GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 6

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

§ 19.9. Các phương trình Laplace, truyền nhiệt, truyền sóng

- Phương trình Laplace
- Phương trình truyền nhiệt
- Phương trình truyền sóng
- Các dạng toán cơ bản

• Một phần rất lớn của toán – lý liên quan đến 3 phương trình đạo hàm riêng cổ điển: phương trình Laplace, phương trình truyền nhiệt, phương trình truyền sóng

• Việc nghiên cứu đầy đủ các phương trình này có thể mất nhiều thời gian bởi vì ý nghĩa vật lý rất phong phú và đặc biệt của nó, cũng như sự cần thiết cho các chương trình thạc sĩ đối với các chuyên ngành khác nhau của toán học nâng cao

1. Phương trình Laplace

a) Định nghĩa. Phương trình Laplace trong không gian ba chiều

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

Phương trình Laplace trong không gian hai chiều $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

b) Sức hút điện thế

• Một số phần tử khối lượng $m_1, m_2, \dots, m_n$ hút nhau theo định luật bình phương nghịch đảo của lực hấp dẫn, đặt tại $P_1, P_2, \dots, P_n$ thì điện thế có được của các phần tử này tại một điểm bất kì P là $w=\frac{Gm_1}{PP_1}+\frac{Gm_2}{PP_2}+\dots+\frac{Gm_n}{PP_n}$

Hàm w được gọi là sức hút điện thế

G là hằng số hấp dẫn, điểm $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,n}$.

$$PP_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$$

• Điện thế w thoả mãn phương trình Laplace.

Thật vậy ta sẽ chứng minh từng số hạng $\frac{Gm_i}{PP_i}$, $i=\overline{1,n}$ thoả mãn phương trình Laplace.

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần chứng minh $\frac{Gm_1}{PP_1}$ thoả mãn phương trình Laplace.

• Để đơn giản ta đặt $r = PP_1$ thì có $r_x=\frac{x-x_1}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{Gm_1}{r}=-\frac{Gm_1}{r^2}.r_x=-\frac{Gm_1}{r^2}.\frac{x-x_1}{r}=-\frac{Gm_1}{r^3}(x-x_1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{Gm_1}{r}\right)=-\frac{Gm_1}{r^6}\left[r^3-(x-x_1).3r^2.r_x\right]=-\frac{Gm_1}{r^6}\left[r^3-(x-x_1).3.r^2\frac{x-x_1}{r}\right]$$

$$=-\frac{Gm_1}{r^6}\left[r^3-3r(x-x_1)^2\right]=-\frac{Gm_1}{r^5}\left[r^2-3(x-x_1)^2\right]$$

• Tương tự có: $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{Gm_1}{r}\right) = -\dfrac{Gm_1}{r^5}\left[r^2 - 3(y-y_1)^2\right]$

và $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\dfrac{Gm_1}{r}\right) = -\dfrac{Gm_1}{r^5}\left[r^2 - 3(z-z_1)^2\right]$

• Thay vào phương trình Laplace có

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{Gm_1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{Gm_1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{Gm_1}{r}\right) = -\frac{Gm_1}{r^5}\left[r^2 - 3(x-x_1)^2 + r^2 - 3(y-y_1)^2 + r^2 - 3(z-z_1)^2\right]$$

$$= -\frac{Gm_1}{r^5}\left[3r^2 - 3(x-x_1)^2 - 3(y-y_1)^2 - 3(z-z_1)^2\right] = 0$$

• Khi thay m với các điện tích $q_i,\ i = \overline{1.n}$, G là hằng số Culông, thì điện thế tĩnh điện có dạng $w = \dfrac{Gq_1}{PP_1} + \dfrac{Gq_2}{PP_2} + \cdots + \dfrac{Gq_n}{PP_n}$ cũng thoả mãn phương trình Laplace

Ví dụ 1. Kiểm tra xem hàm số sau có thoả mãn phương trình Laplace:

$$w = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1$$

• $w_x = 2x,\quad w_{xx} = 2$
• $w_y = 4y,\quad w_{yy} = 4$
• $w_z = -6z,\ w_{zz} = -6$
• $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 2 + 4 - 6 = 0$
• Hàm w thoả mãn phương trình Laplace

