

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	سمتیات	1
1	مقداری اور سمتیہ	1.1
2	سمتی الجبرا	1.2
3	کارتیسی محدود	1.3
5	اکائی سمتیات	1.4
9	میدانی سمتیہ	1.5
9	سمتی رقبہ	1.6
10	غیر سمتی ضرب	1.7
14	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
17	گول نلکی محدود	1.9
20	1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	
20	1.9.2 نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	
25	1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں	
27	1.10 کروی محدود	
37	کولومب کا قانون	2
37	2.1 قوت کشش یا دفع	
41	2.2 برقی میدان کی شدت	
44	2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	
49	2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	
53	2.5 چارج بردار حجم	
54	2.6 مزید مثال	
61	2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	
63	2.8 سوالات	

65	3	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ
65	3.1	ساکن چارج
65	3.2	فیراڈے کا تجربہ
66	3.3	گاؤس کا قانون
68	3.4	گاؤس کے قانون کا استعمال
68	3.4.1	نقطہ چارج
70	3.4.2	یکساں چارج بردار کروی سطح
70	3.4.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر
71	3.5	ہم محوری تار
73	3.6	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح
73	3.7	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق
76	3.8	پھیلاؤ
78	3.9	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات
80	3.10	پھیلاؤ کی عمومی مساوات
82	3.11	مسئلہ پھیلاؤ
85	4	توانائی اور برقی دباؤ
85	4.1	توانائی اور کام
86	4.2	لکیری تکملہ
91	4.3	برقی دباؤ
92	4.3.1	نقطہ چارج کا برقی دباؤ
93	4.3.2	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ
94	4.3.3	ہم محوری تار کا برقی دباؤ
94	4.4	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ
98	4.5	برقی دباؤ کی ڈھلوان
102	4.5.1	نلکی محدود میں ڈھلوان
103	4.5.2	کروی محدود میں ڈھلوان
104	4.6	جفت قطب
106	4.6.1	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط
109	4.7	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

115	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
115	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
117	5.2 استمراری مساوات	
119	5.3 موصل	
124	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
127	5.5 عکس کی ترکیب	
130	5.6 نیم موصل	
131	5.7 ذو برق	
136	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
140	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
140	5.10 کیپسٹر	
142	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
143	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
143	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
145	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
146	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	

155	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
157	6.1 مسئلہ یکنائی	
158	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
159	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
160	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
166	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
169	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
176	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

183	ساکن مقناطیسی میدان	7
183	7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	
187	7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
191	7.3 گردش	
198	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
204	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
205	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
206	7.4 مسئلہ سٹوکس	
210	7.5 مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	
216	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
221	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
222	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
223	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
227	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
227	8.1 متحرک چارج پر قوت	
228	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
231	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
232	8.4 قوت اور مروڑ	
237	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
238	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
241	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
242	8.8 مقناطیسی دور	
245	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
246	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
250	8.11 مشترکہ امالہ	

253	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
253	9.1	فیراڈے کا قانون
259	9.2	انتقالی برقی رو
263	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
264	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
266	9.5	تاخیری دباؤ
271	10	مستوی امواج
271	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
272	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
279	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
281	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
283	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
286	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
290	10.4	موصل میں امواج
296	10.5	انعکاس مستوی موج
302	10.6	شرح ساکن موج
309	11	ترسیلی تار
309	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
313	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
314	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
317	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
318	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
319	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
324	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
331	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
332	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

337	12 تقطیب موج
337	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
340	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئٹنگ سمتیہ
343	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
343	13.1 ترچھی آمد
354	13.2 ترسیم بائی گن
357	14 موج اور گھمکیا
357	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ
358	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
364	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
373	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
379	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
383	15 سوالات

مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی¹ TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔ وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں میوج² کہلاتے ہیں۔

دو لا محدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مویج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نکلی مویج تک بات بڑھائی جائے گی۔ ان مویج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تقابلی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔ اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مویج پر غور کیا جائے گا۔ آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

