GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 10

PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo

§7. TÍCH PHÂN BỘI BA

- Tích phân bội ba (mục 20.5)
- Thể tích
- Toạ độ trọng tâm
- Moment quán tính

Ta đã biết

- Độ dài đoạn thẳng $[a\,;\,b]$ là

$$b-a=\int_a^b dx\,.$$

- Diện tích miền phẳng R là:

$$S=\iint_R dxdy$$

- Diện tích mặt cong S: $z = f(x\,,\,y)$, $(x,\,y) \in R$ là

$$S=\iint_R dS$$

- Đã biết công thức tính thể tích vật thể trong không gian là

$$\int_a^b S(x)dx \quad \text{hay} \quad \iint_R f(x,y)dxdy$$

với các điều kiện nào đó. Liệu có thể xây dựng công thức tính thể tích vật thể bất kì trong không gian?

1. Tính thể tích bằng tích phân lặp

- **a)** Ta đã biết công thức tính thể tích vật thể trong không gian ba chiều:

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

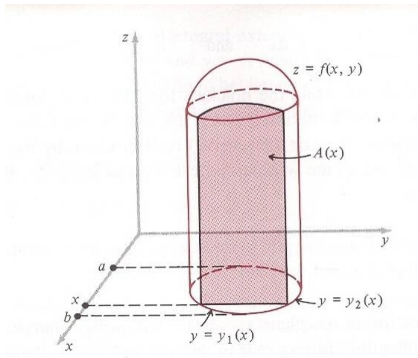
ở đó $S(x)$ là diện tích tiết diện thẳng tạo bởi vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.

- Khi vật thể trong không gian ba chiều là vật thể hình trụ: nó giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$, mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, mặt cong

$z = f(x, y)$ sao cho mọi đường thẳng song song với trục Oz đều cắt nó tại không quá một điểm (tức $z = f(x, y)$ xác định một hàm số)

- Tiết diện R: $0 \le z \le f(x, y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, ở đó $a \le x \le b$.
- Theo bài 7 ta có

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_0^{f(x,y)} dzdy = \iint_R dzdy;$$



Hình 20.1

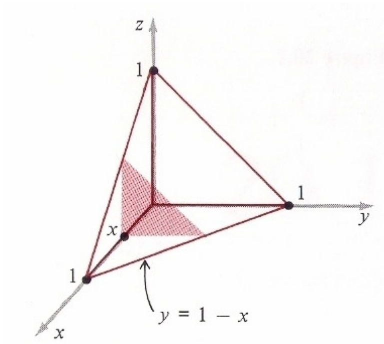
- Do đó

$$V = \int_a^b \left\{ \iint_R dzdy \right\} dx \equiv \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_0^{f(x,y)} dz \right] dy \right\} dx$$

ở đó thứ tự lấy tích phân được xác định bởi thứ tự các vi phân.

Ví dụ 1. Sử dụng tích phân lặp để tính thể tích tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

- R: $0 \le z \le 1 - x - y$, $0 \le y \le 1 - x$, ở đó $x \in [0 ; 1]$.
- $V = \int_0^1 \left\{ \iint_R dzdy \right\} dx$
- $= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} dz \right] dy \right\} dx$
- $= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dydx$
- $= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right] dx = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx$
- $= \int_0^1 \left[1-x-x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] dx$
- $= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 d(1-x)$
- $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}[0-1]$
- $= \frac{1}{6}$.



Hình 20.3

Ví dụ 2. Tính thể tích vật thể sau: $0 \le z \le xy^2$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 3$.