2. Phương trình truyền nhiệt

a) Định nghĩa. Phương trình truyền nhiệt trong không gian ba chiều

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (2)$$

Phương trình truyền nhiệt trong không gian hai chiều là $a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\partial w}{\partial t}$

Phương trình truyền nhiệt một chiều là $a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial w}{\partial t}$

Nghiên cứu sự truyền nhiệt trong vật thể dẫn nhiệt, vào năm 1822 nhà toán học người Pháp: Fourier đã vận dụng nguyên lý cơ bản của vật lý để chứng tỏ rằng hàm nhiệt độ w thoả mãn phương trình truyền nhiệt (2).

b) Phương trình truyền nhiệt một chiều

Ta dẫn ra dưới đây các lập luận đơn giản của Fourier đối với phương trình truyền nhiệt một chiều

Nguyên lý cơ bản của vật lý

• Nhiệt độ truyền theo hướng giảm của nhiệt độ

• Tốc độ truyền nhiệt từ bên này sang bên kia của một vùng thì tỷ lệ với vùng đó và tốc độ biến thiên của nhiệt độ phụ thuộc vào khoảng cách vuông góc với bề mặt (gọi là suất dẫn nhiệt K)

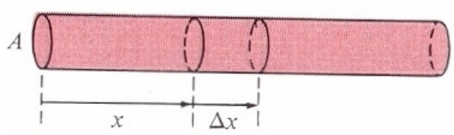
• Nhiệt lượng thu được hay mất đi của vật thể khi nhiệt độ của nó biến đổi tỉ lệ với khối lượng của vật thể và sự thay đổi của nhiệt độ (gọi là nhiệt dung riêng, kí hiệu là c)

• Xét sự truyền nhiệt trong một dây trụ mỏng với diện tích tiết diện là A, có mặt xung quanh cách nhiệt.

• Ta kiểm tra tốc độ biến thiên nhiệt chứa trong lát mỏng của dây giữa các vị trí x và Δx.

• Khối lượng lát mỏng là $\Delta m = \rho A \Delta x$, ρ là tỉ trọng dây.

• Nhiệt lượng được tích trữ trong khoảng nhỏ thời gian Δt là $\Delta H = c\Delta m \Delta w$, Δw là biến thiên nhiệt độ tại x.



Hình 19.19

• Tốc độ biến thiên nhiệt lượng được tích trữ là: $\dfrac{\Delta H}{\Delta t} = c\rho A \Delta x.\dfrac{\Delta w}{\Delta t}$ (3)

• Tốc độ truyền nhiệt của bản mỏng ở bề mặt trái là $-kA\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_x$ (4)

• Tốc độ truyền nhiệt của bản mỏng ở bề mặt phải là $kA\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ (5)

• Từ (3), (4) và (5) có: $kA\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - kA\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_x = c\rho A \Delta x \dfrac{\Delta w}{\Delta t}$

hay $\dfrac{k}{c\rho}\left[\dfrac{1}{\Delta x}\left(\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_x\right)\right] = \dfrac{\Delta w}{\Delta t}$.

• Cho $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ ta có $a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial w}{\partial t}$, $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$

• Tương tự nhận được các phương trình truyền nhiệt hai chiều, ba chiều.

Ví dụ 2. Kiểm tra xem $u = e^{-ta^2}(\cos x + \sin x)$ có là nghiệm của phương trình truyền nhiệt một chiều?

• $u_x = e^{-ta^2}(-\sin x + \cos x)$

• $u_{xx} = e^{-ta^2}(-\cos x - \sin x)$

• $u_t = -a^2 e^{-ta^2}(\cos x + \sin x)$

• Rõ ràng $a^2 u_{xx} = u_t$.

