GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 7

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

Chương II. TÍCH PHÂN BỘI

§ 20.1. Tính thể tích bằng tích phân lặp

• Tính diện tích bằng tích phân lặp
• Dạng toán cơ bản
• Tính thể tích bằng tích phân lặp

ĐẶT VẤN ĐỀ

• Trong giải tích một biến số chúng ta đã nghiên cứu tích phân xác định $\int_a^b f(x)\,dx$.

• Liệu có thể mở rộng khái niệm trên cho hàm hai biến số trên miền phẳng nào đó của mặt phẳng?

1. Tính diện tích bằng tích phân lặp

a) R: $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$

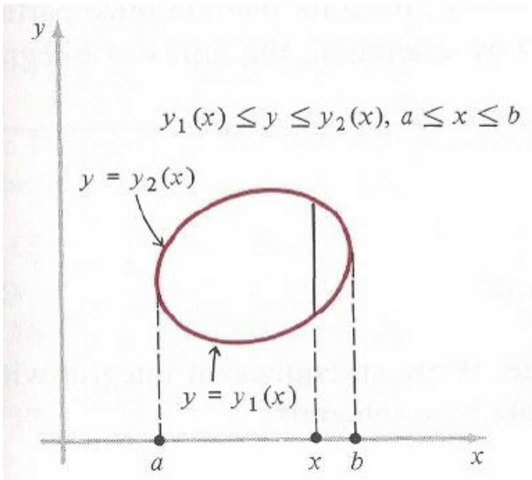
Các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$

• Đã biết công thức tính diện tích trên miền phẳng R:

$$S = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right] dx$$

• Có thể viết công thức nói trên dưới dạng khác (được gọi là tích phân lặp)

$$S = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right] dx \quad \text{Hay} \quad S = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,dx$$



Hình 20.2 (trái)

ở đó thứ tự lấy tích phân được xác định bởi thứ tự các vi phân

Ví dụ 1. Sử dụng tích phân lặp tính diện tích của Ellip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $a > 0$, $b > 0$.

• E: $-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $-a \le x \le a$.

• $$S = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\,dx = 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

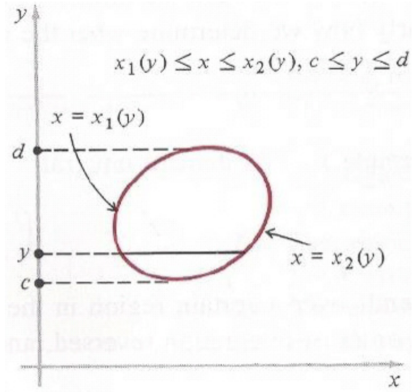
• Đặt $x = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, có $S = 4b\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,.a\cos t\,dt$

$$=4ba\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 2ab\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left[\frac{\pi}{2}+0\right] = \pi ab.$$

b) Tương tự ta cũng dùng tích phân lặp để tính diện tích miền R sau

$$R:\ x_1(y)\le x\le x_2(y),\quad c\le y\le d,$$

các hàm $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$



Hình 20.2 (phải)

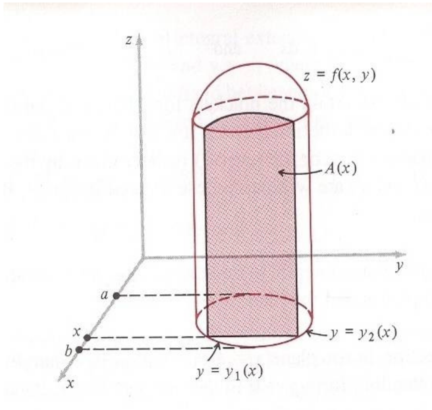
- $S=\int_c^d [x_2(y)-x_1(y)]\,dy$
- $S=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\right]dy=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,dy$

ở đó thứ tự lấy tích phân được xác định bởi thứ tự các vi phân.

2. Tính thể tích bằng tích phân lặp

- Ta đã biết công thức tính thể tích vật thể trong không gian ba chiều: $V=\int_a^b S(x)dx$

ở đó $S(x)$ là diện tích tiết diện thẳng tạo bởi vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x.



