03 – 04 – 2009

GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 9

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 20.8. ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CONG

• Tính diện tích mặt cong • Các dạng toán cơ bản

1. Đặt vấn đề

• Trong mục 7.6 ta đã biết công thức tính diện tích mặt tròn xoay tạo thành khi quay đường cong

• $y = y(x)$, $a \le x \le b$ quanh trục Ox là $S = \int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

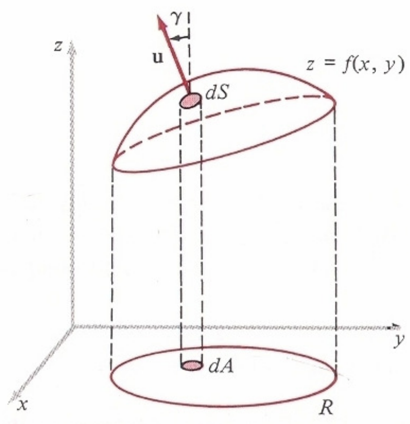
• $x = x(y)$, $c \le y \le d$ quanh trục Oy là $S = \int_c^d 2\pi x(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

• Liệu có thể xây dựng công thức tính diện tích mặt cong bất kỳ.

2. Tính diện tích mặt cong

• Cho mặt cong S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in R$ (đóng, giới nội) nằm trong mặt phẳng xy

• Gọi dA là hình chiếu của yếu tố diện tích mặt cong dS lên mặt phẳng xy, ta có: $dA = dS.\cos\gamma$ hay $dS = \dfrac{dA}{\cos\gamma}$



Hình 20.36

• Diện tích của mặt cong được cho bởi công thức:

$$S = \iint_S dS \text{ hay } S = \iint_R \frac{dA}{\cos\gamma}$$

• Ta tính được $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

• Diện tích mặt cong S là $S = \iint_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA$

3. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tính diện tích phần mặt phẳng $x + y + z = 7$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$

• $z = 7 - x - y$, R: $x^2 + y^2 \le a^2$

• $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

• $S = \iint_R \sqrt{3}\,dA = \sqrt{3}\iint_R dA = \sqrt{3}.\pi a^2$.

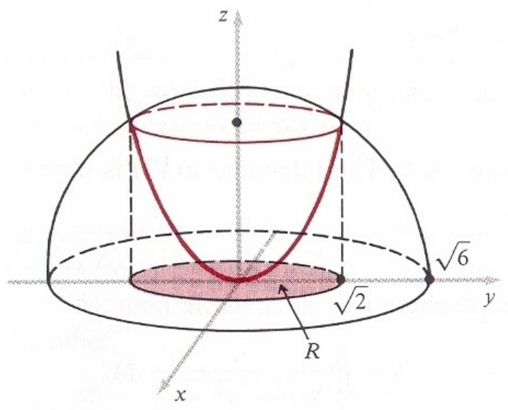
Ví dụ 2. Tìm diện tích của phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm phía trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

• Giao tuyến của hai mặt cong:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z^2 + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \text{ hoặc } z = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Cần tính diện tích mặt cong: $z = x^2 + y^2$, R: $x^2 + y^2 \le 2$, và có $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$
- $S = \iint\limits_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA$
- Đổi sang toạ độ cực:

  $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$.



Hình 20.38

Khi đó

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} . r\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, d\left(1 + 4r^2\right) = \frac{2\pi}{8}\frac{2}{3}\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27 - 1) = \frac{13}{3}\pi .$$

4. Các dạng toán cơ bản

1. Tính diện tích mặt cong

Cho mặt cong $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}$ ta có $S = \iint\limits_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$

- **1(tr. 162).** Tìm diện tích tam giác cắt từ mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$ bởi các mặt phẳng toạ độ.

+) Mặt cong $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$, $R: \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$

+) $z_x = -\frac{1}{3}$, $z_y = -\frac{2}{3}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

+) $S = \iint\limits_R \frac{\sqrt{14}}{3} dx\, dy = \frac{\sqrt{14}}{3} . S_R = \frac{\sqrt{14}}{3} . \frac{6.3}{2} = 3\sqrt{14}$

- **3(tr. 162).** Tìm diện tích khi cắt mặt phẳng $x + y + z = 7$ bởi trụ $x^2 + y^2 = a^2$

+) Mặt cong $z = 7 - x - y$, R: $x^2 + y^2 \le a^2$

+) $z_x = -1 = z_y$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$

+) $S = \iint\limits_R \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} S_R = \sqrt{3}\pi a^2$

