Bài số 2

GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH. TÍNH LIÊN TỤC

Vấn đề: Khi giới hạn có dạng vô định thì sẽ tìm được giá trị của giới hạn theo cách nào?

Giải quyết: Ta sẽ tìm cách biến đổi để khử dạng vô định.

I. Một số ví dụ về khử dạng vô định

Ví dụ 1 : Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ta có: $\dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\dfrac{(x-1)(1+x+...+x^{n-1})}{(x-1)(1+x+...+x^{m-1})}=\dfrac{1+x+...+x^{n-1}}{1+x+...+x^{m-1}}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+...+x^{n-1}}{1+x+...+x^{m-1}}=\dfrac{n}{m}$.

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ta có: $\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\dfrac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\to\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\dfrac{-1}{2}$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}$ (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1+1-\sqrt[5]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x-1}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}-\frac{1+x-1}{x(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\sqrt[5]{(1+x)^3}+\sqrt[5]{(1+x)^2}+\sqrt[5]{1+x}+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

(áp dụng hằng đẳng thức $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-1}+...+a+1)$).

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ (Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1$ (vì $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$ và $\dfrac{1}{x}\to 0$ khi $x\to+\infty$)

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ (Dạng $\infty-\infty$)

Ta có: $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}$

$$\to\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$ (Dạng $\infty-\infty$)

Đặt $x=y^6$. Khi đó:

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{1-y^3}-\frac{2}{1-y^2}=\frac{3(1+y)-2(1+y+y^2)}{(1-y)(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}$$

$$\to\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}\right)=\frac{1}{2}$$

Giới hạn điển hình: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Ví dụ 7: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=1.1=1$

Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 9: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin mx}{mx}\cdot\dfrac{nx}{\sin nx}\cdot\dfrac{m}{n}\right]=1.1.\dfrac{m}{n}=\dfrac{m}{n}$

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\cos 2x+1-\cos 2x}{1-\cos x}$

(áp dụng hằng đẳng thức 1- ab = (1-a)b + 1- b)

$$= \lim_{x\to 0}\left[\cos 2x + \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot 4\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right] = 1 + 4\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Giới hạn điển hình: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

Ví dụ 11: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$ (Dạng vô định 1^∞)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right\}^{\frac{-2x^2}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Ví dụ 12: $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (Dạng vô định 1^∞)

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$ Vậy $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$.

II. Vô cùng bé, vô cùng lớn(tự đọc)

1. Định nghĩa: + Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé (VCB) khi $x\to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

+ Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn (VCL) khi $x\to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Nhận xét:

i) Nếu $f(x)$ là một VCB khi $x\to x_0$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x\to x_0$.

ii) x_0 ở đây có thể là hữu hạn hoặc vô cùng.

Ví dụ : $y=\sin x$ là 1 VCB khi $x\to 0$ $y = 1-\cos x$ là 1 VCB khi $x\to 0$

2. So sánh các vô cùng bé.

Giả sử $f(x); g(x)$ đều là VCB khi $x\to x_0$.

a) Nếu $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$ thì $f(x)$ là 1 VCB có bậc cao hơn $g(x)$.

b) Nếu $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCB tương đương, khi đó kí hiệu: $f(x)\sim g(x)$.

Ví dụ : Ta đã biết $\sin x; 1-\cos x$ là VCB khi $x\to 0$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}=0$

Vậy $1-\cos x$ là VCB có bậc cao hơn $\sin x$ khi $x\to 0$.

Ví dụ : $\sin x \sim x$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$e^x-1\sim x$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\ln(1+x)\sim x$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

3. Định lí : *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCB trong cùng một quá trình ($x\to x_0$) và trong quá trình ấy ta có*

$\begin{cases} f(x)\sim f^*(x)\\ g(x)\sim g^*(x)\end{cases}$. *Khi đó:* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^*(x)}{g^*(x)}$.

Ví dụ : Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+\sin 3x)}$.