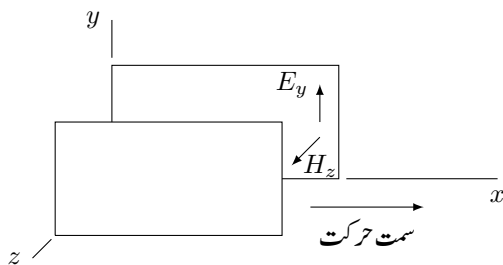
14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباؤ، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاؤٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔ یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباؤ لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جاسکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباؤ کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نکلی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔ کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔ البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نکلی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد (10^{16} Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

¹transverse electromagnetic, TEM¹
²waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کر متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد³ کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جاسکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پونڈنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے ناکہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباؤ اور برقی روا اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

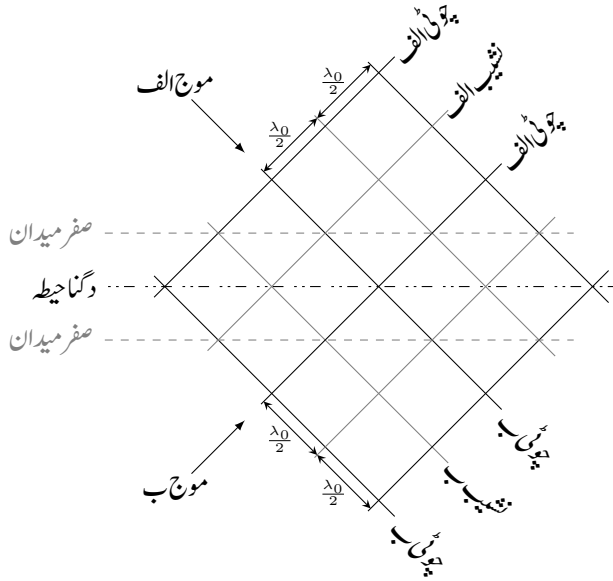
14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی تریلی تار دکھائی گئی ہے جو λ سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز⁴ کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں تریلی تار سے شروع کرتے ہوئے موج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت a_x ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہذا اس انداز کو عرضی برقی انداز TE (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طویل اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے

low cutoff frequency³
higher order mode⁴
transverse electric mode, TE mode⁵



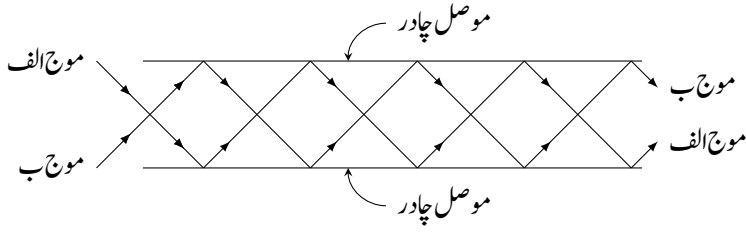
شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

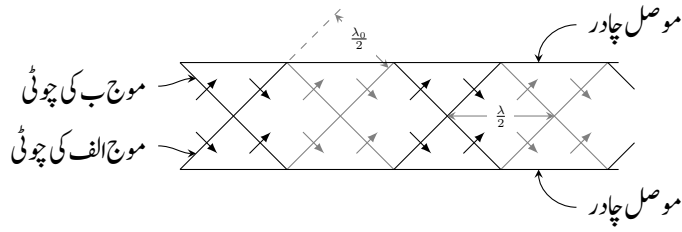
جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطے دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جاسکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں موج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور موج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو بہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر E کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

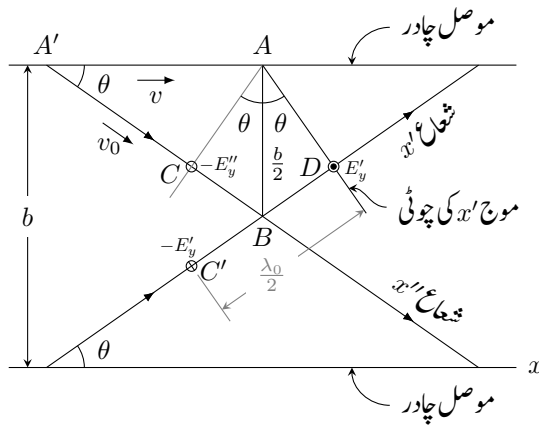
اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ موج سے نہیں گزر سکتی۔ طول کی یہ حد انقطاعی طول⁶ پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور موج میں طول موج۔



