GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ
Bài 3
PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 4. Hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân (19.2) (*tiếp theo*)

2. Đạo hàm riêng cấp cao

a) Đạo hàm riêng cấp hai. $z = z(x, y)$

Định nghĩa

$$z_{xx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} z\right);\ z_{yy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ z_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ z_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Thứ tự các đạo hàm riêng không phải luôn luôn tạo nên sự khác biệt, chẳng hạn xét ví dụ sau: $z(x, y) = x^3 e^{5y} + y\sin 2x$

- $z_x = 3x^2 e^{5y} + 2y\cos 2x$
- $z_y = 5x^3 e^{5y} + \sin 2x$
- $z_{xy} = 15x^2 e^{5y} + 2\cos 2x$
- $z_{yx} = 15x^2 e^{5y} + 2\cos 2x$

Nhận thấy $z_{xy} = z_{yx}$

Định lý. Cho $z = f(x, y)$ có f_{xy}, f_{yx} xác định trong lân cận (x_0, y_0) và liên tục tại (x_0, y_0), khi đó ta có $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Chứng minh. (xem trang 380).

b) Các đạo hàm riêng cấp lớn hơn 2. Cho hàm $w = f(x, y, z)$, tương tự ta có định nghĩa

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = f_{zyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right) = f_{xxyz}$$

Nếu các đạo hàm riêng này liên tục thì luôn đổi được thứ tự mà không thay đổi kết quả.

IV. Số gia và vi phân. Bổ đề cơ bản

a) Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0, ta có $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ với $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon \text{ với } \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0.$$

Ta có $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x$

Có thể phát triển tương tự kết quả trên cho hàm hai biến?

b) Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$ có $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$, có hay không biểu diễn sau?

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

ở đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$.

Ta dẫn ra dưới đây một vài ví dụ chứng tỏ biểu diễn trên.

Ví dụ 1. $z = x + 2y$, xét tại (x_0, y_0) tuỳ ý có

- $z_x(x_0, y_0) = 1;\quad z_y(x_0, y_0) = 2$
- $\Delta z = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = x_0 + \Delta x + 2(y_0 + \Delta y) - x_0 - 2y_0$

$= \Delta x + 2\Delta y = 1.\Delta x + 2.\Delta y = z_x(x_0, y_0)\Delta x + z_y(x_0, y_0)\Delta y + 0.\Delta x + 0.\Delta y$

Rõ ràng thoả mãn $\varepsilon_1 = 0 = \varepsilon_2 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$. ❐

Ví dụ 2. $z = x^2 - y$, tại $(1, 2)$

- $z_x(1,2) = 2x\big|_{(1,2)} = 2;\ z_y(1,2) = -1$
- $\Delta z = z(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - z(1, 2) = (1 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta y) - (1 - 2)$

$\quad = 2\Delta x - \Delta y + (\Delta x)^2 = z_x(1,2)\Delta x + z_y(1,2)\Delta y + \Delta x.\Delta x + 0.\Delta y$

Rõ ràng $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = 0 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$. ❐

Ví dụ 3. $z = xy$ tại $(2, 1)$.

- $z_x(2,1) = \dfrac{d}{dx}z(x,1)\Big|_{x=2} = 1;\ z_y = \dfrac{d}{dy}z(2,y)\Big|_{y=1} = 2$
- $\Delta z = z(2 + \Delta x, 1 + \Delta y) - z(2, 1) = (2 + \Delta x)(1 + \Delta y) - 2.1$

$= \Delta x + 2\Delta y + \Delta x.\Delta y = z_x(2,1)\Delta x + z_y(2,1)\Delta y + \Delta x.\Delta y$.

Thấy ngay $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = 0 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$. ❐

Ví dụ 4. $z = 3x + |y|$. Tính (nếu có) các đạo hàm riêng cấp một tại điểm $(1, 0)$.

