# Bài 9

# PHÉP CHIẾU và PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

# Content

# Content

## Định nghĩa

Ma trận $A$ cỡ $m \times n$, $\mathbf{b}$ là vector trong $\mathbb{R}^m$, **hình chiếu** của $\mathbf{b}$ trên không gian cột $C(A)$ là vector $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$ trực giao với mọi vector thuộc $C(A)$ ($\mathbf{e}$ đgl **vector sai số**).

Gọi $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ là các vector cột của $A$, dễ thấy $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ trực giao với mọi vector thuộc $C(A) \Leftrightarrow \mathbf{c}_j^{\mathrm{T}}.(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 0 \; \forall j = \overline{1, n} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 0$ (1)

Do $\mathbf{p} \in C(A)$ nên đặt $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$, thay vào (1) có:

$$A^{\mathrm{T}}A\hat{\mathbf{x}} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad (*)$$

từ đây giải được $\hat{\mathbf{x}}$ và từ đó tính được $\mathbf{p}$. PT $(*)$ đgl **phương trình chuẩn tắc**.

## Định nghĩa

Ma trận $A$ cỡ $m \times n$, $\mathbf{b}$ là vector trong $\mathbb{R}^m$, **hình chiếu** của $\mathbf{b}$ trên không gian cột C($A$) là vector $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{e} = \mathbf{b}$ - $\mathbf{p}$ trực giao với mọi vector thuộc C($A$) ($\mathbf{e}$ đgl **vector sai số**).

Gọi $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ là các vector cột của $A$, dễ thấy $\mathbf{b}$ - $\mathbf{p}$ trực giao với mọi vector thuộc C($A$) $\Leftrightarrow \mathbf{c}_j^{\mathrm{T}}.(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 0 \; \forall j = \overline{1, n} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 0$ (1)
Do $\mathbf{p} \in C(A)$ nên đặt $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$, thay vào (1) có:

$$A^{\mathrm{T}}A\hat{\mathbf{x}} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad (*)$$

từ đây giải được $\hat{\mathbf{x}}$ và từ đó tính được $\mathbf{p}$. PT $(*)$ đgl **phương trình chuẩn tắc**.

# Content

Từ pt chuẩn tắc $(*)$, có 2 trường hợp sau:
• TH1: $\exists (A^T A)^{-1}$, khi đó: $(*) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$, từ đây có:

$$\mathbf{p} = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

Khi đó, gọi $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ là **ma trận chiếu** ($\mathbf{p} = P\mathbf{b}$).
• TH2: $\nexists (A^T A)^{-1}$, khi đó thay $A$ bởi $D$ là ma trận lập bởi các cột trụ của $A$ và có: $\hat{\mathbf{x}} = (D^T D)^{-1} D^T \mathbf{b}$, từ đó có:

$$\mathbf{p} = D(D^T D)^{-1} D^T \mathbf{b}.$$

Do $A$ có cỡ $m \times n$ nên $A^T A$ có cỡ $n \times n$ và để kiểm tra có $\exists (A^T A)^{-1}$ hay không ta chỉ cần tính $r(A)$:
• Nếu $r(A) = n$ thì $r(A^T A) = n \Rightarrow \exists (A^T A)^{-1}$.
• Nếu $r(A) < n$ thì $r(A^T A) < n \Rightarrow \nexists (A^T A)^{-1}$.

**Chú ý**: Nếu A có cỡ $m \times 1$ và $A \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p} = P\mathbf{b}$ với $P = \dfrac{AA^T}{(A^T A)^{-1}}$.

Từ pt chuẩn tắc $(*)$, có 2 trường hợp sau:

- TH1: $\exists (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, khi đó: $(*) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$, từ đây có:

$$\mathbf{p} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}.$$

Khi đó, gọi $P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ là **ma trận chiếu** ($\mathbf{p} = P\mathbf{b}$).

- TH2: $\nexists (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, khi đó thay $A$ bởi $D$ là ma trận lập bởi các cột trụ của $A$ và có: $\hat{\mathbf{x}} = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$, từ đó có:

$$\mathbf{p} = D(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}\mathbf{b}.$$

Do $A$ có cỡ $m \times n$ nên $A^{\mathrm{T}}A$ có cỡ $n \times n$ và để kiểm tra có $\exists (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ hay không ta chỉ cần tính $r(A)$:

- Nếu $r(A) = n$ thì $r(A^{\mathrm{T}}A) = n \Rightarrow \exists (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$.
- Nếu $r(A) < n$ thì $r(A^{\mathrm{T}}A) < n \Rightarrow \nexists (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$.