Hàm u là nghiệm của phương tình truyền nhiệt một chiều

3. Phương trình truyền sóng

Mọi hiện tượng của truyền sóng, chẳng hạn: sóng ánh sáng, sóng âm thanh, ..., đều được chi phối bởi phương trình truyền sóng.

a) Định nghĩa. Phương trình truyền sóng ba chiều $a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

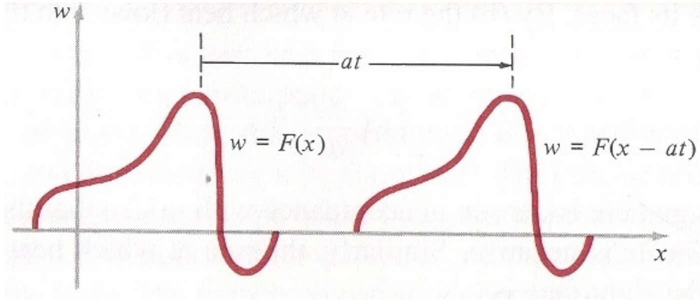
Phương trình truyền sóng hai chiều $a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

Phương trình truyền sóng một chiều $a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ (6)

b) Phương trình truyền sóng một chiều

• Xét hàm $F(x - at)$, tại $t = 0$ có $F(x)$, tại $t = t_1$ có $F(x - at_1)$.

• Đường cong $w = F(x - at_1)$ nhận được từ đường cong $F(x)$ sau khi tịnh tiến dọc theo trục Ox sang phải một đoạn là at_1.



Hình 19.20

• Giả sử $w = F(u)$ có đạo hàm cấp hai, vận dụng quy tắc dây chuyền ta có

$w_x = F'(u).1$,

$w_t = F'(u).(-a) = -aF'(u)$

$w_{xx} = F''(u)$, $w_{tt} = -aF''(u)(-a) = a^2 F''(u)$

• Rõ ràng $w = F(x - at)$ thoả mãn phương trình truyền sóng một chiều.

• Tương tự $w = G(x + at)$ biểu diễn sự di chuyển của sóng khi nó dịch chuyển sang bên trái với vận tốc a và cũng là nghiệm của phương trình (6)

• Nghiệm tổng quát của phương trình truyền sóng một chiều là

$$w = F(x - at) + G(x + at)$$

ở đó $F(u)$, $G(u)$ khả vi cấp hai.

4. Dạng toán cơ bản

1. Kiểm tra thoả mãn phương trình Laplace

• **1(tr. 109).** a) Kiểm tra $w = \dfrac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$ thoả mãn phương trình Laplace

+) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{x - x_1}{R^3}$, $R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\dfrac{R^3 - (x-x_1)\dfrac{(x-x_1)}{R}.3R^2}{R^6} = -\dfrac{R^2 - 3(x-x_1)^2}{R^5} = \dfrac{3(x-x_1)^2 - R^2}{R^5}$

+) Vai trò đối xứng nên có $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{3(y-y_1)^2 - R^2}{R^5}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{3(z-z_1)^2 - R^2}{R^5}$

+) Từ đó ta có

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{R^5}\left[3(x-x_1)^2 - R^2 + 3(y-y_1)^2 - R^2 + 3(y-y_1)^2 - R^2\right]$$

$$= \frac{1}{R^5}\left\{3\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right] - 3R^2\right\} = \frac{1}{R^5}\left[3R^2 - 3R^2\right] = 0$$

b) Chứng minh rằng phương trình Laplace là phương trình tuyến tính

Thật vậy, giả sử có u, v thoả mãn phương trình $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

+) có $\frac{\partial^2 (u+v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0$

+) Có $\frac{\partial^2 (au)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (au)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (au)}{\partial z^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$

Do $\frac{1}{pp_1}$ là một nghiệm (ở đó $pp_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ nên do phương trình Laplace tuyến tính, ta có đẳng thức $w = \frac{Gm_1}{pp_1} + \frac{Gm_2}{pp_2} + \cdots + \frac{Gm_n}{pp_n}$ cũng là nghiệm.

