BÀI SỐ 5. HẠNG CỦA MA TRẬN - NGHIỆM ĐẦY ĐỦ CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. Hạng của ma trận

1. Khái niệm

- Dùng các phép biến đổi hàng đưa ma trận A về dạng ma trận bậc thang U.
- Số các trụ của ma trận U đgl hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$.

VD. Tìm $r(A)$ nếu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 5h_1]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Do U có 2 trụ nên $r(A) = 2$.

Định lý:

+ $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$

+ $r(A)=r(A^T)$

+ Nếu A là ma trận cỡ $m\times n$ thì $r(A)\le \min\{m;n\}$

+ A là ma trận vuông cấp n và $|A|\ne 0$ thì $r(A)=n$.

VD. Tùy theo m, tìm hạng của ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & m & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\begin{bmatrix}1 & 10 & 17 & 4\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 3 & m & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4\to h_4-4h_1]{\substack{h_2\to h_2-h_1\\ h_3\to h_3-3h_1}}\begin{bmatrix}1 & 10 & 17 & 4\\ 0 & -6 & -10 & -2\\ 0 & m-30 & -50 & -10\\ 0 & -39 & -65 & -13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - 4h_1]{\substack{h_2 \to h_2 - h_1 \\ h_3 \to h_3 - 3h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 17 & 4 \\ 0 & -6 & -10 & -2 \\ 0 & m-30 & -50 & -10 \\ 0 & -39 & -65 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3 \to 3h_3]{h_2 \to -\frac{1}{2}h_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3(m-30) & -150 & -30 \\ 0 & -39 & -65 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3 \to 3h_3]{h_2 \to -\frac{1}{2}h_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3(m-30) & -150 & -30 \\ 0 & -39 & -65 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 + 13h_2]{h_3 \to h_3 - (m-30)h_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5m & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

+ Nếu $m = 0$ thì U có 2 trụ nên $r(A) = 2$;

+ Nếu $m \neq 0$ thì U có 3 trụ nên $r(A) = 3$.

2. Liên hệ giữa hạng và số nghiệm của hệ

Định lý: Cho ma trận A cỡ $m \times n$.

- Hệ $Ax = b$ vô nghiệm $\Leftrightarrow r(A) < r(A|b)$.
- Hệ $Ax = b$ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A|b) = r(A) = r$.
  + Nếu $r = n$ thì hệ $Ax = b$ có nghiệm duy nhất
  + Nếu $r < n$ thì hệ $Ax = b$ có vô số nghiệm.

Hệ quả: Cho ma trận A cỡ $m \times n$.

Hệ $Ax = \mathrm{O}$ luôn luôn có nghiệm.

- Nếu $r(A) = n$ thì hệ $Ax = \mathrm{O}$ có nghiệm duy nhất $x = \mathrm{O}$.
- Nếu $r(A) < n$ thì hệ $Ax = \mathrm{O}$ có vô số nghiệm.

VD. Biện luận theo a, b, c số nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ 2x+5y+2z=b \\ 3x+7y+z=c \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 5 & 2 & b \\ 3 & 7 & 1 & c \end{array}\right] \xleftrightarrow[H3\to H3-3H1]{H2\to H2-2H1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-2a \\ 0 & 1 & 4 & c-3a \end{array}\right] \xleftrightarrow{H3\to H3-H2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} r(A)=2 \\ r(A|b)=\ldots \end{cases};$$

Neu $c-b-a=0 \Rightarrow r(A|b)=2<3$ (so an) $\Rightarrow$ he vo so nghiem

Neu $c-b-a\neq 0 \Rightarrow r(A|b)=3>2=r(A) \Rightarrow$ he vo nghiem

II. Nghiệm đặc biệt, nghiệm đầy đủ của Ax = O

VD. Giải hệ pt: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_2]{h_2 \to -h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biến trụ: x_1, x_2. Biến tự do: x_3, x_4.

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ: $\left(-x_3 - 2x_4; -x_3 - x_4; x_3; x_4\right)$

Nhận xét:

- $$x = \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $$N(A) = \left\{ x \in R^4 \,\middle|\, Ax = \mathrm{O} \right\}$$
$$= \left\{ x_3 s_1 + x_4 s_2 \,\middle|\, x_3, x_4 \in R \right\}$$
$$= span(s_1, s_2).$$

Trong đó $s_1 = (-1;-1;1;0)$ và $s_2 = (-2;-1;0;1)$

- Ta gọi s_1, s_2 là các nghiệm đặc biệt của hệ, được xác định bằng cách gán cho 1 biến tự do bằng 1, các biến tự do còn lại bằng 0.
- Số nghiệm đặc biệt bằng số biến tự do.