- **7(tr. 162).** Tìm diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2$ nằm trên mặt phẳng xy và phía trong trụ $x^2 + y^2 \le ax$

+) Mặt cong $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, R: $x^2 + y^2 \le ax$

+) $z_x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

+) $S = \iint\limits_R \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx\, dy$

+) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le a\cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

+) $= \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} .r\, dr\, d\theta = -\frac{a}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\left(a^2 - r^2\right) d\theta$

$= -\dfrac{a}{2} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{a^2 - r^2}\Big|_0^{a\cos\theta} d\theta = -a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a\sin\theta - a)\, d\theta = -a^2(-\cos\theta - \theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2$

• **5(tr. 162).** Tìm diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa mặt phẳng xy và mặt phẳng $2z + y = 3$.

Gợi ý. +) Mặt cong: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, R: giao của $z^2 = x^2 + y^2$ và $z = \dfrac{1}{2}(3 - y)$

+) $z_x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

+) $S = \iint\limits_R \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx\, dy$

+) Đổi sang toạ độ cực

• **9(tr. 162).** Diện tích khi cắt mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ bởi mặt phẳng $z = 1$

Gợi ý. +) Mặt cong: $z = x^2 + y^2$, R: $x^2 + y^2 \le 1$

+) $S = \iint\limits_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$

+) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

• **11(tr. 162).** Tìm diện tích khi cắt mặt yên ngựa $az = x^2 - y^2$ bởi trụ $x^2 + y^2 = a^2$

Gợi ý. +) Mặt cong $z = \dfrac{1}{a}\left(x^2 - y^2\right)$, R: $x^2 + y^2 \le a^2$

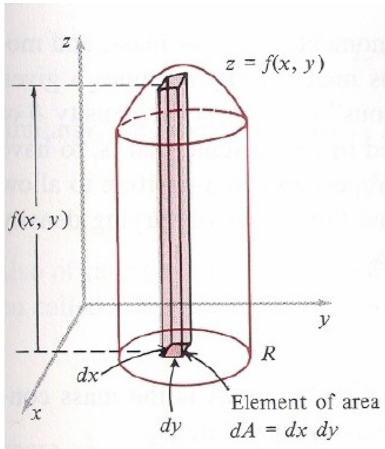
+) $S = \iint\limits_R \sqrt{1 + \dfrac{4x^2}{a^2} + \dfrac{4y^2}{a^2}}\, dx\, dy$

+) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$

§ 20.3. CÁC ỨNG DỤNG VẬT LÝ CỦA TÍCH PHÂN BỘI HAI

- Khối lượng
- Moment
- Trọng tâm của khối lượng
- Moment quán tính
- Các dạng toán cơ bản

• Đã biết $\iint_R f(x, y)\,dA$ được định nghĩa là giới hạn của tổng thực sự cần thiết về phương diện lôgic.
• Khi vận dụng vào thực tế thì quy trình trên là ý tưởng tốt nhất khi cho rằng thể tích bao gồm vô số các cột mảnh vô hạn
• Yếu tố diện tích $dA = dx\,dy$, yếu tố thể tích: $dV = f(x, y)dA$.
• Thể tích là $V = \iint_R f(x, y)\,dA$



Hình 20.13a

• Sự miêu tả này mang ý nghĩa trực giác của tích phân bội hai diễn đạt nội dung chủ yếu của phương pháp tích phân Leibnitz: Để tìm toàn bộ số lượng, hãy nghĩ nó được chia ra thành rất nhiều những miếng nhỏ sau đó cộng tất cả chúng lại
• Trong chương 11 chúng ta đã thảo luận các khái niệm moment, trọng tâm của khối lượng và moment quán tính của bản mỏng đồng chất chiếm miền R trong mặt phẳng xy, (nghĩa là tỉ trọng δ của vật liệu luôn được giả thiết là hằng số)
• Dưới đây chúng ta xét trường hợp bản mỏng có tỉ trọng $\delta(x, y)$ thay đổi.

