Bài số 13

CHUỖI ĐAN DẤU. CHUỖI LŨY THỪA. CHUỖI TAYLOR

I. Chuỗi đan dấu

1) Chuỗi có dấu bất kỳ

❖ **Dạng:** $\sum a_n$ trong đó a_n có dấu bất kỳ.

◆ Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là chuỗi dương

+ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối)

+ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ thì ta chưa có kết luận đối với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

+ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là bán hội tụ.

Ví dụ : Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$: là chuỗi có dấu bất kỳ, chuỗi này hội tụ tuyệt đối.

2. Chuỗi đan dấu

❖ **Dạng :** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ trong đó $a_n > 0$.

Ví dụ 1: + Chuỗi: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{n}$ (1)

+ Chuỗi: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{2n-1}$. (2)

Tiêu chuẩn hội tụ (Tiêu chuẩn Leibniz)

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, $a_n > 0, \forall n$.

Nếu các phần tử a_n của chúng tạo thành **dãy số $\{a_n\}$ giảm dần tới 0**, tức là:

(i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Khi đó chuỗi hội tụ.

<u>Ví dụ 2.</u> Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu chỉ ra 2 chuỗi (1) và (2) hội tụ. Hơn nữa ta còn có

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2 \text{ và } 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

<u>Ví dụ 3.</u> Xác định tính hội tụ của chuỗi đan dấu sau

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1000+5n} \qquad\qquad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$$

<u>Giải:</u> (a) Chuỗi này phân kỳ.

(b) Chuỗi này là chuỗi đan dấu với $a_n=\dfrac{\ln n}{n}$.

+ Xét hàm số

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \quad \text{có đạo hàm} \quad f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

+ Đạo hàm âm với $x>e$, do vậy $f(x)$ giảm khi $x>e$, và do vậy $a_n\ge a_{n+1}$, $\forall n\ge 3$.

+ Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$.

+ Theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi đã cho hội tụ.

<u>II. Chuỗi lũy thừa</u>

<u>A. Chuỗi hàm</u>

❖ Dạng: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, trong đó $u_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$ là các hàm số của biến x.

• Điểm x thuộc tập xác định của chuỗi hàm nếu $x\in\bigcap\limits_n D_n$, $n=1,2,\ldots$ trong đó D_n là tập xác định của hàm số u_n.

• Với mỗi x_0 thuộc tập xác định ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, nếu chuỗi số này hội tụ (phân kỳ) ta nói rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ (phân kỳ) tại x_0. Tập hợp tất cả các điểm mà tại đó chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ được gọi là ***<u>miền hội tụ</u>*** của chuỗi hàm.

<u>Ví dụ 1:</u> Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

+ Hội tụ với mọi $x:|x|<1$ và khi đó: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

+ Phân kỳ với mọi $x:|x|\ge 1$.

• Một chuỗi hàm chỉ có ý nghĩa trong miền hội tụ của nó. Tuy nhiên việc tìm miền hội tụ của một chuỗi hàm bất kỳ không đơn giản, trong chương trình học này chúng ta quan tâm tới một dạng chuỗi hàm đặc biệt: ***Chuỗi lũy thừa***

B. Chuỗi lũy thừa.

1. Định nghĩa.

❖ **Dạng:** *Chuỗi luỹ thừa* là một chuỗi hàm có dạng sau:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (1)$$

trong đó hệ số a_n là hệ số và x là biến.

◆ ***Chú ý*** **:**+ Mọi chuỗi lũy thừa đều hội tụ tại điểm $x = 0$.

◆ **Ví dụ 1:** + Chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^{2x}}$: Không là chuỗi lũy thừa

+ Chuỗi cấp số nhân :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \text{ là chuỗi lũy thừa với } a_n =, n = 1,2,...$$

+ Chuỗi hàm: $1 + 3x^2 + 5x^4 + ...$ là chuỗi lũy thừa với :

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ n+1, & n = 2k \end{cases}, k = 0,1,2,...$$

và ta viết được : $1 + 3x^2 + 5x^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n}$.

2. Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

a) Bổ đề Abel.