Ta có: $e^{2x}-1\sim 2x$ khi $x\to 0$; $\ln(1+\sin 3x)\sim \sin 3x\sim 3x$ khi $x\to 0$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+\sin 3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

Ta có: $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ khi $x\to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$; $\sin x\sim x$ khi $x\to 0$.

Từ đó: $\to \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x\right)=0$

Nhận xét:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ thì có thể viết: $f(x)=L+\alpha(x)$, với $\alpha(x)$ là 1 VCB khi $x\to x_0$.

<u>Các giới hạn cơ bản</u>

Ta có một số giới hạn cơ bản sau:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$
$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$
$$3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

Từ (1) $\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Từ (2) $\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0} n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a$.

III. Tính liên tục

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1: Hàm số $y=f(x)$ ***liên tuc*** tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

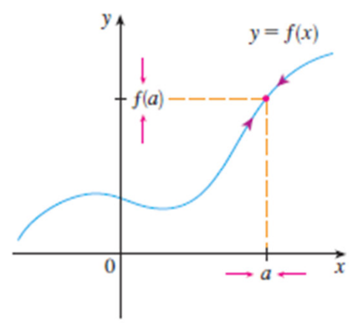
Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền D.

Chú ý: Từ **Định nghĩa 1** ta thấy: Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 đòi hỏi thỏa mãn 3 điều kiện sau:

+ x_0 thuộc TXĐ của hàm số

+ Tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.



Định nghĩa 2: Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tuc trái*** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tuc phải*** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi nó vừa liên tục trái vừa liên tục phải tại x_0.

Ví du 1: + Hàm số $y=3x^3-5x+1$ liên tục tại mọi điểm x_0 thuộc tập xác định.

+ Xét hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ a\ \ , & x=2\end{cases}$, ta có

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$, trong khi $f(2)=a$. Do đó, hàm số sẽ liên tục tại $x=2$ nếu $a=3$, hàm số không liên tục tại $x=2$ nếu $a\neq 3$.

Ví du 2: Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2 \\ ax^2-bx+3, & 2\le x<3 \\ 2x-a+b, & x\ge 3 \end{cases}$

Xác định a, b sao cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải: + Dễ thấy hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

+ Hàm số liên tục trên miền $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$

+ Do đó hàm số sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x=2$ và $x=3$, tức là khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2-bx+3\right) = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\left(ax^2-bx+3\right) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-a+b\right) = f(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2-bx+3\right) = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\left(ax^2-bx+3\right) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-a+b\right) = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b=1 \\ 10a-4b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Như vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Định nghĩa 3: Cho hàm số $y=f(x)$ ***xác định trong một lân cận của*** x_0 (có thể không xác định tại x_0). Ta nói rằng $y=f(x)$ gián đoạn tại x_0 nếu hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm đó và khi đó x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $y=f(x)$.

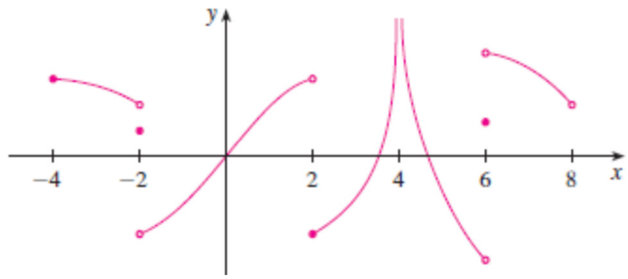
Từ Định nghĩa 3 suy ra: x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nếu xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

i) $\begin{cases} x_0 \notin D_f \\ \left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)\setminus x_0 \in D_f \end{cases}$,

tức là hàm số $f(x)$ không xác định tại x_0 nhưng nó xác định tại những điểm rất gần với x_0.

ii) $x_0\in D_f$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

iii) $x_0\in D_f$ nhưng không tồn tại giới hạn khi $x\to x_0$.



Trên hình vẽ, các điểm gián đoạn là $x = -2, 2, 4, 6$.