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے موج میں میدان کے اجزاء۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔ دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدود کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدود کی سمت میں ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔ نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہذا یہاں برقی میدان E_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔ عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔ اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔ اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔ اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$(14.1) \quad BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔ موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$(14.2) \quad BC = \frac{n\lambda_0}{4}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$ ہو سکتے ہیں۔ جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔ شکل 14.5 میں متکون ABC سے

$$AB \sin \theta = \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$(14.3) \quad \lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔ اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin \theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$(14.4) \quad \lambda_{0c} = \frac{2b}{n}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انتظامی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔ جب $n = 1$ ہو تب

$$(14.5) \quad \lambda_{0c} = 2b$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم تردد رے کی TE موج کا انتظامی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

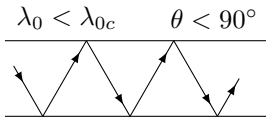
$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تردد رے کہا جاتا ہے۔ $n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انتظامی طول

$$(14.6) \quad \lambda_{0c} = b$$

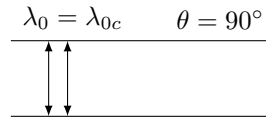
ہو گا۔ یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصلہ موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔ اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

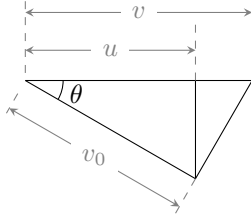
$$(14.7) \quad \lambda_0 = \lambda_{0c} \sin \theta$$



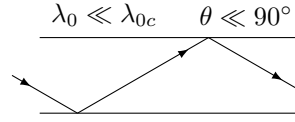
(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(c) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

یا

$$(14.8) \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔ یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔ اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت 90° سے کم ہوگی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔ آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$(14.9) \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

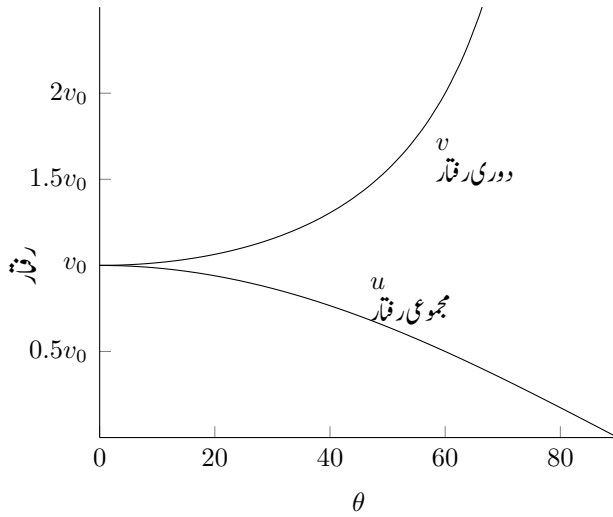
ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔ شکل 14.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔ TE موج کی چوٹی یا شیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

$$(14.10) \quad \frac{v_0}{v} = \cos \theta$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(14.11) \quad v = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon \cos \theta}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہوگی حتیٰ کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار⁸ سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos \theta \quad (14.12)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \quad (14.13)$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہذا مساوات 14.11 کو

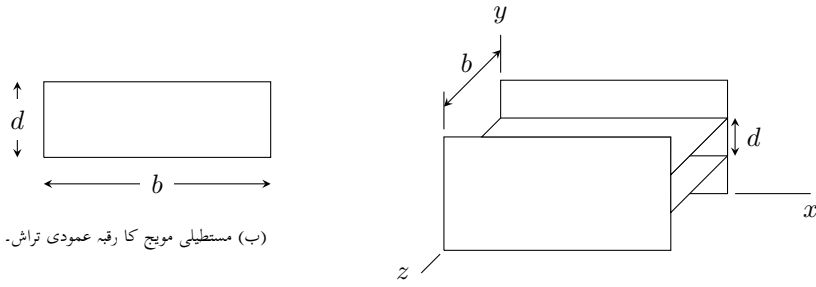
$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت 90° کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔



(ا) لامحدود متوازی چادر موج سے مستطیلی موج کا حصول۔

شکل 14.8: مستطیلی موج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت⁹ کے چادروں پر مبنی موج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی موج عموماً گھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.8-الف میں مستطیلی موج بننا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل موج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل موج کے لئے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل موج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

14.3 کھوکھلا مستطیلی موج

مستطیل موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدود میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جاسکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی موج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ موج کو x محدود پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی TE^{10} موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی TM^{11} موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہوگا لہذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہوگی ناکہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y ، E_z ، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی موج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

⁹ حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔
transverse electric, TE^{10}
transverse magnetic, TM^{11}

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
 - موج کو وقت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کا پابند بنائیں۔
 - موج کو x سمت کے ساتھ سائن نمائندہ بنانے کے لئے حرکتی مستقل بروئے کار لائیں۔
 - بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
 - بقایا چار اجزاء یعنی E_z, E_y, H_z اور H_y کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
 - موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
 - مستطیلی موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
 - E_z, E_y, H_z اور H_y کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔
- ان اقدامات سے مکمل حل حاصل ہوگا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ صفحہ 263 پر مساوات 9.26 اور مساوات 9.27

$$(14.14) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(14.15) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کارتیسی محدود میں

$$(14.16) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.17) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.18) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

اور

$$(14.19) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(14.20) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$$

$$(14.21) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

لکھے جائیں گے جہاں $B = \mu H$ اور $D = \epsilon E$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

کارتیسی محدود میں

$$(14.22) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.23) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔ یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \quad (14.24)$$

لکھے جائیں گے جہاں

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{حرکی مستقل} = \alpha + j\beta \\ \alpha &= \text{تقلیلی مستقل} \\ \beta &= \text{زاویائی مستقل} \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x \right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \quad (14.25)$$

لکھا جائے۔ اسی طرح مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.17 تا مساوات 14.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \quad (14.26)$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \quad (14.27)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0 \quad (14.28)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0 \quad (14.29)$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0 \quad (14.30)$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (14.31)$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (14.32)$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں تریسلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/\text{m}) \quad (14.33)$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (\text{S}/\text{m}) \quad (14.34)$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$(14.35) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.36) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.37) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0$$

$$(14.38) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0$$

$$(14.39) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.40) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.41) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.42) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$(14.43) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$(14.44) \quad \gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$(14.45) \quad -\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$(14.46) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$(14.47) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$(14.48) \quad -\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$(14.49) \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.50) \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.44 اور 14.45 سے

$$(14.51) \quad \frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma}$$

لکھتے ہیں۔ اب $\frac{E_y}{H_z}$ یا $\frac{E_z}{H_y}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔ چونکہ مساوات 14.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ Z_{yz} ¹² کہا جائے گا جہاں

$$(14.52) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (\Omega)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.52 کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$(14.53) \quad H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.52 کو مساوات 14.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$(14.54) \quad H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب مساوات 14.53 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.55) \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

اور مساوات 14.54 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.56) \quad E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma (\gamma - YZ_{yz}) H_x = 0$$

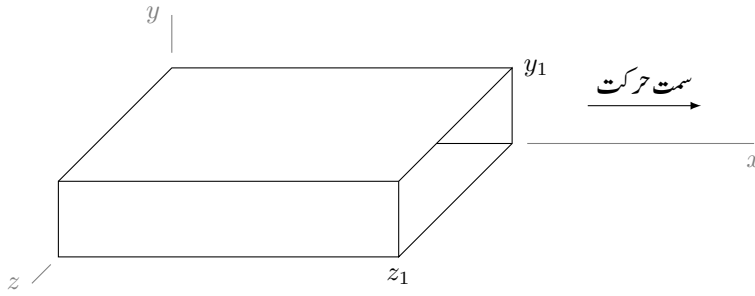
حاصل کرتے ہیں جس میں

$$(14.57) \quad k^2 = \gamma (\gamma - YZ_{yz})$$

پر کرتے ہوئے

$$(14.58) \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 14.58 موج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔ موج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔



شکل 14.9: مستطیل موج۔

ساتویں قدم میں موج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔ شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔ موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا موج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔ یوں موج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔ اسی طرح موج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔ اب ان شرائط پر پورا اترتا مساوات 14.58 کا حل درکار ہے۔ علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \quad (14.59)$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔ اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔ مساوات 14.59 کے استعمال سے مساوات 14.58

$$Z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \quad (14.60)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \quad (14.61)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔ یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔ اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو ناقابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم A_1 - لکھتے ہیں۔ اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم A_2 - لکھتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \quad (14.62)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \quad (14.63)$$

ہوں گے لہذا مساوات 14.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \quad (14.64)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.62 اور مساوات 14.63 ایک متغیرہ پر بنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔ مساوات 14.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \quad (14.65)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں m_1 ، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.65 کو واپس مساوات 14.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 14.62 کا حل

$$(14.66) \quad Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y$$

ہے۔ اسی طرح مساوات 14.63 کا حل

$$(14.67) \quad Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z$$

ہے۔ ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.59 کو

$$(14.68) \quad H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسے مساوات 14.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y \right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

یعنی

$$(14.69) \quad c_2 = 0$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباؤ صفر کے برابر ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔ اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے ناکہ ہر قسم کے میدان سے خالی موج سے، لہذا ہم

$$(14.70) \quad c_1 \neq 0$$

لیتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$(14.71) \quad \sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ یوں

$$(14.72) \quad H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right)$$

ہو گا۔ اس مساوات کو مساوات 14.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(-c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہذا

$$(14.73) \quad c_4 = 0$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$(14.74) \quad c_3 \neq 0$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$(14.75) \quad \sqrt{A_2} z_1 = m\pi$$

یعنی

$$(14.76) \quad \sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \dots$ ممکن ہے۔ یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$(14.77) \quad H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہذا

$$(14.78) \quad H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$(14.79) \quad H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.80) \quad H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.81) \quad E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.82) \quad E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

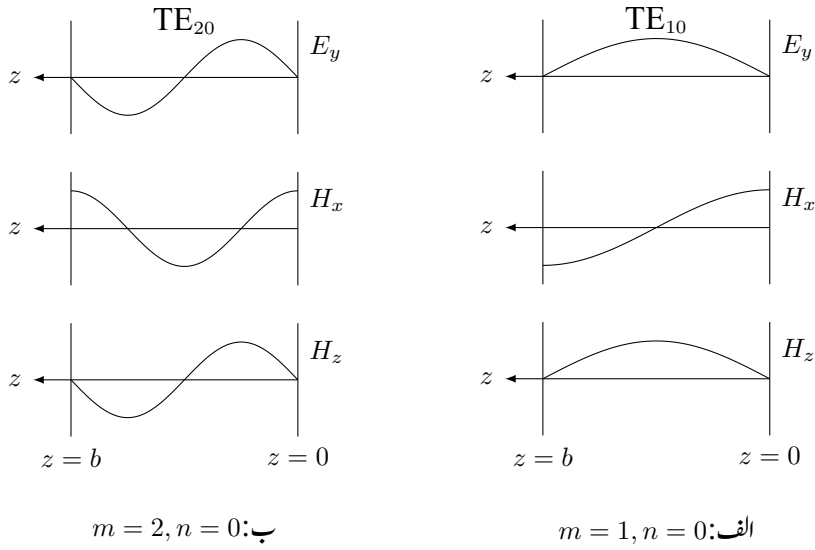
$$(14.83) \quad E_x = 0$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔ مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔ یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی موج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔ اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں H_y, E_z اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ یوں موج میں صرف H_x, H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی $z = 0$ پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 14.10 الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔ اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$ پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$ پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔ شکل 14.10 الف میں دوسرا خط H_x ہے۔ مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 14.10 ب میں دکھائے گئے ہیں۔ اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔ یوں شکل 14.10 الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 14.10 ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔ یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔ مستطیلی موج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE₁₀ موج:

