GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 5

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 19.7. Bài toán giá trị cực đại và cực tiểu

• Cực trị • Dạng toán cơ bản
• Cách tìm

Đặt vấn đề.

• Đối với hàm một biến số, ta đã biết một trong những ứng dụng cơ bản của đạo hàm là nghiên cứu giá trị cực đại và giá trị cực tiểu.

• Bài toán giá trị cực đại, cực tiểu của hàm nhiều biến số phức tạp hơn nhiều. Ta giới hạn nghiên cứu đối với hàm hai biến số.

• Liệu cực trị của hàm hai biến số có thể tìm được tương tự như cực trị của hàm một biến số?

1. Định nghĩa. $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ trong miền xác định

$\Leftrightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in U_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$

Hàm $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ trong miền xác định

$\Leftrightarrow f(x, y) > f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in U_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$

Hàm $x = f(x, y)$ được gọi là đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0) \Leftrightarrow z = f(x, y)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $P_0(x_0, y_0)$

Ví dụ 1. $z = x^2 + y^2$

Có $P_0(0, 0)$ là điểm cực tiểu

Ví dụ 2. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Có $P_0(0, 0)$ là điểm cực đại.

Ví dụ 3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Có $P_0(0, 0)$ là điểm cực tiểu

Ví dụ 4. $z = -x^2 - 2y^2$.

Có $P_0(0, 0)$ là điểm cực đại

2. Cách tìm.

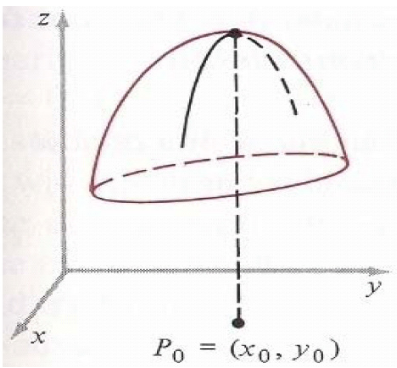
Cho hàm $z = f(x, y)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ trong miền xác định, do đó $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ trong lân cận điểm $P_0(x_0, y_0)$

Ta có $f(x, y_0)$ đạt cực đại tại $x = x_0$ nên có

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = 0 \text{ hay } \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Tương tự có $f(x_0, y)$ đạt cực đại tại $y = y_0$ nên có

$$\frac{d}{dx} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = 0 \text{ hay } \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$



Hình 19.13 (trái)

Như vậy để hàm $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại $P_0(x_0, y_0)$ thì điều kiện cần là $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

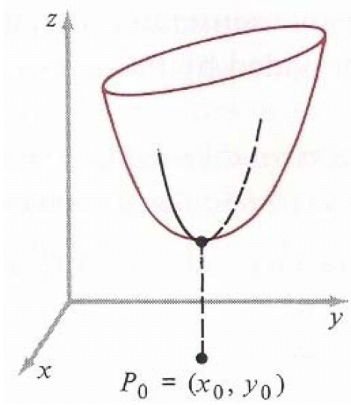
Khi đó (x_0, y_0) được gọi là điểm tới hạn

Tương tự, cho hàm $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại $P_0(x_0, y_0)$ trong m

Bằng lập luận như trên hàm $z = f(x, y)$, đạt cực tiểu tại $P_0(x_0, y_0)$ thì ta có $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Chú ý. Có điểm $P_0(x_0, y_0)$ thoả mãn: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

nhưng hàm $z = f(x, y)$ không đạt cực tiểu hoặc cực đại tại điểm này, ví dụ điểm $P_0(x_0, y_0)$ trên mặt yên ngựa



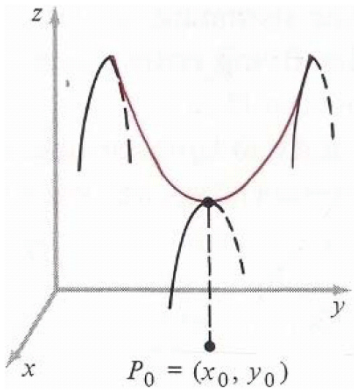
Hình 19.13(giữa)

1. Định lý. $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận điểm (x_0, y_0) trong miền xác định và giả sử:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

Khi đó:

- Nếu $D > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0)
- Nếu $D > 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0)
- Nếu $D < 0$ thì $f(x, y)$ không có cực trị tại (x_0, y_0) (Điểm yên ngựa)
- Khi $D = 0$ thì không có kết luận gì.



