GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 4

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 6. Trường vô hướng, đạo hàm theo hướng, gradient

- Trường vô hướng
- Đạo hàm theo hướng (mục 19.5)
- Gradient
- Dạng toán cơ bản

1. Trường vô hướng. Cho một trường vô hướng trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, là cho một hàm vô hướng $w = f(x, y, z)$ xác định trên miền Ω.

Ví dụ 1. Sự phân bố nhiệt độ trong vật thể tạo nên một trường vô hướng trong vật thể ấy vì mỗi điểm của vật thể đều có một nhiệt độ biểu thị bằng một số.

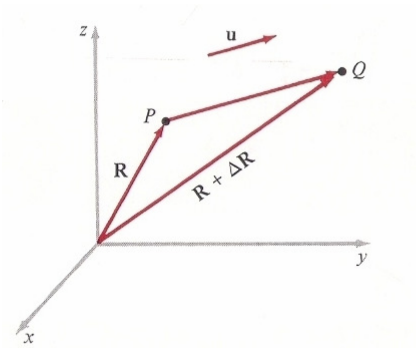
Những trường vô hướng mà giá trị của w không phụ thuộc vào thời gian được gọi là trường dừng.

2. Đạo hàm theo hướng

Cho hàm số $w = f(x, y, z)$ xác định trên $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $P \in \Omega$, tốc độ biến thiên của hàm $f(x, y, z)$ khi P di chuyển theo hướng dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Khi P biến thiên không theo hướng các trục toạ độ thì tốc độ biến thiên của hàm $f(x, y, z)$ sẽ như thế nào?

Cho $P(x, y, z)$, $R = xi + yj + zk$ là véc tơ chỉ vị trí của $P(x, y, z)$, hướng đang xét được xác định bởi véc tơ đơn vị u



Hình 19.10

Đặt $\Delta s = |\Delta R|$, khi đó $\dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ là tốc độ biến thiên trung bình của hàm f khi di chuyển từ điểm P đến điểm Q, $\overrightarrow{PQ}$ cùng hướng với u.

Định nghĩa. Đạo hàm của hàm f tại điểm P theo hướng u (Đạo hàm theo hướng của hàm f) là
$$\frac{df}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Định nghĩa trên đã rõ ràng, nhưng sẽ tính $\dfrac{df}{ds}$ như thế nào?

Dựa vào bổ đề cơ bản ta có
$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right).u, \qquad u = \frac{dR}{ds}.$$

Ví dụ 2. $u = x + y + z$, tính đạo hàm tại $P(0 ; 1 ; 2)$ theo hướng $\overrightarrow{PQ}$, ở đó $Q = (1 ; 2 ; 1)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = 1 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P$$

$\overrightarrow{PQ} = (1;1;-1)$, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3}$, do đó $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\frac{du}{ds} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P i + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P j + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P k\right)u = (i+j+k)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3. $u = xyz$, tính đạo hàm tại $P(5 ; 1 ; 2)$ theo hướng $\overrightarrow{PQ}$, ở đó $Q = (7 ; -1 ; 3)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P = 2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = 10,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P = 5$$

$\overrightarrow{PQ} = (2;-2;1)$, $|\overrightarrow{PQ}| = 3$, $u = \left(\frac{2}{3};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$\frac{du}{ds} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P i + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P j + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P k\right)\left(\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k\right)$$

$$= (2i + 10j + 5k)\left(\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k\right) = \frac{4}{3} - \frac{20}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}.$$

Chú ý

- Đạo hàm theo hướng của hàm nhiều biến không chỉ phụ thuộc vào điểm P mà còn phụ thuộc vào hướng u
- Đạo hàm theo hướng của hàm nhiều biến là một số

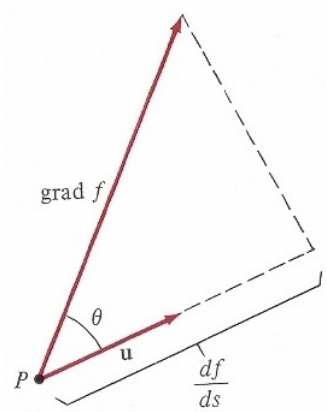
Định lý. Hàm $u(x, y, z)$ khả vi tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại đó nó có đạo hàm theo mọi hướng tại P_0

3. Gradient

a) Định nghĩa. Cho hàm $w = f(x, y, z)$ khi đó gradient của hàm f được định nghĩa như sau: $\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$

Chú ý

- $\text{grad} f$ là véc tơ
- $\frac{df}{ds} = (\text{grad} f)u$
- $\frac{df}{ds} = |\text{grad} f|\cos\theta$, ở đó θ là góc giữa $\text{grad} f$ và u.