Nhận xét:

+ Rõ ràng là mọi chuỗi luỹ thừa đều hội tụ với $x = 0$.
+ Có những chuỗi hội tụ *khi và chỉ khi* $x = 0$, ví dụ chuỗi

$$\sum n^n x^n = x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + 4^4 x^4 ....$$

Thật vậy : Để ý rằng với bất kỳ giá trị $x \neq 0$ nào ta cũng có $|nx| > 1$ nếu n đủ lớn, do vậy với mỗi x_o phần tử thứ n là : $u_n = (nx_0)^n$ không tiến tới 0 và do vậy chuỗi không thể hội tụ.

+ Xét chuỗi : $\sum u_n(x) = \sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ hội tụ với mọi giá trị của *x*.

Thật vậy : - Tại $x = 0$: Ta có chuỗi số hội tụ.

- Với mỗi $x_0 \neq 0$ ta có chuỗi số $\sum | u_n(x_0) |$ (*) dương, xét tỉ số :

$$\frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|} = \frac{|x_0^{n+1} / (n+1)!|}{|x_0^n / n!|} = \frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x_0|^n} = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0$$

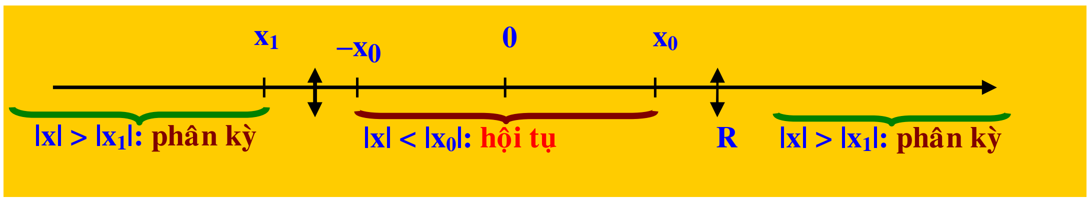
suy ra tổng riêng $S_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k(x_0)|$ tạo thành dãy giảm, từ đó chuỗi số (*) hội tụ, tức là chuỗi hàm $\sum u_n(x)$ hội tụ tại mọi $x_0 \neq 0$.

\+ Xét chuỗi cấp số nhân : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ hội tụ trong khoảng $|x| < 1$, và phân kỳ khi $|x| \geq 1$ nằm ngoài khoảng đó.

❖ **Bổ đề Abel:**

\+ Nếu một chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$, khi đó nó hội tụ tại tất cả các điểm x thoả mãn $|x| < |x_0|$.

\+ Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ tại x_1 thì nó sẽ phân kỳ tại tất cả các điểm x thoả mãn $|x| > |x_1|$.



❖ ***Nhận xét***

◆ Cho một chuỗi luỹ thừa $\sum a_n x^n$, khi đó chỉ một trong các phát biểu sau là đúng:

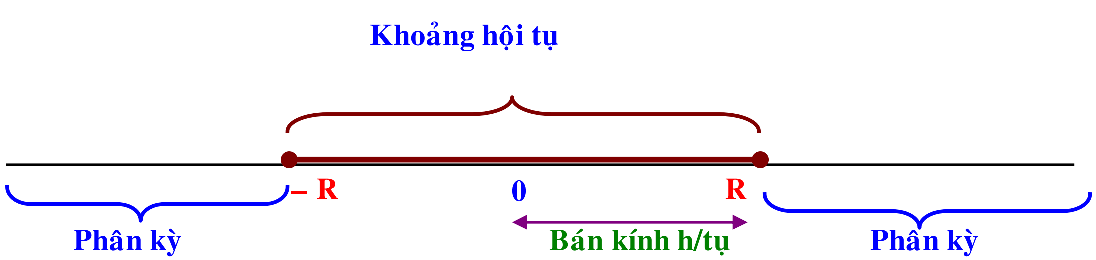
i. Chuỗi chỉ hội tụ với $x = 0$.

ii. Chuỗi hội tụ với mọi x .

iii. Tồn tại ít nhất một số thực $R > 0$ sao cho chuỗi hội tụ với $|x| < R$ | và phân kỳ với $|x| > R$.

◆ Mọi chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$ đều có ***một bán kính hội tụ*** R , trong đó $0 \leq R \leq +\infty$, khi đó chuỗi hội tụ với $|x| < R$ | và phân kỳ với $|x| > R$.