Hình 19.13 (phải)

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm cực trị $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

MXĐ mọi (x, y)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$z_{xx} = 6x$, $z_{yy} = 6y$, $z_{xy} = -3$.

M	z_{xx}	z_{yy}	z_{xy}	D	**Kết luận**
$(0, 0)$	0	0	–3	–9	không đạt cực trị tại $(0, 0)$
$(1, 1)$	6	6	–3	27	Đạt cực tiểu tại $(1, 1)$

$z_{CT}(1, 1) = -1$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm $z = x^2y^2$.

MXĐ: mọi (x, y)

$$z_x = 2xy^2,\ z_y = 2yx^2.$$

$$\begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2yx^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \forall\ y \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = 0 \\ \forall\ x \end{cases}$$

Các điểm tới hạn là $(0, y)$, $(x, 0)$

$$z_{xx} = 2y^2,\ z_{yy} = 2x^2,\ z_{xy} = 4xy.$$

M	z_{xx}	z_{yy}	z_{xy}	D	**Kết luận**
$(0, y)$	$2y^2$	0	0	0	không có kết luận gì
$(x, 0)$	0	$2x^2$	0	0	không có kết luận gì

Ta có $z = x^2y^2 \geq 0$, mọi (x, y)

$z = x^2 - y^2$ không đạt cực tiểu tại $(0, y)$ vì $\Delta z = \Delta x^2(y + \Delta y)^2 - 0^2.y^2 = 0$ với $\Delta x = 0$, mọi $\Delta y \neq 0$.

Tương tự không có cực tiểu tại $(x, 0)$ vì $\Delta z = (x+\Delta x)^2\Delta y^2 - x^2.0^2 = 0$ với $\Delta y = 0$, mọi $\Delta x \neq 0$.

4. Dạng toán cơ bản

1. Tìm và phân loại điểm tới hạn

• **1(tr. 94).** $z = 5x^2 - 3xy + y^2 - 15x - y + 2$

+) $z_x = 10x - 3y - 15$, $z_y = -3x - 2y - 1$

+) $\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 3y - 15 = 0 \\ -3x - 2y - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

+) $A = z_{xx} = 10$, $B = z_{xy} = -3$, $C = z_{yy} = 2$

+) $D = AC - B^2 = 11 > 0$, $A = 10 > 0 \Rightarrow$ có $(3 ; 5)$ là điểm cực tiểu

• **7(tr. 94).** $z = x^3 + y^3 + 3xy + 5$

+) $z_x = 3x^2 + 3y$, $z_y = 3x + 3y^2$

+) $\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \end{array}\right. \\ x = -y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ x = -1 = y \end{array}\right.$

+) $z_{xx} = 6x$, $z_{xy} = 3$, $z_{yy} = 6y$

+) Tại $M_1(0 ; 0)$ có $A = 0 = C$, $B = 3$, $D = AC - B^2 = -9 < 0 \Rightarrow M_1$ là điểm yên ngựa

+) Tại $M_2(-1 ; -1)$ có $A = -6 = C$, $B = 3$, $D = AC - B^2 = 27 > 0$, $A = -6 < 0$ và $M_2(-1 ; -1)$ là điểm cực đại

• **3(tr. 94).** $z = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$

+) $z_x = 5x^4 - 5$, $z_y = 4y^3 - 32$

+) $\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 - 5 = 0 \\ 4y^3 - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = 2 \\ x = -1,\ y = 2 \end{array}\right.$

+) $z_{xx} = 20x^3$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 12y^2$

M_i	A	B	C	D	Kết luận
$M_1(1 ; 2)$	20	0	48	960	đểm cực tiểu
$M_2(-1 ; 2)$	–20	0	48	–960	Điểm yên ngựa

2. Giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất

• **11(tr. 94).** Chứng minh rằng hình hộp chữ nhật với nắp đậy có diện tích toàn phần không đổi, thì thể tích đạt giá trị lớn nhất nếu nó là hình lập phương

+) Gọi x, y, z là các cạnh hình hộp chữ nhật ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

+) $S_{TP} = 2(xy + yz + zx) = C$ (const)

