریکی میں دیکھنا ممکن بناتی ہے۔دماغ سے جڑی ایک عدد ترسیلی تار کے ساتھ متوازی کئی سلاخ جڑے ہوتے ہیں جس سے کم روشنی میں بینائی مزید بہتر کرتی ہے۔مرکز نگاہ سے ہٹ کر اطراف کی بینائی بھی سلاخ مہیا کرتے ہیں۔

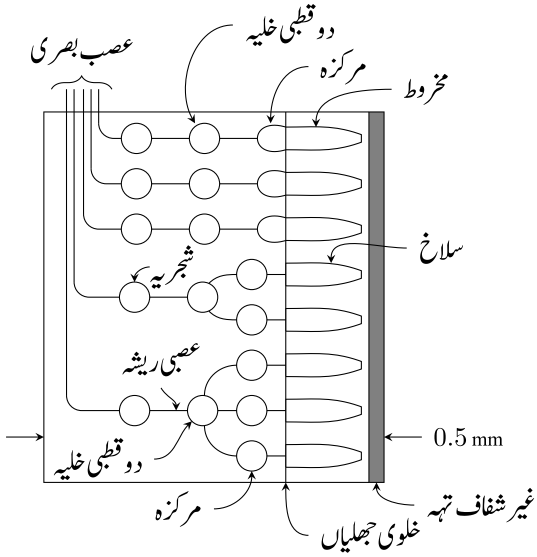
شکل 14.23-الف میں آنکھ کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے جس میں عدسہ چشم[29]، پردہ بصارت[30] اور دماغ کو جاتا عصب بصری[31] دکھائے گئے ہیں۔شکل 14.23-ب میں پردہ آنکھ کی زیادہ تفصیل دکھائی گئی ہے۔آنکھ کا پردہ شفاف ہوتا ہے۔اس میں مخروطے، سلاخ، دو قطبی خلیے[32] اور عصبی خلیے[33] پائے جاتے ہیں۔عصبی خلیہ کے دو اہم جزو شجریہ[34] اور عصبی ریشہ کہلاتے ہیں۔پردے کے پچھلی سطح پر غیر شفاف تہہ پائی جاتی ہے۔شکل 14.23-پ میں مخروط کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔مخروط اور سلاخ کے پچھلے دبلے سر کا قطر تقریباً 1 µm، لمبائی بیس گنا زیادہ اور اس کا انحرافی مستقل $n_1 = 1.39$ جبکہ گرد مواد کا انحرافی مستقل n_2 اس سے چند فی صد کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ذرائع ابلاغ میں استعمال شیش ریشوں کے انحرافی مستقل $n_1 = 1.46$ اور $n_2 = 1.44$ تقریباً یہی قیمتیں ہیں البتہ مخروط اور سلاخ کے دبلے سر کا قطر 1.5λ تا 2λ ہے جو شیش ریشے کے قطر سے نسبتاً کم ہے لہٰذا ان سے شعاعی اخراج زیادہ ہو گا۔

مخروط یا سلاخ کا مرکزہ[35] بطور عدسہ چشم کردار ادا کرتا ہے۔شعاع مخروط یا سلاخ میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس سے صفر کرتی ہے اور جو فوٹان پچھلے دبلے حصے میں جذب نہ ہو پائے وہ پردے پر غیر شفاف تہہ تک پہنچتی ہے۔انسانی آنکھ میں غیر شفاف تہہ فوٹان جذب کرتی ہے جبکہ رات کی تاریکی میں

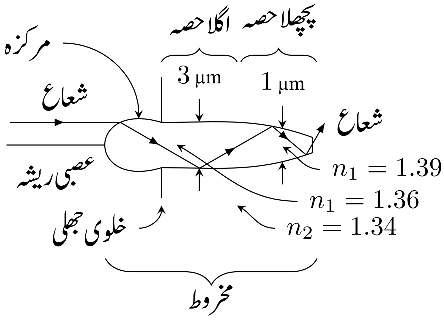
[24] end-fire antenna
[25] photon
[26] cones
[27] rods
[28] axon
[29] lens
[30] retina
[31] optic nerve
[32] bipolar cells
[33] nerve cells
[34] dendrite
[35] nucleus



