BÀI 3. ĐỊNH THỨC

I. Định thức và các tính chất

1. Định nghĩa

Cho $A = \left[a_{ij} \right]_{n\times n}$. Định thức cấp n của A là một số, ký hiệu det A hoặc $|A|$.

* Nếu $A = [a_{11}]$ thì $|A| = a_{11}$;

* Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

* Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta & \square & \\ & \Delta & \square \\ \square & & \Delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \square & \nabla \\ \square & \nabla & \\ \nabla & & \square \end{bmatrix}$$

VD. Tính: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$$|A| = 1.2.9 + 0.3.(-3) + 1.4.(-1)$$
$$-(-1).2.(-3) - 1.0.9 - 1.3.4 = -4$$

2. Định thức cấp n

a. Khái niệm

- Cho ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{n\times n}$
- Kí hiệu M_{ij} là ma trận vuông cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.
- Gọi $c_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$ là phần phụ đại số của a_{ij}
- Ma trận $C = \left[c_{ij} \right]_{n\times n}$ được gọi là ma trận phần phụ đại số của A.

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm c_{11}, c_{23}.

$$c_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(3\times 2 - 1\times 1) = 5$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1\times 1 - 3\times 2) = 5$$

b. Công thức phần phụ đại số

Định lý:

Cho $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ và c_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}.

- Khai triển Laplace theo hàng i

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}$$

- Khai triển Laplace theo cột j

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$$

VD. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Tính detA, detB.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = a_{11}c_{11} = 1 \times (-1)^{1+1} \times |M_{11}| = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 4 - 7 \times (-1) = 27$$

NX. Khi tính định thức ta nên khai triển theo hàng hoặc cột chứa nhiều số 0 nhất.

3. Tính chất của định thức

TC1: Định thức đổi dấu nếu đổi chỗ hai hàng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

HQ: Nếu A có 2 hàng giống nhau thì detA = 0.

TC2: Định thức là một hàm tuyến tính đối với mỗi hàng khi cố định các hàng còn lại.

$$+ \quad \begin{vmatrix} xa_{11} & xa_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ với } x \in R$$

$$+ \quad \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

HQ1: Nếu A có một hàng toàn số 0 thì detA = 0.

HQ2: Nếu A có 2 hàng tỉ lệ thì detA = 0.

TC3: Định thức không đổi nếu thay một hàng bằng hàng đó cộng (trừ) bội hàng khác.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} - \lambda a_{11} & a_{22} - \lambda a_{12} \end{vmatrix}$$

TC4: Định thức của ma trận tam giác hoặc đường chéo bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính

HQ: Định thức của ma trận đơn vị bằng 1.

TC5: $\det A^T = \det A.$

Nhận xét:

+ Mọi tính chất phát biểu của định thức đối với hàng đều áp dụng được cho cột.

+ Dùng các tính chất định thức biến đổi ma trận về dạng tam giác.

+ Kết hợp cả khai triển Laplace và các tính chất định thức để việc tính định thức hiệu quả.

VD. Tính định thức của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$$VD: |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{H3 \to H3 - 2H1 \\ H4 \to H4 - 5H1}]{H2 \to H2 + H1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -8 & -14 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[H4 \to H4 + 4H2]{H3 \to H3 + (3/2)H2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{H4 \to H4 - (2/3)H3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 23/3 \end{vmatrix}$$

$$= 1.2.3.(23/3) = 46$$

4. Liên hệ giữa ma trận và định thức

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Khi đó:

+ $\det(tA) = t^n \det A,\ \ t \in R$

+ $\det(AB) = \det A.\det B$

+ $\det(A^n) = (\det A)^n$

+ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

+ A là ma trận khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0.$

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Tính $|A|$, $|B|$, $|A^{-1}|$, $|A^{-1}B|$, $|A^2B|$, $|3A|$, $|2AB|$

$$VD: |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = 6; |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = -5;$$

$$|A^{-1}| = 1/|A| = \ldots; |A^{-1}B| = |A^{-1}|.|B| = \ldots; |4A_{3\times 3}| = 4^3|A|;$$

$$|A^2B| = |A^2|.|B| = |A|^2.|B| = \ldots; |2AB| = 2^3|A|.|B| = \ldots$$

II. Ứng dụng của định thức

1. Giải hệ phương trình tuyến tính

Định lý (*Quy tắc Cramer)*

Xét hệ $Ax = b$, $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$; $x = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$

Nếu $\det A \neq 0$ thì hệ có duy nhất một nghiệm:

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A};\ x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}; \ldots;\ x_n = \frac{\det B_n}{\det A}$$

trong đó B_j là ma trận thu được từ A bằng cách thay cột j của A bằng cột b.

VD. Giải hệ sau bằng quy tắc Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$VD: |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{he co nghiem duy nhat,}$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 24, |B_2| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = -24, |B_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = \ldots = 36$$

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = 2, x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} = -2, x_3 = \frac{|B_3|}{|A|} = 3$$

KL: He co nghiem duy nhat (2,-2,3)

2. Tìm ma trận nghịch đảo

Định lý: Cho $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ và $C = \left[c_{ij} \right]_{n \times n}$ là ma trận phần phụ đại số của A. Nếu det $A \neq 0$ thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.C^T$$

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}.

$VD: |A| = \ldots = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ kha nghich

$$c_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; c_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1).\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; c_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1).\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; c_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; c_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1).\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^{\mathrm{T}} = \ldots$$