Bài giảng môn
Giải tích hàm một biến

TS. NGUYỄN HỮU THỌ

2021-2022

BỘ MÔN TOÁN HỌC – TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY LỢI

Bài số 1

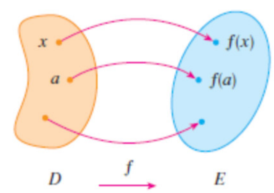
HÀM SỐ MỘT BIẾN. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

I. Hàm số một biến

1. Định nghĩa hàm số

Cho 2 tập hợp D và E: $D \subseteq \mathbb{R}, E \subseteq \mathbb{R}$, tương ứng $f: D \to E$ cho tương ứng mỗi phần tử $x \in D$ với một phần tử duy nhất $y \in E$ được gọi là một hàm số một biến số thực.

+ Tập D được gọi là miền xác định, kí hiệu D_f của hàm số f



+ Tập $f(X)$ được gọi là miền giá trị, kí hiệu R_f của hàm số f

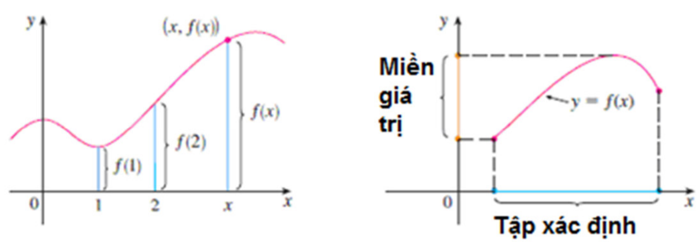
+ $x \in D_f$: biến số độc lập (hay đối số)

+ $f(x) \in R_f$: biến số phụ thuộc (hay hàm số)

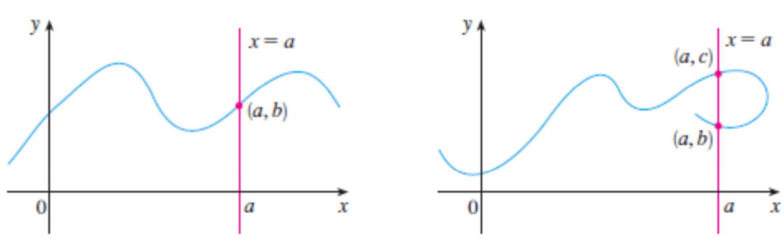
+ Cách viết: $f: D \to E$ hoặc $x \mapsto f(x)$ hoặc $y = f(x)$

$x \mapsto y = f(x)$

2. Đồ thị của hàm số: $G_f = \left\{ (x, f(x)) \middle| x \in D \right\}$



+ ***Cách nhận biết đồ thị***: Một đường cong trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đồ thị của một hàm số nếu và chỉ nếu đường thẳng cùng phương với Oy cắt đường cong đó tại nhiều nhất một điểm.

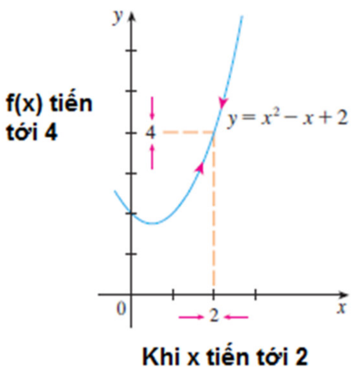


Đồ thị hàm số ***Không là đồ thị hàm số***

II. Giới hạn của hàm số

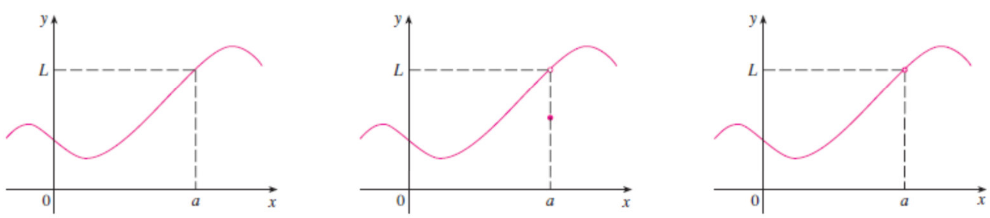
1. Ví du: Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - x + 2$. Ta lập bảng các giá trị của hàm số tại những điểm x gần $x_0 = 2$.

+ ***Nhận xét*** : khi $x \to x_0 = 2$ thì các giá trị của hàm số $f(x) \to 4$, và ta nói rằng hàm số có giới hạn bằng 4 khi $x \to x_0 = 2$.



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

+ ***Chú ý:*** Hàm số $y = f(x)$ có thể không xác định tại $x_0 = a$, tuy nhiên nó phải xác định tại những điểm thuộc lân cận của điểm đó.



(a) (b) (c)

Chẳng hạn: xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, hàm số không xác định tại $x_0 = 1$, tuy nhiên theo bảng giá trị dưới đây ta nhận thấy khi $x \to 1$ thì giá trị của hàm số dần tới $0,5$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

2. Định nghĩa giới hạn hàm số

Định nghĩa 1: Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn L (*hữu hạn*) khi $x \to x_0$ và viết $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ nếu với bất kì dãy $\{x_n\}$ mà $x_n \to x_0$ thì $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Định nghĩa 2: Theo ngôn ngữ δ - ε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Chú ý: Trong khi tìm giới hạn ta quan tâm đến "x dần tới x_0" chứ không phải xét khi $x = x_0$.