1. Khối lượng

• Do $\delta(x, y)$ là tỉ trọng bản mỏng nên $\delta(x, y)dA$ là khối lượng của yếu tố diện tích dA
• Khối lượng của bản mỏng là $M = \iint_R \delta(x, y)\,dA$

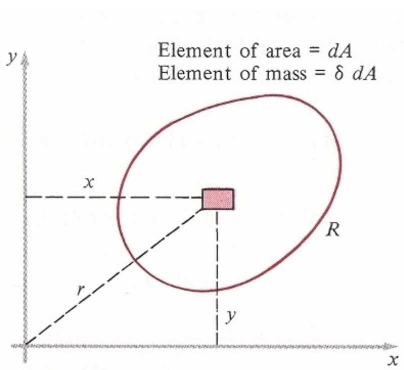
Ví dụ 1. Tính khối lượng của bản mỏng hình vuông với các đỉnh $(0 ; 0)$, $(a ; 0)$, $(a ; a)$, $(0 ; a)$, không đồng chất với $\delta = \delta(x, y) = x + y$
• R: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$

• $M = \iint_R \delta(x, y)\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^a (x + y)\,dx\,dy$

• $= \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_0^a dy = \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} + ay\right)dy$

• $= \left(\frac{a^2}{2}y + a\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} = a^3$

2. Moment



Hình 20.14

• Moment của yếu tố khối lượng $\delta(x, y)dA$ đối với trục Ox là khối lượng tăng lên bội lần y bởi "cánh tay đòn", cụ thể là $y\delta(x, y)dA$
• Moment toàn phần của bản phẳng đối với trục Ox là

$$M_x = \iint_R y\delta(x, y)\,dA$$

• Tương tự moment toàn phần đối với trục Oy là

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y)\,dA$$

Ví dụ 2. Tìm moment toàn phần đối với các trục Ox, Oy của bản phẳng không đồng chất giới hạn bởi: $x = y^2$, $x = 4$, với tỉ trọng $\delta = \delta(y) = y$

• R: $y^2 \le x \le 4$, $-2 \le y \le 2$

• $M_x = \iint_R y.y\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} y^2 dx\,dy = \int_{-2}^{2} y^2\left(4 - y^2\right)dy = \int_{-2}^{2}\left(4y^2 - y^4\right)dy$

$= 2\int_0^2\left(4y^2 - y^4\right)dy = \left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4.2^3}{3} - \frac{2^5}{5} = 2^5.\frac{2}{15} = \frac{64}{15}$

• $M_y = \iint_R x.y\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} yx\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} y.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{4} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} y\left(16 - y^4\right)dy$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2} 16y\,dy - \int_{-2}^{2} y^5\,dy\right] = 0$

3. Trọng tâm của khối lượng

• Trọng tâm của khối lượng là điểm mà trên đó toàn bộ khối lượng của bản phẳng có thể tập trung mà không thay đổi moment của nó theo trục này hay trục kia.

• Điểm $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ là trọng tâm của khối lượng, xác định như sau:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_R x\delta(x, y)\,dA}{\iint_R \delta(x, y)\,dA};\ \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_R y\delta(x, y)\,dA}{\iint_R \delta(x, y)\,dA}$$

• Khi tỉ trọng δ là hằng số thì khối lượng của bản phẳng được phân bố đồng đều, khi đó trọng tâm của khối lượng trở thành trọng tâm hình học của miền R (còn gọi là trọng tâm), xác định như sau:

$$\overline{x} = \frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA}; \qquad \overline{y} = \frac{\iint_R y\,dA}{\iint_R dA}$$

Ví dụ 3. Tìm trọng tâm của khối lượng xét trong ví dụ 1

• R: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$

• Đã có $M = a^3$

• $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R x(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{a^3}\int_0^a\int_0^a \left(x^2+xy\right)dx\,dy = \frac{1}{a^3}\int_0^a \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}y\right)\Big|_0^a dy$

$= \frac{1}{a^3}\int_0^a \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}y\right)dy = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^3}{3}y+\frac{a^2}{2}\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{4}\right) = \frac{7a}{12}$

• $\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R y(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{a^3}\int_0^a\int_0^a \left(xy+y^2\right)dx\,dy = \frac{1}{a^3}\int_0^a \left(y.\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Big|_0^a dy$

$= \frac{1}{a^3}\int_0^a \left(y\frac{a^2}{2}+y^2.a\right)dy = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^2}{2}.\frac{y^2}{2}+a.\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{3}\right) = \frac{7a}{12}$

• Toạ độ trọng tâm: $(\bar{x}, \bar{y})$ ở đó $\bar{x} = \frac{7a}{12}$, $\bar{y} = \frac{7a}{12}$

4. Moment quán tính

• Moment quán tính được coi như độ đo khả năng của hệ thống để ghìm lại gia tốc góc (cũng tương tự như gia tốc của chuyển động thẳng của vật thể).

