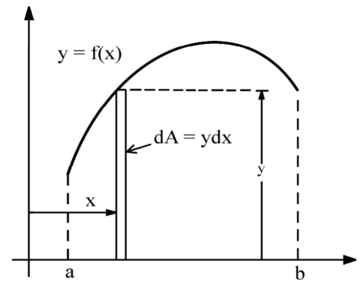
Bài số 10
ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH: DIỆN TÍCH MIỀN PHẲNG.



I. Ứng dụng hình học

1. Diện tích hình phẳng

a. Thành phần diện tích. Diện tích hình thang cong

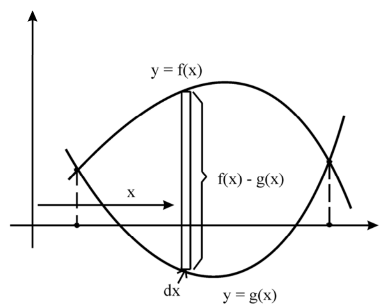
- Xét hình thang cong được giới hạn bởi : $\begin{cases} y = f(x) \geq 0 \\ a \leq x \leq b \\ y \geq 0 \end{cases}$.

+ Diện tích mỗi hình chữ nhật nhỏ : $dA = ydx = f(x)\,dx$: được gọi là ***thành phần diện tích.***.

+ Diện tích A của toàn miền là tổng (liên tục) các thành phần diện tích dA, khi x tăng từ a đến b ta có:

$$A = \int dA = \int ydx = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

b. Diện tích giữa hai đường cong



Hình 7.2

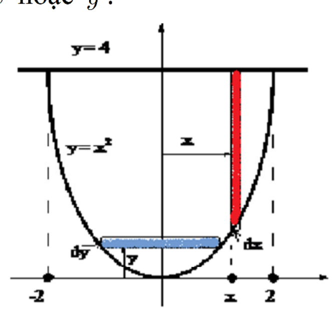
❖ Tính diện tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$

+ Vi phân diện tích là $dA = [f(x) - g(x)]\,dx$

+ Diện tích toàn miền là: $A = \int dA = \int_a^b \left[f\left(x\right) - g\left(x\right)\right]dx$

❖ ***Tính diện tích bằng tích phân xác định:***

- **Bước 1:** Vẽ miền cần tính diện tích, xác định các đường biên của miền và tìm toạ độ giao điểm của chúng.
- **Bước 2:** Chọn vi phân diện tích theo:
  + hoặc dải thẳng đứng với chiều rộng dx
  + hoặc dải nằm ngang với chiều rộng dy.
- **Bước 3:** Tính ra vi phân diện tích dA, biểu thị dA theo biến x hoặc y.
- **Bước 4:** Lấy tích phân dA theo các cận của x hoặc y.



Hình 7.3

Ví dụ 1. Tính diện tích miền phẳng được giới hạn bởi các đường

$y = x^2$ và $y = 4$.

- ***Cách 1:*** Dùng dải thẳng đứng: x biến thiên từ -2 đến 2

+ Chiều dài của dải là $(4 - x^2)$

+ Diện tích của dải là: $dA = (4 - x^2)dx$.

+ Vậy diện tích toàn miền là:

$$\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ (đvdt).}$$

• ***Cách 2 :*** Dùng vi phân diện tích nằm ngang: khi đó y biến thiên từ 0 đến 4

+ Chiều dài của dải là $\sqrt{y} - \left(-\sqrt{y}\right) = 2\sqrt{y}$, nên $dA = 2\sqrt{y}dy$

+ Diện tích toàn miền là: $\int_0^4 2\sqrt{y}dy = \frac{32}{3}$ (đvdt)

Ví dụ 2. Tìm diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3 - x^2$ và $y = x + 1$.