Hình 20.1

- Khi vật thể trong không gian ba chiều là vật thể hình trụ: nó giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$, mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, mặt cong $z = f(x, y)$ sao cho mọi đường thẳng song song với trục Oz đều cắt nó tại không quá một điểm (tức $z = f(x, y)$ xác định một hàm số)
- Tiết diện: $0\le z\le f(x, y)$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, $a\le x\le b$.
- Theo mục 1 ta có $S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$
- Do đó $V=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$
- Tương tự khi tiết diện có dạng

$$0\le z\le f(x, y),\ x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d$$

- Ta có công thức tính thể tích vật thể đã cho như sau

$$V=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ví dụ 2. Tính thể tích vật thể sau: $0 \le z \le xy^2$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 3$.

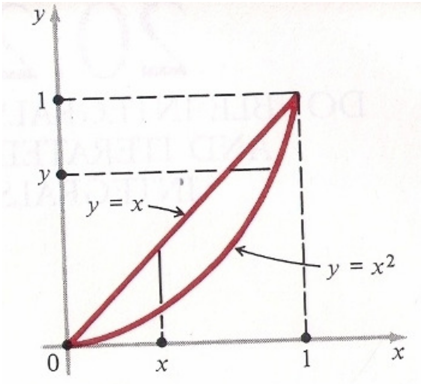
- $V = \int_0^1 \int_{-2}^3 xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_{-2}^3 xy^2\,dy\right] dx$
- $= \int_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^3\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x(27-(-8))\,dx = \frac{35}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{35}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{35}{6}$.

Ví dụ 3. Tính tích phân lặp sau: $\int_0^1 \int_{x^2}^x 2y\,dy\,dx$

- $I = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x 2y\,dy\right] dx = \int_0^1 y^2\Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Nhận xét. Ta có thể tính bằng cách khác như sau

- $I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} 2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} 2y\,dx\right] dy$
- $= \int_0^1 (2xy)\Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(2y^{\frac{3}{2}} - 2y^2\right) dy$
- $= 2\left[\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^1 = 2\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{15}$



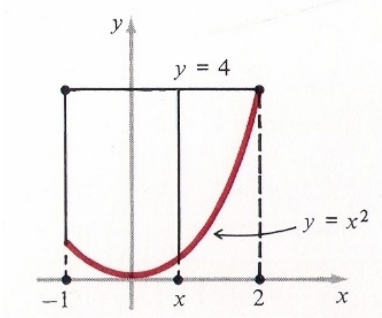
Hình 20.5

Ví dụ 4. Xác định miền lấy tích phân của tích phân lặp và đổi thứ tự lấy tích phân (cho hàm $f(x, y)$ có đủ các điều kiện cần thiết) $I = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\,dy\,dx$

- Miền lấy tích phân: R: $x^2 \le y \le 4$, $-1 \le x \le 2$
- Ta có $R = R_1 \cup R_2$, ở đó

R_1: $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$, $0 \le y \le 1$; R_2: $-1 \le x \le \sqrt{y}$, $1 \le y \le 4$

- $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy + \int_1^4 \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$



Hình 20.4

Chú ý

- Cần nắm vững miền lấy tích phân để chọn thứ tự thích hợp cho việc tính tích phân lặp
- Để tính tích phân lặp, ngoài việc chọn thứ tự để tính, còn cần thiết nắm vững cách tính tích phân xác định
- Khi tính thể tích cần chú ý cách sử dụng các công thức: Tích phân xác định và tích phân kép.

3. Dạng toán cơ bản
1. Tính tích phân lặp và vẽ miền lấy tích phân

• **5(tr. 149).** $\int_0^4\int_0^y 3\sqrt{y^2+9}$

+) $0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 4$

+) $=\int_0^4\left\{\int_0^y 3\sqrt{y^2+9}\,dx\right\}dy$

+) $=\int_0^4 3.y\sqrt{y^2+9}\,dy=\int_0^4\frac{3}{2}\sqrt{y^2+9}\,d\left(y^2+9\right)$