Hình 19.11

b) Các tính chất

1. $\frac{df}{ds} = (\text{grad} f)u$ (xem hình 19.11)
2. Hướng của véc tơ grad$f$ là hướng mà hàm f tăng nhanh nhất.
3. Độ dài của véc tơ grad$f$ là tốc độ tăng lớn nhất của f.

Ví dụ 4. Cho $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$, tìm đạo hàm theo hướng $\frac{df}{ds}$ tại điểm $P(1 ; 2 ; 1)$ theo hướng của véc tơ $4i - 2j + 4k$.

grad$f = 2xi - j + 2zk$

grad$f(P) = 2i - j + 2k$

$$u = \frac{1}{\sqrt{16+4+16}}(4i - 2j + 4k) = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$$

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_P = (\text{grad} f(P))u = (2i - j + 2k)\left(\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 3. \ \square$$

Ví dụ 5. Nhiệt độ của không khí tại các điểm trong không gian được xác định bởi hàm $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$. Một con muỗi đậu tại điểm $P(1 ; 2 ; 1)$, để được mát nhanh nhất, nó phải bay theo hướng nào?

Theo ví dụ 4, có grad$f(P) = 2i - j + 2k$.

Từ tính chất 2 có hướng của gradf là hướng mà theo đó nhiệt độ tăng nhanh nhất.

Để được mát nhanh nhất, con muỗi nên bay ngược hướng với grad$f$(P) tức là bay theo hướng: $-$ grad$f(P) = -2i + j - 2k$. $\square$

4. grad$f(P_0)$ là pháp tuyến của mặt mức của hàm f tại điểm P_0.

Chú ý

- Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc tại P_0 là

$$N = \text{grad} f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} j + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} k$$

- Nếu N $\neq$ 0 thì phương trình tiếp diện của mặt mức tại P_0 là

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0$$

- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc trong mục 19.3 chỉ là trường hợp riêng, khi $f(x, y, z) = g(x, y) - z$.

Ví dụ 6. Tìm phương trình tiếp diện của mặt $xy^2z^3 = 12$ tại điểm $P(3 ; -2 ; 1)$.

Điểm $P(3 ; -2 ; 1)$ thuộc mặt cong đã cho.

grad$f = y^2z^3i + 2xyz^3j + 3xy^2z^2k$

gradf(P) = $4i - 12j + 36k$

Hàm $u = xy^2z^3$ khả vi tại $P(3 ; -2 ; 1)$.

Phương trình tiếp diện là

$4(x-3) - 12(y+2) + 36(z-1) = 0$
$x - 3 - 3(y+2) + 9(z-1) = 0$. ❐

Chú ý

- Đạo hàm theo hướng và gradient được sử dụng chủ yếu trong hình học và vật lý trong không gian ba chiều. Tương tự cũng nhận được các kết quả này trong không gian hai chiều.
- Có thể viết gradient của hàm *f* dưới dạng toán tử

$$\text{grad}f = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \nabla f,$$

ở đó toán tử delta (đọc là "del")

$$\nabla = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

3. Các dạng toán cơ bản

1. Tính gradient

• **1(tr. 82).** Tính gradient của hàm *f* tại *P*.

a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, $P(-1, 3, 5)$.

+) $\text{grad } f = (y+z)i + (x+z)j + (x+y)k$

+) $(\text{grad}f)(P) = 8i + 4j + 2k$

c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $P = (1 ; 2 ; -2)$

+) $\text{grad}f = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}i + \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}j + \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}k$

+) $(\text{grad}f)(P) = \dfrac{2}{9}i + \dfrac{4}{9}j - \dfrac{4}{9}k$

2. Đạo hàm theo hướng

• **2(tr. 82).** Tìm đạo hàm theo hướng của *f* tại *P* theo hướng vectơ đưa ra.

a) $f(x, y, z) = xy^2 + x^2z + yz$, $P = (1 ; 1 ; 2)$, theo hướng $i + 2j - k$

+) $\dfrac{df}{ds}(P) = (\text{grad}f)(P).\dfrac{i+2j-k}{\sqrt{1+2^2+1}}$

+) $\left[\left(y^2+2xz\right)i + \left(2xy^2+z\right)j + \left(x^2+y\right)k\right]\Big|_P.\dfrac{i+2j-k}{\sqrt{6}}$

