BÀI SỐ 4. KHÔNG GIAN VÉC TƠ - KHÔNG GIAN CON

I. Không gian véc tơ

1. Định nghĩa

- Cho tập hợp V khác rỗng.
- Trên V trang bị hai phép toán:

  + Phép cộng hai phần tử trong V

  + Phép nhân số thực với 1 phần tử trong V.

- Ta gọi V cùng hai phép toán này là 1 không gian véc tơ nếu nó thỏa mãn 8 tính chất sau với mọi $u, v, \mathrm{w} \in \mathrm{V}$ và mọi $a, b \in R$:

1. $u+v=v+u$
2. $(u+v)+\mathrm{w}=u+(v+\mathrm{w})$
3. $\exists$ phần tử không $\mathrm{O}\in\mathrm{V}$ sao cho $u+\mathrm{O}=u$
4. $\exists$ phần tử đối $-u\in\mathrm{V}$ sao cho $u+(-u)=\mathrm{O}$
5. $a(u+v)=au+av$
6. $(a+b)u=au+bu$
7. $(ab)u=a(bu)$
8. $1.u=u$

2. Ví dụ:

VD: Tập $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z$ là số thực$\}$ với phép cộng vector và phép nhân số thực với vector thông thường là một kgvt.

VD: Tập $R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n$ là số thực$\}$ với phép cộng vector và phép nhân số thực với vector thông thường là một kgvt.

VD: Tập $P_n(x)$ các đa thức có bậc $\leq n$ có các hệ số đều là số thực với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với số thực thông thường là một kgvt.

VD: Tập $M(m \times n, R)$ các ma trận cỡ $m \times n$ có các p/tử đều là số thực với phép cộng ma trận và phép nhân số thực vào ma trận thông thường là một kgvt.

II. Không gian con

1. Định nghĩa

Cho W là tập con của kgvt V. Ta gọi W là một không gian con của V nếu nó thỏa mãn:

- W chứa véc tơ không của V
- $\forall u, v \in \mathrm{W} \Rightarrow u + v \in \mathrm{W}$
- $\forall u \in \mathrm{W},\ \forall \lambda \in R \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{W}.$

2. Ví dụ

VD. Tập $W = \{(x;y;z) \in R^3 \,|\, x - y - z = 0\}$ có là một không gian con của R^3?

Goi $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2),\ u, v$ bat ki thuoc W, $k \in \mathbf{R}$ bat ki

$u, v \in W \Rightarrow x_1 - y_1 - z_1 = 0; x_2 - y_2 - z_2 = 0$

$Xet: u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$Co: (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 - z_1) + (x_2 - y_2 - z_2) = 0$

$\Rightarrow u + v \in W \ \forall u, v \in W \quad (1)$

$Xet: ku = (kx_1, ky_1, kz_1), co: kx_1 - ky_1 - kz_1 = k(x_1 - y_1 - z_1) = 0$

$\Rightarrow ku \in W \ \forall u \in W, \forall k \in \mathbf{R} \quad (2)$

De thay vecto $0 = (0,0,0)$ thuoc $W \quad (3)$

Tu $(1),(2),(3) \Rightarrow W$ la khong gian con cua V

VD. Tập $W=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x-y=0,\ x+y-z=0\}$

có là một không gian con của R^3?

Goi $u=(x_1,y_1,z_1), v=(x_2,y_2,z_2),\ u,v$ bat ki thuoc W, $k\in\mathbf{R}$ bat ki

$u,v\in W \Rightarrow x_1-y_1=0, x_1+y_1-z_1=0; x_2-y_2=0, x_2+y_2-z_2=0$

$Xet: u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$Co: (x_1+x_2)-(y_1+y_2)=(x_1-y_1)+(x_2-y_2)=0 \quad (a)$

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=(x_1+y_1-z_1)+(x_2+y_2-z_2)=0 \quad (b)$

Tu $(a),(b)\Rightarrow u+v\in W\ \forall u,v\in W \quad (1)$

$Xet: ku=(kx_1,ky_1,kz_1), co: kx_1-ky_1=k(x_1-y_1)=0 \quad (c)$

$kx_1+ky_1-kz_1=k(x_1+y_1-z_1)=0 \quad (d)$

Tu $(c),(d)\Rightarrow ku\in W\ \forall u\in W, \forall k\in\mathbf{R} \quad (2)$

De thay vecto $0=(0,0,0)$ thuoc $W \quad (3)$

Tu $(1),(2),(3)\Rightarrow W$ la khong gian con cua V

VD. Cho $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1+x_3=m\}$. Tìm m để W là một không gian con của R^3.