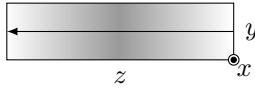
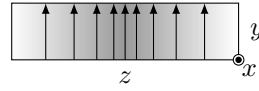
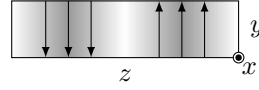
مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m = 1$ اور $n = 0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE₁₀ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.84}$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x = 0$ ، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ ان امواج کو شکل 14.10-الف میں $t = 0$ اور $x = 0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں میدان بالقابل z دکھایا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔ TE₁₀ تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہذا اس کی انقطاعی تعداد سب سے کم ہے۔ شکل 14.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں $z = \frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE₂₀ موج:

شکل 14.11 میں TE₂₀ کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

TE₁₀ کا H_z میدان۔TE₁₀ کا E_y میدان۔TE₂₀ کا H_z میدان۔TE₂₀ کا E_y میدان۔

شکل 14.11: TE₁₀ اور TE₂₀ کے E_y اور H_z میدان۔

بلند درجی TE₁₁ موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m = 1$ اور $n = 1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE₁₁ امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & \text{TE کا بنیادی شرط} \\
 E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_x &= H_0 \cos \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{y_1} \sin \frac{\pi y}{y_1} \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
 H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \cos \frac{\pi y}{y_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
 \end{aligned}
 \tag{14.85}$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موج میں پائے جاسکتے ہیں۔ حقیقت میں کسی بھی موج میں پائے جانے والے امواج کا دار و مدار موج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موج میں ناہمواریوں پر ہے۔ کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.64، مساوات 14.71 اور مساوات 14.76 کو ملا کر

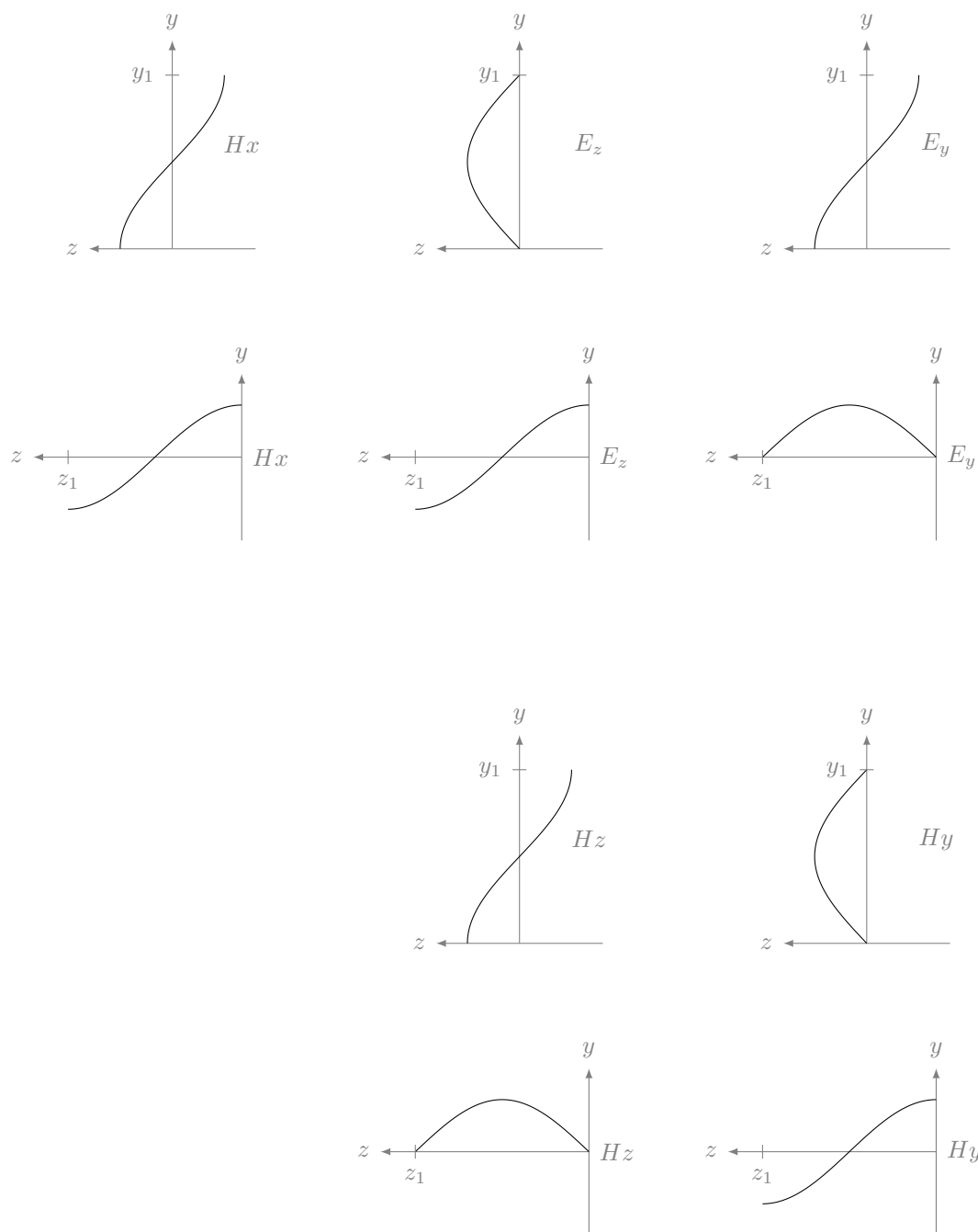
$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2
 \tag{14.86}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 14.33، مساوات 14.52 اور مساوات 14.57 سے

