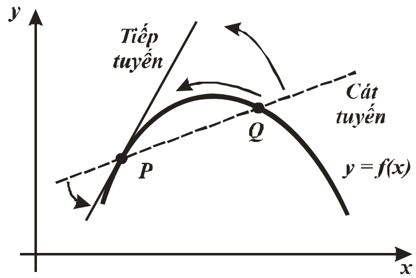
Bài số 3

ĐẠO HÀM VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

I. Bài toán tiếp tuyến và khái niệm đạo hàm

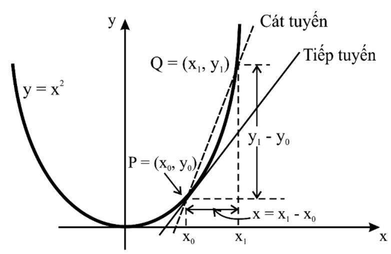


Hình 2.3. Ý tưởng của Fermat

Hình 2.3. Ý tưởng của Fermat

1. Khái niệm tiếp tuyến : Xét đường cong $y = f(x)$ với $x = 0$ và P là ***một điểm cố định*** trên đường cong này . Gọi Q là điểm thứ hai gần P trên đường cong, ta vẽ cát tuyến PQ. Khi đó, tiếp tuyến tại P là vị trí giới hạn của cát tuyến, khi Q trượt dọc theo đường cong đến P .

2. Tính độ dốc tiếp tuyến



Hình 2.4

❖ Cho $P(x_0, y_0)$ là ***điểm cố định*** bất kỳ trên parabol $y = x^2$. Ta sẽ tính độ dốc của tiếp tuyến của parabol này tại điểm P .

+ Đầu tiên, ta chọn điểm thứ hai $Q(x_1, y_1)$ trên đường cong, gần với P .

+ Vẽ cát tuyến PQ, độ dốc của cát tuyến : $m_{\sec} =$ độ dốc $PQ = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ (1)

+ Cho Q trượt đến điểm cố định P dọc theo đường cong , khi đó x_1 tiến dần đến x_0 và cát tuyến đổi phương và tiến đến một vị trí giới hạn là tiếp tuyến tại điểm P .

+ Dễ thấy rằng độ dốc m của tiếp tuyến sẽ là giá trị giới hạn của độ dốc $m_{\sec}$ của cát tuyến:

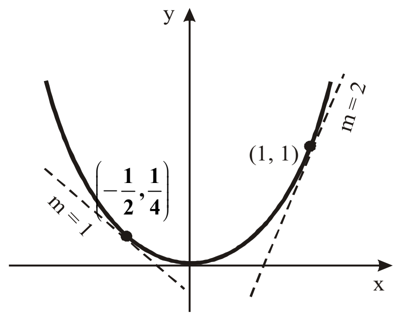
$$m = \lim_{Q \to P} m_{\sec} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad (2)$$

+ Vì P và Q đều nằm trên đường cong, ta có $y_0 = x_0^2$ và . $y_1 = x_1^2$., từ (1) có thể được viết

$$m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} \qquad (3)$$

và (2) trở thành : $m = \lim_{x \to x_0} \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x_1 + x_0)$

Tức là : $m = 2x_0$ là độ dốc tiếp tuyến của đường cong $y = x^2$ tại điểm (x_0, y_0).



Hình 2.5

❖ Khi biến độc lập x thay đổi từ giá trị ban đầu x_0 đến giá trị thứ hai x_1 . Ký hiệu chuẩn đối với sự thay đổi này là Δx (đọc là ''delta x'') :

$$\Delta x = x_1 - x_0 \tag{5}$$

hay là:

$$x_1 = x_0 + \Delta x \tag{6}$$

+ Độ dốc của cát tuyến ở trên có thể được viết dưới dạng:

$$m_{\sec} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \tag{7}$$

+ Rút gọn kết quả, sẽ có :

$$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$$

+ Vì vậy : $m_{\sec} = 2x_0 + \Delta x$

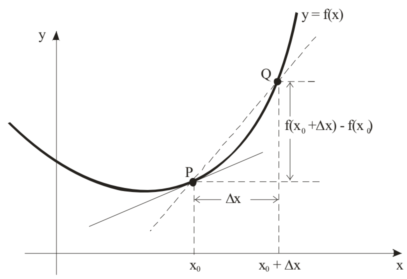
+ Lúc này : $x_1 \to x_0$ tương đương với $\Delta x \to 0$, và khi đó ta nhận được kết quả như trước.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0,$$

❖ **<u>Tổng quát :</u>** đối với đồ thị của hàm bất kỳ $y = f(x)$.