Nếu $R = 0$: chuỗi hội tụ chỉ khi $x = 0$, và $R = +\infty$ thì chuỗi hội tụ với mọi x.



b. Công thức tính bán kính hội tụ

◆ Cho chuỗi lũy thừa $\sum a_n x^n$, gọi R là ***bán kính hội tụ.*** Khi đó, R được tính bởi một trong hai công thức sau: $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ hoặc: $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

c. Quy tắc tìm miềm hội tụ của chuỗi lũy thừa.

- ***Bước 1.*** + Tìm bán kính hội tụ R,
  - Nếu $R = 0$: Miền hội tụ là tập một điểm $\{O\}$,
  - Nếu $R = +\infty$: Miền hội tụ là toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$
  - Nếu $0 < R < +\infty$ suy ra chuỗi lũy thừa hội tụ ít nhất trong $(-R, R)$, sau đó chuyển xuống bước 2.
- ***Bước 2.*** Kiểm tra tính hội tụ của chuỗi tại hai đầu mút.
- ***Bước 3.*** Kết luận

• **Ví dụ 2.** Tìm khoảng hội tụ của chuỗi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2} = x + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} + \ldots.$

Giải: + Tìm bán kính hội tụ: ta có $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

do vậy $R = 1$ suy ra chuỗi lũy thừa hộ tụ ít nhất trong $(-1,1)$.

+ Tại $x = 1$ chuỗi trở thành $\sum\dfrac{1}{n^2}$, chuỗi này là một $p-$ chuỗi hội tụ.

+ Tại $x = -1$ chuỗi trở thành $\sum\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, đây chuỗi đan dấu hội tụ tiêu chuẩn Leibniz.

+ Do vậy khoảng hội tụ của chuỗi là toàn bộ khoảng $[-1;1]$.

• **Ví dụ 3.** Tìm khoảng hội tụ của chuỗi sau

$$\sum\frac{n+2}{3^n}x^n = 2 + \frac{3}{3}x + \frac{4}{3^2}x^2 + \ldots$$

Giải: + Tính bán kính hội tụ: Trường hợp này ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{3^n}.\frac{3^{n+1}}{n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+3}.3 = 3 = R$$

do vậy $R = 3$, suy ra chuỗi hội tụ ít nhất trong $(-3,3)$.

+ Tại $x = 3$ chuỗi trở thành: $2 + 3 + 4 + \ldots$: phân kỳ.
+ T ại $x = -3$ chuỗi trở thành $2 - 3 + 4 + \ldots$: phân kỳ
+ Vậy khoảng hội tụ là $(-3;3)$.

• **Ví dụ 4.** **i)** Tìm khoảng hội tụ của chuỗi sau

$$\sum(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

Giải: + Ta không áp dụng một cách trực tiếp như các Ví dụ trên vì một nửa các hệ số của chuỗi này là 0.

+ Đặt $y = x^2$ chuỗi có thể được viết dưới dạng: $1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - ...$ (**)

Ta sẽ tìm miền hội tụ của (**)

+ Tính bán kính hội tụ:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1/(2n)!}{1/(2n+2)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty}(2n+1)(2n+2) = +\infty$$

vậy $R = +\infty$ đối với chuỗi (**), nên chuỗi (**) hội tụ với mọi $y \geq 0$.

+ Vậy nên chuỗi ban đầu cũng hội tụ với mọi x, vậy khoảng hội tụ cần tìm là $(-\infty;+\infty)$.

ii) Tìm khoảng hội tụ của chuỗi sau

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{n} = \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{3} + ..$$

Giải: + Với $x_0 \in \mathbb{R}$ ta có chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_0^{2n+1}}{n}$ với $a_n = \frac{x_0^{2n+1}}{n}$; $a_{n+1} = \frac{x_0^{2n+1}}{n+1}$ (***)

+ Xét: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_0^{2n+3}}{(n+1)}.\frac{n}{x_0^{2n+1}}\right| = x_0^2$.

+ Chuỗi (***) hội tụ nếu $-1 < x_0 < 1$, phân kỳ nếu $x_0 < -1;\quad x_0 > 1$.

+ Tại $x_0 = -1$: ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

+ Tại $x_0 = 1$: ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

+ Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1;1)$.

◆ ***Chú ý :*** Nếu a là một số thực, chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... \qquad (*)$$

gọi là chuỗi luỹ thừa tâm a.

+ Chúng ta đặt $z = x - a$, khi đó (2) trở thành $\sum a_n z^n$ (**) là một chuỗi luỹ thừa của z.