- R: $0 \le z \le xy^2$, $-2 \le y \le 3$
- $V = \int_0^1 \left\{ \iint_R dzdy \right\} dx$
- $= \int_0^1 \left\{ \int_{-2}^{3} \left[\int_0^{xy^2} dz \right] dy \right\} dx$
- $= \int_0^1 \int_{-2}^{3} xy^2 dy dx$
- $= \int_0^1 x dx \int_{-2}^{3} y^2 dy$
- $= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 . \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-2}^{3}$
- $= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}(27+8) = \frac{35}{6}$.

b) Trong bài 7 đã biết công thức tính thể tích vật thể hình trụ: nó giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$, mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, mặt cong $z = f(z, y)$ sao cho mọi đường thẳng song song với trục Oz đều cắt mặt cong này tại không quá một điểm, là

$$V = \iint_R f(x,y) dx dy \equiv \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy dx,$$

ở đó $R: y_1 \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$.

- Thay $f(x,y) = \int_0^{f(x,y)} dz$ vào công thức trên ta có:
- $V = \iint_R \left[\int_0^{f(x,y)} dz \right] dx dy \equiv \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_0^{f(x,y)} dz \right] dy \right\} dx.$

Ví dụ 3. Ta giải ví dụ 1 bằng công thức mới nhận được
R: $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$.

$$V=\iint_R\left[\int_0^{1-x-y}dz\right]dxdy$$
$$=\iint_R\{1-x-y\}dxdy$$
$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right]dx=\frac{1}{6}.$$

Ví dụ 4. Ta giải ví dụ 2 bằng công thức mới nhận được

- $R: -2\le y\le 3,\ 0\le x\le 1.$
- $V=\iint_R\left\{\int_0^{xy^2}dz\right\}dxdy$
- $=\iint_R xy^2\,dxdy$
- $=\int_0^1\left[\int_{-2}^3 xy^2\,dy\right]dx=\int_0^1 xdx.\int_{-2}^3 y^2\,dy$
- $=\frac{35}{6}.$

Chú ý

- Cần nắm vững miền lấy tích phân để chọn thứ tự thích hợp cho việc tính tích phân lặp
- Để tính tích phân lặp, ngoài việc chọn thứ tự để tính, còn cần thiết nắm vững cách tính tích phân xác định và tích phân bội hai (tích phân kép)
- Khi tính thể tích cần chú ý cách sử dụng các công thức: Tích phân xác định và tích phân kép.
- Theo lập luận ở trên, tuỳ từng trường hợp cụ thể ta có các công thức tính thể tích vật thể V như sau
  - $V=\int_a^b\left\{\iint_R dydz\right\}dx$

  ở đó R là hình chiếu của vật thể V lên mặt phẳng yz
  - $V=\iint_R\left\{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(y,z)}dz\right\}dxdy$

  ở đó R là hình chiếu của vật thể V lên mặt phẳng xy.

2. Định nghĩa tích phân bội ba

- Cho hàm $f(x, y)$ xác định, bị chặn trên miền R bị chặn (giới nội), đóng trong không gian
- Xét lưới các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, những mặt phẳng này chia không gian thành các hình hộp chữ nhật nhỏ, các hình hộp chữ nhật nằm trọn trong R có thể tích là ΔV_k, $k = \overline{1,n}$
- Chọn điểm bất kì (x_k, y_k, z_k) trong hình hộp chữ nhật thứ k và lập tổng

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

- Gọi $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}}$ {đường chéo của hình hộp chữ nhật thứ k}

Nếu tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ tiến đến một giới hạn (hữu hạn) duy nhất khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ không phụ thuộc vào cách chọn lưới các mặt phẳng và cách chọn $(x_k ; y_k ; z_k)$ thì hàm $f(x, y, z)$ khả tích trên R và ta bảo giới hạn đó là tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên R và viết

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

Ví dụ 5. Tính $\iiint_R dA$, ở đó R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$

- Xét lưới các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ chia miền R thành các hình hộp chữ nhật có diện tích là ΔV_k, $k = \overline{1,n}$
- Lấy điểm tuỳ ý $(x_k ; y_k ; z_k) \in \Delta V_k$, có $f(x, y, z) = 1$.
- Lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = 6$, với mọi cách chia R và cách chọn $(x_k ; y_k ; z_k)$
- Ta có $\lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = 6$, không phụ thuộc vào phép chia miền R và cách chọn điểm $(x_k ; y_k ; z_k)$, do đó ta có $\iiint_R dV = 6$