**Chú ý**: Nếu A có cỡ $m \times 1$ và $A \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p} = P\mathbf{b}$ với $P = \dfrac{AA^{\mathrm{T}}}{(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}}$.

**Ví dụ 1:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, hình chiếu **p** của **b** trên $C(A)$?

$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, giải $A^{\mathrm{T}}A\hat{\mathbf{x}} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ được $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Do đó, hình chiếu $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 1:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, hình chiếu $\mathbf{p}$ của $\mathbf{b}$ trên $C(A)$?

$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, giải $A^{\mathrm{T}}A\hat{\mathbf{x}} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ được $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Do đó, hình chiếu $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 2:** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$, tìm hình chiếu $\mathbf{p}$ của $\mathbf{b}$ trên $C(A)$?

$A \xrightarrow{H3 \to H3 + H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H3 \to H3 - 2H2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, cột trụ là cột 1, cột 2 nên ta thay $A$ bằng $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Có: $D^{\mathrm{T}}D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$, giải hệ $D^{\mathrm{T}}D\hat{\mathbf{x}} = D^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ được $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Do đó, hình chiếu $\mathbf{p} = D\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**Ví dụ 2:** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$, tìm hình chiếu $\mathbf{p}$ của $\mathbf{b}$ trên C$(A)$?

$A \xrightarrow{H3 \to H3 + H1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H3 \to H3 - 2H2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, cột trụ là cột 1, cột 2 nên ta thay $A$ bằng $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Có: $D^{\mathrm{T}} D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$, giải hệ $D^{\mathrm{T}} D\hat{\mathbf{x}} = D^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ được $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Do đó, hình chiếu $\mathbf{p} = D\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

# Content

• T/c 1:

**Định lí**

Ma trận $A$ cỡ $m \times n$, với mỗi vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ luôn $\exists!\mathbf{p}$ là hình chiếu của $\mathbf{b}$ trên C($A$). Hơn nữa, $||\mathbf{b} - \mathbf{p}|| \leq ||\mathbf{b} - \mathbf{y}|| \ \forall \mathbf{y} \in C(A)$.

Dễ thấy do luôn $\exists\mathbf{p}$ và $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$ nên luôn $\exists\hat{\mathbf{x}}$; tuy nhiên $\hat{\mathbf{x}}$ có thể không phải là duy nhất mặc dù $\mathbf{p}$ là duy nhất.

• T/c 2: cho $A$ có cỡ $m \times n$ và $r(A) = n$, khi đó gọi $P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ là **ma trận chiếu** lên C($A$), dễ thấy: $P^2 = P, P^{\mathrm{T}} = P$ và hình chiếu của vector $\mathbf{b}$ bất kì xuống C($A$) là $\mathbf{p} = P\mathbf{b}$.

• T/c 3: $P$ là ma trận chiếu lên C($A$) còn $I - P$ là m/t chiếu lên N($A^{\mathrm{T}}$)

• T/c 4: ma trận chiếu $P$ cũng là ma trận chính tắc của phép chiếu vuông góc xuống C($A$), một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ biến $\mathbf{b} \mapsto P\mathbf{b} \in C(A)$.

• T/c 5: nếu $A$ là ma trận trực giao thì ma trận chiếu $P = AA^{\mathrm{T}}$.

# Content

## Định nghĩa

**Phương pháp bình phương tối thiểu** là một cách để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.

Có: hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \mathbf{b} \notin C(A)$, khi đó chọn $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{p}$ gần $\mathbf{b}$ nhất, tức là $||\mathbf{b} - \mathbf{p}||$ nhỏ nhất. Sau đó tìm $\mathbf{x}$ mà: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

## Định nghĩa

**Nghiệm bình phương tối thiểu** của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $A$ là ma trận thực cỡ $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ là $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ thỏa mãn:

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}||.$$

**Nhận xét**: nếu hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm thì nghiệm bình phương tối thiểu trùng với nghiệm thông thường.

## Định nghĩa

**Phương pháp bình phương tối thiểu** là một cách để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.

Có: hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \mathbf{b} \notin C(A)$, khi đó chọn $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{p}$ gần $\mathbf{b}$ nhất, tức là $||\mathbf{b} - \mathbf{p}||$ nhỏ nhất. Sau đó tìm $\mathbf{x}$ mà: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

## Định nghĩa

**Nghiệm bình phương tối thiểu** của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $A$ là ma trận thực cỡ $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ là $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ thỏa mãn:

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}||.$$

**Nhận xét**: nếu hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm thì nghiệm bình phương tối thiểu trùng với nghiệm thông thường.

