# BÀI SỐ 8. TÍNH TRỰC GIAO

## 1. Một số định nghĩa

- Véc tơ $u$ đgl trực giao với $v$ nếu $u.v = 0$.
- Cho U, V là các không gian con của $R^n$. Ta nói U trực giao với V, ký hiệu $U \perp V$ nếu mọi véc tơ trong U đều trực giao với mọi véc tơ trong V.

VD: $N(A) \perp C\left(A^T\right)$ và $N\left(A^T\right) \perp C(A)$.

- Gọi $h_1, h_2, ..., h_m$ là các hàng của $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$.
- Lấy $x \in N(A) \Rightarrow Ax = \mathrm{O}$ nên:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 x \\ h_2 x \\ ... \\ h_m x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow h_i.x = 0, \forall i = 1, 2, ..., m.$$

- $C\left(A^T\right) = \left\{ y_1 h_1 + y_2 h_2 + ... + y_m h_m \,\middle|\, y_1, y_2, ..., y_m \in R \right\}$
- Lấy $y \in C\left(A^T\right) \Rightarrow y = y_1 h_1 + y_2 h_2 + ... + y_m h_m$

- $y.x = \left( y_1 h_1 + y_2 h_2 + \ldots + y_m h_m \right).x$

$$= y_1 h_1.x + y_2 h_2.x + \ldots + y_m h_m.x = 0.$$

- $\Rightarrow N\left(A\right) \perp C\left(A^T\right).$

## 2. Phần bù trực giao

**Định nghĩa:** Cho W là một không gian con của $R^n$. Tập các véc tơ trong $R^n$ mà trực giao với mọi véc tơ trong W đgl phần bù trực giao của W, ký hiệu $\mathrm{w}^{\perp}$

$$\mathrm{w}^{\perp}=\left\{u\in R^n \,\middle|\, u.v=0,\forall v\in \mathrm{w}\right\}$$

VD. Cho $\mathrm{w}=\left\{(0,0,0)\right\}$. Tìm $\mathrm{w}^{\perp}$.

**Định lý:** Nếu $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ thì $N\left(A\right)=C\left(A^{T}\right)^{\perp}$ và $N\left(A^{T}\right)=C\left(A\right)^{\perp}$.

VD. Tìm phần bù trực giao của $C\left(A^{T}\right)$ biết:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

VD. Cho $v_1=(1;2;3;4),\ v_2=(2;5;3;1)$.

Đặt $\mathrm{w}=span\left(v_1,v_2\right)$. Tìm $\mathrm{w}^{\perp}$

VD. Cho $S=\left\{\left(x_1;x_2;x_3\right)\in R^3 \middle| x_1+x_2+x_3=0\right\}$. Tìm $S^{\perp}$

$$VD: C(A^{\mathrm{T}})^{\perp} = N(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H2 \to H2 - 2H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow$ bien tru: $x_1, x_2$; bien tu do: $x_3, x_4$

Nghiem d/b: $s_1 = (-9,3,1,0), s_2 = (-18,7,0,1)$

$\Rightarrow$ Co so cua $N(A): \{s_1, s_2\}$

$VD: W = C(A^{\mathrm{T}})$ voi: $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow W^{\perp} = N(A)...$

$VD: Xet: A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = N(A) \Rightarrow S^{\perp} = C(A^{\mathrm{T}})...$

# II. Phương pháp trực giao hóa Gram – Schmidt

## 1. Định nghĩa

- Tập $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của $R^n$ đgl tập trực giao nếu $v_i.v_j = 0,\ \forall i \neq j.$
- Tập $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ của $R^n$ đgl tập trực chuẩn nếu:

  \+ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ là tập trực giao

  \+ $|v_i| = 1, \forall i = 1, 2, .., k.$
- Một cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ của $R^n$ đgl cơ sở trực giao nếu nó là một tập trực giao.
- Một cơ sở $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ của $R^n$ đgl cơ sở trực chuẩn nếu nó là một tập trực chuẩn.

## 2. Phương pháp trực giao hóa Gram – Schmidt

### a. Bài toán

Xây dựng một tập trực giao $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ từ tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ cho trước.

### b. Nội dung phương pháp

- Đặt $u_1 = v_1$
- Đặt $u_2 = au_1 + v_2$. Tìm a để $u_2.u_1 = 0$.
- Đặt $u_3 = bu_2 + cu_1 + v_3$. Tìm b, c để $u_3.u_2 = u_3.u_1 = 0$

........................................................................

- Đặt $u_k = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_{k-1}u_{k-1} + v_k$.

  Tìm $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ để $u_k.u_i = 0, \ \forall i = 1, 2, ..., k-1$.

VD. Xây dựng tập trực giao $\{u_1, u_2, u_3\}$ từ tập

$$\{v_1 = (1,-1,0,0);\ \mathrm{v}_2 = (0,1,-1,0);\ \mathrm{v}_3 = (0,0,1,-1)\}$$

$$Dat: u_1 = v_1 = (1,-1,0,0)$$

$$Dat: u_2 = au_1 + v_2, do: u_2 \perp u_1 \Leftrightarrow u_1u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1(au_1 + v_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow au_1^2 = -u_1v_2 \Leftrightarrow a = \frac{-u_1v_2}{u_1^2} = \frac{-(1,-1,0,0)(0,1,-1,0)}{(1,-1,0,0)(1,-1,0,0)} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}u_1 + v_2 = \ldots = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right)$$

$$Dat: u_3 = bu_1 + cu_2 + v_3, co: \begin{cases} u_3 \perp u_1 \\ u_3 \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3u_1 = 0 \\ u_3u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(bu_1 + cu_2 + v_3) = 0 \\ u_2(bu_1 + cu_2 + v_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bu_1^2 = -u_1v_3 \\ cu_2^2 = -u_2v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -u_1v_3 / u_1^2 \\ c = -u_2v_3 / u_2^2 \end{cases} \ldots$$

# III. Ma trận trực giao

1. **Đ/n**: Q là **ma trận trực giao** nếu $Q^TQ = QQ^T = I$ hay $Q^T = Q^{-1}$.
2. **Tính chất**: Q là ma trận trực giao, cấp n, khi đó:

a. $|Q| = \pm 1$

b. Cho u, v là các vector trong $R^n$: $(Qu).(Qv) = u.v$

c. Gọi $h_1, \ldots, h_n, c_1, \ldots, c_n$ là các vector hàng, vector cột của Q (cấp n). Khi đó có:

- $c_i.c_k = 1 = h_i.h_k$ nếu $i = k$
- $c_i.c_k = 0 = h_i.h_k$ nếu $i \neq k$, tức là $c_i$ trực giao với $c_k$, $h_i$ trực giao với $h_k$ nếu $i \neq k$

# Câu hỏi:

Cho trước một ma trận vuông A có cấp n.

1. Nêu thuật toán kiểm tra: A có trực giao hay không?
2. Xác định độ phức tạp của thuật toán trên?