1. Định nghĩa

Nếu $s_1, s_2, \ldots, s_k$ là các nghiệm đặc biệt của hệ $Ax = \mathrm{O}$ thì ta gọi $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_k s_k$ là nghiệm đầy đủ của hệ $Ax = \mathrm{O}$.

2. Cách tìm nghiệm đặc biệt, nghiệm đầy đủ của $Ax=0$

B1: Dùng các phép biến đổi hàng đưa A về dạng ma trận bậc thang.

B2: Tìm k biến tự do.

B3: Gán cho 1biến tự do bằng 1, các biến tự do còn lại bằng 0. Suy ra các nghiệm đặc biệt: $s_1, s_2, ..., s_k$

B4: Nghiệm đầy đủ của hệ: $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2 + ... + c_k s_k$

VD. Tìm nghiệm đầy đủ của hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 3 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3-h_1]{h_2\to h_2-2h_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -5 & 5 & -10\\ 0 & -5 & 5 & -10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3\to h_3-h_2]{h_2\to -\frac{1}{5}h_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Biến trụ: x_1, x_2. Biến tự do: x_3, x_4.

$$\text{Hpt}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0\\ x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\ x_2=x_3-2x_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=1\\ x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2\times1+3\times0=0\\ x_2-1+2\times0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4=1\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-2\times0+3\times1=0\\ x_2-0+2\times1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-2\end{cases}$$

Các nghiệm đặc biệt:

$$+\ x_3 = 1; x_4 = 0 \Rightarrow s_1 = (0;1;1;0)$$

$$+\ x_4 = 1; x_3 = 0 \Rightarrow s_2 = (1;-2;0;1)$$

Nghiệm đầy đủ của hệ: $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2;\ c_1, c_2 \in R.$

Nhận xét: Cho ma trận A cỡ $m \times n$.

$$N(A) = \left\{ x \in R^n \middle| Ax = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_k s_k \middle| c_1, c_2, \ldots, c_k \in R \right\}$$

$$= span(s_1, s_2, \ldots, s_k)$$

III. Nghiệm riêng, nghiệm đầy đủ của hệ Ax = b

1. Định nghĩa: Một nghiệm cụ thể của hệ $Ax = b$ đgl nghiệm riêng của hệ, ký hiệu x_p.

NX: Để tiện trong tính toán ta thường tìm x_p bằng cách cho tất cả các biến tự do nhận giá trị 0.

2. Cấu trúc nghiệm của hệ $Ax = b$

Định lý: Nếu hệ $Ax = b$ có nghiệm riêng x_p, và x_n là nghiệm đầy đủ của hệ $Ax = \mathrm{O}$ thì nghiệm đầy đủ hay nghiệm tổng quát của hệ $Ax = b$ là $x = x_n + x_p$.

VD. Tìm nghiệm tổng quát của hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left[A|b\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Biến trụ: x_1, x_2. Biến tự do: x_3, x_4.

Nghiệm riêng : $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ \quad\quad x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -7 \end{cases}$

$+\ x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -7, x_1 = 11 \Rightarrow x_p = (11; -7; 0; 0)$

$$Ax = O \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3x_3 + 4x_4 \\ x_1 = 3x_3 - 4x_4 + 2x_3 - x_4 = 5x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Nghiệm đặc biệt:

$+ \ x_3 = 1, \ x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -3 \Rightarrow s_1 = (5;-3;1;0)$

$+ \ x_4 = 1; \ x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 4 \Rightarrow s_2 = (-5;4;0;1)$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ: $x = x_p + c_1 s_1 + c_2 s_2$.

VD. Tìm ma trận A để hệ $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ có nghiệm đầy đủ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Do x co 3×1, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ co $3\times 1 \Rightarrow A$ co 3×3

Do he co nghiem day du la: ... $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ la nghiem rieng $\Rightarrow A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

Do $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la nghiem dac biet $\Rightarrow A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2)

C1: Tu (*) va (**) co: $A\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*)... $\Leftrightarrow A = ...$

C2: Tu nghiem day du $\Rightarrow$ bien tu do la: $x_2, x_3 \Rightarrow$ bien tru la x_1

$\Rightarrow A$ co dang: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, thay vao (*) duoc:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-2c=2 \\ -a+b=0 \\ -a+c=0 \end{cases}, \Leftrightarrow a=b=c=1$$