- $z_x(1,0) = 3.;$
- $\nexists\ z_y(1,0)$ vì

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(1,\ 0+\Delta y) - z(1,\ 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3 + |\Delta y| - 3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta y \to 0^+ \\ -1, & \Delta y \to 0^- \end{cases}$$

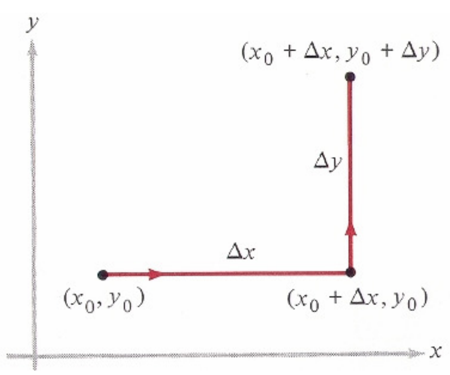
Hàm z không thể có biểu diễn như trên. ❐

c) Bổ đề cơ bản. Hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một xác định trong lân cận của điểm (x_0, y_0) và liên tục tại (x_0, y_0), khi đó luôn có

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

ở đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi Δx và $\Delta y \to 0$.

d) Định nghĩa. Hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một trong lân cận điểm (x_0, y_0) và liên tục tại (x_0, y_0) thì ta bảo hàm z khả vi tại (x_0, y_0) và có vi phân là $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$



Hình C.13

Ví dụ 5. Cho $z = e^{xy^2}$, tính dz(2, 3)

$$z_x(2,3) = y^2 e^{xy^2}\Big|_{(2,3)} = 9e^{18}$$

$$z_y(2,3) = 2xye^{xy^2}\Big|_{(2,3)} = 12e^{18}$$

dz(2, 3) = 9e^{18}dx + 12e^{18}dy. ❒

Ví dụ 6. $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, tính dz(3, 1)

$$z_x(3,\ 1) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(3,1)} = \frac{6}{11};$$

$$z_y(3,\ 1) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(3,1)} = \frac{2}{11}.$$

dz(3, 1) = $\frac{6}{11}\mathrm{d}x + \frac{2}{11}\mathrm{d}y$. ❒

Chú ý

1. Khi hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì dz là sự thay đổi theo z dọc theo mặt phẳng này.
2. Hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại $(x_0, y_0) \Rightarrow z = f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0).
3. Công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + \mathrm{d}f(x_0,\ y_0).$$

Ví dụ 7. Tính gần đúng $(1{,}01)^{2.99}$.

- $z = x^y$
- $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = -\,0{,}01$.
- $z(1, 3) = 1$
- $z_x(1,\ 3) = \frac{d}{dx}x^3\Big|_{x=1} = 3x^2\Big|_{x=1} = 3$
- $z_y(1,\ 3) = \frac{d}{dy}1^y\Big|_{y=3} = 0$
- $(1{,}01)^{2{,}99} = z(1 + 0{,}01)^{(3\,-\,0{,}01)} \approx 1 + 3.\ 0{,}01 + 0.\ (-\,0{,}01) \approx 1{,}03$.

4. Tương tự có thể xét các vi phân cấp cao của hàm $z=f(x, y)$:

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z),\ \mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 z),\ \ldots$$

Các dạng toán cơ bản

1. Tính các đạo hàm riêng

• **15(tr. 68).** $w = x^2y^5z^7$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^5z^7$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 5x^2y^4z^7$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 7x^2y^5z^6$

• **17(tr. 68).** $w = x\ln\dfrac{y}{z}$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \ln\dfrac{y}{z}$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial y} = x\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{y}{z}} = \dfrac{x}{y}$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial z} = x.\dfrac{-\frac{y}{z^2}}{\frac{y}{z}} = -\dfrac{x}{z}$

• **25(tr. 69).** Chứng minh rằng $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, ở đó $z = \ln(x + 5y)$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+5y}$

+) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -\dfrac{5}{(x+5y)^2}$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{5}{x+5y}$

+) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{5}{(x+5y)^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

2. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc

19. Cho mặt cong: $z = 2x^2 + y^2$

a) Mặt phẳng $y = 3$ cắt mặt cong theo đường cong. Tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại $x = 2$.

b) Mặt phẳng $x = 2$ cắt mặt cong theo đường cong. Tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại $y = 3$.

a) +) Giao tuyến: $\begin{cases} y=3 \\ z=2x^2+9 \end{cases}$

+) Hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = 2$ là

$$k=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2;\ 3)}=4x|_{(2;\ 3)}=8$$

+) Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $\begin{cases} y=3 \\ z=8(x-2)+17 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y=3 \\ z=8x+1 \end{cases}$

b) +) Giao tuyến: $\begin{cases} x=2 \\ z=8+y^2 \end{cases}$

+) Hệ số góc tiếp tuyến tại $y = 3$ là $k=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2;\ 3)}=2y|_{(2;\ 3)}=6$