+) $=\left(y^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=5^3-3^3=98$

• **3(tr. 119).** $\int_0^4\int_{x^2}^x (2x+2y)\,dydx$

+) $x^2 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1$

+) $=\int_0^1\left\{\int_{x^2}^x (2x+2y)\,dy\right\}dx$

+) $\int_0^1\left(2xy+y^2\right)\Big|_{x^2}^x dx$

+) $=\int_0^1\left(2x^2-2x^4+x^2-x^4\right)dx=\int_0^1\left(3x^2-3x^4\right)dx$

+) $=\left(x^3-\frac{3}{5}x^5\right)\Big|_0^1=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

• **9(tr. 119).** $\int_1^3\int_0^{\ln y} ye^x dx\,dy$

+) $0 < x < \ln y,\ 1 \le y \le 3$

+) $=\int_1^3 y\left\{\int_0^{\ln y} e^x dx\right\}dy$

+) $=\int_1^3 y.e^x\Big|_0^{\ln y} dy$

+) $=\int_1^3 y(y-1)\,dy=\int_1^3\left(y^2-y\right)dy$

+) $=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^3=9-\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

+) $=\frac{13}{3}$

• **13(tr. 120).** $\int_1^2\int_x^{2x}\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$

+) $x \le y \le 2x,\ 1 \le x \le 2$

+) $=\int_1^2\left\{\int_x^{2x}\frac{dy}{(x+y)^2}\right\}dx$

$$+)\ = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y} \right)\Bigg|_x^{2x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{6x} = \frac{1}{6}\ln x \Big|_1^2 = \frac{1}{6}\ln 2$$

2. Đổi thứ tự tính tích phân và tính các tích phân sau

• **19(tr. 120).** $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 2x^3 dx\, dy$

$$+)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 x^3\, dx \right\} dy$$

$$+)\ = \int_0^1 2.\frac{x^4}{4}\Bigg|_{\sqrt{y}}^1 dy$$

$$+)\ = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y^2)\, dy$$

$$+)\ = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

+) Đổi thứ tự: $\sqrt{y} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

Vẽ hình có $0 \le y \le x^2,\ 0 \le y \le 1$.

$$+)\ I = \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x^3 dy\, dx$$

$$+)\ = \int_0^1 2x^3 \left\{ \int_0^{x^2} dy \right\} dx$$

$$+)\ = \int_0^1 2x^3.x^2\, dx = 2\int_0^1 x^5\, dx$$

$$+)\ = 2.\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

• **21(tr. 120).** $\int_0^2 \int_0^1 (5 - 2x - y)\, dy\, dx$

$$+)\ = \int_0^2 \left(5y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 dx$$

$$+)\ = \int_0^2 \left(5 - 2x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^2 (4{,}5 - 2x)\, dx$$

$$+)\ = \left(4{,}5x - x^2 \right)\Big|_0^2$$

+) = 9 – 4 = 5

+) Đổi thứ tự

$$I = \int_0^1 \int_0^2 (5 - 2x - y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(5x - x^2 - xy \right)\Big|_0^2 dy$$

$$= \int_0^1 (10 - 4 - 2y)\, dy = \int_0^1 (6 - 2y)\, dy$$

$$= \left(6y - y^2 \right)\Big|_0^1 = 6 - 1 = 5$$

• **23(tr. 120).** $\int_{-5}^{4} \int_{2-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{3}(y+2)} dx\, dy$

+) $\displaystyle\int_{-5}^{4}\left[\frac{1}{3}(y+2)-\left(2-\sqrt{4-y}\right)\right]dy$

+) $\displaystyle = \int_{-5}^{4}\left(\frac{1}{3}y-\frac{4}{3}+\sqrt{4-y}\right)dy$

+) $\displaystyle = \left.\left(\frac{1}{6}y^2-\frac{4}{3}y-\frac{(4-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_{-5}^{4}$

+) $\displaystyle = -\frac{9}{6}-\frac{4}{3}.9-\frac{2}{3}(0-27)=\frac{9}{2}$

+) Đổi thứ tự:

