Bài 10

MA TRẬN ĐỐI XỨNG và MA TRẬN XÁC ĐỊNH DƯƠNG

Content

Content

Định nghĩa (nhắc lại)

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ đgl **đối xứng** nếu $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$ hay $A = A^{\mathrm{T}}$.

Ví dụ:

• Với mọi ma trận thực A có $A^{\mathrm{T}}A, AA^{\mathrm{T}}$ đều là ma trận đối xứng.

• Cho đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ với a_{ij} là số cạnh nối trực tiếp v_i và v_j. Do G vô hướng nên $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$, tức là A đối xứng.

Định nghĩa (nhắc lại)

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ đgl **đối xứng** nếu $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$ hay $A = A^{\mathrm{T}}$.

Ví dụ:

- Với mọi ma trận thực A có $A^{\mathrm{T}}A, AA^{\mathrm{T}}$ đều là ma trận đối xứng.
- Cho đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = \{v_1, ..., v_n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, ..., e_m\}$. Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ với a_{ij} là số cạnh nối trực tiếp v_i và v_j. Do G vô hướng nên $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$, tức là A đối xứng.

Định nghĩa (nhắc lại)

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ đgl **đối xứng** nếu $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$ hay $A = A^{\mathrm{T}}$.

Ví dụ:

• Với mọi ma trận thực A có $A^{\mathrm{T}}A, AA^{\mathrm{T}}$ đều là ma trận đối xứng.

• Cho đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = \{v_1, ..., v_n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, ..., e_m\}$. Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ với a_{ij} là số cạnh nối trực tiếp v_i và v_j. Do G vô hướng nên $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = \overline{1, n}$, tức là A đối xứng.

Content

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A+B, A-B, B-A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A+B, A-B, B-A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao $(Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}})$ được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A+B, A-B, B-A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A + B, A - B, B - A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A+B, A-B, B-A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao $(Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}})$ được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A + B, A - B, B - A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cùng cấp, khi đó:

- $A+B, A-B, B-A$ cũng là ma trận đối xứng.
- AB đối xứng $\Leftrightarrow AB = BA$
- A^n đối xứng
- nếu $\exists A^{-1}$ thì A^{-1} cũng đối xứng
- các giá trị riêng của A đều là thực và có thể chọn các vector riêng tương ứng lập thành hệ trực chuẩn
- có thể phân tích $A = Q\Lambda Q^{-1}$ với Q là ma trận trực giao $(Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}})$ được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Content

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Ví dụ 1: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, g/s $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ tức là } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Như vậy A là ma trận xác định dương.

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} < 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \leq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Ví dụ 1: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, g/s $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0\ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ tức là } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Như vậy A là ma trận xác định dương.

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} < 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \leq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Ví dụ 1: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, g/s $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0\ \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ tức là } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Như vậy A là ma trận xác định dương.

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Ví dụ 1: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, g/s $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ tức là } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Như vậy A là ma trận xác định dương.

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là:

- **xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định dương** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} < 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **bán xác định âm** nếu $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \leq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Ví dụ 1: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, g/s $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0\ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0) \text{ tức là } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Như vậy A là ma trận xác định dương.

Ví dụ 2: cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, giả sử $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \text{ dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2.$$

Như vậy B là ma trận bán xác định dương.
Ví dụ 3: sinh viên tự kiểm tra C là xác định âm, D là bán xác định âm với $C = -A$ và $D = -B$.

Ví dụ 2: cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, giả sử $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0), \ \text{dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2.$$

Như vậy B là ma trận bán xác định dương.

Ví dụ 3: sinh viên tự kiểm tra C là xác định âm, D là bán xác định âm với $C = -A$ và $D = -B$.

Ví dụ 2: cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, giả sử $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0), \ \text{dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2.$$

Như vậy B là ma trận bán xác định dương.

Ví dụ 3: sinh viên tự kiểm tra C là xác định âm, D là bán xác định âm với $C = -A$ và $D = -B$.