• Moment quán tính của bản phẳng R đối với trục Ox là $I_x = \iint_R y^2\delta(x,y)\,dA$

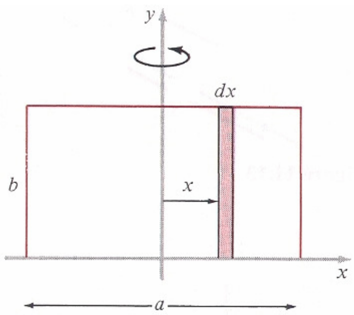
• Moment quán tính của bản phẳng R đối với trục Oy là $I_y = \iint_R x^2\delta(x,y)\,dA$

• Moment quán tính của bản phẳng đối với trục Oz (còn được gọi là gốc toạ độ) là

$$I_z = \iint_R \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y)\,dA$$

• Bên cạnh tầm quan trọng trong vật lý đối với các vật thể quay, moment quán tính có áp dụng quan trọng trong công nghệ xây dựng như: độ cứng của cây dầm tỉ lệ với moment quán tính của phần dầm bắc qua trục nằm ngang và đi qua trọng tâm của nó. Điều này được ứng dụng trong thiết kế các dầm sắt được gọi là "dầm chữ *I*", các gờ ở trên dầm và đáy của dầm trông giống như chữ *I*, làm tăng moment quán tính của dầm và do đó tăng độ cứng của dầm

Ví dụ 4. Một đĩa mỏng đồng chất hình chữ nhật có các cạnh là a, b và mật độ là δ. Tìm moment quán tính của nó quanh một trục đi qua trung điểm của cạnh có độ dài a.



Hình 11.14

• Chọn hệ trục toạ độ như trong hình vẽ sao cho trục Oy là trục quay

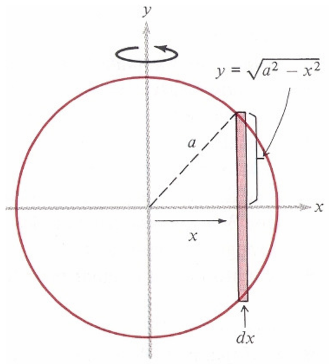
• $R: -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2},\ 0 \le y \le b$

• Moment quán tính của bản phẳng đối với trục Oy là:

$$I_y = \iint\limits_R x^2\delta\, dA = \int_0^b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\delta\, dx\, dy = \delta\int_0^b dy.\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \delta\, y\Big|_0^b . \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = b\delta\frac{2}{3}\left(\frac{a^3}{8}\right) = \frac{1}{12}\delta a^3 b$$

Ví dụ 5. Một tấm kim loại hình tròn mỏng, đồng chất và có bán kính a và khối lượng M. Hãy tìm moment quán tính của nó quanh một đường kính.

- Chọn hệ trục toạ độ như trong hình dưới đây, với hàm mật độ là δ
- R: $x^2 + y^2 \le a^2$
- $I_y = \iint\limits_R x^2\delta\, dA$



Hình 11.15

- Đổi sang toạ độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$

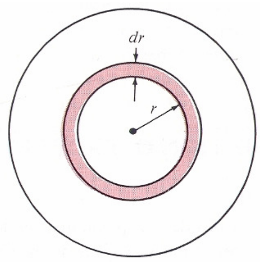
có $$I_y = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\cos^2\theta.\delta.r\, dr\, d\theta = \delta\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta.\int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} . \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^a = \pi\delta.\frac{a^4}{4} = \frac{1}{4}\pi\delta a^4$$

- Do $M = \pi a^2\delta$, nên có $I_y = \frac{1}{4}Ma^2$.

Ví dụ 6. Tìm moment quán tính của tấm kim loại tròn trong ví dụ 5 khi quay quanh một trục đi qua tâm và vuông góc với mặt phẳng chứa tấm kim loại

- R: $x^2 + y^2 \le a^2$, δ là mật độ
- $I_z = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right)\delta\, dA$



Hình 11.16

- Đổi sang toạ độ cực: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$
- $I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2.\delta.r\, dr\, d\theta = \delta\int_0^{2\pi} d\theta.\int_0^a r^3\, dr = 2\pi.\delta.\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{\pi\delta a^4}{2}$
- Do $M = \pi a^2\delta$ nên có $I_z = M\frac{a^2}{2}$.