Chú ý

- Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trên R đóng, giới nội thì tồn tại $\iiint_R f(x,y,z)dV$

- Do $\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z$ nên thường sử dụng cách viết $\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz$

3. Tính chất: Có các tính chất tương tự như tích phân kép

a) **Tuyến tính:**

$$\iiint\limits_R [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dxdydz$$
$$=\alpha\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz+\beta\iiint\limits_R g(x,y,z)dxdydz$$

ở đó α, β là các số thực.

b) **Cộng tính:** Nếu $R = R_1 \cup R_2$, R_1 và R_2 không có điểm trong chung thì có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{R_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{R_2} f(x,y,z)dxdydz$$

c) **Bảo toàn thứ tự:** Nếu $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, $\forall(x ; y ; z) \in R$ thì có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_R g(x,y,z)dxdydz$$

Nói riêng: Nếu m và M tương ứng là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm $f(x, y, z)$ trong miền R thì có

$mV \le \iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz \le MV$, ở đó V là thể tích miền R

d) **Định lý giá trị trung bình:** Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền R liên thông thì có ít nhất một điểm $(x_0 ; y_0 ; z_0) \in R$ sao cho có:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V$$

ở đó V là thể tích miền R

4. Cách tính

- Nếu R là miền như sau:

  $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$
- R_1: $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$,
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên R, các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a ; b]$; các hàm $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ liên tục trên R_2: $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$.
- Khi đó ta có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \iint\limits_{R_1} f(x,y,z)dydz \right\} dx$$

$$= \iint\limits_{R_2} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx$$

- Nói riêng khi $R: a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ p \le z \le q$ và $f(x, y, z) = f_1(x).\ f_2(y).\ f_3(z)$, thì ta có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx.\int_c^d f_2(y)dy.\int_p^q f_3(x)dx$$

- Khi $f(x, y, z) = f_1(x).f_2(y, z)$, $R: a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ z_1(y) \le z \le z_2(y)$, thì ta có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx.\iint\limits_{R_3} f_2(y,z)dydz$$

ở đó R_3: $c \le y \le d,\ z_1(y) \le z \le z_2(y)$.

- Khi $f(x, y, z) = f_1(x, y).f_2(z)$, $R: p \le z \le q,\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$, thì ta có

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{R_4} f(x,y)dxdy.\int_p^q f_2(z)dz$$

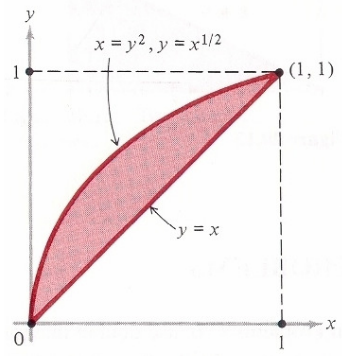
ở đó $R_4: a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Ví dụ 6. Tính $\iiint\limits_R xy^2e^z dxdydz$, R: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$, $2 \le z \le 3$.

- $I = \int_0^1 xdx.\int_1^2 y^2 dy.\int_2^3 e^z dz$
- $= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 . \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2 . \left.e^z\right|_2^3$
- $= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}(8-1).(e^3 - e^2)$
- $= \frac{7}{6}e^2(e-1)$

Ví dụ 7. Tính thể tích vật thể: $0 \le z \le 2xy$, $y^2 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$.