+ Nếu $\sum a_n z^n$ có miền hội tụ chẳng hạn là $[-R;R)$ tức là (3) hội tụ hội tụ với $-R \leq z < R$, thì ta có $a - R \leq x < a + R$ và khi đó $[\mathrm{a} - R; a + R)$ là khoảng hội tụ của (*) và R là bán kính hội tụ của chuỗi (*).

+ Do đó ta thường xét chủ yếu tới chuỗi luỹ thừa tại 0.

• **Ví dụ 5.** Tìm miềm hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}(x-2)^n \qquad (4)$$

Giải : + Đặt $y = (x-2)$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} y^n$ (5)

Xét chuỗi (5) :

+ Ta có $R = 1$, từ đó chuỗi (5) hội tụ ít nhất trong $\left(-1,1\right)$.
+ Tại $y = -1$, chuỗi (5) phân kỳ.
+ Tại $y = 1$, chuỗi (5) phân kỳ.
+ Do đó chuỗi (5) có miền hội tụ là $\left(-1,1\right)$.
+ Vậy chuỗi (4) hội tụ trong miền $\left(1,3\right)$.

3. Đạo hàm và tích phân chuỗi lũy thừa (TỰ ĐỌC).

◆ Xét ***chuỗi luỹ thừa*** $\sum a_n x^n$ ***hội tụ với bán kính hội tụ dương*** R, với mỗi x nằm ***trong miền hội tụ*** chúng ta định nghĩa $f(x)$ là tổng của chuỗi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

◆ Khi đó ta có những khẳng định sau :

(i) *Hàm số* $f(x)$ *được định nghĩa bởi (1) là* ***liên tục*** *trong khoảng mở* $(-R;R)$.

(ii) *Hàm số* $f(x)$ *có thể* **lấy đạo hàm** *trên* $(-R;R)$, *và đạo hàm của nó là*

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

(iii) *Nếu* $x \in (-R;R)$ *khi đó ta có :*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1} + \ldots$$

◆ **Chú ý :**

• Như vậy : trong miền trong của miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, chuỗi lũy thừa là một hàm khả vi vô hạn, và khi đó $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$ và $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$ hội tụ trong khoảng $(-R;R)$.

• Khẳng định trên chỉ đúng (trong miền hội tụ) đối với chuỗi lũy thừa, đối với chuỗi hàm bất kỳ điều này chưa chắc đã đúng.

Ví dụ 6: Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$:

+ Chuỗi hàm này hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Lấy đạo hàm từng phần tử cho ta chuỗi mới $\sum \frac{\cos nx}{n}$, điều này là không thể được vì chuỗi này phân kỳ với $x = 0$.

• **Ví dụ 7.** Tìm biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm số $\ln(1+x)$

Lời giải: + Ta có $\frac{d}{dx}\left(\ln(x+1)\right) = \frac{1}{1+x}$

+ Mà với $|x| < 1$ ta có $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x + \ldots$

+ Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng (iii) với để ý $\ln(1+x)$ bằng 0 khi $x = 0$, chúng ta thu được :

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...==\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

• **Ví dụ 8.** Tìm khai triển thành chuỗi lũy thừa $\tan^{-1}x$.

Lời giải: + Ta có $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

+ Mà , $|x|<1$ ta có $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$

+ Áp dụng (iii) : $\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+...)\,dt$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \text{với } |x|<1.$$

• **Ví dụ 9.** Tìm biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm $\frac{1}{(1-x)^2}$ và $\frac{1}{(1-x)^3}$.

Lời giải: +Ta nhận thấy rằng : $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

+ Ta lại có $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ với $|x|<1$,

+ Do đó : $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+...+x^n+...)=1+2x+3x^2+...x^{n-1}+...$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)x^n$$

+ Tương tự : $\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]=\frac{d}{dx}(1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...)$

$$=2+3.2x+4.3x^2+...+n(n-1)x^{n-2}\;...$$

+ Do vậy: $\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}\left[2+3.2x+4.3x^2+...+n(n-1)x^{n-2}+...\right]$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)\quad(n+1)}{2}x^n$$

• **Ví dụ 10.** Tìm tổng của chuỗi sau : $x+4x^2+9x^3+...=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$

Lời giải: + Chuỗi có bán kính hội tụ $R=1$, nên chuỗi hội tụ đến hàm số $f(x)$ với $|x|<1$.