+) $V = xyz$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $V^2 = x^2y^2z^2$ lớn nhất

+) Mặt khác có

$x^2y^2z^2 \le \left(\dfrac{xy+yz+zx}{3}\right)^3$ (sử dụng BĐT $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)

$= \left(\dfrac{C}{6}\right)^3$

V đạt lớn nhất khi $xy = yz = zx \Leftrightarrow x = y = z$ khi đó ta có hình lập phương

• **13(tr. 94).** $x + y + z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Tìm các số x, y, z để $u = zy^2z^3$ là lớn nhất

+) $12 = x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{3} \ge 6\sqrt[6]{x.\dfrac{y^2}{4}.\dfrac{z^3}{27}}$

+) $2^6 \ge x.\dfrac{y^2}{4}.\dfrac{z^3}{27}$

+) $xy^2z^3 \le 2^6.4.27$

+) Đạt lớn nhất khi $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$, thay vào có $x + 2x + 3x = 12 \Leftrightarrow x = 2$, $y = 4$, $z = 6$.

• **15(tr. 95).** Một hình hộp chữ nhật có 3 mặt nằm trong các mặt phẳng toạ độ và đỉnh $P(x, y, z)$ nằm trong góc phần tám thứ nhất trên mặt phẳng $ax + by + cz = 1$. Tính thể tích lớn nhất của hình hộp đó.

+) Tìm giá trị lớn nhất của $V = xyz$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

+) Từ giả thiết có $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và có $1 = ax + by + cz \ge 3\sqrt[3]{abc.xyz}$

+) $1 \ge 27\, abc.xyz$

+) $V = xyz \le \dfrac{1}{27abc}$

+) Hình hộp có thể tích lớn nhất là $\dfrac{1}{27abc}$ khi $ax = by = cz$

Cách khác:

+) $ax + by + cz = 1 \Rightarrow z = \dfrac{1 - ax - by}{c}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

+) $V = xy.\dfrac{1 - ax = by}{c}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

+) $\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2ax-by) = 0 \\ x(1-2by-ax) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax+by = 1 \\ ax+2by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3a} \\ y = \dfrac{1}{3b} \end{cases}$

+) $V_{xx} = -2ay$, $V_{xy} = 1 - 2ax - 2by$, $V_{yy} = -2bx$

+) $A = -\dfrac{2}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$, $C = -\dfrac{2}{3}$, $D = AC - B^2 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3} > 0$, $A = -\dfrac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ đạt cực đại tại $\left(\dfrac{1}{3a}; \dfrac{1}{3b}\right)$ và $V\left(\dfrac{1}{3a}; \dfrac{1}{3b}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

• **9(tr. 94).** Chứng minh rằng tại gốc toạ độ (0 ; 0):

a) $f(x, y) = x^4 + y^4$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) $f(x, y) = -x^4 - y^4$ đạt giá trị lớn nhất

c) $f(x, y) = x^3y^3$ nhận (0 ; 0) là điểm yên ngựa

a) +) $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 = y$

+) $f_{xx}(0 ; 0) = 0$, $f_{xy}(0 , 0) = 0$, $f_{yy}(0, 0) = 0 \Rightarrow D = 0$, do đó không có kết luận gì tại điểm tới hạn (0 ; 0)

+) Có $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$ và dấu "=" khi $x = 0 = y$.

b) Tương tự có $D = 0$ nên không có kết luận gì tại (0 ; 0) nhưng có

$f(x, y) = -(x^4 + y^4) \leq 0$

dấu "=" xảy ra khi $x = y = 0$

c) +) $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y^3 = 0 \\ 3x^3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \ \forall y \\ y = 0, \ \forall x \end{cases}$

+) $f_{xx} = 6xy^3$, $f_{xy} = 9x^2y^2$, $f_{yy} = 6x^3y$

do đó $f_{xx}(0, 0) = 0 = f_{xy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0)$.

Vì vậy $D = 0$ do đó không có kết luận gì tại (0, 0).

