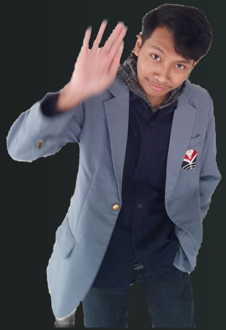
SISTEM PERSAMAAN LINIER

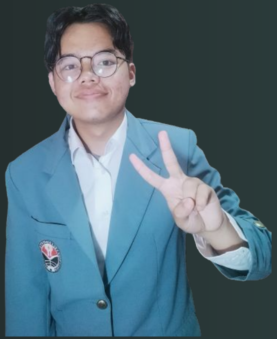
Pendidikan Ilmu Komputer B 2021
Kelompok 7

Our Team



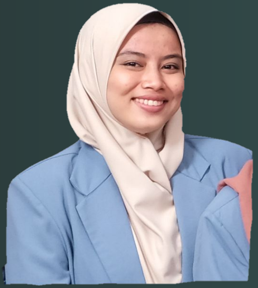
Hassan H

2102469



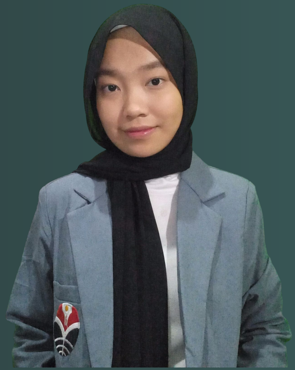
Hilmi A

2102643



Hilma N

2108871



Rebina P

2102372

Sri N

2103140

Table of contents

01

Permasalahan

Permasalahan

Persoalan: Temukan vektor x yang memenuhi sistem persamaan lanjar Ax = b, yang dalam hal ini,

A = [aij] adalah matriks berukuran n*n
x = [xj] adalah matriks berukuran n*1
b = [bj] adalah matriks berukuran n*1 (disebut juga vektor kolom)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Permasalahan

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Solusi adalah himpunan nilai x1, x2, ... , Xn yang memenuhi n buah persamaan. Metode penyelesaian sistem persamaan lanjar dengan determinan (Aturan Cramer) tidak praktis untuk sistem yang besar. Beberapa metode penyelesaian yang lebih praktis sistem persamaan lanjar diantaranya, yaitu:

- **Metode eliminasi Gauss**
- **Metode eliminasi Gauss-Jordan**

02

Ide Teori

Metode Eliminasi Gauss

Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks A berbentuk **segitiga atas** seperti sistem persamaan di samping.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metode ini prinsipnya bertujuan mentransformasi sistem Ax = b menjadi sistem Ux = y dengan U adalah matriks segitiga atas. Selanjutnya solusi x dapat dihitung dengan teknik penyulihan mundur

$$\underset{[A, b]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right]} \xrightarrow[\text{menjadi } [U,\, y]]{\text{dieliminasi}} \underset{[U, y]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array}\right]}$$

$$a_{nn}x_n = b_n \quad \rightarrow \quad x_n = b_n / a_{nn}$$

$$a_{n-1,\, n-1}x_{n-1} + a_{n-1,\, n}x_n = b_{n-1} \quad \rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,\, n-2}x_{n-2} + a_{n-2,\, n-1}x_{n-1} + a_{n-2,\, n}x_n = b_{n-2} \quad \rightarrow \quad x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

dst.

Sekali xn, xn-1, xn-2, ..., xk+1 diketahui, maka nilai xk dapat dihitung dengan

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \quad , k = n\text{-}1,\ n\text{-}2,\ \ldots,\ 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0.$$

Kondisi akk ≠ 0 sangat penting, sebab bila akk = 0, persamaan mengerjakan pembagian dengan nol. Apabila kondisi tersebut tidak dipenuhi, maka SPL tidak mempunyai jawaban.

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss.Dalam hal ini, matriks A dieliminasi menjadi **matriks identitas I**. Di sini tidak diperlukan lagi teknik penyulihan mundur untuk memperoleh solusi SPL. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom b hasil proses eliminasi.

Ax = b -> Ix = b'

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gaus-Jordan ditulis sebagai

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & b_3' \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & b_n' \end{array}\right]$$

Solusinya:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1' \\ x_2 &= b_2' \\ &\dots \\ x_n &= b_n' \end{aligned}$$

Perbedaan Mendasar

Perbedaan mendasar dari kedua **metode** tersebut adalah pada penyelesaian akhirnya.