+ Do đó ta có thể viết : $f(x)=x+4x^2+9x^3+...+n^2x^n+...=xg\left(x\right)$ trong đó

$$g(x)=1+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$$

+ Mặt khác:

$$g(x)=\frac{d}{dx}\left(x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots\right)=\frac{d}{dx}\left[x\left(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots\right)\right]$$

+ Theo Ví dụ 4 : $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

+ Nên: $g(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$. Vậy: $f(x)=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

III. Chuỗi Taylor

◆ Cho hàm số $f(x)$ có đaoh hàm mọi cấp tại $x=a$, khi đó ***chuỗi Taylor*** của $f(x)$ tại $x=a$ là :

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.\quad(1)$$

Khi $a=0$ ta có **chuỗi Maclaurint** :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,.\qquad(2)$$

◆ Nếu các chuỗi lũy thừa ***hội tụ*** với **bán kính hội tụ** $R>0$ thì ***trong miền hội tụ***, các chuỗi lũy thừa ấy sẽ hội tụ tới hàm $f(x)$, và khi đó ta có :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\qquad(3)$$

hoặc : $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,,\qquad(4)$$

Và khi đó ta nói rằng hàm số $f(x)$ được **khai triển thành chuỗi Taylor** (hoặc chuỗi Maclaurint).

+ Số $a_n=\dfrac{f^n(a)}{n!}$ (hoặc $a_n=\dfrac{f^n(0)}{n!}$) được gọi là ***hệ số Taylor*** của $f(x)$ trong khai triển (3) hoặc trong (2).

+ Phần dư $R_n(x)$ (trong khai triển (4)) : $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

+ Chuỗi Taylor ở vế phải của (4) hội tụ về $f(x)$ khi : $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

+ Công thức chung tiện lợi nhất cho $R_n(x)$ là $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, với $0<c<x$.

• **Ví dụ 1:** Tìm chuỗi Taylor của $f(x)=e^x$ và chứng minh nó hội tụ tới $f(x)=e^x$ với mọi x .

Lời giải: + Ta có:

$$\begin{array}{lll} f(x)=e^x & & f(0)=1\\ f'(x)=e^x & & f'(0)=1\\ f''(x)=e^x & & f''(0)=1\ldots\ldots \end{array}$$

\+ Ta nhận được chuỗi Maclaurint của hàm số : $1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

\+ Xét phần dư $R_n(x)$, đặt $M=\max_{[0;x]} e^c = e^x$, khi đó với mỗi $x\in\mathbb{R}$:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ khi } n\to\infty$$

\+ Như vậy chuỗi Maclaurint hội tụ về hàm $f(x)=e^x$, và ta có :

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

• **Ví dụ 2:** Tìm chuỗi Taylor của $f(x)=\sin x$ và chứng minh nó hội tụ tới $\sin x$ với mọi x.

Lời giải: + Ta có

$$\begin{array}{lll} f(x)=\sin x & & f(0)=0\\ f'(x)=\cos x & & f'(0)=1\\ f''(x)=-\sin x & & f''(0)=0\\ f'''(x)=-\cos x & & f'''(0)=-1 \end{array}$$

\+ Chuỗi Taylor của $f(x)=\sin x$ là $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

\+ Với $\forall x$ ta có : $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=|\sin x|$ hoặc $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=|\cos x|$ nên $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le 1$ với mọi c.

nên : $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ khi $n\to\infty$

\+ Vậy : $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với $\forall x$.

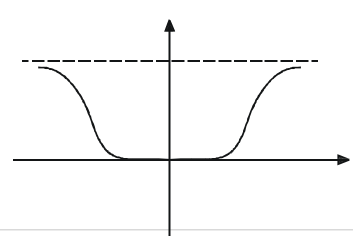
• **Ví dụ 3:** Tương tự với mọi x ta có :

$$f(x)=cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+...\right]_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5.2!}-\frac{1}{7.3!}+...$$

◆ **Chú ý:** Xét hàm $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$



là hàm liên tục và có đạo hàm mọi cấp tại mọi x, và đạo hàm triệt tiêu mọi cấp tại $x = 0$, tức là $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi n nguyên dương. Điều này có nghĩa là đồ thị của $f(x)$ là trơn vô hạn tại gốc. Khi đó chuỗi Maclaurint của $f(x)$ là $0 + 0 + 0 + \ldots..$

hội tụ với mọi x nhưng hội tụ tới $f(x)$ chỉ tại $x = 0$. Như vậy, mặc dù hàm khả vi vô hạn tại mọi x, nó vẫn có thể không nhất thiết khai triển bởi chuỗi Taylor của nó.

