GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

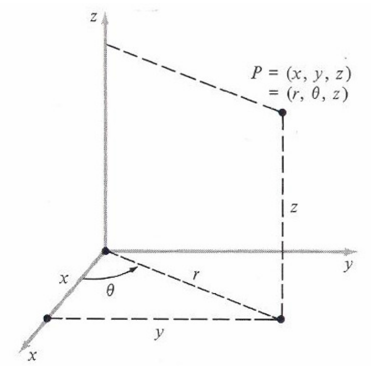
Bài 2

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 18.7. HỆ TOẠ ĐỘ TRỤ, HỆ TOẠ ĐỘ CẦU

- Hệ toạ độ trụ
- Hệ toạ độ cầu
- Các dạng toán cơ bản

Ngoài hệ toạ độ vuông góc quen thuộc, chúng ta sẽ làm quen với hai hệ toạ độ khác trong không gian ba chiều giúp ích cho việc giải quyết các bài toán đặc biệt là: Hệ toạ độ trụ và hệ toạ độ cầu.



Hình 18.39

1. Hệ toạ độ trụ

- $P(x, y, z)$ trong toạ độ vuông góc
- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $0 \le \theta \le 2\pi$; $\theta = (OP, Ox)$
- Có $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $z = z$
- $(r\,;\,\theta\,;\,z)$

Ví dụ 1. Tìm toạ độ trụ của các điểm P_2 biết toạ độ vuông góc tương ứng của chúng là $(2\sqrt{3}\ ;2\ ;5)$.

- Đối với P_2 có $r = \sqrt{12+4} = 4$
- $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$
- $z = 5$
- Toạ độ trụ là $\left(4\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\ ;\ 5\right)$.

Ví dụ 2. Mô tả các mặt cong

a) $r(2\cos\theta + 5\sin\theta) + 3z = 0$

b) $r + z = 3$

a) • Có $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

• $2x + 5y + 3z = 0$ là phương trình mặt phẳng.

b) • Giao của mặt phẳng $r + z = 3$ với mặt phẳng $x = 0$ là đường thẳng $y + z = 3$.

• Giao của mặt phẳng $r + z = 3$ với mặt phẳng $y = 0$ là đường thẳng $x + z = 3$.

• Phương trình khuyết θ nên mặt cong đối xứng với trục Oz.

• Mặt cong là mặt nón được tạo thành khi quay đường thẳng $y + z = 3$ quanh trục Oz.

Ví dụ 3. Tìm phương trình trong hệ toạ độ trụ cho:

a) Mặt cầu $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$

b) Hyperbol paraboloid $z = x^2 - y^2$.

a) • $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$; $z = z$.

• $r^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2z^2 = 4$

• $r^2 + 2z^2 = 4$.

b) • $z = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2$

• $z = r^2\cos 2\theta$

Chú ý. Trong vật lý, hệ toạ độ trụ đặc biệt thuận lợi trong các bài toán có trục đối xứng. Có hai lớp bài toán quan trọng: Một liên quan tới dòng nhiệt trong thanh trụ rắn, một là dao động của màng tròn như màng trống.

2. Hệ toạ độ cầu

• $P(x, y, z)$

• $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$,

• $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\phi = (OP, Oz)$, $\theta = (OP', Ox)$.

• $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2$.

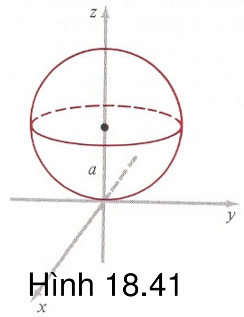
• $\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = \dfrac{\rho\sin\phi}{\rho\cos\phi} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

• $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

• (ρ, ϕ, θ)

Ví dụ 1. Tìm phương trình trong hệ toạ độ cầu của hình cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0,\ a > 0$$



Hình 18.41

• $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$

• $\rho^2 - 2a\rho\cos\theta = 0$

• $\rho(\rho - 2a\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$ hoặc $\rho = 2a\cos\theta \Leftrightarrow \rho = 2a\cos\theta$ là phương trình mặt cầu bán kính a và tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại gốc toạ độ.

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

Ví dụ 2. a) Tìm toạ độ cầu cho điểm $P\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;2\sqrt{3}\right)$

b) Tìm toạ độ vuông góc của điểm có toạ độ cầu sau $\left(6\,;\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right)$

a) • $\rho^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16$

• $\rho = 4$

• $\tan\phi = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

• $\phi = \dfrac{\pi}{6}$

• $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 1$

• $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

• $P\left(4\,;\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) • $x = 6\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi = -6$

• $y = 6\sin\frac{\pi}{2}\sin\pi = 0$

• $z = 6\cos\frac{\pi}{2} = 0$

• $P(-6\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

Ví dụ 3 Mô tả mặt cong sau biết phương trình trong toạ độ cầu của nó là $\rho = 2a\sin\phi$.