$\displaystyle\frac{1}{3}(y+2)\le x\le 2-\sqrt{4-y}\,,\ -5\le y\le 4$

$\displaystyle x=\frac{1}{3}(y+2)\ \Rightarrow y=3x-2$

$x=2-\sqrt{4-y}\ \Rightarrow y=4x-x^2$

$3x-2=4x-x^2 \Leftrightarrow x=-1,\ x=2$

+) $\displaystyle I=\int_{-1}^{2}\int_{3x-2}^{4x-x^2} dy\,dx$

$\displaystyle =\int_{-1}^{2}\left(4x-x^2-3x+2\right)dx$

$\displaystyle =\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\right|_{-1}^{2}$

$\displaystyle =\frac{1}{2}.3-\frac{1}{3}.9+2.3=\frac{9}{2}$

3. Sử dụng tích phân lặp tính thể tích vật thể

• **25(tr. 121).** Miền nằm trong góc phần tám thứ nhất bị chắn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

+) $\displaystyle V=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,dx$

+) $\displaystyle =\int_0^a\left[c\left(1-\frac{x}{a}\right)y-\frac{c}{b}\frac{y^2}{2}\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx$

+) $\displaystyle =\int_0^a\left[\left(cb\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{c}{2b}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right)\right]dx$

$\displaystyle =\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{cb}{2}dx$

$\displaystyle =\int_0^a\frac{-abc}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 d\left(1-\frac{x}{a}\right)$

+) $\displaystyle =-\frac{abc}{2}.\frac{1}{3}\left.\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right|_0^a=\frac{abc}{6}$

• **27(tr. 121).** Miền trong góc phần tám thứ nhất bị chặn bởi các mặt $y=x$ và $z=4-y^2$

+) $z=0 \Leftrightarrow y=\pm 2$, loại $y=-2$

$\Rightarrow 0<x\le 2,\ x\le y\le 2$

+) $\displaystyle V=\int_0^2\int_x^2\left(4-y^2\right)dy\,dx$

+) $\displaystyle =\int_0^2\left.\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\right|_x^2 dx$

+) $\displaystyle =\int_0^2\left[4(2-x)-\frac{1}{3}\left(8-x^3\right)\right]dx$

+) $\displaystyle =\left[8x-2x^2-\frac{8}{3}x+\frac{x^4}{12}\right]_0^2$

+) $\displaystyle =16-8-\frac{16}{3}+\frac{4}{3}=4$

§ 20.2. TÍCH PHÂN BỘI HAI VÀ TÍCH PHÂN LẶP

- Tích phân bội hai
- Cách tính
- Dạng toán cơ bản

1. Định nghĩa

- Cho hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền R bị chặn (giới nội), đóng trong mặt phẳng xOy
- Xét lưới các đường thẳng song song với các trục toạ độ, những đường thẳng này chia mặt phẳng thành các hình chữ nhật nhỏ, các hình chữ nhật nằm trọn trong R có diện tích là ΔA_k, $k = \overline{1, n}$
- Chọn điểm bất kì (x_k, y_k) trong hình chữ nhật thứ k và lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$
- Gọi $d = \max\limits_{k=\overline{1, n}}$ {đường chéo của hình chứ nhật thứ k}

Nếu tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ tiến đến một giới hạn (hữu hạn) duy nhất khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ không phụ thuộc vào cách chọn lưới các đường thẳng và cách chọn $(x_k ; y_k)$ thì hàm $f(x, y)$ khả tích trên R và ta bảo giới hạn đó là tích phân bội của hàm $f(x, y)$ trên R và viết $\iint\limits_R f(x, y)\,dA = \lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$

Ví dụ 1a. Tính $\iint\limits_R dA$, ở đó R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

- Xét lưới các đường thẳng song song với các trục toạ độ chia miền R thành các hình chữ nhật có diện tích là ΔA_k, $k = \overline{1, n}$
- Lấy điểm tuỳ ý $(x_k ; y_k) \in \Delta A_k$, có $f(x, y) = 1$.
- Lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = 2$
- Ta có $\lim \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = 2$, không phụ thuộc vào phép chia miền R và cách chọn điểm $(x_k ; y_k)$, do đó ta có $\iint\limits_R dA = 2$

Chú ý

- Nếu $f(x, y)$ liên tục trên R giới nội thì tồn tại $\iint\limits_R f(x, y)\,dA$
- Do $\Delta A = \Delta x.\Delta y$ nên thường sử dụng cách viết $\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy$