+ Đầu tiên, ta tính độ dốc của cát tuyến qua 2 điểm P và Q ứng với x_0 và $x_0 + \Delta x$,

$$m_{\sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



+ Sau đó, ta tìm giới hạn (nếu tồn tại) của $m_{\sec}$ khi Δx tiến đến 0 để nhận được độ dốc của tiếp tuyến của đường cong tại điểm P :

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

+ Giá trị của giới hạn này thường được ký hiệu là $f'(x_0)$, đọc là "f **phẩy tại** x_0" để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nó vào cả x_0 và hàm $f(x)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (8)$$

+ Ví dụ : Nếu $f(x) = x^2$, thì $f'(x_0) = 2x_0$.

● **<u>Ví dụ 1.</u>** Tính $f'(x_0)$ nếu $f(x) = 2x^2 - 3x$.

Giải: + Ta có :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \left[2(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x)\right] - \left[2x_0^2 - 3x_0\right] \\ &= \Delta x(4x_0 + 2\Delta x - 3) \end{aligned}$$

+ Do đó

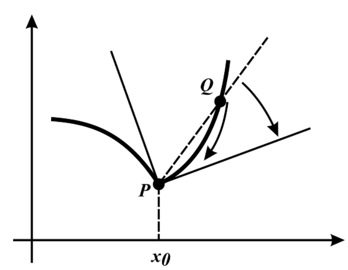
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 3$$

và $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(4x_0 + 2\Delta x - 3) = 4x_0 - 3$$

❖ **<u>Chú ý :</u>** Những lập luận trên đúng với giả thiết đường cong có tiếp tuyến xác định ở điểm P .

+ Có đường cong không có tiếp tuyến tại một điểm nào đó.

+ Khi tồn tại một tiếp tuyến, cát tuyến PQ sẽ tiến đến cùng một vị trí giới hạn khi Q tiến đến P từ **<u>bên phải</u>** hoặc từ **<u>bên trái</u>** : tương ứng với Δx dần tới 0 theo cả hai phía.



+ Trên thực tế ta gặp nhiều bài toán (chẳng hạn bài toán tính vận tốc tức thời cuả một chuyển động) mà mô hình toán học của nó trong quá trình tính toán dẫn đến việc cần tính giới hạn dạng :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

và đó là những lý do dẫn đến sự ra đời của phép toán đạo hàm của hàm số.

3. Định nghĩa về đạo hàm

a. Định nghĩa:

Cho hàm $y = f(x)$, *đạo hàm* của nó, $f'(x)$, là một hàm số mới có giá trị tại điểm x được xác định bởi giới hạn sau (khi giới hạn này tồn tại):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

+ Nếu giới hạn tồn tại với $x = a$, thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *khả vi tại* a.
+ *Hàm khả vi* là hàm số khả vi tại mọi điểm trong tập xác định của nó.

- ***Chú ý :*** $f'(x)$ là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại P.

  + Nếu $y = f(x)$ thì $\dfrac{dy}{dx}$ còn được gọi là suất biến đổi của y theo x.

  + Nếu mô tả một chuyển động thì $\dfrac{dy}{dt} = v(t)$ là vận tốc của chuyển động đó, và khi đó

$\left|\dfrac{dy}{dt}\right| = |v(t)| = |f'(t)|$ được gọi là tốc độ của chuyển động đó .

b. Quy tắc tìm đạo hàm tại một điểm theo định nghĩa:

- ***Bước 1***. Tìm số gia $f(x+\Delta x) - f(x)$ và tiến hành rút gọn
- ***Bước 2***. Thiết lập tỷ số

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- ***Bước 3.*** Tính giới hạn của tỷ số trên khi $\Delta x \to 0$. Nếu giới hạn đó tồn tại thì đó chính là đạo hàm của hàm số tại điểm cần tìm :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ví dụ (tự đọc). Tìm $f'(x)$ nếu $y = f(x) = x^3$.

Bước 1.

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) - f(x) &= (x+\Delta x)^3 \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= \Delta x[(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] \end{aligned}$$

Bước 2.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Bước 3. Kết luận

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x^2$$

<u>Ví dụ (tự đọc).</u> Tìm $f'(x)$ nếu $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Bước 1:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

Bước 2.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

Bước 3. Kết luận

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

<u>Ví dụ (tự đọc).</u> Tìm $f'(x)$ nếu $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Bước 1.

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

Bước 2.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

Bước 3. Kết luận

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ với } \forall x > 0.$$

<u>c. Một số chú ý về ký hiệu:</u>

+ Ta thường viết dạo hàm của hàm số tại một điểm bất kỳ trong miền đang xét là:

$$\frac{df(x)}{dx} \qquad \text{và} \qquad \frac{d}{dx} f(x)$$

Ở cách viết thứ hai này, ký hiệu $\dfrac{d}{dx}$ được coi là một phép toán mà khi tác động vào hàm $f(x)$ sẽ có đạo hàm $f'(x)$:

+ Nếu ta muốn viết giá trị số của đạo hàm tại một điểm cụ thể $x = 3$, ta viết :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} \qquad \text{hoặc } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}, \quad \text{hoặc } f'(3).$$

❖ **<u>Chú ý:</u>** + Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x thì $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

+ Một hàm ***khả vi tại một điểm thì liên tục tại điểm đó*** vì:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]\left[\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\right]=\frac{dy}{dx}\cdot 0=0\ .$$

+ Một hàm có thể liên tục tại một điểm mà không khả vi tại điểm đó.
+ Một hàm số ***không liên tục*** tại x_0 thì sẽ **không khả vi tại điểm đó**.