• Ta biết mặt cong tròn xoay quanh trục Oz (vì khuyết θ).

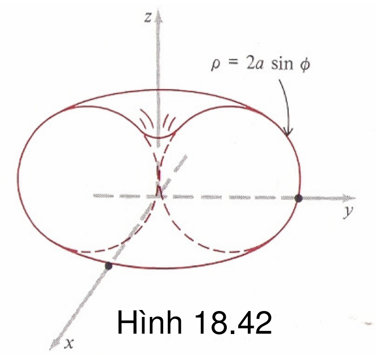
• Trong mặt phẳng yOz, phương trình $\rho = 2a\sin\phi$ biểu diễn đường tròn bán kính a vì $\rho^2 = 2a\rho\sin\phi$

• $\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = 2a\rho\sin\phi$

• $z^2 + y^2 = 2ay$

• $z^2 + (y-a)^2 = a^2$

• Quay đường tròn nói trên quanh trục Oz, được mặt xuyến



Hình 18.42

3. Các dạng toán cơ bản

1. Tìm toạ độ trụ của điểm có toạ độ vuông góc

• **1(tr. 55).** c) $(3\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 2)$

+) $z = 2,\ x = 3,\ y = \sqrt{3}$

+) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}$

+) $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

+) $\left(2\sqrt{3}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ 2\right)$

2. Tìm toạ độ cầu của điểm có toạ độ vuông góc sau

• **3(tr. 55).** a) $(1;\ 1;\ \sqrt{6})$

+) $x = 1,\ y = 1,\ z = \sqrt{6}$

+) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$

+) $\tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

+) $\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

+) $\left(2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right)$

3. Tìm phương trình toạ độ trụ của các mặt cong có phương trình trong toạ độ vuông góc cho trước

• **5(tr. 56).** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (mặt cầu)
+) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$
+) $\rho^2 + z^2 = 16$
• **7(tr. 56).** $x^2 + y^2 = z^2$ (mặt nón)
+) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$
+) $\rho^2 = z^2$
• **9(tr. 56).** $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (mặt trụ)
+) $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$
+) $\rho^2 - 2\rho\sin\theta = 0 \Rightarrow \rho = 2\sin\theta$

4. Tìm phương trình toạ độ cầu cho các mặt cong có phương trình trong toạ độ vuông góc cho trước

• **13(tr. 56).** $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (hình cầu)
+) $x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \cos\phi$
+) $\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi = 16$
+) $\rho^2 = 16$
+) $\rho = 4$
• **15(tr. 56).** $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ (mặt cầu)
+) $x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \cos\phi$
+) $\rho^2 - 6\rho\cos\phi = 0$
+) $\rho = 6\cos\phi$
• **17(tr. 56).** $z = 4 - x^2 - y^2$
+) $x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \cos\phi$
+) $\rho\cos\theta = 4 - \rho^2\sin^2\phi$
+) $\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\phi = 4$

§ 19.1. Hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân

- Hàm nhiều biến số
- Liên tục
- Các dạng toán cơ bản

I. Hàm nhiều biến số

1. Định nghĩa. Hàm hai biến số $z = f(x, y)$ là ánh xạ:

$$f:\ D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

Nghĩa là, mọi $(x, y) \subset D$ có tương ứng duy nhất với một số thực $z \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. $z = x^2 + y^2$ là hàm hai biến số

Ví dụ 2. $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$, $a > 0$ không phải là hàm hai biến số vì $x = y = \dfrac{a}{2}$ có hai giá trị tương ứng là $z = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Định nghĩa. Hàm ba biến số $u = f(x, y, z)$ là ánh xạ

$$f: \quad D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x;y;z) \to u = f(x,y,z)$$

Việc biểu diễn hàm ba biến gặp khó khăn vì khi đó phải cần đến không gian 4 chiều.

Định nghĩa. • Miền xác định của hàm $z = f(x, y)$ là $\{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}: z = f(x, y)\}$

• Miền giá trị của hàm $z = f(x, y)$ là $\{z\in\mathbb{R}: z = f(x, y), (x, y) \in \text{MXĐ}\}$.

Ví dụ 3. $z = x^2 + 4y^2$

• MXĐ: $\mathbb{R}^2$

• MGT: $z \geq 0$.

Ví dụ 4. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

• MXĐ: $x^2 + y^2 \leq 9$

• MGT: $z \geq 0$

Ví dụ 5. $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

• MXĐ: $x^2 + y^2 > 4$

• MGT: $\mathbb{R}$

Ví dụ 6. $z = \dfrac{1}{\ln\left(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}\right)}$

• MXĐ: $1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2} > 0$ và $1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2} \neq 1 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{2} < 1$ bỏ đi điểm (0 ; 0).