• Nếu $f(x, y) > 0$ trên R thì thể tích (hình học) vật thể hình trụ với đáy dưới là R, còn đáy trên là $z = f(x, y)$ là $V = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy$

• Khi $f(x, y) = 1$ thì diện tích của miền phẳng R là $S = \iint_R dx\,dy$

• Nếu $f(x, y)$ có dấu thay đổi trên R thì công thức thể tích đại số của vật thể hình trụ này là $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$

2. Tính chất: Có các tính chất tương tự như tích phân xác định

a) Tuyến tính: $\iint_R [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,dx\,dy = \alpha \iint_R f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint_R f(x, y)\,dx\,dy$

b) Cộng tính: Nếu $R = R_1 \cup R_2$, R_1 và R_2 không có điểm trong chung thì có

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x, y)\,dx\,dy$$

c) Bảo toàn thứ tự: Nếu $f(x, y) \le g(x, y)$, $\forall\, (x\,;\,y) \in R$ thì có

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy \le \iint_R g(x, y)\,dx\,dy$$

Nói riêng: Nếu m và M tương ứng là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm $f(x, y)$ trong miền R thì có $mS \le \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \le MS$, ở đó S là diện tích miền R

d) Định lý giá trị trung bình. Hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền R liên thông thì có ít nhất một điểm $(x_0\,;\,y_0) \in R$ sao cho có:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0)\,S$$

ở đó S là diện tích miền R

3. Cách tính

a) Nếu R là miền thẳng đứng đơn giản:

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$

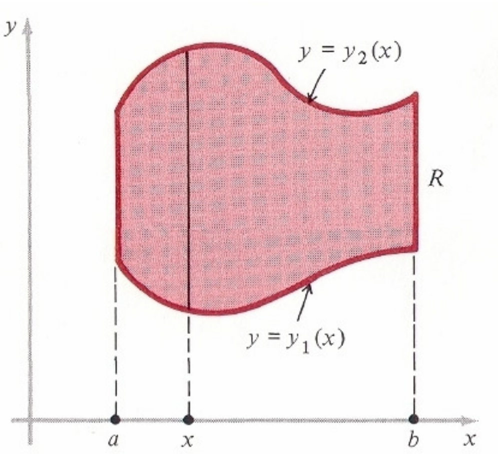
Hàm $f(x, y)$ liên tục trên R, các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$. Khi đó ta có

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

Nói riêng khi:

R: $\quad c \le y \le d$, $a \le x \le b$ và $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$

thì ta có $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx . \int_c^d f_2(y)\,dy$.



Hình 20.8

Ví dụ 1b. Tính $\iint_R (1+x)\sin y\, dA$, ở đó R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^1 (1+x)\,dx.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1.(-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}.$$

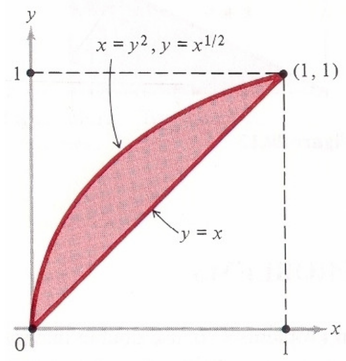
Ví dụ 2. Tính $\iint_R 2xy\,dx\,dy$, ở đó R giới hạn bởi parabol $x = y^2$ và đường thẳng $y = x$.

- Tìm giao điểm: $\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ hoặc } y = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

- $\iint_R 2xy\,dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\,dx$

- $= \int_0^1 xy^2\Big|_x^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x\left(x - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx$

- $= \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$



Hình 20.10

Ví dụ 3. Tính $\iint_R (1+2x)\,dA$, ở đó R giới hạn bởi parabol $x = y^2$ và đường thẳng $x - y = 2$