Ví dụ 2: cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, giả sử $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0), \text{ dấu } = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2.$$

Như vậy B là ma trận bán xác định dương.

Ví dụ 3: sinh viên tự kiểm tra C là xác định âm, D là bán xác định âm với $C = -A$ và $D = -B$.

Ví dụ 2: cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, xét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bất kì, giả sử $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, có:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 =$$

$$= (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \neq (0,0), \text{ dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2.$$

Như vậy B là ma trận bán xác định dương.
Ví dụ 3: sinh viên tự kiểm tra C là xác định âm, D là bán xác định âm với $C = -A$ và $D = -B$.

Content

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

- Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.
- GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

• Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.

• GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

- Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.
- GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

• Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.

• GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

- Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.
- GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Tính chất cơ bản

Nếu A là **ma trận đối xứng** cấp n, các mệnh đề sau tương đương:
(1) A xác định dương, (2) Mọi giá trị riêng của A đều dương
(3) Mọi trụ ở ma trận bậc thang thu được từ khử Gauss A đều dương
(4) Các định thức con chính cấp 1 đến cấp n đều dương

Nhận xét: Khi cho ma trận đối xứng A, muốn kiểm tra xem A có xác định dương hay không thì ta có thể chọn kiểm tra (2), (3) hoặc (4).

VD: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, khử Gauss: $A \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, thỏa mãn (3).

• Định thức con chính cấp 1 là $a_{11} = 1 > 0$, định thức con chính cấp 2 chính là $|A| = 1 \times 6 - 2 \times 2 = 2 > 0$; như vậy (4) được thoả mãn.

• GTR của A là nghiệm pt: $(1-\lambda)(6-\lambda) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

Câu hỏi: độ phức tạp của thuật toán của việc kiểm tra (2), (3), (4)?

Phân tích Cholesky

Cho A là ma trận **đối xứng xác định dương**, khi đó có thể biểu diễn: $A = LL^{\mathrm{T}}$ với L là ma trận tam giác dưới.

Giải thích vắn tắt:

- B1: A đối xứng, xác định dương nên có biểu diễn: $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ (*), với L_1 là ma trận tam giác dưới, $D = diag(a_1, ..., a_n)$ là ma trận đường chéo mà các a_i là các trụ của ma trận bậc thang U thu được từ việc khử Gauss A ($U = DL_1^{\mathrm{T}} \Rightarrow L_1^{\mathrm{T}} = D^{-1}U$) (**nhắc lại**: $a_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$).
- B2: Từ (*) có $A = LL^{\mathrm{T}}$ với $L = L_1 D^{1/2}$, $D^{1/2} = diag(a_1^{1/2}, ..., a_n^{1/2})$.

CHÚ Ý: phân tích Cholesky thường dùng trong việc giải số, ví dụ như trong phương pháp Monte Carlo.

Nhận xét: A đối xứng xác định dương, phân tích $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ nhìn tương tự phân tích: $A = Q \Lambda Q^{\mathrm{T}}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Phân tích Cholesky

Cho A là ma trận **đối xứng xác định dương**, khi đó có thể biểu diễn: $A = LL^{\mathrm{T}}$ với L là ma trận tam giác dưới.

Giải thích vắn tắt:

- B1: A đối xứng, xác định dương nên có biểu diễn: $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ (*), với L_1 là ma trận tam giác dưới, $D = diag(a_1, ..., a_n)$ là ma trận đường chéo mà các a_i là các trụ của ma trận bậc thang U thu được từ việc khử Gauss A ($U = DL_1^{\mathrm{T}} \Rightarrow L_1^{\mathrm{T}} = D^{-1}U$) (**nhắc lại**: $a_i > 0\ \forall i = \overline{1, n}$).
- B2: Từ (*) có $A = LL^{\mathrm{T}}$ với $L = L_1 D^{1/2}$, $D^{1/2} = diag(a_1^{1/2}, ..., a_n^{1/2})$.