+) Mặt khác: Xét $y = x$ có $f = x^6 > 0, \forall\ x \neq 0$

Xét $y = -x$ có $f = -x^6 < 0, \forall\ x \neq 0$

chứng tỏ (0 ; 0) là điểm yên ngựa

§ 19.8. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN. NHÂN TỬ LAGRANGE

• Cực trị có điều kiện (mục 19.8)

• Các dạng toán cơ bản

• Phương pháp nhân tử Lagrange

Đặt vấn đề

• Ta thường gặp bài toán tìm cực trị của biểu thức với điều kiện ràng buộc nào đó đối với các biến

• Tuy nhiên việc thay các điều kiện ràng buộc vào hàm ban đầu để đưa về bài toán đã biết không phải luôn thuận lợi. Ta cần khắc phục như thế nào?

• Xuất phát từ ý nghĩa hình học của gradient, phương pháp nhân tử Lagrange đã khắc phục được khó khăn trên, đây là công cụ quan trọng trong kinh tế, hình học vi phân và lý thuyết cơ học nâng cao.

1. Phương pháp nhân tử Lagrange

a) Hàm hai biến với một điều kiện ràng buộc

Tìm giá trị cực đại của hàm số $z = f(x, y)$ với ràng buộc $g(x, y) = 0$.

Đặt $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

Ta có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, ở đó biến λ được gọi là biến Lagrange.

Như vậy bài toán tìm cực trị $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x,y)=0$ được chuyển về bài toán cực trị của hàm $L(x, y, \lambda)$. Đây là phương pháp nhân tử Lagrange.

Phương pháp nhân tử Lagrange rất quan trọng trong lý thuyết, ngoài ra trong thực hành có ưu điểm sau:

• Không phải băn khoăn về tính đối xứng trong bài toán vì có thể lựa chọn một biến độc lập bất kì.

• Việc đưa thêm vào λ như một biến khác sẽ khử đi một ràng buộc

• Dễ dàng mở rộng cho trường hợp nhiều biến hơn và nhiều ràng buộc hơn

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất, nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính a.

Gọi các kích thước của hình chữ nhật là $2x; y > 0$

Phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 = a^2$.

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2xy$

$$L = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y - 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2x - 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^2 - a^2\right)$$

$$\begin{cases} 2y - 2\lambda x = 0 \\ 2x - 2\lambda y = 0 \\ -\left(x^2 + y^2 - a^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \lambda xy \\ x = \lambda y \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = x \\ x = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \lambda = 1$$

$$\Delta L = L\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+h,\frac{a}{\sqrt{2}}+k,\ 1\right)-L\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},1\right)$$

$$=2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+h\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+k\right)-\left[\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+h\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+k\right)^2-a^2\right]-2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}}+\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a^2\right)$$

$$=a^2+2hk+a\sqrt{2}h+a\sqrt{2}k-\left[\frac{a^2}{2}+h^2+a\sqrt{2}h+\frac{a^2}{2}+k^2+a\sqrt{2}k-a^2\right]-a^2$$

$$=2hk-h^2-k^2=-(h-k)^2\leq 0,\ \forall\ h,k$$

Hàm L đạt lớn nhất, do đó S đạt lớn nhất tại $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ với điều kiện đã cho, khi đó các kích thước cần tìm là $2x=a\sqrt{2}$, $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$

b) Hàm ba biến với một điều kiện ràng buộc: Tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$, với điều kiện $g(x, y, z) = 0$.

Đặt $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$

Có $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, $\frac{\partial L}{\partial z}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$

Như vậy bài toán tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = 0$ được chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm: $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.

Ví dụ 2. Tìm điểm nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$ gần gốc toạ độ nhất

Tìm $M(x, y, z)$ sao cho $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ nhỏ nhất với điều kiện: $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

ρ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất

$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-\lambda,\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-2\lambda,\ \frac{\partial L}{\partial z}=2z-3\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x+2y+3z-6)=0$$

$$\begin{cases}2x-\lambda=0\\2y-2\lambda=0\\2z-3\lambda=0\\-(x+2y+3z-6)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\lambda}{2}\\y=\lambda\\z=\frac{3\lambda}{2}\\\frac{\lambda}{2}+2\lambda+\frac{9}{2}\lambda=6\end{cases}$$

$\lambda=\frac{6}{7}$, $x=\frac{3}{7}$, $y=\frac{6}{7}$, $z=\frac{9}{7}$

$\Leftrightarrow \Delta L = L\left(\frac{3}{7}+h, \frac{6}{7}+k, \frac{9}{7}+l, \frac{6}{7}\right) - L\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)$