- Tìm giao điểm: $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$

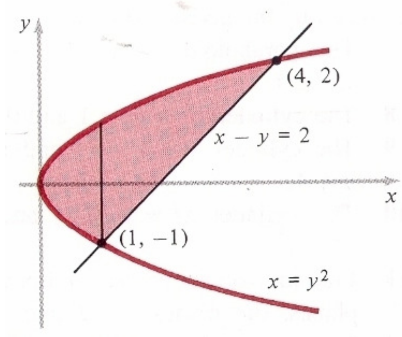
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \text{ hoặc } y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = -1 \\ x = 4,\ y = 2 \end{array}\right.$

- $\iint_R (1+2x)\,dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+2x)\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} (1+2x)\,dy\,dx$

- $= \int_0^1 (y+2xy)\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^4 (y+2xy)\Big|_{x-2}^{\sqrt{x}}\,dx$

$= \int_0^1 \left(2\sqrt{x} + 4x^{3/2}\right)dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - x + 2 + 2x^{3/2} - 2x(x-2)\right]dx$

- $= \left(2.\dfrac{2}{3}x^{3/2} + 4.\dfrac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^1 + \int_1^4 \left(2x^{3/2} + \sqrt{x} - 2x^2 + 3x + 2\right)dx$



Hình 20.11

$$=\frac{4}{3}+\frac{8}{5}+\left(2.\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_1^4$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{8}{5}+\left(\frac{4.32}{5}+\frac{16}{3}-\frac{128}{3}+24+8\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2\right)$$

$$=\frac{136}{5}+30-\frac{108}{3}-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}=\frac{132}{5}+30-36-\frac{3}{2}=\frac{132}{5}-\frac{3}{2}-6$$

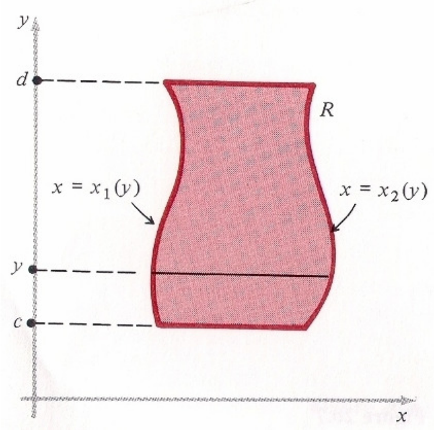
$$=\frac{264-15-60}{10}=\frac{189}{10}$$

b) Nếu R là miền nằm ngang đơn giản:

$$x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d$$

Hàm $f(x, y)$ liên tục trên R, các hàm $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$. Khi đó ta có

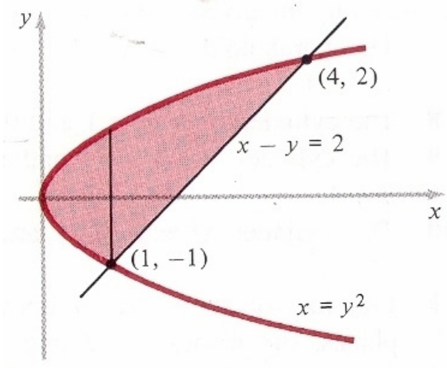
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



Hình 20.9

Ví dụ 4. Ta tính tích phân trong ví dụ 3 theo miền nằm ngang đơn giản

$$y^2\le x\le y+2,\ -1\le y\le 2$$



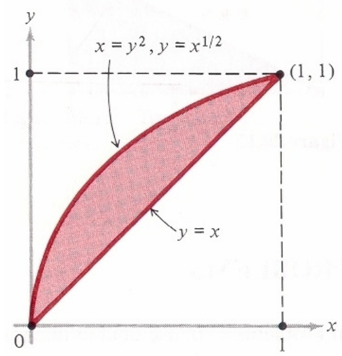
Hình 20.11

- $$\iint\limits_R (1+2x)\,dA=\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2}(1+2x)\,dx\,dy$$
- $$=\int_{-1}^{2}\left(x+x^2\right)\Big|_{y^2}^{y+2}dy=\int_{-1}^{2}\left[y+2-y^2+(y+2)^2-y^4\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(6+5y-y^4\right)dy=\left(6y+\frac{5}{2}y^2-\frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

- $$=6.3+\frac{5}{2}.3-\frac{1}{5}.33=18+\frac{15}{2}-\frac{33}{5}=\frac{180+75-66}{10}=\frac{189}{10}$$