$$k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)
 \tag{14.87}$$

کے برابر ہے۔ بے ضیاع ذو برق میں $\sigma = 0$ لیا جاسکتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}
 \tag{14.88}$$



شکل 14.12: TE_{11} میدان.

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہذا γ حقیقی ہو گا۔ حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہذا موج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس تعدد کو انقطاعی تعدد¹³ کہتے ہیں۔ انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہذا یہ موج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

• کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔ موج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔

• مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔ یہ انقطاعی تعدد ہے۔

• زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔ موج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.88 میں $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو موج میں پایا جاتا ہے۔ یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \quad (14.89)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔ یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $k > \beta_0$ ہو گا لہذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \quad (14.90)$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{موج میں زاویائی مستقل}$$

$$\lambda \quad \text{موج میں طول موج}$$

ہیں۔ کافی بلند تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا اور یوں موج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔ اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $k < \beta_0$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \quad (14.91)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α تقلیلی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا لہذا تقلیلی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہذا $\gamma = 0$ ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$(14.92) \quad \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد¹⁴

$$(14.93) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{z_1} \right)^2} \quad (\text{Hz})$$

اور انقطاعی طول موج

$$(14.94) \quad \lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{z_1} \right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{m})$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لا محدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج¹⁵ پکارا جاتا ہے۔ مساوات 14.93 اور مساوات 14.94 سے کھوکھلے مستطیلی موج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$(14.95) \quad \lambda_{0c} = 2z_1$$

حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد ($\beta_0 > k$) پر

$$(14.96) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2}$$

لہذا موج میں دوری رفتار¹⁶ v_p

$$(14.97) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1} \right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1} \right)^2}}$$

یا

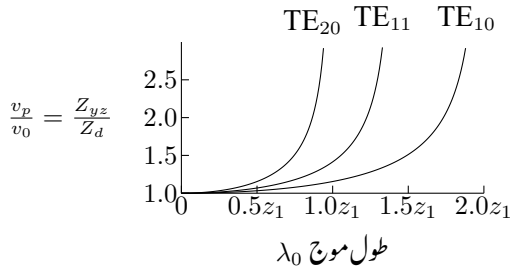
$$(14.98) \quad v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \right)^2}}$$