$=\left(\frac{3}{7}+h\right)^2+\left(\frac{6}{7}+k\right)^2+\left(\frac{9}{7}+l\right)^2-\frac{6}{7}\left[\left(\frac{3}{7}+h\right)+2\left(\frac{6}{7}+k\right)+3\left(\frac{9}{7}+l\right)-6\right]-\left(\frac{9}{49}+\frac{36}{49}+\frac{81}{49}\right)+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}+\frac{12}{7}+\frac{27}{7}-6\right)$

$= h^2 + k^2 + l^2 \geq 0, \forall\ h, k, l$

Hàm $L(x, y, z, \lambda)$ đạt nhỏ nhất tại $P\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$, do đó khoảng cách $\rho(x, y, z)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{6}{7}$, $z = \frac{9}{7}$ và có $\rho_{\min}\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right) = \frac{\sqrt{126}}{7}$

c) Cực trị của hàm ba biến $w = f(x, y, z)$ với hai điều kiện ràng buộc:

$$g(x, y, z) = 0,\ h(x, y, z) = 0$$

Tương tự có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$

Bài toán tìm cực trị với hai điều kiện ràng buộc nói trên chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$

Ví dụ 3. Tìm điểm $M(x, y, z)$ trên giao tuyến các mặt phẳng $x + y + z = 1$ và $3x + 2y + z = 6$ mà gần gốc toạ độ nhất.

Tìm $M(x, y, z)$ sao cho $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nhỏ nhất với các ràng buộc: $x + y + z - 1 = 0$ và $3x + 2y + z - 6 = 0$.

ρ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \rho^2$ nhỏ nhất.

$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(3x + 2y + z - 6)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda - 3\mu,\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda - 2\mu,\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda - \mu,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y + z - 1),\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(3x + 2y + z - 6)$$

$$\begin{cases} 2x - \lambda - 3\mu = 0 \\ 2y - \lambda - 2\mu = 0 \\ 2z - \lambda - \mu \quad = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu) \\ y = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \\ z = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\lambda+3\mu) \\ y=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu) \\ z=\frac{1}{2}(\lambda+\mu) \\ 3\lambda+6\mu=2 \\ 3\lambda+7\mu=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{5}{3} \\ \lambda=-\frac{22}{3} \\ \mu=4 \end{cases}$$

$$\Delta L = L\left(\frac{7}{3}+h, \frac{1}{3}+k, -\frac{5}{3}+l, -\frac{22}{3}, 4\right) - L\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{22}{3}, 4\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3}+h\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+k\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}+l\right)^2 + \frac{22}{3}\left[\left(\frac{7}{3}+h\right)+\left(\frac{1}{3}+k\right)+\left(-\frac{5}{3}+l\right)-1\right]$$

$$-4\left[3\left(\frac{7}{3}+h\right)+2\left(\frac{1}{3}+k\right)+\left(-\frac{5}{3}+l\right)-6\right]-\left[\frac{49}{9}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}+\frac{22}{3}.0-4.0\right]$$

$$= h^2 + k^2 + l^2 \geq 0, \ \forall\ h, k, l$$

Hàm $L\left(z, y, z, -\frac{22}{3}, 4\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Do đó khoảng cách $\rho(x, y, z)$ đạt giá trị bé nhất với các ràng buộc đã cho tại điểm $P_0\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ và có $\rho_{\min} = \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Trong kinh tế, phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng để giải quyết bài toán tối đa hoá tổng sản lượng của một công ty, phụ thuộc vào ràng buộc của tài nguyên sẵn có cố định, chẳng hạn: $P = f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, với điều kiện $\alpha + \beta = 1$, ở đó P là sản lượng (tính bằng đô la) biểu diễn qua x đơn vị của vốn và y đơn vị của lao động.

4. Dạng toán cơ bản

1. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (phương pháp nhân tử Lagrange)

• **1(tr. 103).** Một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ nội tiếp trong một miền bị chặn bởi các trục toạ độ và đường thẳng $x + 2y = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật này.