Ví dụ 5. Ta tính tích phân trong ví dụ 2 theo miền nằm ngang đơn giản

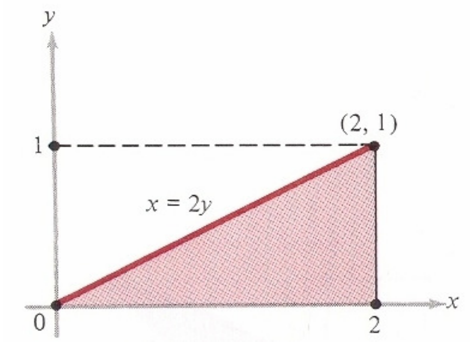


Hình 20.10

- $$\iint\limits_R 2xy\,dA=\int_0^1\int_{y^2}^{y}2xy\,dx\,dy$$
- $$=\int_0^1 yx^2\Big|_{y^2}^{y}dy=\int_0^1 y\left(y^2-y^4\right)dy=\int_0^1\left(y^3-y^5\right)dy$$

• $= \left.\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Ví dụ 6. Tính $\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dx\, dy$



Hình 20.12

• Không thể tính $\int_{2y}^2 4e^{x^2} dx$

• Cần thay đổi thứ tự để tính được tích phân

• Vẽ miền R: $2y \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

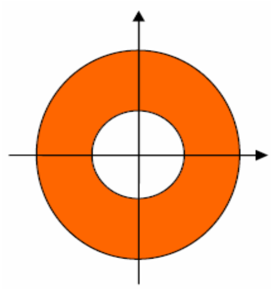
• Từ hình ta có biểu diễn khác của R: $0 \le y \le \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 2$

• $\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} 4e^{x^2} dy\, dx$

• $= \int_0^2 4e^{x^2} \left. y\right|_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 4e^{x^2} \frac{x}{2} dx = \int_0^2 2e^{x^2} x\, dx = \int_0^2 e^{x^2} d\left(x^2\right) = \left. e^{x^2}\right|_0^2 = e^4 - 1.$

Nhận xét. Nếu R không có cả dạng đứng lẫn nằm ngang thì tính như thế nào? Ví dụ tính tích phân sau

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy,\ \text{ở đó } R:\quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$$



4. Dạng toán cơ bản

1. Tính diện tích miền phẳng

• **1(tr. 127).** $x = y^2$ và $y = x - 2$

+) $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$

+) $\begin{cases} x = y^2 \\ y^2 = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \text{ hoặc } y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{(1\ ; -1) \text{ hoặc } (4\ ; 2)\}$

+) $S = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx\, dy$

+) $= \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy$

+) $= \left.\left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\right|_{-1}^2$

+) $= \frac{1}{2}.3 + 2.3 - \frac{1}{3}.9 = \frac{9}{2}$

• **3(tr. 127).** Các trục toạ độ và đường thẳng $2x + y = 2a$, $a > 0$

+) Giao với các trục toạ độ: $(a\ ; 0)$, $(0\ ; 2a)$

$$+)\ S=\int_0^a\int_0^{2a-2x} dy\,dx$$

$$+)\ =\int_0^a (2a-2x)\,dx$$

$$+)\ =\left(2ax-x^2\right)\Big|_0^a$$

$$+)\ = 2a^2 - a^2 = a^2$$

• **5(tr. 127).** $y = 0$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = a$, $a > 0$

$$+)\ S=\int_0^a\int_0^{e^{-x}} dy\,dx$$

$$+)\ =\int_0^a e^{-x}\,dx$$

$$+)\ =-e^{-x}\Big|_0^a = 1-e^{-a}$$

2. Tính thể tích bị chặn bởi $z = 0$ và mặt sau:

• $z = x^2 + y^2$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$

$$+)\ V=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$$

$$+)\ =\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} dy$$

$$+)\ =\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy$$

$$+)\ =\left(\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+)\ =\frac{2}{3}.2+\frac{2}{3}.2=\frac{8}{3}$$