Jika pada **metode eliminasi Gauss**, hasil akhirnya adalah sebuah matriks segitiga atas (dengan diagonal utama = “1”)

Pada **metode eliminasi Gauss-Jordan**, hasil akhirnya adalah sebuah matriks identitas.

Algoritma

03

How to implements solution in the program for Gauss and Gauss Jordan

Gauss

```
procedure Eliminasi_Gauss_Naif(A : matriks; b : vektor; n:integer;
                               var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b
 K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n × n, elemennya sudah terdefi-
          nisi harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n × 1
 K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
  i; k, j : integer;
  m: real;
begin
    for k:=1 to n-1 do {mulai dari baris pivot 1 sampai baris pivot n-1}
    begin
        for i:=(k+1) to n do {eliminasi mulai dari baris k+1 sampai baris n}
        begin
            m:=a[i,k]/a[k,k]; {hitung faktor pengali}
            for j:=k to n do  {eliminasi elemen dari kolom k sampai kolom n}
                a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
            {endfor}
            b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen vektor b pada baris i}
        end;
    end;
 Sulih_Mundur(A, b, n, x);  {dapatkan solusinya dengan teknik penyulihan
                             mundur)
end;
```

Input jumlah variabel:
Dikarenakan ordo matriks pasti sama untuk SPL.

Input koefisien dan nilai kanan pada SPL :
Memasukkan matriks dari pojok kiri atas ([0][0]) ke pojok
kanan atas ([0][n-1]), dimana n adalah inputan.

Gauss

Untuk mencari X (Output), diperlukan variabel ratio atau faktor pengali untuk membuat garis diagonal bernilai 1 dan baris kolom lainnya menjadi 0

Buat Kondisi dimana jika terdapat 0 pada diagonal utama, maka sistem akan exit, karena solusi tidak akan ditemukan.

Dibuat perulangan nested for dengan 3 parameter untuk menemukan hasil akhir SPL, dimana x[i] adalah variabel yang digunakan untuk Output nilai dari Xi.

Dibuat perulangan untuk Print hasil solusi yang didapat,
dimana %d dirujuk dari i dan %0.2f dirujuk dari x[i].

Gauss Jordan

```
procedure Eliminasi_Gauss_Jordan_Naif(A : matriks; b: vektor; n:integer;
                                     var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b dengan metode eliminasi
   Gauss-Jordan.
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n × n, elemennya sudah terdefinisi
           harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n × 1
  K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
   i; k, j : integer;
   m, tampung: real;
begin
   for k:=1 to n do
    begin
      tampung:=a[k,k];
      for j:=1 to n do {bagi elemen baris k dengan a[k,k]}
         a[k,j]:=a[k,j]/tampung;
      {endfor}
      b[k]:=b[k]/tampung;    {jangan lupa b[k] juga dibagi dengan a[k,k]}
      for i:=1 to n do       {eliminasi elemen baris i s/d baris n, i≠k}
```

Gauss Jordan

```
        begin
           if i<>k then
           begin
              m:=a[i,k];
              for j:=1 to n do  {eliminasi elemen dari kolom 1 s/d kolom n}
                 a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
              {endfor}
               b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen vektor b pada baris i}
           end;
        end;
    end;
    {Solusi langsung didapat dari vektor kolom b}
    for i:=1 to n do x[i]:=b[i];
end;
```

Perbedaan dengan Gauss

Hanya memiliki perbedaan pada pengolahaan x[i], karena bentuk matriks akan sampai menjadi matriks identitas.

04

Program

Lets Code!!

Gauss

```python
import numpy as np
import sys

n = int(input('Input jumlah variabel: '))
a = np.zeros((n,n+1))
x = np.zeros(n)
print('Input koefisien dan nilai kanan pada SPL:')
for i in range(n):
    for j in range(n+1):
        a[i][j] = float(input( 'a['+str(i)+']['+ str(j)+']='))
for i in range(n):
    if a[i][i] == 0.0:
        sys.exit('Terdapat nilai 0 pada diagonal utama')

    for j in range(i+1, n):
        ratio = a[j][i]/a[i][i]

        for k in range(n+1):
            a[j][k] = a[j][k] - ratio * a[i][k]

x[n-1] = a[n-1][n]/a[n-1][n-1]
```

```python
for i in range(n-2,-1,-1):
    x[i] = a[i][n]

    for j in range(i+1,n):
        x[i] = x[i] - a[i][j]*x[j]

    x[i] = x[i]/a[i][i]

print('\nSolusi SPL adalah: ')
for i in range(n):
    print('X%d = %0.2f' %(i,x[i]), end = '\t')
```