+) Phương trình tiếp tuyến là $\begin{cases} x=2 \\ z=6(y-3)+17 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=2 \\ z=6y-1 \end{cases}$

3. Kiểm tra hàm số thoả mãn các phương trình đạo hàm riêng

- **21(69).** b) Hàm $z=\frac{x}{x+y}$ thoả mãn phương trình $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

+) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}$

+) $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x+y)^2}$

+) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{(x+y)^2}-\frac{xy}{(x+y)^2}=0$

- **29(tr. 69). a)** Hàm $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, thoả mãn phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

+) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$

+) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2.\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

+) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$

+) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.\dfrac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

d) $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

+) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$

+) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y.\dfrac{-2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

+) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

+) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x.\dfrac{-2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

+) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

§ 5. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (19.3.)

- Mặt phẳng tiếp xúc
- Pháp tuyến
- Dạng toán cơ bản

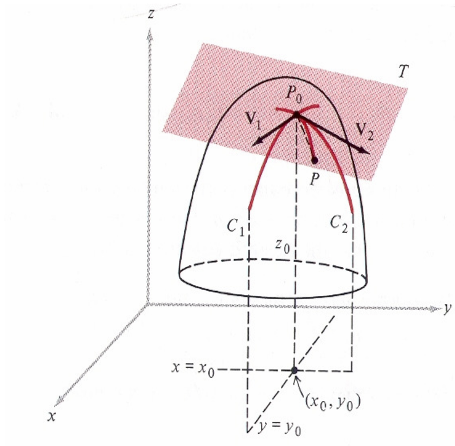
1. Mặt cong trong không gian ba chiều

$z = f(x, y)$ (hoặc $F(x, y, z) = 0$).

Mặt phẳng $y = y_0$ giao với mặt cong là đường cong C_1: $z = f(x, y_0)$

$f_x(x_0, y_0)$ là độ dốc của đường thẳng tiếp xúc với đường cong C_1: $z = f(x, y_0)$ tại điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$

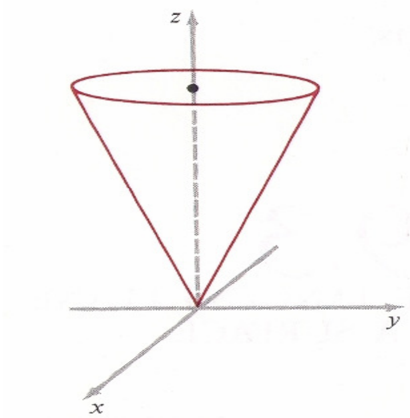
Tương tự $f_y(x_0, y_0)$ là độ dốc của đường thẳng tiếp xúc với đường cong C_2: $z = f(x_0, y)$ tại điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$.



Hình 19.6

2. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong

- Ngay cả khi hai đường cong C_1, C_2 đủ trơn để nó có các đường thẳng tiếp xúc tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ thì cũng chưa chắc chắn có mặt phẳng tiếp xúc tại P_0.
- Hai đường thẳng tiếp xúc trên tạo thành mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong đã cho tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nếu mặt cong đủ trơn tại lân cận $P_0(x_0, y_0, z_0)$.
- Có mặt cong không có mặt phẳng tiếp xúc, ví dụ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Hình 19.7

Vì không có đường thẳng tiếp xúc nào với mặt cong tại gốc toạ độ

Định nghĩa. Mặt phẳng T chứa điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tiếp xúc với mặt cong tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\Leftrightarrow$ P tiến đến $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dọc theo mặt cong thì góc giữa đoạn thẳng P_0P và mặt phẳng T tiến đến 0

3. Phương trình pháp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt cong

Phương trình mặt phẳng chứa $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong C_1: $z = f(x, y_0)$ là

$$V_1 = i + 0j + f_x(x_0, y_0)k$$

Véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong C_2: $z = f(x_0, y)$ là

$$V_2 = 0i + j + f_y(x_0, y_0)k$$

Véc tơ pháp tuyến là $N = V_2 \times V_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_x(x_0,\ y_0)i + f_y(x_0,\ y_0)j - k$

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc là $f_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

Phương trình pháp tuyến tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là $\dfrac{x-x_0}{f_x(P_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(P_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$

Ví dụ 1. Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $z = 2xy^3 - 5x^2$ tại điểm $(3 ; 2 ; 3)$
Điểm $(3 ; 2 ; 3)$ thuộc mặt cong

$z_x = 2y^3 - 10x$; $z_x(3,\ 2) = -14$; $z_y = 6xy^2$; $z_y(3,\ 2) = 72$

Mặt phẳng tiếp xúc cần tìm là $z - 3 = -14(x - 3) + 72(y - 2)$.