الف: انسانی آنکھ



ب: آنکھ کا پردہ



پ: مخروط

شکل 14.23: انسانی آنکھ اور اس کی تفصیل

شکار کرنے والے جانور، مثلاً بلی، کی آنکھ میں غیر شفاف تہہ کی جگہ انعکاسی مادے کی تہہ پائی جاتی ہے جو فوٹان کو واپس مخروط یا سلاخ میں بھیجتی ہے جس سے ان کی بینائی مزید بہتر ہوتی ہے۔

مخروط کے اگلے حصے میں $n_1 = 1.36$ جبکہ پچھلے حصے میں $n_1 = 1.39$ ہے۔یوں اگرچہ مخروط میں لمبائی کی جانب انحرافی مستقل تبدیل ہوتا ہے لیکن یاد رہے کہ اس کی قیمت بیرونی مادے کی انحرافی مستقل سے زیادہ رہتی ہے۔

مخروط یا سلاخ کے پچھلے حصے کے مالیکیول ضیائی ذرہ پکڑتے ہیں۔فوٹان پکڑنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے جو دو قطبی خلیے تک پہنچتی ہے۔دو قطبی خلیہ مختصر دورانیے کی موج پیدا کرتی ہے جو عصب بصری کے ذریعہ دماغ تک اشارہ پہنچاتی ہے۔یوں مخروط یا سلاخ محوری اینٹینا کی طرح ہیں البتہ ان میں $10^{15}\,\mathrm{Hz}$ تعدد کے فوٹان پکڑنے اور اس کے عوض مختصر دورانیے کا عددی اشارہ پیدا کرنے کی صلاحیت بھی پائی جاتی ہے۔

14.12 گھمکی خلاء

مویج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔اس کے برعکس گھمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔گھمکیا کو امالہ اور کپیسٹر کے گھمکی دور[36] کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل میں امالہ اور کپیسٹر کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گھمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور کپیسٹر کی قیمت کم کرنی ہو گی۔شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔اسی طرح کپیسٹر کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے دو چادروں کو دور کر دیا گیا ہے۔متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔متوازی امالہ جوڑنے کی حد شکل-ت میں دکھائی گئی ہے جہاں کپیسٹر اور امالہ مل کر بند ڈبے کی شکل اختیار کر گئے ہیں۔یہی بند ڈبی گھمکی خلاء[37] کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گھمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔صفحہ 372 پر مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی مویج میں تمام میدان دیتے ہیں۔ان میں $\gamma = j\beta$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں H_y کے مساوات میں $H_{y0} = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}$ لکھا گیا ہے اور یہی طریقہ کار باقی مساوات پر بھی لاگو کیا گیا ہے تاکہ صرف ضروری معلومات پر توجہ رہے۔مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا $+$ لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$H_x^+ = H_{x0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{14.254}$$

$$H_y^+ = H_{y0}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{14.255}$$

$$H_z^+ = H_{z0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{14.256}$$

$$E_z^+ = -E_{z0}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{14.257}$$

$$E_y^+ = E_{y0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{14.258}$$

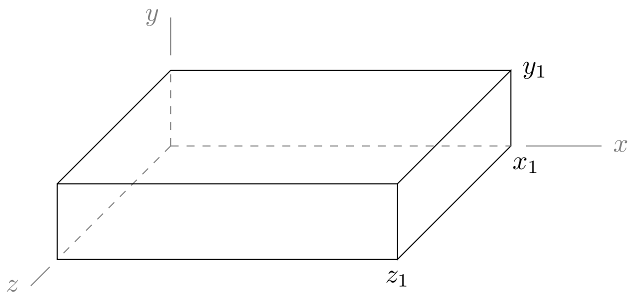
$$E_x^+ = 0 \tag{14.259}$$

اگر مویج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے لہٰذا انعکاسی مستقل $\Gamma_{\parallel} = -1$ ہے۔یوں یہ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔انعکاسی برقی میدان

$$E_y^- = -E_{y0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t+\beta x)} \tag{14.260}$$

