Bài số 6

KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

I. Nguyên hàm

1. Định nghĩa: Nếu $f(x)$ cho trước thì hàm số $F(x)$ thoả mãn

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

được gọi là *một nguyên hàm* của $f(x)$.

Quá trình tìm hàm $F(x)$ từ $f(x)$ được gọi là ***quá trình lấy nguyên hàm***.

+ Một nguyên hàm của $f(x)$ thì thường được gọi là ***tích phân không xác định*** của $f(x)$ và phép lấy nguyên hàm được gọi là ***phép lấy tích phân***.

+ Ký hiệu chuẩn cho một tích phân của $f(x)$ là : $\int f(x)dx$

được đọc là "tích phân của hàm $f(x)$".

+ Vì vậy : $\int f(x)dx = F(x)$ cho ta **một tích phân** , trong khi $\int f(x)dx = F(x)+C$ cho ta ***tất cả các tích phân có thể có.***

◆ Từ công thức đạo hàm có thể suy ra một tích phân tương ứng.

2. Một số tính chất :

◆ **T/chất 1 :** $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ hay là $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$.

◆ **T/chất 2 :** Giả sử $F(x)$ khả vi, ta có : $\int dF(x) = F(x)+C$.

◆ **T/chất 3 :** Với c là hằng số thì : $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

◆ **T/chất 4 :** Nếu các hàm $f(x), g(x), h(x)$ đều có nguyên hàm thì ta có :

$$\int\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

◆ **T/chất 5 :** Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ và $u=\varphi(x)$ thì :

$$\int f(u)du = \int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = F(u)+C.$$

3. Phương pháp tìm nguyên hàm

• ***Một số hàm bổ xung*** **:** $\cos ec\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$; $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$; $1 \tan^2\theta = \sec^2\theta$; $1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

• ***Một số công thức :***

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\cdot\cot u\frac{du}{dx}$$

a. Sử dụng trực tiếp bảng các nguyên hàm cơ bản

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \cos u\, du = \sin u + C$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$
6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + c$
8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \dfrac{u}{a} + C$
9. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{u}{a} + C$
10. $\int \tan u du = -\ln\left(\cos u\right) + C$
11. $\int \cot u du = \ln(\sin u) + C$

- **Ví dụ 1.** $\int (3x^4 + 6x^2)dx = ?; \quad \int (5 - 2x^4 + 3x^{11})dx = ?$
- **Ví dụ 2.**

$$\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$
$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 2}{x^2}dx = \int (2x - 1 - 2x^{-2})dx = x^2 - x + \frac{2}{x} + c$$
$$\int \frac{5x^{1/3} - 2x^{-1/3}}{\sqrt{x}}dx = \int [5x^{-1/6} - 2x^{-5/6}]dx = 6x^{5/6} - 12x^{1/6} + c$$

b. Phương pháp thế

❖ ***Cơ sở của phương pháp:*** Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = g(x)$ thì :

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

- **Ví dụ 3.** Tìm $I = \int xe^{-x^2}dx$.

Giải: Đặt $u = -x^2$, thì $du = -2x.dx \Rightarrow xdx = -du$, và

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

- **Ví dụ 4.** Tìm $I = \int \dfrac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$

Giải: Đặt $u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$ và

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{1+\sin x} + C$$

- **Ví dụ 5.** Tìm $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

Giải : + Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$ và

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{9-4u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{u}{3} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{3} + C$$

- **Ví dụ 6.** Tìm $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

Giải: + Đặt: $u = 9-4x^2 \Rightarrow du = -8xdx$ và

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-4x^2}} = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{8}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{u} = -\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C\,.$$

c. Phương pháp tích phân từng phần

❖ ***Công thức :*** $\int udv = uv - \int vdu \Leftrightarrow \int uv'dx = uv - \int vu'dx$

❖ ***Một số dạng cơ bản :***

- **Dạng** : $I = \int p(x).H(x)dx$ trong đó $H(x) \in \left\{\sin ax, \cos bx, e^{nx}\right\}$, $p(x)$ là đa thức:

  khi đó ta chọn : $\begin{cases} u = p(x) \\ v' = H(x) \end{cases}$.

- **Dạng** : $I = \int p(x).\ln q(x)dx$ ta đặt $\begin{cases} u = \ln q(x) \\ v' = p(x) \end{cases}$

- **Dạng** : $I = \int e^{ax}.K(x)dx$ trong đó $K(x) \in \left\{\sin ax, \cos bx\right\}$

  khi đó ta chọn : $\begin{cases} u = e^{ax} \\ v' = K(x) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = K(x) \\ v' = e^{ax} \end{cases}$ .....

- **Ví dụ 7:** Tìm $I = \int x.\cos xdx$.

- **Ví dụ 8.** Tìm $I = \int \ln xdx$

- **Ví dụ 9:** Tìm $I = \int x^2 e^x dx$

- **Ví dụ 10.** Tìm $J = \int e^x \cos x dx$.

Bài tập về nhà: **Tr. 180, 190**
Đọc trước các mục: 6.1, 6.2, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 8.3, 8.4, 9.3, 9.5, 10.2, 10.4. chuẩn bị cho **Bài số 7**
Một số dạng tíchphân