❖ Một số khai triển cần nhớ

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}(1)^{n+1}x^n \; ; \; -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \, , \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1 \; ;$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \; ;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \; ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

IV. Các phép toán về chuỗi lũy thừa (tự đọc)

1. Phép cộng : Cho $f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots..$ có miền hội tụ $|x| < R_1$

và $g(x) = \sum b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots..$ có miền hội tụ là $|x| < R_2$.

Khi đó tổng của chúng sẽ hội tụ trong $|x| < \min\{R_1; R_2\}$.

• **Ví dụ 4:** Khai triển $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 - 5x + 6}$ thành chuỗi lũy thừa, sau đó tìm miền hội tụ của nó.

Giải : + Ta có $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 - 5x + 6} = -\left[\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{3-x}\right] = -\left[\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)} - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)}\right]$

+ Ta đã có: $\dfrac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n, \quad |y| < 1$, nên

$$\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ hay } |x| < 2$$

và $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{x}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n, \quad \left|\dfrac{x}{3}\right| < 1 \text{ hay } |x| < 3$

+ Do đó $f(x) = \dfrac{-1}{x^2-5x+6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right]x^n$ với $|x| < 2$.

***2. Phép nhân*(TỰ ĐỌC)**

Giả sử rằng chúng ta có hai chuỗi khai triển luỹ thừa:

$$f(x) = \sum a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

và

$$g(x) = \sum b_n x^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ...$$

cùng có miền hội tụ là $|x| < R$.

Ta có thể nhân các chuỗi này bằng cách tương tự như nhân hai đa thức. Như vậy chúng ta được:

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + \left(a_0b_1 + a_1b_0\right)x + \left(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0\right)x^2 + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

• **Ví dụ 5:** Tìm chuỗi Taylor của $e^x \sin x$.

Lời giải

+ Với $\forall x$ ta có : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...$ và : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ...$

+ Như vậy $\forall x$ ta có :

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + ... + x^2 - \frac{x^4}{6} + ... + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + ...$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$$

***3. Phép chia* (TỰ ĐỌC).**

+ Hai chuỗi luỹ thừa có thể chia được cho nhau bởi quá trình tựa như phép chia các đa thức trong đại số.

+ Đối với chuỗi luỹ thừa, các số hạng được sắp xếp theo sự tăng dần của luỹ thừa, thay cho sự sắp xếp theo sự giảm dần của luỹ thừa như đối với các đa thức.

• **Ví dụ 6:** Tìm chuỗi Taylor của tanx bằng cách chia chuỗi sinx cho chuỗi cosx.

Lời giải: + Với $\forall x$ ta có :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

và

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

+ Ta có : $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$ trên khoảng $|x| < \pi/2$.

4. Phép thế

◆ Nếu một chuỗi luỹ thừa hội tụ với $|x| < R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

và nếu $|g(x)| < R$, thì ta có thể tìm $f\left[g(x)\right]$ bằng cách thay thế $g(x)$ cho x .

Ví dụ 7 : + Ta đã biết $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, với $-1 < x < 1$

Thay x bởi $-2x^2$ trong $\frac{1}{1-x}$, ta được

$$\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1-(-2x^2)} = 1 + (-2x^2) + (-2x^2)^2 + \dots \qquad \text{với } |2x^2| < 1.$$
$$= 1 - 2x^2 + 4x^4 - \dots$$

+ Tương tự :

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{12}}{3!} + \dots \qquad \forall x$$

và $\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \dots = 3x - \frac{27}{3!}x^3 + \frac{243}{5!}x^5 - \dots \quad \forall x$

◆ Giả sử rằng hàm g(x) được cho bởi chuỗi luỹ thừa

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

và thay thế toàn bộ chuỗi này cho x nhận được :

$$f\left[g(x)\right] = a_0 + a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 + \dots$$
$$= a_0 + a_1\left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\right] + a_2\left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\right]^2 + \dots$$

Điều này hoàn toàn đúng nếu $|g(x)| < R$.