- $V = \iiint\limits_R dxdydz = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_{y^2}^{y} \left[\int\limits_0^{2xy} dz \right] dx \right\} dy$
- $= \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_{y^2}^{y} 2xydx \right\} dy$
- $= \int\limits_0^1 yx^2 \Big|_{y^2}^{y} dy = \int\limits_0^1 y(y^2 - y^4)dy = \int\limits_0^1 (y^3 - y^5)dy$
- $= \frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$



Hình 20.10

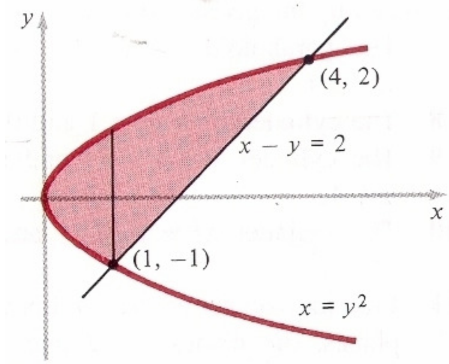
Ví dụ 8. Tính thể tích vật thể
R: $-x \le z \le 1 + x,\ y^2 \le x \le y + 2,\ -1 \le y \le 2$.
Ta có

- $V = \iiint\limits_R dxdydz$
- $= \int\limits_{-1}^{2} \left\{ \int\limits_{y^2}^{y+2} \left[\int\limits_{-x}^{1+x} dz \right] dx \right\} dy$
- $= \int\limits_{-1}^{2} \left\{ \int\limits_{y^2}^{y+2} (1+2x)dx \right\} dy$
- $= \int\limits_{-1}^{2} (x + x^2) \Big|_{y^2}^{y+2} dy = \int\limits_{-1}^{2} \left[y + 2 - y^2 + (y+2)^2 - y^4 \right] dy$

$= \int\limits_{-1}^{2} (6 + 5y - y^4)dy = \left(6y + \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_{-1}^{2}$

- $= 6.3 + \frac{5}{2}.3 - \frac{1}{5}.33 = 18 + \frac{15}{2} - \frac{33}{5} = \frac{180 + 75 - 66}{10}$

$= \frac{189}{10}$



Hình 20.11

Ví dụ 9. Tính thể tích hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $a > 0$

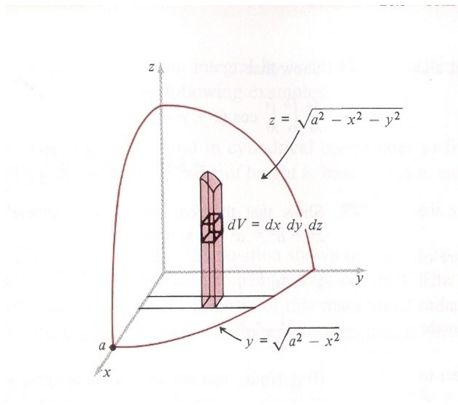
- R: $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ \ -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2},\ -a \le x \le a.$
- $V = \iiint\limits_R dxdydz$

- $= \iint\limits_D \left[\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right] dxdy$, ở đó $D: x^2 + y^2 \le a^2$.

  $= \iint\limits_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$

- Đổi sang toạ độ cực: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$ $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a$ ta có

  $V = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$



Hình 20.25

- $= 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta . \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,\frac{d(a^2-r^2)}{-2} = -\theta\Big|_0^{2\pi} . \frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$

  $= 2\pi.\frac{2}{3}.a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$

Ví dụ 10. Tính thể tích Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$, a > 0, b > 0, c > 0.

- $R: -a \le x \le a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

- $V = \iiint\limits_R dxdydz$

- $= \int\limits_{-a}^{a} \left\{ \iint\limits_D dydz \right\} dx$,

  $D: -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

- Như vậy $D: \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1-\frac{x^2}{a^2}$, do đó

  $$\iint\limits_D dydz = \pi.b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc.\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

- Thay vào trên ta có

  $V = \int\limits_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc.\left(x-\frac{x^3}{3a}\right)\Big|_{-a}^{a}$