CHÚ Ý: phân tích Cholesky thường dùng trong việc giải số, ví dụ như trong phương pháp Monte Carlo.

Nhận xét: A đối xứng xác định dương, phân tích $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ nhìn tương tự phân tích: $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Phân tích Cholesky

Cho A là ma trận **đối xứng xác định dương**, khi đó có thể biểu diễn: $A = LL^{\mathrm{T}}$ với L là ma trận tam giác dưới.

Giải thích vắn tắt:

- B1: A đối xứng, xác định dương nên có biểu diễn: $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ (*), với L_1 là ma trận tam giác dưới, $D = diag(a_1, ..., a_n)$ là ma trận đường chéo mà các a_i là các trụ của ma trận bậc thang U thu được từ việc khử Gauss A ($U = DL_1^{\mathrm{T}} \Rightarrow L_1^{\mathrm{T}} = D^{-1}U$) (**nhắc lại**: $a_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$).
- B2: Từ (*) có $A = LL^{\mathrm{T}}$ với $L = L_1 D^{1/2}$, $D^{1/2} = diag(a_1^{1/2}, ..., a_n^{1/2})$.

CHÚ Ý: phân tích Cholesky thường dùng trong việc giải số, ví dụ như trong phương pháp Monte Carlo.

Nhận xét: A đối xứng xác định dương, phân tích $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ nhìn tương tự phân tích: $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Phân tích Cholesky

Cho A là ma trận **đối xứng xác định dương**, khi đó có thể biểu diễn: $A = LL^{\mathrm{T}}$ với L là ma trận tam giác dưới.

Giải thích vắn tắt:

• B1: A đối xứng, xác định dương nên có biểu diễn: $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ (*), với L_1 là ma trận tam giác dưới, $D = diag(a_1, ..., a_n)$ là ma trận đường chéo mà các a_i là các trụ của ma trận bậc thang U thu được từ việc khử Gauss A ($U = DL_1^{\mathrm{T}} \Rightarrow L_1^{\mathrm{T}} = D^{-1}U$) (**nhắc lại**: $a_i > 0\ \forall i = \overline{1, n}$).

• B2: Từ (*) có $A = LL^{\mathrm{T}}$ với $L = L_1 D^{1/2}$, $D^{1/2} = diag(a_1^{1/2}, ..., a_n^{1/2})$.

CHÚ Ý: phân tích Cholesky thường dùng trong việc giải số, ví dụ như trong phương pháp Monte Carlo.

Nhận xét: A đối xứng xác định dương, phân tích $A = L_1 D L_1^{\mathrm{T}}$ nhìn tương tự phân tích: $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ với Q là ma trận trực giao ($Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) được lập từ các vector riêng của A còn Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng tương ứng của A.

Content

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến thỏa mãn các tính chất thông thường ở toán 2, đặc biệt là f thỏa mãn: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ta đã học: nếu tại $M(x_0, y_0)$ có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) > 0, f''_{xx}(M).f''_{yy}(M) - [f''_{xy}(M)]^2 > 0$$

thì f đạt cực tiểu tại M.

Diễn đạt lại điều này nhờ việc sử dụng ma trận xác định dương:

Ứng dụng 1

Nếu tại $M(x_0, y_0)$ có: $f'_x(M) = 0, f'_y(M) = 0$ và A xác định dương với $A = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M) & f''_{xy}(M) \\ f''_{yx}(M) & f''_{yy}(M) \end{bmatrix}$ thì f đạt cực tiểu tại M.

Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến thỏa mãn các tính chất thông thường ở toán 2, đặc biệt là f thỏa mãn: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Ta đã học: nếu tại $M(x_0, y_0)$ có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) > 0, f''_{xx}(M).f''_{yy}(M) - [f''_{xy}(M)]^2 > 0$$

thì f đạt cực tiểu tại M.