Ví dụ 8: Áp dụng phương pháp trên để tìm chuỗi Taylor của $e^{\sin x}$ tới số hạng chứa x^4.

Lời giải: + Với $\forall x$ ta đã có:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

+ Thể x bởi $\sin x$ ta nhện được:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)^4+... \\ &= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+...\right)+\frac{1}{6}\left(x^3+...\right)+\frac{1}{24}\left(x^4+...\right)+... \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+... \end{aligned}$$

<u>Ví dụ 9:</u> Khai triển hàm $f(x)=\dfrac{6}{x+5}$ theo lũy thừa của $(x-1)$

<u>Giải :</u> **<u>Cách 1 :</u>** Áp dụng công thức khai triển Taylor tại $x=1$.

<u>Cách 2 :</u> + Ta đã có $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...,$ với $-1<x<1$

+ Biến đổi : $f(x)=\dfrac{6}{x+5}=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{6}+1}$, sau đó áp dụng công thức trên ta nhận được :

$$f(x)=\frac{6}{x+5}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}(x-1)^n \text{ với } -5<x<7.$$

+ Tại $x=-5$: chuỗi phân kỳ, tại $x=7$ chuỗi hội tụ.

+ Vậy miền hội tụ của chuỗi vừa tìm được : $\left(-5;7\right]$.

Bài tập về nhà: Các bài **Tr. 394, 445, 455.**

Chuẩn bị đề cương Ôn tập

MỘT SỐ ĐỀ LUYỆN TẬP MÔN GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

(Thời gian: 90 phút)

Đề số 1

Câu 1. Tìm gới hạn sau: $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x - \cos\ x + 1}{x^2 - \sin^2(2x)}$.

Câu 2. Tính đạo hàm y' của hàm ẩn xác định bởi: $x^3 + 3xy^3 - xy^2 = xy + 10$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

Câu 3. Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}$.

Câu 4 . Một cái máng nước được làm từ 3 tấm ván, mỗi tấm ván rộng 12 m. Mặt cắt vuông góc là một hình thang cân có cạnh đáy nhỏ bằng chiều rộng của một tấm ván, hỏi mặt cắt đó có đáy lớn bằng bao nhiêu để khả năng truyền tải của máng đó đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2018)^n (x+2)^{2n+1}$.

Đề số 2

Câu 1. Tìm gới hạn sau: $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2+3}$.

Câu 2. Tính vi phân của hàm số: $y = \sqrt{1+x^2} \ln(1-x)$.

Câu 3. Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$.

Câu 4. Tính diện tích miền phẳng D nằm phía trong hình đường tròn $r = 2\sin\theta$ và nằm phía ngoài đường hình tim $r = 2(1 - \sin\theta)$.

Câu 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arccos\left(\dfrac{1}{n+4}\right)}{12n^{2018} + 2019}$.

Đề số 3

Câu 1. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ c & \text{khi } x=0\end{cases}$

Tìm hằng số c để hàm số liên tục tại $x=0$.

Câu 2. Tính đạo hàm cấp n (nguyên, dương) của hàm số: $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Câu 3. Tính tích phân suy rộng: $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x.\ln x dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Câu 4. Tính thể tích của vật thể tròn xoay do miền phẳng D được giới hạn bởi các đường: $y=\sin\left(x^2\right);\quad Ox;\quad Oy;\quad 0\le x\le\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ quay một vòng xung quanh trục Oy.

Câu 5. Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{5}{7-x}$ theo lũy thừa của $(x-1)$. Sau đó xác định bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đó.

Đề số 4

Câu 1. Tính giới hạn sau: $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

Câu 2. Cho đường cong (C) xác định bởi phương trình:

$$x^2+xy-y^3=7.$$

Lập phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm có hoành độ là 3.

Câu 3. Tính tích phân suy rộng sau bằng định nghĩa

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x^2+1)}.$$

Câu 4. Dùng phương pháp vỏ để tính thể tích của một khối tròn xoay do miền phẳng được giới hạn bởi các đường có phương trình $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{8}=1,\ y=0,\ x=0$ quay một vòng xung quanh Oy.

Câu 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4n}{n^2+5n}(x-1)^n$.

HAVE GOOD EXAMINATIONS!