• **3(tr. 109).** Kiểm tra rằng các hàm sau đây thoả mãn phương trình Laplace:

a) $w = x^2 + 2y^2 - 3z^2$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -6$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2 + 4 - 6 = 0$

b) $w = x^2 - y^2 + 57z$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2 - 2 = 0$

c) $w = 4z^3 - 6(x^2 + y^2)z$

+) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -12z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -12z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 24z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 24z - 12z - 12z = 0$

d) $w = e^{-2x}\sin 2y + 3z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4e^{-2x}\sin 2y$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -4e^{-2x}\sin 2y$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 4e^{-2x}\sin 2y - 4e^{-2x}\sin 2y = 0$

e) $w = e^{3x}e^{4y}\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 9e^{3x}e^{4y}\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 16e^{3x}e^{4y}\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -25e^{3x}e^{4y}\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

f) $w = e^{13x}\sin 12y\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 169e^{13x}\sin 12y\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -144e^{13x}\sin 12y\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -25e^{13x}\sin 12y\cos 5z$

+) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

§ 19.10. Hàm ẩn

- Hàm ẩn một biến
- Hàm ẩn hai biến
- Dạng toán cơ bản

I. Hàm ẩn một biến số

Ví dụ 1. Cho hàm $y(x)$ xác định bởi hệ thức $x^2 + y^2 = 1$

- $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$

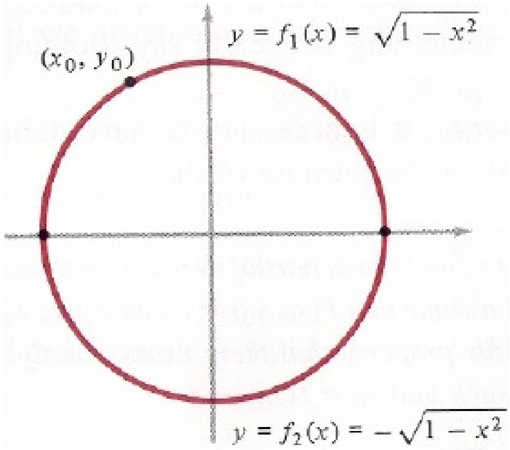
$|x_0| < 1$, có $y'(x_0) = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_1(x_0)}$

- Đối với $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$

$|x_0| < 1$ có $y'(x_0) = \dfrac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}} = -\dfrac{x_0}{y_2(x_0)}$

- $2x + 2y.y' = 0$

$y' = -\dfrac{x}{y}$ tại x_0: $y(x_0) \neq 0$.



Hình 19.21 (trái)

Định lý. Cho $F(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp một liên tục trong lân cận điểm (x_0, y_0)
$F(x_0, y_0) = c$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$
Khi đó phương trình $F(x, y) = c$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$ trong lân cận nào đó của x_0, thoả mãn $y(x_0) = y_0$, liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận này và có

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi hệ thức $x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$

- Có điểm $(1\ ;\ 1)$ thuộc đồ thị
- $F_x = 2xy^5 - 2x$; $F_y = 5x^2y^4 - 2x$
- Hàm $F(x, y) = x^2y^5 - 2xy + 1$, có F_x, F_y liên tục tại lân cận (x_0, y_0) của đường cong mà $F_y(x_0, y_0) \neq 0$
- Do đó $\exists\ y = y(x)$ thoả mãn $y(x_0) = y_0$ và hàm $y(x)$ khả vi tại lân cận x_0 và có

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{2x_0y_0^5 - 2y_0}{5x_0^2y_0^4 - 2x_0}$$

Ví dụ 3 Tìm đạo hàm hàm ẩn xác định bởi hệ thức $x^y = y^x$ tại điểm $x = 2$

- $(2, 2)$ thuộc đồ thị
- Xét $F(x, y) = x^y - y^x$ có

$F_x(x, y) = yx^{y-1} - y^x\ln y$, $\qquad F_x(2, 2) = 4 - 4\ln 2$
$F_y(x, y) = x^y\ln x - xy^{x-1}$, $\qquad F_y(2, 2) = 4\ln 2 - 4 \neq 0$

- Tồn tại hàm ẩn xác định trong lân cận $x_0 = 2$, thoả mãn $y(2) = 2$, khả vi trong lân cận của $x_0 = 2$ và có $y'(2) = -\dfrac{4 - 4\ln 2}{4\ln 2 - 4} = 1$