+) $= (5i + 4j + 2k).\dfrac{i+2j-k}{\sqrt{6}}$

+) $= \dfrac{5+8-2}{\sqrt{6}} = \dfrac{11}{\sqrt{6}}$

d) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x$, $P = (1 ; 0 ; 0)$, theo hướng *P* đến $Q(2 ; 2 ; 1)$

+) Vectơ $\overrightarrow{PQ} = (1;\ 2;\ 1)$

+) $\dfrac{df}{ds}(P) = \text{grad}\, f(P).\dfrac{i+2j+k}{\sqrt{1+2^2+1}}$

+) $= \left[\left(ye^z + yze^x\right)i + \left(xe^z + ze^x\right)j + \left(xye^z + ye^x\right)k\right](P).\dfrac{i+2j+k}{\sqrt{6}}$

+) $= j.\dfrac{i+2j+k}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

• **3(tr. 83).** Tính giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng của f tại P và hướng mà đạo hàm theo hướng đại giá trị lớn nhất.

a) $f(x, y, z) = \sin xy + \cos yz$, $P = (-3\ ;\ 0\ ;\ 7)$

+) $\text{grad} f = i(y\cos xy) + j(x\cos xy - z\sin yz) - k.y\sin yz$

+) $\text{grad} f(P) = -3j$

+) GTLN của $\dfrac{df}{ds}(P) = |\text{grad} f(P)| = 3$.

+) Hướng của $\dfrac{df}{ds}$ đạt GTLN là $-j$

3. Dạng hỗn hợp

• **5(tr. 83).** Tìm vectơ đơn vị pháp tuyến của mặt $xyz = 4$ tại điểm $P(2\ ;\ -2\ ;\ -1)$

+) Là mặt mức của hàm $f(x, y, z) = xyz$

+) $\text{grad} f = yz.i + xz.j + xy.k$

+) $N = \text{grad} f(P) = 2i - 2j - 4k$.

+) Vectơ pháp tuyến đơn vị tại P là $\dfrac{2i-2j-4k}{\sqrt{24}}$ hay $\dfrac{i-j-2k}{\sqrt{6}}$

• **7(tr. 83).** Giả sử nhiệt độ T tại điểm $P(x, y, z)$ được xác định bởi $T = 2x^2 - y^2 + 4z^2$. Tìm tốc độ biến thiên của T tại $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ theo hướng của vectơ $4i - j + 2k$. Theo hướng nào T tăng nhanh nhất tại điểm này? Tốc độ tăng lớn nhất là bao nhiêu?

+) $\text{grad}\, T = 4x.i - 2y.j + 8z.k$

+) $(\text{grad}\, T)(P) = 4i + 4j + 8k$

+) vectơ đơn vị: $u = \dfrac{4i - j + 2k}{\sqrt{21}}$

+) Tốc độ biến thiên của T tại P theo hướng $4i - j + 2k$ là

$$\frac{df}{ds}(P) = (\text{grad}\, T)(P).u = \frac{16-4+16}{\sqrt{21}} = \frac{28}{\sqrt{21}}$$

+) Hướng tăng nhanh nhất tại P trùng với hướng của grad T là $i + j + 2k$

+) Tốc độ tăng lớn nhất là $|\text{grad}\, T(P)| = \sqrt{4^2+4^2+8^2} = 4\sqrt{6}$

• **9(tr. 83).** Chứng minh rằng tiếp diện của mặt bậc hai $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ tại $P_0(x_0\,;\, y_0\,;\, z_0)$ có phương trình là $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$

+) Mặt bậc hai là mặt mức của hàm $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

+) grad$f = 2ax.i + 2by.j + 2cz.k$

+) grad$f(P) = 2ax_0.i + 2by_0.j + 2cz_0.k$

+) Vectơ pháp tuyến tại P_0 là $N = 2ax_0i + 2by_0j + 2cz_0k$

+) Phương trình tiếp diện tại P_0 là

$$2ax_0(x - x_0) + 2by_0(y - y_0) + 2cz_0(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow ax_0x + by_0y + cz_0z = d$$

§ 7. Quy tắc dây chuyền. Đạo hàm dưới dấu tích phân

- Quy tắc dây chuyền (mục 19.6)
- Đạo hàm dưới dấu tích phân (mục C. 16)
- Dạng toán cơ bản

1. Quy tắc dây chuyền đối với đạo hàm riêng. Quy tắc dây chuyền đối với hàm một biến số chính là đạo hàm của hàm hợp: $w = f(x)$, $x = g(t)$ khi đó $\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dx}.\frac{dx}{dt}$

a) Quy tắc dây chuyền của hàm hai biến $w = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, w có các đạo hàm riêng cấp một liên tục, các hàm x, y khả vi liên tục.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Ví dụ 1. $w = 3x^2 + 2xy - y^2$, ở đó $x = \cos t$, $y = \sin t$, tìm $\frac{dw}{dt}$.