Diễn đạt lại điều này nhờ việc sử dụng ma trận xác định dương:

Ứng dụng 1

Nếu tại $M(x_0, y_0)$ có: $f'_x(M) = 0, f'_y(M) = 0$ và A xác định dương với $A = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M) & f''_{xy}(M) \\ f''_{yx}(M) & f''_{yy}(M) \end{bmatrix}$ thì f đạt cực tiểu tại M.

Ứng dụng 2

Cho elip $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ với $a > 0, ac > b^2$, hãy chuyển về dạng "chính tắc": $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

B1: Viết lại PT elip dưới dạng: $(**)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = 1 \qquad (**)$$

B2: Do A đối xứng nên thay $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ vào (**) có:

$$1 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = AX^2 + BY^2$$

với $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ là các giá trị riêng của A, $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q$ với Q là ma trận có các cột là các vector riêng tương ứng, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

Nhận xét: các vector riêng của A chính là các vector chỉ phương của các trục của elip.

Ứng dụng 2

Cho elip $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ với $a > 0, ac > b^2$, hãy chuyển về dạng "chính tắc": $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

B1: Viết lại PT elip dưới dạng: $(**)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = 1 \qquad (**)$$

B2: Do A đối xứng nên thay $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ vào $(**)$ có:

$$1 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q \Lambda Q^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = AX^2 + BY^2$$

với $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ là các giá trị riêng của A, $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q$ với Q là ma trận có các cột là các vector riêng tương ứng, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

Nhận xét: các vector riêng của A chính là các vector chỉ phương của các trục của elip.

Ứng dụng 2

Cho elip $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ với $a > 0, ac > b^2$, hãy chuyển về dạng "chính tắc": $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

B1: Viết lại PT elip dưới dạng: $(**)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = 1 \qquad (**)$$

B2: Do A đối xứng nên thay $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ vào (**) có:

$$1 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = AX^2 + BY^2$$

với $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ là các giá trị riêng của A, $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q$ với Q là ma trận có các cột là các vector riêng tương ứng, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

Nhận xét: các vector riêng của A chính là các vector chỉ phương của các trục của elip.

Ứng dụng 2

Cho elip $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ với $a > 0, ac > b^2$, hãy chuyển về dạng "chính tắc": $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$.

B1: Viết lại PT elip dưới dạng: $(**)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = 1 \qquad (**)$$

B2: Do A đối xứng nên thay $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ vào (**) có:

$$1 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q \Lambda Q^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = AX^2 + BY^2$$

với $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$ là các giá trị riêng của A, $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} Q$ với Q là ma trận có các cột là các vector riêng tương ứng, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.
Nhận xét: các vector riêng của A chính là các vector chỉ phương của các trục của elip.

Dạng toàn phương

Đa thức n biến $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$ với các hệ số thực c_{ij} được gọi là **dạng toàn phương.**

Nhận xét: $f = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ với: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$; $A = [a_{ij}]_{n \times n}, a_{ij} = \dfrac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$

Dễ CM được:

- $f > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định dương
- $f \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định dương hoặc bán xác định dương
- $f < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định âm
- $f \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định âm hoặc bán xác định âm.

CHÚ Ý: nếu $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geq i} b_{ij} x_i x_j$ thì thay $a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{khi } i = j \\ b_{ij}/2 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$

Dạng toàn phương

Đa thức n biến $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$ với các hệ số thực c_{ij} được gọi là **dạng toàn phương.**

Nhận xét: $f = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ với: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $a_{ij} = \dfrac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$

Dễ CM được:

- $f > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định dương
- $f \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định dương hoặc bán xác định dương
- $f < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định âm
- $f \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A$ xác định âm hoặc bán xác định âm.

CHÚ Ý: nếu $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j \geq i} b_{ij} x_i x_j$ thì thay $a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{khi } i = j \\ b_{ij}/2 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$

Cách kiểm tra $A = (a_{ij})_{n\times n}$ bất kì có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không:

B1: Xét $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n] \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

B2: Kiểm tra xem dạng toàn phương vừa thu được có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không.

