30 – 03 – 2009

## GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

## Bài 7

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

## § 20.9 ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BỘI. ĐỊNH THỨC JACOBIAN

- Đổi biến số trong tích phân kép

• Chúng ta đã biết trong trường hợp hàm một biến: Nếu $f(x)$ liên tục và hàm $x = x(u)$ có các đạo hàm liên tục, thì $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[x(u)]x'(u)du$, ở đó $a = x(c)$ và $b = x(d)$.

• Đối với tích phân kép thì có hay không công thức đổi biến số ?

**Định lí.** *Nếu $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ là phép biến đổi một - một miền S trong uv - mặt phẳng thành miền R trong xy - mặt phẳng, và nếu Jacobian*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$$

*và x, y có các đạo hàm riêng liên tục thì*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

**Ví dụ.** Diện tích: $R$: $-1 \le x - y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$

+) $u = x - y$, $v = x + y$: $u \in [-1 ; 1]$, $v \in [0 ; 1]$

+) $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$

+) $\iint_R dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_0^1 \frac{1}{2}.du\,dv = 1$

## § 20.4. TÍCH PHÂN BỘI HAI TRONG TOẠ ĐỘ CỰC

- Đổi biến số trong tọa độ cực đối với tích phân kép
- Các dạng toán cơ bản

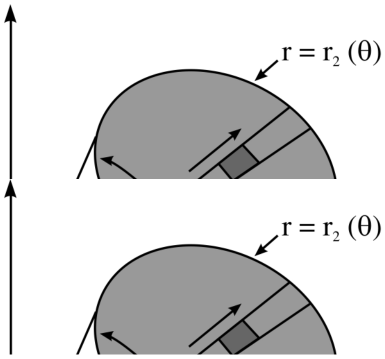
• Dùng toạ độ cực $r$, $\theta$ để miêu tả một miền bị chặn sẽ tiện lợi hơn việc sử dụng toạ độ vuông góc $x$, $y$.

• Tích phân bội hai trong toạ độ cực được viết dưới dạng như sau:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

Đối với miền dạng $\alpha \le \theta \le \beta$, $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ ta có công thức sau

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta \text{ (hình 20.18)}$$




***Hình 20.18***

**Ví dụ 1.** Tìm diện tích của miền $R$ bị chặn bởi đường cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$

+) $S = \iint_R dA = \iint_R r dr d\theta$.

+) $0 \le r \le a(1 + \cos\theta)$

+) $S = 2\int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos\theta)} r dr d\theta$

+) $= 2\int_0^\pi \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta = 2\int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^\pi \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$

+) $= a^2\int_0^\pi \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right) d\theta = a^2\left[\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$.

**Ví dụ 2.** Hãy tìm công thức tính thể tích của một hình cầu bán kính $a$ bằng phương pháp nêu trên

+) $V = 8\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, $R$: $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

+) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le a$

+) $V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr d\theta$

+) $= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^a -\frac{1}{2}\left(a^2 - r^2\right)^{1/2}(-2rdr)\,d\theta$

+) $= -4\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\right]_0^a d\theta \ = -4\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{2}{3}a^3\right)d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.$

**Ví dụ 3.** Tích phân suy rộng I = $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

+) $I^2 = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)e^{-y^2}dy = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right)dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy.$

+) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le +\infty$

+) $I^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta = \frac{\pi}{4}$

+) $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ hay $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

• Tích phân này rất đáng chú ý bởi vì ta biết rằng tích phân bất định $\int e^{x^2}dx$ không thể biểu diễn dưới dạng một hàm sơ cấp.

## Dạng toán cơ bản

### 1. Sử dụng tích phân bội 2 trong toạ độ cực tính diện tích miền phẳng sau

• **1(tr. 137).** Hình tròn $r = a$

+) $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le a$

+) $S = \int_0^{2\pi}\int_0^a r dr d\varphi$

+) $= \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^a r\, dr$

+) $2\pi.\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = \pi a^2$

• **3(tr. 137).** Miền nằm trong các hình tròn $r = a$ và $r = 2a\cos\theta$

+) $a = 2a\cos\theta \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$

+) Diện tích hình tròn $r = 2a\cos\theta$ là $\pi a^2$

+) $S = \pi a^2 - \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_{0}^{2a\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

+) $= \pi a^2 - \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{0}^{2a\cos\theta} d\theta$

+) $= \pi a^2 - \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2a^2\cos^2\theta d\theta$

+) $= \pi a^2 - a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$

+) $= \pi a^2 - a^2\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

+) $= \pi a^2 - \frac{2\pi}{3}a^2 - \frac{a^2}{2}.2.\frac{\sqrt{3}}{2}$

+) $= \frac{a^2}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$

• **5(tr. 137).** Nhánh phải của đường Lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$