$\frac{\partial w}{\partial x} = 6x + 2y$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2x - 2y$; $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$

$\frac{dw}{dt} = (6x + 2y)(-\sin t) + (2x - 2y)\cos t$

$= (6\cos t + 2\sin t)(-\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)\cos t$

$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - 8\sin t\cos t = 2\cos 2t - 4\sin 2t$

Có thể thay $x = \cos t$, $y = \sin t$ vào w rồi tính đạo hàm.

Chú ý

- Có thể mở rộng kết quả trên khi $w = f(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ta có $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$, ở đó w có các đạo hàm riêng liên tục, các hàm x, y, z khả vi liên tục.

- $w = f(x, y)$, $y = y(x)$, khi đó $\frac{dw}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, ở đó w có các đạo hàm riêng liên tục, hàm y khả vi liên tục.
- $w = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, khi đó $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$
- $\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$, ở đó w có các đạo hàm riêng liên tục, các hàm x, y khả vi liên tục.

b) Quy tắc dây chuyền của hàm ba biến

- $w = f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, ở đó các hàm w, x, y có các đạo hàm riêng liên tục, có

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}; \qquad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial v}$$

Ví dụ 2. $z = e^u\sin v$, $u = xy$, $v = x + y$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial u}=e^u\sin v$, $\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\cos v$; $\frac{\partial u}{\partial x}=y, \frac{\partial u}{\partial y}=x$;

$\frac{\partial v}{\partial x}=1=\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^u\sin v.\, y+e^u\cos v = e^{xy}\,[y\sin(x + y) + \cos(x + y)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}= e^u\sin v.\, x + e^u\cos v = e^{xy}[x\sin(x + y) + \cos(x + y)]$

Định nghĩa. $dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$ là vi phân của hàm $w = f(x, y, z)$

Định nghĩa. Hàm $w = f(x, y)$ được gọi là hàm thuần nhất cấp n khi và chỉ khi

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),\ \forall\ t > 0.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm $u = f(x, y)$ thuần nhất cấp n thì thoả mãn đẳng thức sau: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=n.f(x,y)$ (*Định lý Euler*).

Đặt $u = tx$, $v = ty$ có $f(u, v) = t^n f(x, y)$

$\frac{df}{dt}=nt^{n-1}f(x,y)$,

$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{dv}{dt} = x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}$

Lấy $t = 1$ có $u = x$, $v = y$, nhận được

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x, y)$$

Chú ý. Khi n = 1, ta có $f(x, y)=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$, ở đó $f(x, y)$ là sản lượng đo bằng đô la, x là đơn vị của vốn, y là đơn vị của lao động, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ lần lượt là sản phẩm vốn cận biên và sản phẩm lao động cận biên. Ta có định lý trong kinh tế: "Tổng giá trị sản lượng bằng chi phí vốn cộng với chi phí lao động nếu như mỗi chi phí được trả theo sản phẩm cận biên của nó". Trong trường hợp này không có doanh thu thặng dư

Ví dụ 4. Giải phương trình đạo hàm riêng: Tìm hàm $w = f(x, y)$ thoả mãn $a\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$.

Đặt $u = x + ay$, $v = x - ay$.

$w = F(u, v)$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial w}{\partial u}-a\frac{\partial w}{\partial v}$$

Thay vào phương trình ban đầu, ta có: $2a\frac{\partial w}{\partial v}=0$; $\frac{\partial w}{\partial v}=0$

$w = g(u)$, g là hàm khả vi liên tục tuỳ ý của u

$w = g(x + ay)$

Chú ý. Để tránh nhầm lẫn, khi cần thiết ta dùng kí hiệu sau: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ thay cho $\frac{\partial w}{\partial x}$ đối với hàm $w = f(x, y)$, chẳng hạn trong trường hợp đối với hàm sau:

$w = f(x, y)$, ở đó $y = g(x, t)$, nếu dùng các kí hiệu quen thuộc sẽ trở nên khó hiểu:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Khi đó ta cần viết là $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x.\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t$.