Cách kiểm tra $A = (a_{ij})_{n\times n}$ bất kì có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không:

B1: Xét $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

B2: Kiểm tra xem dạng toàn phương vừa thu được có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không.

Cách kiểm tra $A = (a_{ij})_{n\times n}$ bất kì có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không:

B1: Xét $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n] \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

B2: Kiểm tra xem dạng toàn phương vừa thu được có xác định dương (âm), bán xác định dương (âm) hay không.

Content

Định nghĩa

Cho kgvt V trên $\mathbb{R}$, một **chuẩn** $p : V \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$:
(1) $p(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \leq p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v})$, (2) $p(a\mathbf{u}) = |a| p(\mathbf{u})$,
(3) $p(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Một số chuẩn thường dùng

Cho $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta hay dùng:

- **Chuẩn Euclid** (Ơ-cơ-lít): $||\mathbf{x}||_2 = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. $(p = 2)$
- **Chuẩn maximum**: $||\mathbf{x}||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. $(p \to \infty)$
- **Chuẩn Manhattan (chuẩn taxicab)**: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $(p = 1)$

CHÚ Ý: 3 chuẩn trên là TH đặc biệt của *p*-norm: $||\mathbf{x}||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)\right]^{1/p}$.

Định nghĩa

Cho kgvt V trên $\mathbb{R}$, một **chuẩn** $p : V \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$:
(1) $p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v})$, (2) $p(a\mathbf{u}) = |a| p(\mathbf{u})$,
(3) $p(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Một số chuẩn thường dùng

Cho $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta hay dùng:
- **Chuẩn Euclid** (Ơ-cơ-lít): $||\mathbf{x}||_2 = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. $(p = 2)$
- **Chuẩn maximum**: $||\mathbf{x}||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. $(p \to \infty)$
- **Chuẩn Manhattan (chuẩn taxicab)**: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $(p = 1)$

CHÚ Ý: 3 chuẩn trên là TH đặc biệt của p-norm: $||\mathbf{x}||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)\right]^{1/p}$.

Định nghĩa

Cho kgvt V trên $\mathbb{R}$, một **chuẩn** $p : V \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall a \in \mathbb{R}$:
(1) $p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v})$, (2) $p(a\mathbf{u}) = |a| p(\mathbf{u})$,
(3) $p(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Một số chuẩn thường dùng

Cho $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta hay dùng:
- **Chuẩn Euclid** (Ơ-cơ-lít): $||\mathbf{x}||_2 = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. $(p = 2)$
- **Chuẩn maximum**: $||\mathbf{x}||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. $(p \to \infty)$
- **Chuẩn Manhattan (chuẩn taxicab)**: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $(p = 1)$

CHÚ Ý: 3 chuẩn trên là TH đặc biệt của p-norm: $||\mathbf{x}||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p)\right]^{1/p}$.

Với 3 chuẩn: Euclid, maximum, Manhattan, dễ CM được:

$$||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1 \leq \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2 \leq n||\mathbf{x}||_\infty \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

do đó 3 chuẩn này tương đương.

CHÚ Ý:

Định nghĩa

Hai chuẩn $||.||_\alpha$, $||.||_\beta$ được gọi là **tương đương** nếu tồn tại hai số dương C, D thỏa mãn:

$$C||\mathbf{x}||_\alpha \leq ||\mathbf{x}||_\beta \leq D||\mathbf{x}||_\alpha \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Với 3 chuẩn: Euclid, maximum, Manhattan, dễ CM được:

$$||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1 \leq \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2 \leq n||\mathbf{x}||_\infty \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

do đó 3 chuẩn này tương đương.