2. Hàm ẩn hai biến số

- Cho hàm $w = F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong lân cận (x_0, y_0, z_0)
- $F(x_0, y_0, z_0) = c$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- Khi đó phương trình $F(x, y, z) = c$ xác định một hàm ẩn $z = \varphi(x, y)$ trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0), thoả mãn $z(x_0, y_0) = z_0$, có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong lân cận điểm (x_0, y_0) và có

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0)}$$

Ví dụ 4. Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi hệ thức: $x^2z + yz^5 + 2xy^3 = 13$

- Điểm $(1, 2, -1)$ thuộc đồ thị
- $F(x, y, z) = x^2z + yz^5 + 2xy^3 - 13$
- $F_x(x, y, z) = 2xz + 2y^3$; $F_y(x, y, z) = z^5 + 6xy^2$; $F_z(x, y, z) = 5yz^4 + x^2$
- Tại (x_0, y_0, z_0) thuộc mặt cong sao cho $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- Khi đó tồn tại hàm $z = z(x, y)$ thoả mãn $z(x_0, y_0) = z_0$, khả vi trong lân cận (x_0, y_0) và có

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{2x_0z_0 + 2y_0^3}{x_0^2 + 5y_0z_0^4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{z_0^5 + 6x_0y_0^2}{x_0^2 + 5y_0z_0^4}$$

Ví dụ 5. Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi hệ thức $\sin(xy) + \ln(1 + y^2z^2) + e^{xz} = 1$.

- $(0, 0, 1)$ thuộc đồ thị
- $F(x, y, z) = \sin(xy) + \ln(1 + y^2z^2) + e^{xz} - 1$.
- $F_x = y\cos(xy) + ze^{xz}$; $F_y = x\cos(xy) + \dfrac{2yz^2}{1 + y^2z^2}$; $F_z = \dfrac{2zy^2}{1 + y^2z^2} + xe^{xz}$
- Tại (x_0, y_0, z_0) thuộc mặt cong sao cho $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
- Khi đó tồn tại hàm ẩn $z = z(x, y)$ thoả mãn $z(x_0, y_0) = z_0$, khả vi trong lân cận điểm này và có

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{y_0\cos(x_0y_0) + z_0e^{x_0z_0}}{\dfrac{2z_0y_0^2}{1 + y_0^2z_0^2} + x_0e^{x_0z_0}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0\cos(x_0y_0) + \dfrac{2z_0^2y_0}{1 + y_0^2z_0^2}}{\dfrac{2z_0y_0^2}{1 + y_0^2z_0^2} + x_0e^{x_0z_0}}$$

3. Các dạng toán cơ bản

1. Tính đạo hàm hàm ẩn $\dfrac{dy}{dx}$

• **1(tr. 115).** $y^2 - 3x^2 - 1 = 0$

+) $F(x, y) = y^2 - 3x^2 - 1$

+) $F_x = -6x$

+) $F_y = 2y$

+) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = 3\dfrac{x}{y},\ \ y \neq 0$

• **3(tr. 115).** $x\sin y = x + y$

+) $F(x, y) = x\sin y - x - y$

+) $F_x = \sin y - 1$

+) $F_y = x\cos y - 1$

+) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{1 - \sin y}{x\cos y - 1},\quad x\cos y - 1 \neq 0$

• **5(tr. 115).** $e^{xy} = 2xy^2$

+) $F(x, y) = e^{xy} - 2xy^2$

+) $F_x = ye^{xy} - 2y^2$

+) $F_y = xe^{xy} - 4xy$

+) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 4xy}$

2. Tìm các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ của hàm ẩn

• **7(tr. 115).** $\ln z = z + 2y - 3x$

+) $F(x, y, z) = \ln z - z - 2y + 3x$

+) $F_x = 3$

+) $F_y = -2$

+) $F_z = \dfrac{1}{z} - 1$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{3}{\dfrac{1}{z} - 1} = \dfrac{3z}{z - 1}$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{z} - 1} = \dfrac{2z}{1 - z}$