II. Quy tắc tính đạo hàm

1. Các phép toán cơ bản về đạo hàm

1. Đạo hàm của hàm hằng: $f(x)=c\Rightarrow\quad f'(x)=0$.

2 Đạo hàm của đối số: $f(x)=x\Rightarrow\quad f'(x)=1$

3. Giả sử $f(x),g(x)$ có đạo hàm trong $(a;b)$.

Khi đó trong $(a;b)$ ta có :

$$\begin{aligned}
&i)\quad \big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)\\
&ii)\quad \big(f(x).g(x)\big)'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\\
&iii)\quad \big(Cf(x)\big)'=Cf'(x)\\
&iv)\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)};\big(g(x)\neq 0\big)
\end{aligned}$$

Ví dụ 1. + Ta có :

$$\frac{d}{dx}(x^3\cdot x^4)=x^3\cdot\frac{d}{dx}x^4+x^4\cdot\frac{d}{dx}x^3\ =x^3\cdot 4x^3+x^4\cdot 3x^2\ =7x^6$$

+ Ta có: $y=(x^3-4x)(3x^4+2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=(x^3-4x)\frac{d}{dx}(3x^4+2)+(3x^4+2)\frac{d}{dx}(x^3-4x)\\
&=(x^3-4x)(12x^3)+(3x^4+2)(3x^2-4)\\
&=12x^6-48x^4+9x^6-12x^4+6x^2-8\\
&=21x^6-60x^4+6x^2-8
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm thương $y=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$.

● Ta có: $$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}\qquad (9)$$

III. Hàm hợp và quy tắc dây chuyền

a. Hàm hợp

❖ Xét hàm số : $y=(x^3+2)^5$ (10)

+ Đặt : $u=x^3+2$, khi đó: $y=u^5$ trong đó

+ Ngược lại, bằng việc thay thế $u=x^3+2$ vào $y=u^5$ ta có thể lập lại (10).

+ Hàm như vậy được gọi là ***hàm hợp***, hoặc đôi khi là *hàm của hàm*.

Nói chung, nếu y là một hàm của u, trong đó u là hàm của x, thì ta nói:

$y=f(u)$ trong đó $u=g(x)$

b. Quy tắc dây chuyền: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad (11)$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm $y=(x^3+2)^{100}$

Giải: Ta viết $y=u^{100}$ trong đó $u=x^3+2$,

sử dụng (11) sẽ có : $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=100u^{99}\cdot 3x^2=300x^2(x^3+2)^{99}$.

- **Hệ quả:** *Quy tắc lũy thừa*:

$$\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad . \qquad (12)$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của $y=(3x^4+1)^7$.

Ví dụ 3 . Tính đạo hàm $y=\left[(3x^4+1)^7+1\right]^5$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của $y=\left[\frac{1-2x}{1+2x}\right]^4$.

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của $y=(x^2-1)^3(x^2+1)^{-2}$.

VI. Hàm ẩn

a. Hàm ẩn : Hàm y là hàm của x và được xác định bởi phương trình : $F(x,y)=0$ (*), không giải được đối với y, nhưng trong đó x và y có liên quan với nhau. Khi đó, ta nói phương trình (*) xác định y như là một (hoặc nhiều) hàm ẩn của x.

Ví dụ 1.

+ P/trình $xy=1$ xác định một hàm ẩn của x mà ta có thể viết một cách tường minh là $y=\frac{1}{x}$.

+ P/trình $2x^2-2xy=5-y^2$ xác định hai hàm ẩn: $y=x+\sqrt{5-x^2}$ *và* $y=x-\sqrt{5-x^2}$.

b. Đạo hàm của hàm ẩn :

Ví dụ 2. (i) Xét p/trình $xy=1$. Lấy đạo hàm hai vế theo x :

$$x\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{hoặc} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

+ Từ phương trình ta có $y = \dfrac{1}{x}$, nên: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$

+ Nếu đạo hàm trực tiếp $y = \dfrac{1}{x}$, cũng có $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$.

(ii) Từ phương trình $x^2 + y^2 = 25$ ta có : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}; y \neq 0$.

Bài tập về nhà: **Tr.72, 82, 96, 100, 104, 108, 250, 254, 296.**

Đọc trước các Mục: **3.5;5.2, 8.3, 9.5**
Chuẩn bị cho **Bài số 4**

Đạo hàm hàm ngược. Đạo hàm cấp cao