Ví du 1 **:** Cho $f(x) = C$, với C là hằng số. Chứng minh rằng $\lim_{x \to x_0} = C$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, vì $f(x) = C, \forall x$ nên với bất kì δ > 0: $|x - x_0| < \delta$, luôn có

$$|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$$

Ví du 2 **:** Cho $f(x) = x$. Chứng minh $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Thật vậy, cho trước ε > 0, chọn δ = ε → với $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$. (ĐPCM)

Định nghĩa 3

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E$

d) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -E$

(với A đủ lớn và E đủ lớn)

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

3. Tính chất của giới han hàm số

Định lí : *Cho* $\lim_{x \to a} f(x) = L_1, \lim_{x \to a} g(x) = L_2$; L_1, L_2 hữu hạn . *Khi đó:*

a) $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim_{x \to a}(Cf(x)) = CL_1, (C = const)$

c) $\lim_{x \to a}(f(x).g(x)) = L_1.L_2$

d) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$

Nhận xét

a) Cho $P_n(x) = a_n x + a_{n-1}x + \ldots + a_1 x + a_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$

b) Cho $R(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = \dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$, $\quad (Q_m(x_0) \neq 0)$

c) Khi $L_{1;2} = \pm\infty$, ta nhận được các giới hạn dạng vô định và Định lí nói chung không còn đúng.

Ví du 4: Ta có

$$\lim_{x\to 4}\left(x^2 - 2x\sqrt{x} + 1\right) = \lim_{x\to 4}(x^2) - \lim_{x\to 4}(2x\sqrt{x}) + \lim_{x\to 4}(1) = 16 - 2.4.2 + 1 = 1$$

Ví du 5: Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - x + 3}{x^2 - 2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3 - x + 3\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 2\right)} = \dfrac{1^3 - 1 + 3}{1^2 - 2} = -3$.

Định lí: *Giả sử hàm số* $f(x), g(x)$ *và* $h(x)$ *thoả mãn bất đẳng thức:* $f(x) \le g(x) \le h(x)$, trong lân cận của x_0. *Khi đó: nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

Định lí : Cho $f(x)$ là hàm số xác định, tăng (giảm) khi $x \to +\infty$ (hoặc khi $x \to -\infty$); khi đó nếu $f(x)$ bị chặn trên nghĩa là $\exists M : f(x) \le M, \forall x \in \mathrm{D}$ (hoặc bị chặn dưới nghĩa là $\exists m : f(x) \ge m, \forall x \in \mathrm{D}$) thì $\exists \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = L$.

4. Giới han môt phía.

a) Ví du: Xét $L = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}$, $\left(x \to a^- \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x \to a \end{cases}\right)$

- Nhận xét: Khi $x \to 3^- \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \to 3 \end{cases}$ thì $2x \to 6$ trong khi $x - 3 < 0$ và $x - 3 \to 0$.

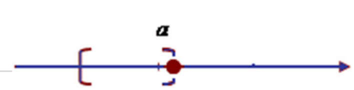
Như vậy: $L = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3} = -\infty$.

- Nhận xét: Khi $x \to 3^+ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \to 3 \end{cases}$ thì $2x \to 6$ trong khi $x - 3 > 0$ và $x - 3 \to 0$.

Như vậy: $L = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3} = +\infty$.

Từ đó ta nhận thấy rằng: có những hàm số chỉ có giới hạn một phía.

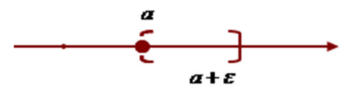
b) Định nghĩa:



+ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có ***giới hạn trái*** là L tại $x = a$ khi và chỉ khi với $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, $\exists \delta > 0$ sao cho với những điểm x thuộc lân cận trái của a thì ta phải có $\left|f(x) - L\right| < \varepsilon$. Ký hiệu **:** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

Lân cận trái của điểm *a*

+ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có ***giới hạn phải*** là L tại $x = a$ khi và chỉ khi với $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, $\exists \delta > 0$ sao cho với những điểm x thuộc lân cận phải của a thì ta phải có X. **Ký hiệu:** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$



Lân cận phải của điểm *a*

c) Định lý*:* Tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}$.

Ví dụ 6: Ta có : $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, trong khi đó $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, do đó không tồn tại giới hạn khi $x \to 1$.

Ví dụ 7: Xét hàm số : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ 3 - x, & 0 \le x < 3 \\ (x-3)^2, & x > 3 \end{cases}$

+ Ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3 - x) = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3 - x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-3)^2 = 0$.

+ Như vậy hàm số không có giới hạn khi $x \to 0$ và $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$.

Ví dụ 8: Tìm a, b để hàm số sau có giới hạn khi $x \to \pm\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

+ Nhận xét: về hai phía của $x = \pm\frac{\pi}{2}$ hàm số được xác định bởi các công thức khác nhau, do đó hàm số sẽ có giới hạn khi $x \to \pm\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} (-2\sin x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\cos x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -a + b \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

+ Vậy: Hàm số có giới hạn khi $x \to \pm\dfrac{\pi}{2}$ nếu $a = -1, b = 1$.

<u>Bài tập về nhà:</u> Tr.88, 91.

Đọc trước các Mục: **2.3, 2.4 , 2.5**
Chuẩn bị cho **Bài số 2**

Giới hạn dạng vô định. Hàm số liên tục