Ví dụ 7. Cho bản mỏng vật chất chứa trong hình vuông với các đỉnh $(0\ ;\ 0)$, $(a\ ;\ 0)$, $(a\ ;\ a)$, $(0\ ;\ a)$, có tỷ trọng tại điểm $P(x, y)$ là tích các khoảng cách từ P đến các trục toạ độ. Tìm khối lượng của bản phẳng, trọng tâm và moment quán tính của nó đối với trục Ox.

- R: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$
- $\delta = xy$
- $M = \iint\limits_R \delta\, dA = \int_0^a\int_0^a xy\, dx\, dy = \int_0^a x\, dx.\int_0^a y\, dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a . \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{4}$

- $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{4}{a^4}\iint\limits_R x\delta\,dA=\dfrac{4}{a^4}\int\limits_0^a\int\limits_0^a x^2y\,dx\,dy=\dfrac{4}{a^4}\int\limits_0^a x^2dx.\int\limits_0^a y\,dy=\dfrac{4}{a^4}.\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^a.\dfrac{y^2}{2}\Big|_0^a=\dfrac{2a}{3}$
- Tương tự $\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{4}{a^4}\iint\limits_R y\delta\,dA=\dfrac{2a}{3}$, do đó trọng tâm là $\left(\dfrac{2a}{3};\dfrac{2a}{3}\right)$
- $I_x=\iint\limits_R y^2\delta\,dA=\int\limits_0^a\int\limits_0^a xy^3\,dx\,dy=\int\limits_0^a x\,dx.\int\limits_0^a y^3dy=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^a.\dfrac{y^4}{4}\Big|_0^a=\dfrac{a^6}{8}=\dfrac{1}{2}Ma^2$

Chú ý

- Dùng tích phân bội hai để chứng minh công thức Euler: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

(Xem phụ lục A. 21, trang 246)

5. Các dạng toán cơ bản

1. Tìm khối lượng, trọng tâm của bản phẳng vật chất.

- **1(tr. 132).** R là hình vuông với các đỉnh $(0\,;0)$, $(a\,;0)$, $(a\,;a)$, $(0\,;a)$ biết $\delta=x+y$

+) $M=\iint\limits_R\delta(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^a\int\limits_0^a(x+y)\,dx\,dy$

$$=\int\limits_0^a\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=0}^a dy=\int\limits_0^a\left(\frac{a^2}{2}+ay\right)dy=\left(\frac{a^2}{2}y+\frac{ay^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=a^3$$

+) $\bar{x}=\dfrac{1}{M}\iint\limits_R x\delta(x,y)\,dx\,dy=\dfrac{1}{a^3}\int\limits_0^a\int\limits_0^a\left(x^2+xy\right)dx\,dy=\dfrac{7a}{12}$

+) $\bar{y}=\dfrac{1}{M}\iint\limits_R y\delta(x,y)\,dx\,dy=\dfrac{7a}{12}$

- **3(tr. 132).** R là miền giới hạn bởi $x=y^2$ và $x=4$, biết $\delta=x$

+) $x=y^2$, $0\le x\le 4\Rightarrow -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}$, $0\le x\le 4$

+) $M=\int\limits_0^4\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}x\,dy\,dx=\int\limits_0^4 x.2\sqrt{x}\,dx=\dfrac{4}{5}.x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\dfrac{128}{5}$

+)Miền đối xứng qua trục $Ox\Rightarrow\bar{y}=0$

+) $\bar{x}=\dfrac{5}{128}\int\limits_0^4\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}x^2\,dy\,dx=\dfrac{5}{128}\int\limits_0^4 x^2.2\sqrt{x}\,dx=\dfrac{5}{64}.\dfrac{2}{7}.x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4=\dfrac{5}{2^5.7}.2^7=\dfrac{20}{7}$

- **5(tr. 132).** R là miền bị chặn bởi $x=0$ và nửa bên phải của đường tròn $x^2+y^2=a^2$, $\delta=x$

Gợi ý. +) $M = \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{2}{3}a^3$

+) $\bar{y} = 0$ (do có Ox là trục đối xứng)

+) $\bar{x} = \frac{3}{2a^3}\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2\,dy\,dx = \frac{3}{16}\pi a$

• **7(tr. 132).** R là miền nằm giữa $y = \sin x$ và trục x từ $x = 0$ đến $x = \pi$, $\delta = x$

Gợi ý. +) $M = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x\,dy\,dx = \pi$