• **9(tr. 115).** $z = xy\sin xz$

+) $F(x, y, z) = z - xy\sin xz$

+) $F_x = -y\sin xz - xyz\cos xz$

+) $F_y = -x\sin xz$

+) $F_z = 1 - x^2y\cos xz$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{y\sin xz + xyz\cos xz}{1 - x^2 y\cos xz}$, $1 - x^2y\cos xz \neq 0$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = \dfrac{x\sin xz}{1 - x^2 y\cos xz}$, $1 - x^2y\cos xz \neq 0$

• **11(tr. 115).** Tìm giá trị lớn nhất của z trên ellipsoid $2x^2 + 3y^2 + z^2 + yz - xz = 1$

+) $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + yz - xz - 1$

+) $F_x = 4x - z$

+) $F_y = 6y + z$

+) $F_z = 2z + y - x$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{z - 4x}{2z + y - x}$

+) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{6y + z}{2z + y - x}$

+) $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{4} \\ y = -\dfrac{z}{6} \\ 2z + y - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{4} \\ y = -\dfrac{z}{6} \\ 2z - \dfrac{z}{6} - \dfrac{z}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_0\left(\dfrac{z}{4};\ -\dfrac{z}{6};\ z\right),\ z \neq 0$

+) $z_{xx}(M_0) = \dfrac{(z_x - 4)(2z + y - x) - (2z_x - 1)(z - 4x)}{(2z + y - x)^2}\ \dfrac{(z_x - 4).\dfrac{19z_0}{12}}{\left(\dfrac{19z_0}{12}\right)^2} = -\dfrac{48}{19z_0}$

+) $z_{yy}(M_0) = -\dfrac{\left(6 + z_y\right)(2z + y - x) - \left(2z_y + 1\right)(6y + z)}{(2z + y - x)^2} = -\dfrac{6 + 0}{\dfrac{19z_0}{12}} = -\dfrac{72}{19z_0}$

+) $z_{xy}(M_0) = \dfrac{z_y(2z + y - x) - \left(2z_y + 1\right)(z - 4x)}{(2z + y - x)^2} = \dfrac{0}{\dfrac{19}{12}z_0} = 0$

+) $AC - B^2 = \dfrac{72 \times 48}{19^2.z_0^2} > 0 \Rightarrow$ có cực trị

+) Thay M_0 vào ellipsoid có

$2.\left(\dfrac{z_0}{4}\right)^2 + 3\left(-\dfrac{z_0}{6}\right)^2 + z_0^2 - \dfrac{z_0}{6}z_0 - \dfrac{z_0}{4}z_0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_0^2}{8} + \dfrac{z_0^2}{12} + z_0^2 - \dfrac{z_0^2}{6} - \dfrac{z_0^2}{4} = 1$

$\Leftrightarrow 3z_0^2 + 2z_0^2 + 24z_0^2 - 4z_0^2 - 6z_0^2 = 24 \Leftrightarrow 19z_0^2 = 24 \Leftrightarrow z_0^2 = \dfrac{24}{19} \Leftrightarrow z_0 = \pm\sqrt{\dfrac{24}{19}}$

+) $z_0 = \sqrt{\frac{24}{19}}$ có cực đại

+) $z_0 = -\sqrt{\frac{24}{19}}$ có cực tiểu

• **13(tr. 115).** $F(x, y)$ liên tục, có các đạo hàm riêng cấp 2, phương trình $F(x, y) = C$ xác định hàm $y = f(x)$, khả vi cấp 2. Chứng minh rằng

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

+) $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \; F_y \neq 0$

+) $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left[\left(\frac{F_x}{F_y}\right)_x dx + \left(\frac{F_x}{F_y}\right)_y dy\right] = -\left[\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{yx}}{F_y^2}dx + \frac{F_{xy}F_y - F_xF_{yy}}{F_y^2}dy\right]$

+) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{yx}}{F_y^2} - \frac{F_{xy}F_y - F_xF_{yy}}{F_y^2} \cdot \frac{dy}{dx}$

$= -\frac{F_{xx}F_y - F_xF_{yx}}{F_y^2} + \frac{F_{xy}F_y - F_xF_{yy}}{F_y^2} \cdot \frac{F_x}{F_y}$

+) $= -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$

Ghi nhớ. Tuần sau học các mục 20.1 và 20.2