BÀI 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

I. Hệ phương trình tuyến tính

1. Định nghĩa

a. Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó a_{ij}, b_i là các hằng số; $x_1, \ldots, x_n$ là các ẩn.

(1) đgl biểu diễn dạng hàng của hệ pttt.

b. $(1) \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$

đgl biểu diễn dưới dạng cột của hệ pttt.

c. $(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$

đgl biểu diễn dạng phương trình ma trận của hệ

Đặt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$

$(1) \Leftrightarrow Ax = b$

Ta gọi A là ma trận hệ số, b là véc tơ cột tự do

và $\left[A \middle| b \right]$ là ma trận mở rộng của hệ (1).

VD. Biểu diễn hệ sau dưới các dạng có thể. Xác định ma trận hệ số và ma trận mở rộng của nó.

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -x+4y-5z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

VD. Nhân A và véc tơ x theo 2 cách:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ và } x=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Một số hệ tuyến tính đặc biệt

2.1. Hệ dạng tam giác

a. Định nghĩa: Là hệ n ẩn, n phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với $a_{ii} \neq 0$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các hằng số.

b. Cách giải: Giải hệ theo thứ tự ngược từ dưới lên ta lần lượt thu được $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$.

VD. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ 3y+5z=21 \\ 2z=6 \end{cases}$

2.2. Hệ dạng bậc thang

a. Khái niệm

+ Là hệ phương trình mà ma trận mở rộng của hệ là ma trận bậc thang.

+ Những ẩn có hệ số là trụ đgl các biến trụ, các ẩn còn lại đgl các biến tự do.

VD. Chỉ ra hệ dạng bậc thang và xác định biến trụ, biến tự do trong hệ đó:

a. $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y - 5z = 21 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y - z - t = 4 \\ 2y - z + t = 12 \\ 5z + 2t = 0 \end{cases}$

b. Cách giải

B1. Chuyển các số hạng chứa biến tự do sang vế phải và coi các biến tự do như các tham số.

B2: Hệ có dạng tam giác đối với các biến trụ. Giải ngược từ dưới lên thu được nghiệm của hệ.

VD. Giải hệ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_4 = 2 \end{cases}$

$$[A\,|\,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right],$$

bien tru: x_1, x_2, x_4

bien tu do: x_3

$$Co: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 3 - x_3 \\ -x_2 + x_4 = 1 + 5x_3 \\ -2x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - (-1) = 3 - x_3 \\ -x_2 + (-1) = 1 + 5x_3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \ldots \\ x_2 = -2 - 5x_3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Phương pháp khử Gauss giải hệ tuyến tính

a. Ý tưởng: Dùng các phép biến đổi tương đương để đưa hệ về dạng bậc thang.

b. Các phép biến đổi tương đương:

+ Đổi chỗ hai phương trình của hệ.

+ Thay 1 phương trình của hệ bằng chính phương trình đó cộng (trừ) bội của phương trình khác.

+ Nhân 2 vế của phương trình với số khác 0.

Chú ý:

+ Trong khi biến đổi nếu xuất hiện phương trình dạng $0 = b\ (b \neq 0)$ thì kết luận hệ vô nghiệm.

+ Giải hệ bằng phương pháp Gauss thực hiện bằng cách biến đổi ma trận mở rộng về ma trận bậc thang.

VD. Giải các hệ sau bằng phương pháp Gauss:

a. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -8 \end{cases}$

$$[A\,|\,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 7 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right] \xleftrightarrow[H3 \to H3 - 2H1]{H2 \to H2 + H1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -11 \end{array}\right] \xleftrightarrow{H3 \to H3 - H2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Bien tru: x_1, x_2, x_3; bien tu do: x_4

$$Co: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 6x_4 = -5 \\ -2x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 + x_4 \\ x_2 - x_3 = -5 - 6x_4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

VD. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+2y+z=m \\ x+y+(m-2)z=1 \\ x+2y+mz=2 \end{cases}$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & m-2 & 1 \\ 1 & 2 & m & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[H3\to H3-H1]{H2\to H2-H1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \end{array}\right]$$

$Khi: m-1=0 \Leftrightarrow m=1, bien$ tru la: x, y, bien tu do la: z

$$\text{Co:}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-3 & 1-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{vo nghiem}$$

$Khi: m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1, bien$ tru la: x, y, z; khong co bien tu do

$$Co:\begin{cases} x+2y+z=m \\ -y+(m-3)z=1-m \\ (m-1)z=2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+\dfrac{2-m}{m-1}=m \\ -y+(m-3)\dfrac{2-m}{m-1}=1-m \\ z=\dfrac{2-m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

II. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Định nghĩa

- Ma trận vuông A đgl ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I$.
- Ta gọi B là ma trận nghịch đảo của A.
- Ký hiệu A^{-1} để chỉ ma trận nghịch đảo của A.

Do đó $B = A^{-1}$

VD. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ có nghịch đảo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Tổng quát $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Khi đó: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Định lý : Nếu $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ và $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ là hai ma trận khả nghịch và $x\neq 0$ thì:

- $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $\left(xA\right)^{-1}=x^{-1}A^{-1}$
- $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$

Chú ý:

+ Nếu A khả nghịch thì $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

+ Nếu A khả nghịch thì $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

+ Nếu A khả nghịch thì $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$

+ A, B khả nghịch thì $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

VD. Giải các phương trình ma trận sau:

b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$VD: a, Co: \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\times 1 - 1\times 1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b, Co: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\times 1 - 1\times 1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c, X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Phương pháp Gauss – Jordan tìm ma trận nghịch đảo

a. Bài toán: Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận vuông cấp n khả nghịch A.

b. Ý tưởng

- Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các cột của A^{-1} và $e_1, e_2, ..., e_n$ là các cột ma trận đơn vị I cấp n.
- $A^{-1} = [x_1\ x_2\ ...\ x_n]$ và $I = [e_1\ \mathrm{e}_2\ ...\ \mathrm{e}_n]$.
- Vì $A.A^{-1} = I$ nên $A[x_1\ x_2\ ...\ x_n] = [e_1\ \mathrm{e}_2\ ...\ \mathrm{e}_n]$

$$\Leftrightarrow [Ax_1\ Ax_2\ ...\ Ax_n] = [e_1\ \mathrm{e}_2\ ...\ \mathrm{e}_n]$$

$$\Leftrightarrow Ax_i = e_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

- Do n hpt này có cùng ma trận hệ số nên giải đồng thời, tức là biến đổi $\left[A|I\right]$ thành $\left[I|A^{-1}\right]$

c. ***Nội dung phương pháp Gauss – Jordan***

+ B1: Ghép ma trận đơn vị I cùng cấp với A vào bên phải A để được ma trận mở rộng $\left[A|I\right]$

+ B2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa $\left[A|I\right]$ về dạng $\left[I|A^{-1}\right]$;

+ B3: Kết luận.

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}.

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H3 \to H3 - 2H1]{H2 \to H2 - H1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H3 \to H3 - H2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H2 \to H2 + H3]{H1 \to H1 - 2H3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H1 \to H1 + H2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{H2 \to [1/(-1)]H2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$