ہو گی جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{لا محدود خطے میں دوری رفتار}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لا محدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی موج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 ۔

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔ دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں مستطیلی موج کے دونوں اطراف برابر لمبائی ($y_1 = z_1$) کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجربے میں موج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔ اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موج میں صفر کرتے ہیں۔ حقیقت میں موج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے موج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ ایسے موج میں طاقت کا ضیاع صرف موج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔ موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب ہے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔ اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی موج کے طول موج λ ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت موج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تقبیلی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 14.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (14.99)$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_d}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \quad (\Omega) \quad (14.100)$$

ہو گا جہاں

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{موج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ ہوا کے لئے $Z_d = 120\pi = 376.7 \Omega$ کے برابر ہے۔ چونکہ Z_{yz} اور Z_d کی شرح بالکل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہذا شکل 14.13

بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 364 پر بتلائے گئے۔ انہیں آٹھ قدم سے شکل 14.9 کے مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔ TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔ آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہذا مساوات 14.14 تا مساوات 14.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔ چوتھے قدم میں $H_x = 0$ پر کرنے سے

$$(14.101) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$(14.102) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0$$

$$(14.103) \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0$$

$$(14.104) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0$$

$$(14.105) \quad \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$(14.106) \quad -\gamma H_y - Y E_z = 0$$

$$(14.107) \quad -\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$(14.108) \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.105 اور مساوات 14.106 سے

$$(14.109) \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔ اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔ یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہوگی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔ مساوات 14.109 اور مساوات 14.102 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.110) \quad H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

اور اسی طرح مساوات 14.109 کو مساوات 14.103 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(14.111) \quad H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان دو مساوات اور مساوات 14.109 سے

$$(14.112) \quad E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$(14.113) \quad E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 14.112 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.113 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 14.107 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ) E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(14.114) \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(14.115) \quad k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma \left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}} \right)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 14.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 14.114 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$(14.116) \quad k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1} \right)^2$$

اور میدان

$$(14.117) \quad E_x = E_0 \sin \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 14.110 تا مساوات 14.113 میں پر کرتے ہوئے

$$(14.118) \quad H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.119) \quad H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.120) \quad E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{n\pi}{y_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$(14.121) \quad E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ} \frac{m\pi}{z_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان جوابات کے ساتھ

$$(14.122) \quad H_x = 0 \quad TM_{mn} \text{ موج ہونے کا شرط}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.117 تا مساوات 14.122 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM₁₁ ہے۔

بے ضیاع $\sigma = 0$ و ذوق برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 14.115، مساوات 14.116 اور مساوات 14.33 سے

$$(14.123) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

$$(14.124) \quad = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لامحدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں

$$(14.125) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$$

سے $\beta = 0$ اور $\alpha = \sqrt{k^2 - \beta_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔ اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$(14.126) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\sqrt{\beta_0^2 - k^2}$$

سے $\alpha = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج، بغیر گھٹے موج میں صفر کرے گی۔ انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔ مساوات 14.123 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$(14.127) \quad \omega_c^2\mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2$$

یا

$$(14.128) \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح انقطاعی طول موج

$$(14.129) \quad \lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہو بہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $k > \beta_0$ کی صورت میں

$$(14.130) \quad \beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہوگا جس سے موج میں دوری رفتار

$$(14.131) \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{لامحدود خطے میں دوری رفتار}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TE_{mn} اور TM_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو بہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوت مساوات 14.109 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_d \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \quad (14.132)$$

ہو گا جہاں

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{موج کے ذوبرق کی قدرتی رکاوت}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$\lambda_{0c} \quad \text{انقطاعی طول موج}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 14.132 کا مساوات 14.100 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TE_{mn} اور TM_{mn} امواج کی رکاوت مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوت ہوتا ہے۔ اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدان کا مجموعہ ہو گا جو موج میں پائے جاتے ہوں۔

باب 15

سوالات

جدول 15.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 15.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیر
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 15.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 15.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