• MGT: $\forall z \neq 0$.

2. Liên tục

Định nghĩa. Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là liên tục tại $(x_0 ; y_0)$ thuộc MXĐ $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ (x ; y) \in$ MXĐ sao cho $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$ thì có

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Hàm số được gọi là liên tục nếu như liên tục tại mọi điểm thuộc MXĐ

Ví dụ 7. $z = xy$

• MXĐ: $\mathbb{R}^2$

• $(x_0 ; y_0) \in \mathbb{R}^2$ có

$|xy - x_0y_0| = |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| = |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)|$

$\leq |x||y - y_0| + |y_0||x - x_0| \leq |c||y - y_0| + |y_0||x - x_0|, \quad |x| < c$

• Chọn $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2|y_0|} ; \dfrac{\varepsilon}{2c}\right\}$

• $|xy - x_0y_0| < c\dfrac{\varepsilon}{2c} + |y_0|\dfrac{\varepsilon}{2|y_0|} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Chú ý. $f(x, y)$ liên tục tại $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Ví dụ 8. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x\,;y)\neq(0\,;0)\\ 0 & (x\,;y)=(0\,;0)\end{cases}$

Xét tính liên tục tại điểm (0 ; 0).

- (0 ; 0) thuộc MXĐ
- Chọn $x = y$ có $\lim\limits_{x=y\to0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$
- $f(0, 0) = 0$
- $f(0, 0) \neq \lim\limits_{x=y\to0} f(x,y)$
- không liên tục tại (0 ; 0).

3. Hàm *n* biến số ($n \geq 3$)

a) **Hàm ba biến** $w = f(x, y, z)$

- Đồ thị có dạng như mặt cong ba chiều trong không gian bốn chiều
- Miền xác định D nằm trong "mặt phẳng toạ độ" ba chiều chứa tất cả các điểm có dạng $(x, y, z, 0)$

b) **Hàm *n* biến** $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 4$

- Đồ thị có dạng như mặt cong n chiều trong không gian $(n + 1)$ chiều.

Các dạng toán cơ bản

1. Tìm MXĐ của các hàm số sau

- **3(tr. 61).** $f=\sqrt{xy}$

+) $x \geq 0$, $y \geq 0$ hoặc $x \leq 0$, $y \leq 0$

+) Góc phần tư thứ 1 và thứ 3

- **5(tr. 62).** $f = \ln(y - 3x)$

+) $y > 3x$

+) Phía trên đường thẳng $y = 3x$

- **9(tr. 62).** $f=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$

+) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$

+) Hình cầu tâm (0 ; 0 ; 0) bán kính $R = 4$

- **13(tr. 62).** CMR $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

liên tục tại gốc toạ độ

+) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

+) $f(r,\theta)=\begin{cases} r\cos\theta\sin\theta, & r\neq0\\ 0 & r=0\end{cases}$

là hàm liên tục

§ 19.2. Hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, vi phân

- Ta đã biết đối với hàm một biến $y = f(x)$ có định nghĩa $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- Có cách nào vận dụng kỹ thuật trên để nghiên cứu hàm hai biến số?
- Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$, ta xét $f(x, y_0)$ với y_0 cố định và xét $\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$
- Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \dfrac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0}$

1. Đạo hàm riêng cấp 1

a) Định nghĩa. $z_x(x_0, y_0) \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

Ví dụ 1. $z(x, y) = x^3 - 3x^2y^3 + y^2$, tính $z_x(x_0, y_0)$

$$z_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} z(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2y_0^3 + y_0^2)\Big|_{x=x_0} = (3x^2 - 6xy_0^3)\big|_{x=x_0} = 3x_0^2 - 6x_0y_0^3.$$

Ví dụ 2. $z(x, y) = xe^{xy^2}$. Tính $z_x(2,3)$

$$z_x(2,3) = \frac{d}{dx}(xe^{9x})\Big|_{x=2} = (e^{9x} + 9xe^{9x})\big|_{x=2} = e^{18} + 18e^{18} = 19e^{18}.$$

Tương tự ta có $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \dfrac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$

Định nghĩa. $z_y(x_0, y_0) \equiv \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

Ví dụ 3. $z(x, y) = 3x^2 - 6xy^3$, tính $z_y(3,2)$.

$$z_y(3,2) = \frac{d}{dy} z(3, y)\Big|_{y=2} = \frac{d}{dy}(27 - 18y^3)\Big|_{y=2} = -54y^2\big|_{y=2} = -216.$$