+) $\cos 2\theta \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

+) $S = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$

+) $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta$

+) $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \, d\theta$

+) $= a^2 \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

+) $= a^2$

• **7(tr. 137).** Miền phía trong đường Lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ và bên ngoài đường tròn $r = a$

+) $2a^2\cos 2\theta = a^2 \Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{6},\ \theta = \pm\frac{5\pi}{6}$

+) $S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2 dr\, d\theta$

+) $= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta$

+) $= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} a^2(\cos 2\theta - 1)\, d\theta$

+) $= a^2(\sin 2\theta - \theta)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$

+) $= a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

• **9(tr. 137).** Miền bên trong đường Cadioid $r = a(1 + \cos\theta)$ và phía ngoài đường tròn $r = a$

+) $a(1 + \cos\theta) = a \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$

+) $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a}^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$

+) $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{a}^{a(1+\cos\theta)} d\theta$

+) $= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((1+\cos\theta)^2 - 1\right) d\theta$

+) $= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$

+) $= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$

+) $= \frac{a^2}{2} \left.\left(2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

+) $= \frac{a^2}{2}\left(4 + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$

• **13(tr. 137).** Miền nằm phía trong đường Cardioid $r = 1 + \cos\theta$ và bên phải đường thẳng $x = \frac{3}{4}$

+) $r\cos\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{4\cos\theta}$

+) $1 + \cos\theta = \frac{3}{4\cos\theta} \Leftrightarrow 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{-2 \pm 4}{4} = \frac{1}{2}$ hoặc $-\frac{3}{2}$ (loại)

$\Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$

+) $S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{3}{4\cos\theta}}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

+) $=\int \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\frac{3}{4\cos\theta}}^{1+\cos\theta} d\theta$

+) $=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[(1+\cos\theta)^2-\frac{9}{16\cos^2\theta}\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{9}{16}.\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{4}-\frac{9}{10}.\tan\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\pi+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{10}.2\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{16}$

## 2. Đổi tích phân sang toạ độ cực

• **17(tr. 138).** $I=\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z\,dy\,dx$

+) $-\sqrt{9-x^2}\le y\le\sqrt{9-x^2}$ , $0\le x\le 3$

$\Leftrightarrow |y|\le\sqrt{9-x^2}$ , $0\le x\le 3$

$\Leftrightarrow y^2\le 9-x^2$, $0\le x\le 3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\le 9$, $0\le x\le 3$

+) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $0\le r\le 3$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

+) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 zr\,dr\,d\theta$

• **19(tr. 138).** $I=\int_0^1\int_{x^2}^{x} z\,dy\,dx$

+) $x^2\le y\le x$, $0\le x\le 1$

+) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

$$\begin{cases} 0 \le r\cos\varphi \le 1 \\ r^2\cos^2\varphi \le r\sin\varphi \le r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\varphi \le \cos\varphi \\ r \le \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ \varphi \ge 0 \\ r \le \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \end{cases}$$

+) $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le r \le \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$

+) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} zr\,dr\,d\varphi$

• **21(tr. 138).** $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} z\,dx\,dy$

+) $y \le x \le \sqrt{1-y^2}$ , $0 \le y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}, \quad 0 \le y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

+) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

+) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 z\,r\,dr\,d\varphi$

• **15(tr. 138).** Tính tích phân sau trong toạ độ cực $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2)dy\,dx$

+) $0 \le y \le \sqrt{2ax - x^2}$ , $0 \le a \le 2a$

+) $\begin{cases} y \ge 0 \\ x^2 + y^2 \le 2ax \\ 0 \le x \le 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ (x-a)^2 + y^2 \le a^2 \\ 0 \le x \le 2a \end{cases}$

+) $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,$

$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $r^2 \le 2ar\cos\varphi$ hay $0 \le r \le 2a\cos\varphi$

+) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 . r\, dr\, d\varphi$

+) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi$

+) $= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4 \cos^4 \varphi\, d\varphi$

+) $= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2\, d\varphi$

+) $= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi$

+) $= a^4 \left. \left( \frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

+) $= \frac{3}{4}\pi a^4$

## 3. Tính tích phân suy rộng

• **39(tr. 139).** Sử dụng kết quả sau: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, chứng minh rằng

a) $\int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$

+) $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{2}x\right)^2} d\left(\sqrt{2}x\right)$

+) $= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right)$

+) $= \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan^2 x}}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

+) $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tan^2 x} d(\tan x)$

+) $\displaystyle = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

+) $\displaystyle = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$

+) $\displaystyle = \int_0^{+\infty} e^{-x} d\left(\sqrt{x}\right)$

+) $\displaystyle = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

+) $\displaystyle = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$

+) $t = -\ln x,\ x = e^{-t}$

+) $\displaystyle = -\int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

+) $\displaystyle = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$ (câu e)