CHÚ Ý:

Định nghĩa

Hai chuẩn $||.||_\alpha$, $||.||_\beta$ được gọi là **tương đương** nếu tồn tại hai số dương C, D thỏa mãn:

$$C||\mathbf{x}||_\alpha \leq ||\mathbf{x}||_\beta \leq D||\mathbf{x}||_\alpha \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Content

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau
$\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, \dots, h_m$, vector cột $c_1, \dots, c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, \dots, ||c_n||_1\}$; • $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, \dots, ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $$||A||_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(|a_{ij}|^2\right)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}||c_j||_2.$$
- $$||A|| = \sup\{\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}.$$

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, \ldots, h_m$, vector cột $c_1, \ldots, c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, \ldots, ||c_n||_1\}$; • $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, \ldots, ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $||A||_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}||c_j||_2$.
- $||A|| = \sup\{\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, \ldots, h_m$, vector cột $c_1, \ldots, c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, \ldots, ||c_n||_1\}$;
- $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, \ldots, ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $||A||_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(|a_{ij}|^2\right)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}||c_j||_2$.
- $||A|| = \sup\{\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, \dots, h_m$, vector cột $c_1, \dots, c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, \dots, ||c_n||_1\}$; • $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, \dots, ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $||A||_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(|a_{ij}|^2\right)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}||c_j||_2$.
- $||A|| = \sup\{\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, \ldots, h_m$, vector cột $c_1, \ldots, c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, \ldots, ||c_n||_1\}$; • $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, \ldots, ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $||A||_{2,1} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}||c_j||_2$.
- $||A|| = \sup\{\dfrac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

Định nghĩa

Cho kgvt $M(m \times n, \mathbb{R})$, một **chuẩn ma trận** $||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ là hàm nhận g/t thực không âm và thỏa mãn các điều kiện sau $\forall A, B \in M(m \times n, \mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}$:
(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, (2) $||kA|| = |k|.||A||$,
(3) $||A|| \geq 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A = O_{m\times n}$.

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có các vector hàng $h_1, ..., h_m$, vector cột $c_1, ..., c_n$, sau đây là các chuẩn **thường dùng**:

- $||A||_1 = \max\{||c_1||_1, ..., ||c_n||_1\}$; • $||A||_\infty = \max\{||h_1||_1, ..., ||h_m||_1\}$;
- $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \max\left\{\sqrt{\lambda_i}\right\}$, các λ_i là các giá trị riêng của $A^{\mathrm{T}}A$;
- $||A||_{2,1} = \sum\limits_{j=1}^{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = \sum\limits_{j=1}^{n}||c_j||_2$.
- $||A|| = \sup\{\dfrac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{||A\mathbf{x}||, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ||\mathbf{x}|| = 1\}$.

CHÚ Ý:

- Cách viết khác: $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;
- $||A||_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$||A||_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

- Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$
$\forall A_{m\times n} \Rightarrow ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ tương đương.
- $||A||_2 \leq \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = ||A||_F$ (**chuẩn Frobenius**).

CHÚ Ý:

- Cách viết khác: $||A||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;

- $||A||_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$||A||_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

- Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

$\forall A_{m\times n} \Rightarrow ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ tương đương.

- $||A||_2 \leq \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = ||A||_F$ **(chuẩn Frobenius)**.

CHÚ Ý:

• Cách viết khác: $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;

• $||A||_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$||A||_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

• Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$ $\forall A_{m\times n} \Rightarrow ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ tương đương.

• $||A||_2 \leq \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = ||A||_F$ (**chuẩn Frobenius**).

CHÚ Ý:

- Cách viết khác: $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;
- $||A||_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$||A||_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

- Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

$\forall A_{m\times n} \Rightarrow ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ tương đương.

- $||A||_2 \leq \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = ||A||_F$ (**chuẩn Frobenius**).

CHÚ Ý:

- Cách viết khác: $||A||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\}$; $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$;
- $||A||_{2,1}$ (hay được dùng trong thống kê, thường là khi phân phối không phải phân phối chuẩn) là trường hợp đặc biệt của:

$$||A||_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(|a_{ij}|^p)\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$

- Có: $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

$\forall A_{m\times n} \Rightarrow ||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ tương đương.

- $||A||_2 \leq \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(|a_{ij}|^2)\right]^{1/2} = ||A||_F$ (**chuẩn Frobenius**).