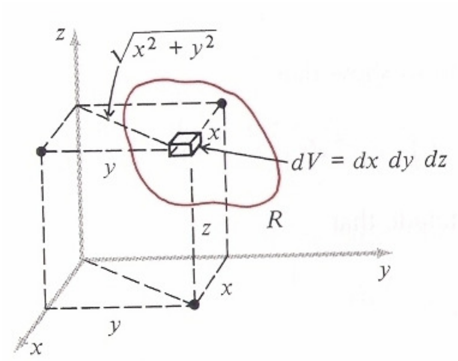
  $= \pi bc\left(2a-\frac{2}{3a^2}a^3\right) = \pi bc\left(2a-\frac{2}{3}a\right)$

$=\frac{4}{3}\pi abc.$

5. Ứng dụng trong vật lý

- Cho vật thể R trong không gian ba chiều với tỉ khối $\delta = \delta(x, y, z)$ (là khối lượng của một đơn vị thể tích), thì δdV là yếu tố của khối lượng, do đó khối lượng toàn phần là

$$M=\iiint_R \delta dV$$



Hình 20.22

- Tương tự ta xét công thức moment đối với từng mặt phẳng toạ độ có

$$M_{yz}=\iiint_R x\delta dV,\ M_{xz}=\iiint_R y\delta dV,\ M_{xy}=\iiint_R z\delta dV$$

- Moment quán tính đối với mỗi trục toạ độ là

$$I_x=\iiint_R (y^2+z^2)\delta dV,\ I_y=\iiint_R (x^2+z^2)\delta dV,\ I_z=\iiint_R (x^2+y^2)\delta dV$$

- Trọng tâm của khối lượng vật thể là $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ xác định như sau:

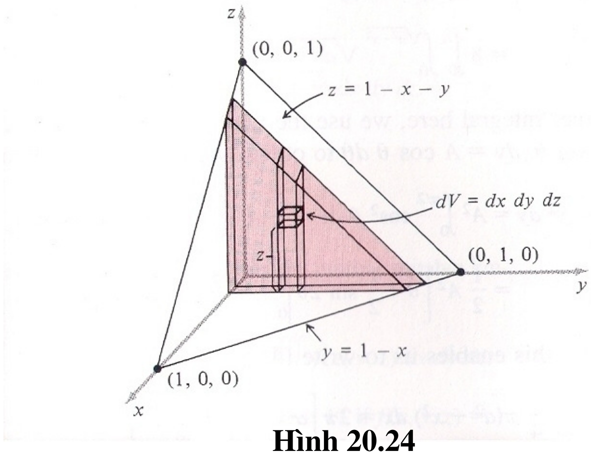
$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M},\ \overline{y}=\frac{M_{xz}}{M},\ \overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$$

Chú ý: Khi vật thể đồng chất ta có

$$\overline{x}=\frac{\iiint_R xdV}{\iiint_R dV},\ \overline{y}=\frac{\iiint_R ydV}{\iiint_R dV},\ \overline{z}=\frac{\iiint_R zdV}{\iiint_R dV}$$

Ví dụ 11. Tìm toạ độ trọng tâm của tứ diện đồng chất bị chặn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

- Tỉ khối δ
- $M = V\delta = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1.1.\delta = \frac{\delta}{6}$
- Ta có



Hình 20.24

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = 6\iiint_R z\,dx\,dy\,dz$$

$$= 6\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$$

$$= 6\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}z^2\,dy\,dx$$

$$= 3\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx = 3\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y-1)^2\,dy\,dx$$

$$= 3.\int_0^1\frac{1}{3}(x+y-1)^3\Big|_0^{1-x}dx = \int_0^1\left[0-(x-1)^3\right]dx = -\int_0^1(x-1)^3\,dx$$

$$= -\frac{(x-1)^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}(0-1)$$

$$= \frac{1}{4}$$

- Do vật thể đồng chất và đối xứng với x, y, z nên có $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$
- Trọng tâm của tứ diện là $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Ghi nhớ

- Tuần này làm các bài tập lẻ trong mục 20.5
- Tuần tới học lí thuyết các mục 20.9 (phần đối với tích phân bội ba), 20.6, 20.7.