---

[36] resonant circuit
[37] cavity resonator



شکل 14.24: مستطیلی گھمکیا

ہے۔آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$
\begin{aligned}
E_y^+ + E_y^- &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \\
&= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} \left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x} \right)
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t} \tag{14.261}
$$

کو جنم دیتے ہیں۔موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.261 کا برقی میدان موتج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \cdots$ ہے۔یوں بند سرے سے $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- موتج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 14.24 میں مستطیلی موتج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا موتج کو ہٹا لیا گیا ہے۔یہ بند ڈبہ مستطیلی گھمکیا[38] ہے۔

شکل 14.24 میں گھمکیا کا بایاں سرا $x = 0$ اور دایاں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$
x_1 = \frac{l\lambda}{2} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14.262}
$$

ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$
\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2} = l\pi
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
\beta = \frac{l\pi}{x_1} \tag{14.263}
$$

ملتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.261

$$
E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \frac{l\pi x}{x_1} e^{j\omega t} \tag{14.264}
$$

[38] rectangular resonator

لکھا جائے گا۔اس مساوات میں گھمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائے جاتے ہیں، y سمت میں n آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور z سمت میں m آدھے طول موج پائے جاتے ہیں۔

مساوات 14.264 میں $x = 0$ یا $x = x_1$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 14.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.265}$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہٰذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2 \frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2}} \tag{14.266}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل k یوں

$$k_{xyz}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.267}$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}} \tag{14.268}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

یوں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی TE_{lnm} کہلائیں گے اور گھمکی طول موج λ_{lnm} لکھی جائے گی۔

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{14.269}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{14.270}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{14.271}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.272}$$

سے شروع کرتے ہیں۔مساوات 14.270 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 14.269 اور مساوات 14.272 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \boldsymbol{H} \right)$$
$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{14.273}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x, y, z, t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔علیحدگی متغیرات[39] استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$E_x(x, y, z, t) = M(x, y, z) T(t) \tag{14.274}$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x، y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیرہ ہے۔یوں مساوات 14.273 سے

$$T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = M \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ خلاء کے متغیرات x، y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہٰذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = -k^2$$

---

[39] separation of variables

جس سے دو مساوات

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+k^2T=0 \tag{14.275}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+k^2M=0 \tag{14.276}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.275 کا حل $T=e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$\left(\mu\epsilon p^2+\mu\sigma p+k^2T\right)e^{pt}=0$$

سے

$$p=\frac{-\sigma\mp\sqrt{\sigma^2-4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma=0$ ہو گا جس سے

$$p=\mp\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.277}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t)=c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}+c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1}، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔اس میں

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.278}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$T(t)=c_{t1}e^{-j\omega t}+c_{t2}e^{j\omega t} \tag{14.279}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.276 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔یوں

$$M(x,y,z)=X(x)N(y,z) \tag{14.280}$$

لیتے ہوئے

$$N\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+k^2XN=0$$

یا

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل $-k_x^2$ کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \tag{14.281}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2) N = 0 \tag{14.282}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$N(y, z) = Y(y) Z(z) \tag{14.283}$$

لکھتے ہوئے

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2) YZ = 0$$

یا

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کو نئے مستقل $-k_y^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y \tag{14.284}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - k_x^2 - k_y^2) Z = -k_z^2 Z \tag{14.285}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$ یا