Goi $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3),\ u,v$ bat ki thuoc W, $k\in \mathbf{R}$ bat ki

$u,v\in W \Rightarrow x_1+x_3=m; y_1+y_3=m$

$Xet: u+v=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$Co: (x_1+y_1)+(x_3+y_3)=(x_1+x_3)+(y_1+y_3)=m+m=2m$

$\Rightarrow u+v\in W\ \forall u,v\in W \Leftrightarrow 2m=m \Leftrightarrow m=0 \quad (1)$

$Xet: ku=(kx_1,kx_2,kx_3), co: kx_1+kx_3=k(x_1+x_3)=km$

$\Rightarrow ku\in W\ \forall u\in W, \forall k\in \mathbf{R} \Leftrightarrow km=m\ \forall k\in \mathbf{R} \Leftrightarrow m=0 \quad (2)$

vecto $0=(0,0,0)\in W \Leftrightarrow 0+0=m \Leftrightarrow m=0 \quad (3)$

Tu $(1),(2),(3) \Rightarrow m=0$ thi W la khong gian con cua $\mathbf{R}^3$

3. Định lý

Nếu $v_1, v_2, ..., v_n$ là các véc tơ trong kgvt R^m thì $span(v_1, v_2, ..., v_n)$ là một không gian con của R^m.

$$span(v_1, v_2, ..., v_n) =$$

$$\{a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \mid a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}\}$$

III. Bốn không gian con của ma trận

1. Không gian cột

- Cho $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ có các véc tơ cột là $c_1, c_2, ..., c_n$.
- Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $c_1, c_2, ..., c_n$ đgl không gian cột của ma trận A, ký hiệu C(A)

$$C(A) = \left\{ x_1 c_1 + x_2 c_2 + ... + x_n c_n \,\middle|\, x_1, x_2, ..., x_n \in R \right\}$$

- NX: $C(A) = span(c_1, c_2, ..., c_n) = \left\{ Ax \,\middle|\, x \in R^n \right\}$

  với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

VD. Mô tả không gian cột các ma trận sau:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải

$$\bullet\ C(I) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in R \right\}.$$

$\Rightarrow C(I)$ lấp đầy mặt phẳng R^2 hay $C(I) = R^2$

- $C(A)=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\middle|x_1,x_2\in R\right\}$

$$=\left\{(x_1+2x_2)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\middle|x_1,x_2\in R\right\}$$

$$=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\middle|x_1\in R\right\}$$

$\Rightarrow C(A)$ lấp đầy một đường thẳng trong R^2 có véc tơ chỉ phương $(1;3)$.

$$\bullet\ C(B)=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\middle|\,x_1,x_2,x_3\in R\right\}$$

$$=\left\{(x_1+2x_3)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle|\,x_1,x_2,x_3\in R\right\}$$

$$=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle|\,x_1,x_2\in R\right\}$$

$$\Rightarrow C(B)=R^2$$

Định lý: Nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì $C(A)$ là không gian con của R^m.

2. Không gian nghiệm của ma trận A

- Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$.
- Tập các nghiệm của hệ $Ax = 0$ đgl không gian nghiệm của ma trận A, ký hiệu N(A).

$$N(A) = \left\{x \in R^n \middle| Ax = 0\right\}.$$

VD. Mô tả không gian nghiệm của các ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix};\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

Giải:

- $N(A)=\left\{x\in R^2 \middle| Ax=0\right\}=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \middle| Ax=0\right\}$

$$Ax=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

$\Rightarrow N(A)=\left\{(0;0)\right\}$ là gốc tọa độ của R^2

$$\bullet\ N(B)=\left\{x\in R^2 \,\middle|\, Bx=0\right\}=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \,\middle|\, Bx=0\right\}$$

$$Bx=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1-2x_2=0\\ -2x_1+4x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=2x_2$$

$$\Rightarrow N(B)=\left\{\begin{bmatrix}2x_2\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{x_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, x_2\in R\right\}$$

lấp đầy đường thẳng trong R^2 có vtcp là $(2;1)$.

$$\bullet\ N(C)=\left\{x\in R^2 \middle| Cx=0\right\}=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle| Cx=0\right\}$$

$$Cx=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=0\\3x_1+3x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2=-x_1.$$

$$\Rightarrow N(C)=\left\{x=\begin{bmatrix}x_1\\-x_1\end{bmatrix}\right\}=\left\{x=x_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},x_1\in R\right\}$$

lấp đầy đường thẳng trong R^2 có vtcp là $(1;-1)$.

Định lý: Nếu $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ thì $N(A)$ là một không gian con của R^n.

3. Không gian hàng và không gian nghiệm trái

- Cho $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ có các véc tơ hàng $h_1, h_2, ..., h_m$.
- Các tập $C\left(A^T\right)$, $N\left(A^T\right)$ lần lượt đgl không gian hàng và không gian nghiệm trái của ma trận A.
- $C\left(A^T\right) = \left\{ y_1 h_1 + y_2 h_2 + ... + y_m h_m \middle| y_1, y_2, ..., y_m \in R \right\}$

$$= span\left(h_1, h_2, ..., h_m\right) = \left\{ A^T y \middle| y \in R^m \right\}$$

- $N\left(A^T\right) = \left\{ y \in R^m \middle| A^T y = 0 \right\}$

Định lý: Nếu $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ thì $C\left(A^T\right)$ là không gian con của R^n và $N\left(A^T\right)$ là không gian con của R^m.

VD. Mô tả bốn không gian nghiệm ma trận:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$