2. Đạo hàm dưới dấu tích phân. Cho hàm $f(x, y)$ liên tục cùng với đạo hàm riêng cấp một $F_x(x, y)$ của nó trong trong hình chữ nhật đóng: $x_0 \le x \le x_1$, $a \le y \le b$, khi đó ta có

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)dy=\int_a^b\left(\frac{d}{dx}f(x, y)\right)dy$$

Ví dụ 5. Tính $\frac{d}{dx}\int_1^2\frac{\sin(xy)}{y}dy$, $1 \le x \le 3$.

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{y}$$

$$f_x(x, y) = \cos(xy),$$

$f(x, y)$, $f_x(x, y)$, liên tục trên hình chữ nhật đóng $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 3$.

$$\frac{d}{dx}\int_1^2 \frac{\sin(xy)}{y}dy = \int_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(xy)}{y}\right)dy = \int_1^2 \frac{1}{y} y\cos(xy)\,dy$$

$$= \frac{\sin(xy)}{x}\bigg|_{y=1}^{2} = \frac{1}{x}(\sin 2x - \sin x)$$

Chú ý. Ta có mở rộng kết quả trên là quy tắc Leibnitz: Cho hàm f(x, y), fx(x, y) liên tục trên miền sau. $\begin{cases} u_1(y) \le x \le u_2(y) \\ a \le y \le b \end{cases}$

Các hàm $u_1(y)$, $u_2(y)$ khả vi liên tục.

Khi đó ta có $\phi(y) = \int\limits_{u_1(y)}^{u_2(y)} f(x, y)dy$ khả vi và có

$$\frac{d\phi}{dy} = \int\limits_{u_1(y)}^{u_2(y)} f_y(x, y)\,dx + f\left(u_2(y), y\right).u_2' + f(u_1(y), y)u_1'$$

3. Các dạng toán cơ bản

1. Quy tắc dây chuyền

• **1(tr. 88).** Tính $\frac{dw}{dt}$ theo hai cách, ở đó $w = e^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$

+) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$

+) $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$

+) $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2xe^{x^2+y^2}(-\sin t) + 2ye^{x^2+y^2}\cos t = -2xye^{x^2+y^2} + 2xye^{x^2+y^2} = 0$

+) Cách khác: -) $w = e^{\cos^2 t + \sin^2 t} = e$

-) $\frac{dw}{dt} = 0$

• **5(tr. 89).** Tìm $\frac{\partial w}{\partial t}$ và $\frac{\partial w}{\partial u}$ theo quy tắc dây chuyền và bằng cách khác, ở đó

$w = x^2 + y^2$, $x = t^2 - u^2$, $y = 2tu$.

+) $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 2x2t + 2y2u = 4xt + 4yu = 4(t^2 - u^2)t + 4.2tu.u = 4t^3 + 4tu^2$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = 2x(-2u) + 2y.2t = -4xu + 4yt = -4(t^2 - u^2)u + 4.2tu.t = 4u^3 + 4t^2u$

+) tính bằng cách khác $w = \left(t^2 - u^2\right)^2 + 2t^2u^2 = t^4 + u^4 + 2t^2u^2 = \left(t^2 + u^2\right)^2$

Khi đó $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 2\left(t^2 + u^2\right).2t = 4t^3 + 4tu^2$

và $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 4u^3 + 4ut^2$

2. Kiểm tra nghiệm của phương trình đạo hàm riêng

• **7(tr. 89).** Cho hàm f có các đạo hàm riêng liên tục, chứng minh rằng $w = f(x^2 - y^2)$ là một nghiệm của phương trình đạo hàm riêng (giả thiết có w_x, w_y)

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

+) Đặt $u = x^2 - y^2$ có $w = f(u)$, $u = x^2 - y^2$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x.\dfrac{dw}{du}$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y\dfrac{dw}{du}$

+) Thay vào có $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + x\dfrac{\partial w}{\partial y} = y.2x\dfrac{dw}{du} + x(-2y)\dfrac{dw}{du} = 0$

• **9(tr. 89).** Chứng minh rằng $w = f(x^2 - y^2\ ,\ y^2 - x^2)$ thoả mãn phương trình

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ (giả thiết có } w_x,\ w_y)$$

+) Đặt $u = x^2 - y^2$, $v = y^2 - x^2$ có $w = f(u, v)$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial u}.2x - \dfrac{\partial w}{\partial v}.2x$

+) $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial u}(-2y) + \dfrac{\partial w}{\partial v}.2y$

+) Thay vào có

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = y\left(\frac{\partial w}{\partial u}.2x - \frac{\partial w}{\partial v}.2x\right) + x\left(\frac{\partial w}{\partial u}(-2y) + \frac{\partial w}{\partial v}.2y\right) = 0$$