Ví dụ 4. $z(x, y) = xe^{xy^2}$, tính $z_y(x_0, y_0)$

$$z_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} z(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = \frac{d}{dy}\left(x_0e^{x_0y^2}\right)\Big|_{y=y_0} = x_0(2yx_0)e^{x_0y^2}\big|_{y=y_0} = 2x_0^2y_0e^{x_0y_0^2}.$$

Ví dụ 5. $z(x, y) = x^y$, tính $z_x(2,3)$ và $z_y(2,3)$

+) $z_x(2,3) = \dfrac{d}{dx} z(x, 3)\Big|_{x=2} = \dfrac{d}{dx}(x^3)\Big|_{x=2} = 3x^2\big|_{x=2} = 12$

+) $z_y(2,3) = \dfrac{d}{dy} z(2, y)\Big|_{y=3} = \dfrac{d}{dy} 2^y\Big|_{y=3} = 2^y \ln 2\big|_{y=3} = 8\ln 2.$

Có thể mở rộng kết quả như trên cho hàm số với số lượng biến bất kỳ.

Ví dụ 6. $w(x, y, z, u, v) = xy^2 + 2x^3 + xyz + zu + \tan(uv)$. Tính các đạo hàm riêng.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y^2+6x^2+yz;\ \frac{\partial w}{\partial y}=2xy+xz;\ \frac{\partial w}{\partial z}=xy+u;\ \frac{\partial w}{\partial u}=z+v\sec^2(uv);\ \frac{\partial w}{\partial v}=u\sec^2(uv).$$

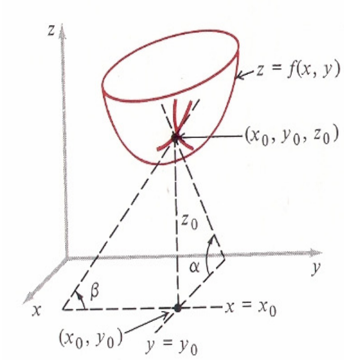
Chú ý

- Đối với hàm một biến số $y = y(x)$ chúng ta có thể hợp pháp hoá $\frac{dy}{dx}$ là phân số.
- Không thể vận dụng chú ý trên cho hàm nhiều biến, tức là không thể hợp pháp hoá $\frac{\partial z}{\partial x}$ là phân số.

Ví dụ 7. Định luật khí lí tưởng nói rằng số lượng khí đã có, áp suất P, thể tích V, nhiệt độ tuyệt đối T được liên hệ với nhau bởi phương trình $PV = nRT$, ở đó n là số lượng phân tử gam khí ở điều kiện lí tưởng, R là hằng số.

$$P=\frac{nRT}{V};\ \frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{nRT}{V^2}.$$
$$V=\frac{nRT}{P};\ \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{nR}{P}.$$
$$T=\frac{PV}{nR};\ \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{nR}.$$
$$\frac{\partial P}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial T}.\frac{\partial T}{\partial P}=\left(-\frac{nRT}{V^2}\right).\frac{nR}{P}.\frac{V}{nR}=-\frac{nRT}{PV}=-1$$

Trong khi nếu vận dụng kết quả tương tự như đối với hàm một biến số thì sẽ có $\frac{\partial P}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial T}.\frac{\partial T}{\partial P}=1$. ❒



- $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\tan\alpha$, α là góc tạo bởi tiếp tuyến của đường cong $z(x, y_0)$ tại $x = x_0$ với chiều dương trục Ox.
- Tương tự có $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\tan\beta$, β là góc tạo bởi tiếp tuyến của đường cong $z(x_0, y)$ tại $y = y_0$ với chiều dương trục Oy.

Hình 19.5

b) Tính chất

- Tuyến tính: $\frac{\partial}{\partial x}(\alpha.u(x, y)+\beta.u(x,y))=\alpha.\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)+\beta.\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)$.
- $\frac{\partial}{\partial x}(u(x, y).v(x, y))=v(x, y)\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)+u(x, y)\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)$.
- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{u(x, y)}{v(x, y)}=\frac{v(x, y)\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)-u(x, y)\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)}{v^2(x, y)}$.

2. Các dạng toán cơ bản

1. Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

• **3(tr. 68).** $z = \frac{2y^2}{3x+1}$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 \frac{-3}{(3x+1)^2}$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{3x+1}$

• **5(tr. 68).** $z = x^2 \sin y$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$

• **7(tr. 68).** $z = x\tan 2y + y\tan 3x$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan 2y + 3y\sec^2 3x$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = x.2\sec^2 2y + \tan 3x$

• **9(tr. 68).** $z = \cos(3x - y)$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin(3x - y)$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(3x - y)$

• **11(tr. 68).** $z = e^x \sin y$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$

• **13(tr. 68).** $z = e^y \ln x^2$

+) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y . \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} e^y$

+) $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \ln x^2$