BÀI SỐ 7. GIÁ TRỊ RIÊNG – VÉC TƠ RIÊNG

I. Định nghĩa

- Cho ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$.
- Số λ đgl một giá trị riêng của A nếu tồn tại một véc tơ $x \neq O$ sao cho $Ax = \lambda x$.
- Véc tơ x đgl một véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.

NX. • $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$

• Số λ là một giá trị riêng của A

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ có nghiệm $x \neq O$

$\Leftrightarrow r(A - \lambda I) < n$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$

• $\det(A - \lambda I) = 0$ đgl phương trình đặc trưng của ma trận A.

Các bước tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của A:

- B1: Tính

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

- B2: Giải phương trình đặc trưng $\left|A-\lambda I\right|=0$.

  Các nghiệm của nó chính là các giá trị riêng;

- B3: Với mỗi λ vừa tìm được giải hpt véc tơ riêng $(A-\lambda I)x=0$. Mỗi nghiệm $x\neq 0$ của hệ sẽ là 1véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

VD. Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của:

$$a.\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \qquad b.\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a, Co: A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)(4-\lambda) - 1(-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}\right.$$

$$Xet: (A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{bien tru: } x_1 \\ \text{bien tu do: } x_2 \end{array}$$

$$\text{Nghiem d/b: } (-2,1) \Rightarrow \text{vecto rieng ung voi } \lambda_1 \text{ la } s_1 (= (-2,1)^T) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Xet: (A - \lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{bien tru: } x_1 \\ \text{bien tu do: } x_2 \end{array}$$

$$\text{Nghiem d/b: } (-1,1) \Rightarrow \text{vecto rieng ung voi } \lambda_2 \text{ la } s_2 (= (-1,1)^T) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b, Co: B-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 2-\lambda & 4\\ 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow |B-\lambda I|=(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$|B-\lambda I|=0\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(2-\lambda)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=2\end{array}\right.$$

$$Xet:(A-\lambda_3 I)x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{H3\to H3+\frac{1}{2}H2}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}\text{bien tru: } x_1, x_3\\ \text{bien tu do: } x_2\end{array}, co:\begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3=0\\ 4x_3=0\end{cases}, cho: x_2=1\Rightarrow$$

$$\text{Nghiem d/b: }(2,1,0)\Rightarrow\text{vecto rieng ung voi }\lambda_3\text{ la }s_3(=(2,1,0)^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

Định lý: Cho ma trận A có giá trị riêng λ và x là một véc tơ riêng tương ứng.

- Nếu A khả nghịch thì A^{-1} có giá trị riêng là λ^{-1} và véc tơ riêng tương ứng là x.
- $aA + bI$ có giá trị riêng $a\lambda + b$ và véc tơ riêng tương ứng là x.
- A^n có giá trị riêng λ^n và véc tơ riêng tương ứng là x.

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của các ma trận sau : A^{-1}; $A - 2I$; A^4.

Định lý: Cho $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ có n giá trị riêng $\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_n$

- $a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$

  $\operatorname{tr}(A):=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ đgl vết của A.

- $\det A=\lambda_1.\lambda_2...\lambda_n$.

II. Chéo hóa ma trận

1. Định nghĩa

Ma trận vuông A đgl chéo hóa được nếu tồn tại ma trận S khả nghịch và ma trận đường chéo Λ sao cho $S^{-1}AS = \Lambda$.

Định lý: Cho ma trận A vuông cấp n có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, v_2, ..., v_n$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Khi đó A chéo hóa được và $S^{-1}AS = \Lambda$, trong đó $S = \left[v_1 \ v_2 \ ... \ v_n\right]$ và

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Do các véc tơ $v_1, v_2, ..., v_n$ độc lập tuyến tính nên $\det S \neq 0$ và do đó S có ma trận nghịch đảo S^{-1}.

- $\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 ... & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 ... & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 ... & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 ... & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AS = S\Lambda \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda.$$

VD. Chéo hóa ma trận sau (nếu có):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a, Co: A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1\times 0 = (\lambda - 1)^2$

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ (nghiem kep)

$Xet: (A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$ bien tru: x_2, bien tu do: x_1

Nghiem d/b: $(1,0) \Rightarrow$ vecto rieng ung voi λ la $s(= (1,0)^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Do ... nen ko cheo hoa dc

2. Ứng dụng

Định lý: Cho số nguyên dương k bất kỳ.

- $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

- Nếu $A = S\Lambda S^{-1}$ thì $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

VD. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. a. Chéo hóa ma trận A. b. Tính A^{100}.

$a, Co: A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 4-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I|=(1-\lambda)(4-\lambda)-1(-2)=\lambda^2-5\lambda+6$

$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=2\\ \lambda_2=3\end{array}\right.$

$Xet: (A-\lambda_1 I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1+2x_2=0 \Rightarrow \begin{array}{c}\text{bien tru: } x_1\\ \text{bien tu do: } x_2\end{array}$

Nghiem d/b: $(-2,1) \Rightarrow$ vecto rieng ung voi λ_1 la $s_1(=(-2,1)^T)=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

$Xet: (A-\lambda_2 I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow \begin{array}{c}\text{bien tru: } x_1\\ \text{bien tu do: } x_2\end{array}$

Nghiem d/b: $(-1,1) \Rightarrow$ vecto rieng ung voi λ_2 la $s_2(=(-1,1)^T)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow S=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1}=\dfrac{1}{-2\times 1-(-1)\times 1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$a, S^{-1}AS=\Lambda\ldots$

$b, A^n=S\Lambda^n S^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2^{n+1} & -3^n\\ 2^n & 3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\times 3^n\\ -2^n+3^n & -2^n+2\times 3^n\end{bmatrix}$

VD. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. a. Chéo hóa ma trận A. b. Tính A^{100}.

$a, Co: A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1(-2) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{array}\right.$

$Xet: (A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + (1-i)x_2 = 0 \Rightarrow$ bien tru: x_1 bien tu do: x_2

Nghiem d/b: $(-1+i, 1) \Rightarrow$ vecto rieng ung voi λ_1 la $s_1 (= (-1+i, 1)^T) = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$

$Xet: (A - \lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + (1+i)x_2 = 0 \Rightarrow$ bien tru: x_1 bien tu do: x_2

Nghiem d/b: $(-1-i, 1) \Rightarrow$ vecto rieng ung voi λ_2 la $s_2 (= (-1-i, 1)^T) = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{-1+i-(-1-i)}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & -1+i \end{bmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & -1+i \end{bmatrix}$

$a, S^{-1}AS = \Lambda \ldots$

$b, A^n = S\Lambda^n S^{-1} = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2+i)^n & 0 \\ 0 & (2-i)^n \end{bmatrix}\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & -1+i \end{bmatrix} = \ldots$