Định lí : *1)* *Cho* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai hàm số liên tục trong* $(a;b)$. *Khi đó:*

a) $f(x) \pm g(x)$ *là hàm liên tục trong* $(a;b)$

b) $f(x).g(x)$ *là hàm liên tục trong* $(a;b)$

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *là hàm liên tục trong* $(a;b)$, *trừ những điểm làm* $g(x) = 0$.

2) Nếu $g(x)$ liên tục tại $x = a$ *và* $f(x)$ *liên tục tại* $b = g(a)$ *thì hàm hợp* $f \circ g$ *liên tục tại* $x = a$.

(Để ý: $\left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right)$.

Nhân xét:

1) Các đa thức, các phân thức hữu tỉ, các hàm số lượng giác, hàm số mũ, hàm số logarit liên tục trên miền xác định.

2) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên (a,b) thì đồ thị của nó là một đường cong trơn (không bị gãy, không bị đứt đoạn).

Định lý: *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục tại b và* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ *thì* $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$, *nói cách khác: khi đó ta có* $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$

2. Các tính chất của hàm liên tuc (Tự đọc)

a. Đinh lí về giá tri trung gian 1: *Cho* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên đạan* $\left[a;b\right]$, *liên tục trong khoảng* $(a;b)$, $a < b$ *và* $f(a).f(b) < 0$. *Khi đó:* $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$.

Ví dụ : Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm trong khoảg $(0;3)$:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

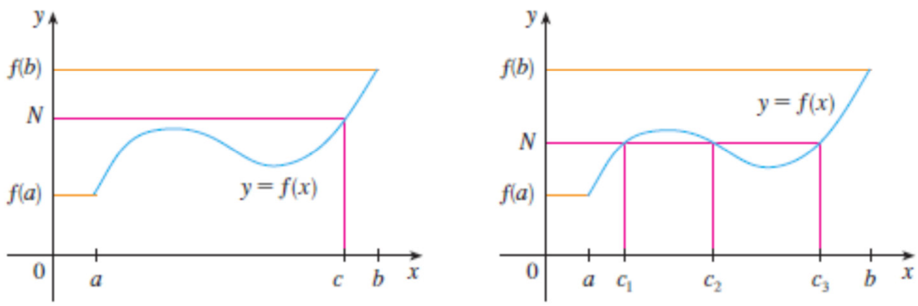
Giải: Đặt $f(x) = x^3 - x - 1$: là hàm xác định và liên tục trên $(0,3)$.

Nhận thấy: $f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0 \Rightarrow f(1).f(2) < 0$, theo Định lý

$\exists x_0 \in (1;2) \subset (0;3) : f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ chính là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0,3)$

b. Định lý giá trị trung gian 2: *Cho $f(x)$ là hàm số **xác** định, liên tục trong $[a;b]$. Khi đó $f(x)$ lấy ít nhất một lần mọi giá trị nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Nói cách khác nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a;b]$ và cho N là là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, ở đó $f(a) \neq f(b)$; khi đó sẽ tồn tại $c \in (a,b) : f(c) = N$.*



Ví dụ : Xét hàm số $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét trong $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, có $f(0) = 0,\ f(\dfrac{\pi}{2}) = 1$. Do vậy với $0 < r < 1$ thì phương trình $\sin x = r$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Định lí Weierstrass: *Cho $f(x)$ là hàm số xác định, liên tục trong $[a;b]$. Khi đó tập $I = \{f(x) |\ x \in [a,b]\}$ là giới nội. Hơn nữa:*

$$\exists c, d \in [a;b] : M = \max_{[a;b]} f(x) = f(c);\ m = \min_{[a;b]} f(x) = f(d).$$

Bài tập về nhà: Tr.88, 91

Đọc trước các Mục:**2.1, 2.2, 2.3; 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5; 5.2 ; 8.4, 8.5 ; 9.2**
Chuẩn bị cho **Bài số 3**

Đạo hàm và vi phân của hàm một biến số