+) Gọi x, y là các cạnh của hình chữ nhật, có $u = xy$, $x > 0$, $y > 0$

+) $L = xy + \lambda(x + 2y - 2)$

+) $L_x = y + \lambda$, $L_y = x + x + 2\lambda$, $L_\lambda = x + 2y - 2$

+) $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -\lambda \\ -2\lambda - 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+) $L\left(1+\Delta x\,,\ \frac{1}{2}+\Delta y\right)-L\left(1,\ \frac{1}{2}\right) = (1+\Delta x)\left(\frac{1}{2}+\Delta y\right)-\frac{1}{2}\left(1+\Delta x+2\left(\frac{1}{2}+\Delta y\right)-2\right)-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}+\Delta y+\frac{\Delta x}{2}+\Delta x\Delta y-1-\frac{1}{2}\Delta x-\Delta y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\Delta x\Delta y \le 0,\ \forall\ \Delta x,\ \Delta y$ đủ nhỏ $\Rightarrow$ có lớn nhất tại $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$

Cách khác:

+) $2 = x + 2y \ge 2\sqrt{x.2y}$

+) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ge \sqrt{xy}$

+) $\frac{1}{2} \ge xy$

$u_{\max} = \frac{1}{2}$ khi $x = 2y$

• **3(tr. 103).** Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất (các cạnh song song với các trục toạ độ) nội tiếp trong ellip

+) $2x$, $2y$ là các cạnh của hình chữ nhật, $u = 4xy$, $x > 0$, $y > 0$

+) $L = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$

+) $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2\lambda x=0 \\ x+8\lambda y=0 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\lambda x \\ x+8\lambda(-2\lambda x)=0 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\pm\frac{1}{4} \\ x^2+y^2=4 \\ y=\pm\frac{1}{2}x \end{cases}$

+) $d^2L = \Delta x\Delta y + 2\lambda\Delta x^2 + 8\lambda\Delta y^2$

Khi $\lambda=\frac{1}{4}$, $d^2L=\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\Delta x^2+2\Delta y^2 = \left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta y}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\Delta y^2>0,\ \forall\Delta x,\ \Delta y$ không đồng thời bằng 0.

Khi $\lambda=-\frac{1}{4}$, $d^2L=\Delta x\Delta y-\frac{1}{2}\Delta x^2-2\Delta y^2 = -\frac{3}{2}\Delta y^2-\left(\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta y}{2}\right)^2<0,\ \forall\Delta x,\ \Delta y$ không đồng thời bằng 0.

+) Kết luận: $\lambda=-\frac{1}{4}$ đúng

Cách khác: +) $u = x^2 + 4y^2 \ge 2\sqrt{x^2.4y^2} = 4xy$

+) $u = xy \le \frac{1}{2}$

+) $u_{\max} = \frac{1}{2}$ tại $x = 2y$

• **7(tr. 103).** Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

+) $L = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

+) $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2\lambda x = 0 \\ -x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2+\lambda) - y = 0 & (1) \\ -x + y(2+2\lambda) = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2x\lambda \\ -x + (2+2\lambda)(2+2\lambda)x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x(2+2\lambda) \\ (2+2\lambda)^2 - 1 = 0 \text{ (loại } x = 0 \text{ vì } y = 0) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2}, y = x \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \lambda = -\frac{3}{2}, y = -x \Rightarrow M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$

+) $d^2L = 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta x\Delta y + 2\lambda\Delta x^2 + 2\lambda\Delta y^2$

+) $d^2L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Delta x^2 + \Delta y^2 - \Delta x\Delta y = \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta y^2}{2} + \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta y}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0, \forall \Delta x, \Delta y$ không đồng thời bằng 0.

(tương tự $d^2L\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \Rightarrow$ cực tiểu và bé nhất $f(M_1) = \frac{1}{2} = f(M_2)$)

+) $d^2L\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta x\Delta y = -\left(\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta y^2}{2}\right) - \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta y}{\sqrt{2}}\right)^2 < 0, \forall$ $\Delta x, \Delta y$ không đồng thời bằng 0. $\Rightarrow$ cực đại và lớn nhất

Tương tự tại $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ cũng lớn nhất, $f(M_3) = f(M_4) = \frac{3}{2}$

Cách khác:

$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ bé nhất là $\frac{1}{2}$ tại $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(x, y) \leq x^2 + y^2 + |xy| \leq x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{3}{2}$

đạt giá trị lớn nhất khi $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ghi nhớ. Tuần sau học các mục 19.9 và 19.10.