Gauss - Permasalahan 1 dan 2

```
Input jumlah variabel: 3
Input koefisien dan nilai kanan pada SPL:
A[0][0]=2
A[0][1]=3
A[0][2]=-1
A[0][3]=5
A[1][0]=4
A[1][1]=4
A[1][2]=-3
A[1][3]=3
A[2][0]=-2
A[2][1]=3
A[2][2]=-1
A[2][3]=1

Solusi SPL adalah:
X0 = 1.00        X1 = 2.00        X2 = 3.00
```

```
Input jumlah variabel: 3
Input koefisien dan nilai kanan pada SPL:
A[0][0]=1
A[0][1]=2
A[0][2]=1
A[0][3]=2
A[1][0]=3
A[1][1]=6
A[1][2]=0
A[1][3]=9
A[2][0]=2
A[2][1]=8
A[2][2]=4
A[2][3]=6
Terdapat nilai 0 pada diagonal utama
```

Gauss-Jordan

```
import numpy as np
//library untuk bekerja dengan array, matriks
import sys

n = int(input('Input jumlah variabel: '))
a = np.zeros((n,n+1))
x = np.zeros(n)
print('Input koefisien dan nilai kanan pada SPL:')
for i in range(n):
    for j in range(n+1):
        a[i][j] = float(input( 'a['+str(i)+']['+ str(j)+']='))

for i in range(n):
    if a[i][i] == 0.0:
        sys.exit('Terdapat nilai 0 pada diagonal utama')

    for j in range(n):
        if i != j:
            ratio = a[j][i]/a[i][i]

            for k in range(n+1):
                a[j][k] = a[j][k] - ratio * a[i][k]
```

```
for i in range(n):
    x[i] = a[i][n]/a[i][i]

print('\nSolusi SPL adalah: ')
for i in range(n):
    print('X%d = %0.2f' %(i,x[i]), end = '\t')
```

Gauss Jordan - Permasalahan 3

```
Input jumlah variabel: 2
Input koefisien dan nilai kanan pada SPL:
a[0][0]=1
a[0][1]=1
a[1][0]=2
a[1][1]=4
a[1][2]=8

Solusi SPL adalah:
X0 = 2.00        X1 = 1.00
```

Contoh Permasalahan

Contoh 1

Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan metode gauss

2x1 + 3x2 - x3 = 5
4x1 + 4x2 - 3x3 = 3
-2x1 + 3x2 - x3 = 1

Solution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^{4}/_{2} R_1 \\ \sim \\ R_3 - {}^{-2}/_{2} R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 - {}^{6}/_{-2} R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Keterangan: (i) elemen yang dicetak tebal menyatakan pivot.
(ii) simbol "~" menyatakan operasi baris elementer .
(iii) Ri menyatakan baris (row) ke-i
(iv) R2-4/2 R1 artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen-elemen pada baris ke satu.

Solution

Solusinya

$-5x_3 = -15 \rightarrow x_3 = 3$

$-2x_2 - x_3 = -7 \rightarrow x_2 = (-7 + 3)/-2 = 2$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \rightarrow x_1 = (5 + 3 - 6)/2 = 1$

Jadi, solusinya adalah $x = (1, 2, 3)^T$

Contoh Permasalahan

Contoh 2
Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan metode gauss

```
x1 + 2x2 + x3 = 2
3x1 + 6x2 = 9
2x1 + 8x2 - 4x3 = 6
```

Solution

```
det 1 2
    3 6 = (a*d) - (b-c)
        = (1*6) - (2*3) = 6 - 6 = 0
```

Ada determinan sub yang bernilai 0

Maka tidak ada solusi spl

Contoh Permasalahan

Contoh 3
Selesaikan sistem persamaan lanjar di bawah ini dengan metode eliminasi Gauss- Jordan.

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

Solution

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Lakukan operasi baris elementer

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan :
$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Thank You!!