• **9(tr. 127).** Trụ $y = 4 - x^2$ và các mặt phẳng $y = 3x$, $z = x + 4$

$$+)\ \begin{cases} y=4-x^2 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ y=3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ hoặc } x=-4 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1;\ 3) \\ (-4;\ -12) \end{array}\right.$$

$$+)\ V=\int_{-4}^{1}\int_{3x}^{4-x^2}(x+4)\,dy\,dx$$

$$+)\ =\int_{-4}^{1}(x+4)\left(4-x^2-3x\right)dx$$

$$+)\ =\int_{-4}^{1}\left(16-4x^2-12x+4x-x^3-3x^2\right)dx$$

$$=\int_{-4}^{1}\left(16-8x-7x^2-x^3\right)dx$$

$$+)\ =\left(16x-4x^2-\frac{7}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{1}$$

$$=16.5-4.(-15)-\frac{7}{3}(65)+\frac{255}{4}=\frac{625}{12}$$

• **11(tr. 127).** Tính thể tích giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ, và các mặt phẳng

$x = 2$, $y = 5$, $2z = xy$

$$+)\ V=\int_0^2\int_0^5\frac{xy}{2}\,dy\,dx$$

$$+)\ =\int_0^2 \frac{x}{2}.\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^5 dx$$

+) $= \dfrac{25}{8} x^2 \Big|_0^2 = \dfrac{25}{2}$

• **13(tr. 127).** Tính thể tích giới hạn bởi mặt phẳng $z = 2y$ và phía trên miền trong góc phần tư thứ nhất bị chặn bởi $y = 0$, $x = 2$, $x^2 + y^2 = 16$

+) $V = \displaystyle\int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} 2y\, dy\, dx$

+) $= \displaystyle\int_2^4 y^2\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_2^4 (16 - x^2)\, dx = 16x - \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{40}{3}$

• **15(tr. 127).** Tính thể tích giới hạn bởi trụ $x = z^2$ và phía trên miền nằm trong mặt phẳng xy bị chặn bởi $x = 0$ và $y^2 + 9x = 9$

+) Giao $x = 0$ và $y^2 + 9x = 9$ là $y = \pm 3$.

+) Có $0 \le x \le 1 - \dfrac{y^2}{9}$, $-3 \le y \le 3$, $z = \sqrt{x}$

+) $V = \displaystyle\int_{-3}^{3} \int_0^{1-\frac{y^2}{9}} \sqrt{x}\, dx\, dy$

+) $= \displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-\frac{y^2}{9}} dy$

+) $= \dfrac{2}{3} \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(1 - \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 \left(1 - \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}} dy = \ldots$ (Đặt $y = 3\sin t$)

• **17(tr. 127).** Tính $\displaystyle\iint_R x\, dA$ nếu R là phần trong góc phần tư thứ nhất nằm giữa 2 đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $a < b$

Tính theo hai cách ứng với các thứ tự khác nhau

+) Cách 1. $R = R_1 \cup R_2$; $R_1 : \sqrt{a - x^2} \le y \le \sqrt{b - x^2}$, $0 \le x \le a$,

R_2: $0 \le y \le \sqrt{b^2 - x^2}$, $a \le x \le b$

$S = \displaystyle\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} x\, dy\, dx + \int_0^a \int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} x\, dy\, dx$

$$= \int_0^a x\left(\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx + \int_a^b x\left(\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{b - x^2}\,d\left(b - x^2\right) + \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,d\left(a^2 - x^2\right) - \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{b^2 - x^2}\,d\left(b^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{a^2 - x^2}\,d\left(a^2 - x^2\right)$$

+) Cách 2. $R = R_3 \cup R_4$; $R_3 : \sqrt{a^2 - y^2} \le x \le \sqrt{b^2 - y^2}$, $0 \le y \le a$

$R_4 : 0 \le x \le \sqrt{b^2 - a^2}$, $0 \le y \le b$

$$S = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{b^2 - x^2}} x\,dx\,dy + \int_a^b \int_0^{\sqrt{b^2 - y^2}} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a \left(b^2 - y^2 - a^2 + y^2\right)dy + \frac{1}{2}\int_a^b \left(b^2 - y^2\right)dy = \ldots$$

Chú ý. Tuần sau lí thuyết học các mục 20.9 và 20.4.