Ví dụ 2. Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ tại điểm $(1, 2, 3)$.

$z = \pm\sqrt{14 - x^2 - y^2}$

$(1, 2, 3)$ thuộc nửa mặt cầu $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$

$z_x = \dfrac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}$; $z_x(1,\ 2) = -\dfrac{1}{3}$

$z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}$; $z_y(1,\ 2) = -\dfrac{2}{3}$.

Mặt phẳng tiếp xúc cần tìm là $z - 3 = -\dfrac{1}{3}(x - 1) - \dfrac{2}{3}(y - 2)$.

Chú ý. Đối với mặt cong có phương trình khó hoặc không thể giải ra đối với z, có thể coi z là hàm ẩn để tính các đạo hàm riêng, xem ví dụ 3 trang 73.

Dạng toán cơ bản: Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong

• **1(tr. 74).** $z = (x^2 + y^2)^2$, tại $P(1, 2, 25)$.

+) P thuộc mặt cong

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2)^2$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ liên tục và có $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 20$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 40$

+) Tiếp diện tại P là $z - 25 = 20(x - 1) + 40(y - 2) \Leftrightarrow 20x + 40y - z - 75 = 0$

• **3(tr. 74).** $z = \sin x + \sin 2y + \sin 3(x + y)$, $P(0 ; 0 ; 0)$.

+) P thuộc mặt cong

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x + 3\cos 3(x + y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\cos 2y + 3\cos 3(x + y)$ liên tục và có

$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\ 0)=4, \frac{\partial z}{\partial y}(0,\ 0)=5$

+) Tiếp diện tại P là $z - 0 = 4(x - 0) + 5(y - 0)$ hay $4x + 5y - z = 0$

• **5(tr. 74).** $z = x^2 - 2y^2$ tại $P(3, 2, 1)$

+) P thuộc mặt cong

+) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-4y$ liên tục và có $\frac{\partial z}{\partial x}(3,2)=6$, $\frac{\partial z}{\partial y}(3,2)=-8$

+) Tiếp diện tại P là

$$z - 1 = 6(x - 3) - 8(y - 2) \text{ hay } 6x - 8y - z - 1 = 0$$

• **9(tr. 74).** $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 25$, $P(1, 2, 3)$

+) P thuộc mặt cong

+) Đạo hàm theo x:

$$y^2+2yz\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2+2yz}$$

Do $z(1, 2) = 3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=-\frac{10}{13}$

+) Đạo hàm theo y:

$$2xy+z^2+2yz\frac{\partial z}{\partial y}+x^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-2xy+z^2}{x^2+2yz}, \text{ do đó } \frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=-1$$

+) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ liên tục trong lân cận điểm $(1, 2)$

+) Tiếp diện tại P là $z-3=-\frac{10}{13}(x-1)-1(y-2)$ hay $10x + 13y + 13z - 75 = 0$

• **11(tr. 74).** Cho $P_0(x_0\ , y_0\ , z_0)$, $z_0 > 0$ là điểm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ Chứng minh rằng mặt phẳng tiếp xúc tại P_0 vuông góc với véctơ bán kính tại đó.

+) $2x+2z.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$

+) $2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$

+) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ liên tục tại (x_0, y_0)

+) Vectơ pháp của mặt phẳng tiếp xúc là

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) = \left(-\frac{x_0}{z_0}, \; -\frac{y_0}{z_0}, \; -1 \right)$$

+) Vectơ bán kính: $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$

+) $\vec{m}$ và $\overrightarrow{OP_0}$ cùng phương $\Rightarrow$ tiếp diện vuông góc với vectơ bán kính.

Ghi nhớ. Tuần sau học các mục 19.5, 19.6 và C. 16