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{14.286}$$

لیا گیا ہے۔مساوات 14.281، مساوات 14.284 اور مساوات 14.285 کے حل

$$X(x) = c_{x1} e^{-jk_x x} + c_{x2} e^{jk_x x} = c'_{x1} \cos k_x x + c'_{x2} \sin k_x x \tag{14.287}$$

$$Y(y) = c_{y1} e^{-jk_y y} + c_{y2} e^{jk_y y} = c'_{y1} \cos k_y y + c'_{y2} \sin k_y y \tag{14.288}$$

$$Z(z) = c_{z1} e^{-jk_z z} + c_{z2} e^{jk_z z} = c'_{z1} \cos k_z z + c'_{z2} \sin k_z z \tag{14.289}$$

ہیں۔

مساوات 14.280، مساوات 14.283 اور مساوات 14.274 سے ظاہر ہے کہ

$$E_x(x, y, z, t) = TXYZ \tag{14.290}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.290 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔یوں $k_x = 0.32$ یا $k_x = -7.59$ ہو سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لا محدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔ صفحہ 358 پر شکل 14.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباو صفر ہو گا۔ یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔ مساوات 14.289 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$c'_{z1} = 0 \tag{14.291}$$

$$k_z = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.292}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 1, 2, 3 \cdots \tag{14.293}$$

کے برابر ممکن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔ یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔ یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح $y = 0$ اور $y = y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 364 پر دکھایا شکل 14.8 حاصل ہوتا ہے۔ ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔ اس طرح مساوات 14.288 سے

$$c'_{y1} = 0 \tag{14.294}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.295}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$n = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.296}$$

کے برابر ممکن ہیں۔ اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی مویج میں موج کی مساوات

$$E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)} \tag{14.297}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t - k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t + k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 14.292 اور مساوات 14.295 کے تحت ہوں گی۔ جیسے آپ جلد مساوات 14.311 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔ یوں جس تعدد کی موج مستطیلی مویج سے گزر رہی ہو مساوات 14.311 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔ اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 14.286 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 14.287 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 14.287 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔ بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x \to \infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لا محدود میدان حاصل ہو گا للہذا ایسی صورت میں $c_{x1} = 0$ لیا جائے گا۔ مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_x اور k_y سے 14.286 k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر $x = 0$ اور $x = x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 409 پر دکھایا شکل 14.24 حاصل ہو گا۔ چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے للہذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔ میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا ہوں۔ آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھکے ہوں گے للہذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \tag{14.298}$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \tag{14.299}$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.300}$$

کے برابر ممکن ہے۔

ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 14.24 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{14.301}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک بار پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔ مساوات 14.287 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{jk_x x}$ اور $e^{-jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔ اسی طرح مساوات 14.288 اور مساوات 14.289 بھی مجموعے ہیں۔ مساوات 14.290 میں X، Y اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 14.287، مساوات 14.288 اور مساوات 14.289 کے پہلے جزو چنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j\omega t - k_x \boldsymbol{a}_\mathrm{X} - k_y \boldsymbol{a}_\mathrm{Y} - k_z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}} \tag{14.302}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطہ (x, y, z) کو سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{14.303}$$

ظاہر کرتی ہے۔ ہم k_x، k_y، k_z اور k کو سمتیہ

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + k_y\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} + k_z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \tag{14.304}$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 14.286 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{14.305}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 14.302 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

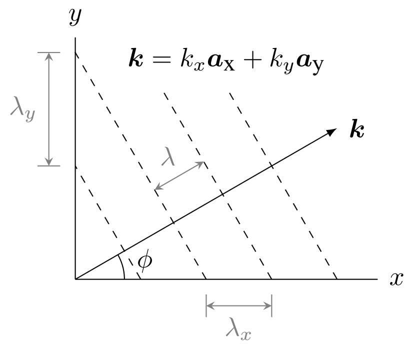
$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{14.306}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{14.307}$$

اصل موج دیتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے $\boldsymbol{k}$ کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 14.25 میں موج کے حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔ یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جا سکتی ہے۔ یوں x محدد پر نقطہ $(x_0, 0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد f ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0, y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔ اسی طرح $\boldsymbol{k}$ پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔



شکل 14.25: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ان تمام کو شکل 14.25 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $v = f\lambda$ لکھی جا سکتی ہے۔سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.308}$$

ہو گا۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.309}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 14.278 پر کرنے سے

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{14.310}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{14.311}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma = 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہٰذا $\alpha = 0$ اور

$$\gamma = 0 + j\beta = jk \tag{14.312}$$

کے برابر ہے۔اس طرح k کو β جبکہ k_x، k_y اور k_z کو بالترتیب β_x، β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 14.311 کی طرح $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔شکل 14.25 کو دیکھ کر $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos\phi = \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$\lambda_x=\frac{2\pi}{k_x} \tag{14.313}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح ہم

$$\lambda_y=\frac{2\pi}{k_y} \tag{14.314}$$

$$\lambda_z=\frac{2\pi}{k_z} \tag{14.315}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے مجموعی رفتار[40] کہتے ہیں

$$v=f\lambda=\frac{\omega}{k} \tag{14.316}$$

کے برابر ہے۔موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔اس کے برعکس کارتیسی محدد پر دوری رفتار[41]

$$\begin{aligned}
v_x&=f\lambda_x=\frac{\omega}{k_x}\\
v_y&=f\lambda_y=\frac{\omega}{k_y}\\
v_z&=f\lambda_z=\frac{\omega}{k_z}
\end{aligned}$$

ہوں گے۔شکل 14.25 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور یوں v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ $\phi=0$ پر $v_y=\infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہٰذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز صفر نہیں کر سکتی۔

---

[40] group velocity
[41] phase velocity

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 15.1 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{15.1}$$

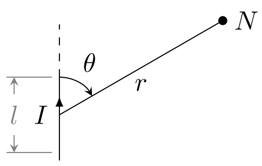
کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \tag{15.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

[1] retarded current



شکل 15.1: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{15.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t - r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{15.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t - r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{15.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r} \, \mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t - r/c)}}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t - r/c)} \tag{15.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_h \frac{[\rho_h]}{r} \, \mathrm{d}h \tag{15.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

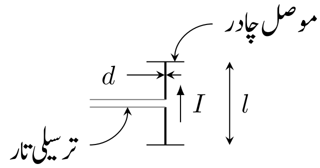
مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔لا محدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

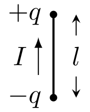
آئیں شکل 15.2-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ ہے۔جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔یہ فرض کرتے

---

[2] short dipole
[3] infinitesimal



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 15.2: جفت قطب

ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 15.2-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{15.9}$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15.10}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{15.11}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{15.12}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{15.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \,\mathrm{d}h \tag{15.14}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \,\mathrm{d}h \tag{15.15}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رویعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رویعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جزو

$$A_z = |\boldsymbol{A}| = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{15.16}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ ہو اور ساتھ ہی ساتھ یہ طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{15.17}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right) \tag{15.18}$$

ہو گا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$q = \int I\,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{15.19}$$

کے برابر ہے جہاں

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{j(\omega t-\beta s)} \\ q &= q_0 e^{j(\omega t-\beta s)} \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 15.19 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left(\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right) \tag{15.20}$$

شکل کو دیکھ کر

$$\begin{aligned} s_1 &= r - \frac{l}{2}\cos\theta \\ s_2 &= r + \frac{l}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 15.20 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r + \frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r - \frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{15.21}$$

ملتا ہے۔ چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $l \gg r$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موییور[4] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[&\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ &- \left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{15.22}$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $\lambda \gg l$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} &= \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l \\ \sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} &\approx \frac{\beta l\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{15.23}$$

[4] $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$ de Moivre's theorem

باب 16

سوالات

مویج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز
7×10^4	گریفائٹ	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنین
2×10^{-13}	ہیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$