## Định nghĩa

**Phương pháp bình phương tối thiểu** là một cách để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.

Có: hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \mathbf{b} \notin C(A)$, khi đó chọn $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{p}$ gần $\mathbf{b}$ nhất, tức là $||\mathbf{b} - \mathbf{p}||$ nhỏ nhất. Sau đó tìm $\mathbf{x}$ mà: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

## Định nghĩa

**Nghiệm bình phương tối thiểu** của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $A$ là ma trận thực cỡ $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ là $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ thỏa mãn:

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}||.$$

**Nhận xét**: nếu hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm thì nghiệm bình phương tối thiểu trùng với nghiệm thông thường.

### Định nghĩa

**Phương pháp bình phương tối thiểu** là một cách để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.

Có: hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b} \notin C(A)$, khi đó chọn $\mathbf{p} \in C(A)$ sao cho $\mathbf{p}$ gần $\mathbf{b}$ nhất, tức là $||\mathbf{b} - \mathbf{p}||$ nhỏ nhất. Sau đó tìm $\mathbf{x}$ mà: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

### Định nghĩa

**Nghiệm bình phương tối thiểu** của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $A$ là ma trận thực cỡ $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ là $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ thỏa mãn:

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} ||\mathbf{b} - \mathbf{Ax}||.$$

**Nhận xét**: nếu hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm thì nghiệm bình phương tối thiểu trùng với nghiệm thông thường.

# Content

Xét hệ: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, nghiệm bình phương tối thiểu của hệ này chính là nghiệm của hệ:

$$A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad (**)$$

Chi tiết hơn nữa, cụ thể sẽ có 2 trường hợp sau:

• TH1: $\exists(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, khi đó:

$$(**) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

• TH2: $\nexists(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$, khi đó thay $A$ bởi $D$ là ma trận lập bởi các cột trụ của $A$ và có:

$$(**) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}D^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

# Content

## Bài toán

Giả sử có $m$ điểm $(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$, ta muốn tìm đường có phương trình dạng: $y = f(t) = C_0 + C_1 t + \ldots + C_n t^n$ gần $m$ điểm đã cho nhất (tức là $\sum_{i=1}^{m} \left\{ [f(t_i) - y_i]^2 \right\}$ nhỏ nhất).

Cách giải:

- B1: Xét hệ: $\begin{cases} C_0 + C_1 t_1 + \ldots + C_n t_1^n = y_1 \\ \ldots \\ C_0 + C_1 t_m + \ldots + C_n t_m^n = y_m \end{cases}$ hay $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(*)$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & \ldots & t_m^n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_0 \\ \ldots \\ C_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- B2: bộ hệ số $(C_0, \ldots, C_n)$ phải tìm chính là nghiệm bình phương tối thiểu của $(*)$ hay nghiệm của hệ $A^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

## Bài toán

Giả sử có $m$ điểm $(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$, ta muốn tìm đường có phương trình dạng: $y = f(t) = C_0 + C_1 t + \ldots + C_n t^n$ gần $m$ điểm đã cho nhất (tức là $\sum\limits_{i=1}^{m} \left\{[f(t_i) - y_i]^2\right\}$ nhỏ nhất).

Cách giải:

• B1: Xét hệ: $\begin{cases} C_0 + C_1 t_1 + \ldots + C_n t_1^n = y_1 \\ \ldots \\ C_0 + C_1 t_m + \ldots + C_n t_m^n = y_m \end{cases}$ hay $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(*)$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & \ldots & t_m^n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_0 \\ \ldots \\ C_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix}$$

• B2: bộ hệ số $(C_0, \ldots, C_n)$ phải tìm chính là nghiệm bình phương tối thiểu của $(*)$ hay nghiệm của hệ $A^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

**Ví dụ**: Tìm parabol gần nhất 4 điểm sau: (0,12), (1,8), (2,16), (3,16).

Gọi parabol phải tìm có dạng: $y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$, từ đó có hệ:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ với } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ta tính được: $A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}, A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 52 \\ 88 \\ 216 \end{bmatrix}$, sau đó giải hệ $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ được $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, do đó parabol phải tìm là: $y = 11 - t + t^2$.

**Ví dụ**: Tìm parabol gần nhất 4 điểm sau: (0,12), (1,8), (2,16), (3,16).

Gọi parabol phải tìm có dạng: $y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$, từ đó có hệ:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ với } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Ta tính được: $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}, A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 52 \\ 88 \\ 216 \end{bmatrix}$, sau đó giải hệ $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ được $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, do đó parabol phải tìm là: $y = 11 - t + t^2$.