+) $\bar{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^2\,dy\,dx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi}$

+) $\bar{y} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\sin x} yx\,dy\,dx = \frac{\pi}{8}$

2. Tìm moment quán tính I_x

• **9(tr. 132).** Tìm moment quán tính I_x đối với bản phẳng hình vuông: (0 ; 0), (a ; 0), (a ; a), (0 ; a), với $\delta(x, y) = a$

+) $M = \int_0^a \int_0^a a\,dy\,dx = a^3$

+) $I_x = \int_0^a \int_0^a y^2\,dy\,dx = \int_0^a dx \int_0^a y^2 dy = a.\frac{a^3}{3} = \frac{a^4}{3}$

+) $I_x = \frac{Ma}{3}$

• **11(tr. 132).** Tìm moment quán tính của bản tam giác giới hạn bởi $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, biết tỉ khối là hằng số

+) $M = \int_0^a \int_0^{a-x} dy\,dx = \int_0^a (a-x)dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

+) $I_x = \int_0^a \int_0^{a-x} y^2\,dy\,dx = \int_0^a \frac{1}{3}(a-x)^3\,dx = -\frac{1}{12}(a-x)^4\Big|_0^a = \frac{a^4}{12}$

+) $I_x = \frac{Ma^2}{6}$

• **13(tr. 132).** Giải bài 11 nếu tỉ trọng $\delta = xy$

Gợi ý. +) $M = \int_0^a \int_0^{a-x} xy\, dy\, dx = \frac{a^4}{24}$

+) $I_x = \int_0^a \int_0^{a-x} y^2 xy\, dy\, dx = \frac{a^6}{120}$

+) $I_x = \frac{Ma^2}{5}$

• **25(tr. 138).** Tìm trọng tâm của miền bị chặn bởi đường cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$

Gợi ý. +) Miền đối xứng qua trục cực nên có $M = 2\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi a^3}{2}$

+) $\bar{y} = 0$

+) $\bar{x} = \frac{2}{3\pi a^3}.2\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta$

• **27(tr. 138).** Tìm trọng tâm của một nửa đĩa tròn $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$

Gợi ý. +) $\bar{x} = 0$

+) $M = \frac{\pi a^2}{2}$

+) $\bar{y} = \frac{2}{\pi a^2}.2\int_0^{\pi/2} \int_0^{a} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = \frac{4a}{3\pi}$

• **29(tr. 138).** Tìm thể tích của vật thể nằm dưới nón $z = 2a - r$ có đáy bị chặn bởi đường cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$

Gợi ý. +) $0 \le z \le 2a - r$, $r = a(1 + \cos\theta)$

+) $V = 2\int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} (2a - r) r\, dr\, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}$

• **31(tr. 138).** Đối với vật thể bị chặn bởi mặt phẳng xy, hình trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và paraboloid $z = b(x^2 + y^2)$ với $b > 0$, tìm thể tích và trọng tâm vật thể

Gợi ý. +) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} br^3\, dr\, d\theta = \frac{\pi a^4 b}{2}$

• **33(tr. 138).** Tìm moment quán tính I_z của bản mỏng hình tròn $r = 2a\cos\theta$ với tỉ trọng δ là hằng số

Gợi ý. +) R: $r = 2a\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

+) $I_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2a\cos\theta} \delta r^2 r\,dr\,d\theta = 3\pi a^4\delta$

• **35(tr. 138).** Bản mỏng bị chặn bởi đường tròn $r = a$, tỉ trọng $\delta = \dfrac{a^2}{(a^2+r^2)}$. Tìm khối lượng M và moment quán tính tích cực của nó

Gợi ý. +) $M = \int_0^{2\pi}\int_0^a \dfrac{ra^2}{a^2+r^2}\,dr\,d\theta = \pi a^2 \ln 2$

+) $I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^a \dfrac{r^3a^2}{r^2+a^2}\,dr\,d\theta = \pi a^4(1-\ln 2) = \dfrac{Ma^2(1-\ln 2)}{\ln 2}$

• **37(tr. 138).** Bản mỏng hình quạt bán kính a, góc ở tâm 2α, tỉ trọng δ không đổi. Tìm moment quán tính đối với đường phân giác của góc.

Gợi ý. +) $I_x = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^a r^2\sin^2\theta . r\,dr\,d\theta = \dfrac{a^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$

Chú ý. Tuần sau lí thuyết học mục 20.5