+ Tìm giao điểm của các đường : giải phương trình

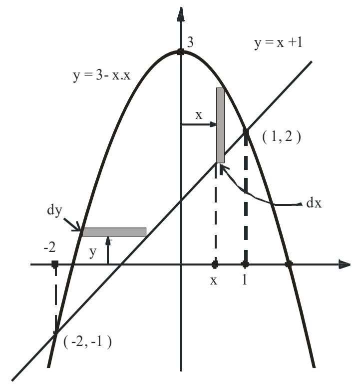
$$3 - x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Các giao điểm là $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

+ Chiều dài của giải thẳng đứng : $(3 - x^2) - (x + 1) = 2 - x^2 - x$

+ Diện tích miền phẳng :

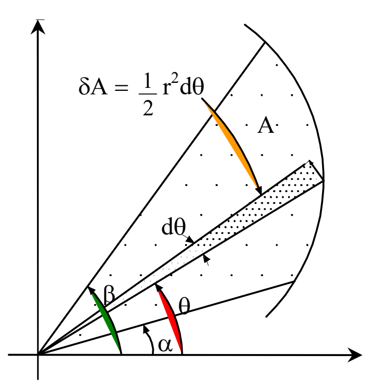
$$\int_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2} \text{ (đvdt)}$$



c. Diện tích hình phẳng trong tọa độ cực.

❖ **Bài toán :** Tìm diện tích A của một miền bị chặn bởi một đường cong $r = f\left(\theta\right)$ và hai nửa đường thẳng $\theta = \alpha$ và $\theta = \beta$.

• ***Phần tử vi phân diện tích :*** dA là diện tích của quạt mỏng với bán kính r và góc ở tâm là $d\theta$: $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$



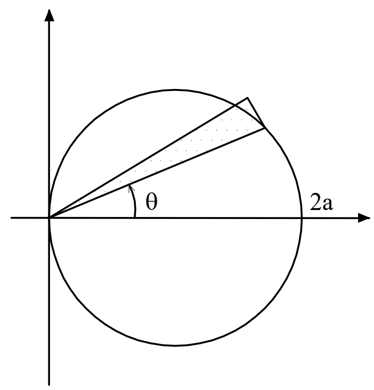
- ***Diện tích*** A là: $$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

Ví dụ 3. Sử dụng tích phân để tìm diện tích hình tròn $r = 2a\cos\theta$.

Giải. + Hình tròn quét một góc θ tăng từ $-\pi/2$ đến $\pi/2$.

+ Do tính đối xứng của hình tròn nên:

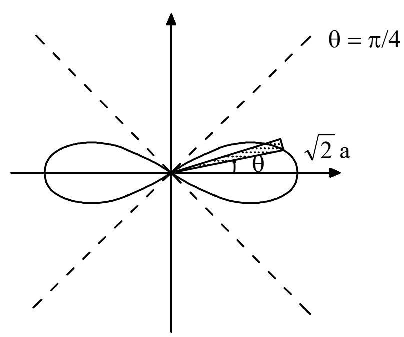
$$A = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}4a^2\cos^2\theta d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta = 2a^2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi a^2 \text{ (đvdt)}.$$



Ví dụ 4. Tìm diện tích miền được giới hạn bởi đường lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

Giải. + Từ tính đối xứng, ta tính diện tích của góc phần tư thứ nhất rồi nhân với 4:

$$A = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}2a^2\cos 2\theta d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta = 2a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

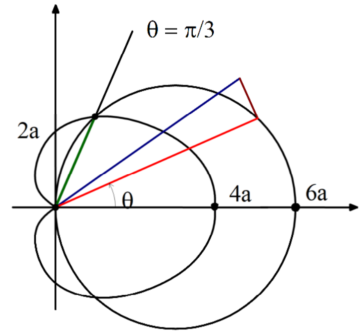


Ví dụ 5. Tìm diện tích phần trong của đường tròn $r = 6a\cos\theta$ và phần ngoài của đường hình tim $r = 2a\left(1+\cos\theta\right)$.

Giải. + Các đường cong giao nhau ở trong góc phần tư thứ nhất tại $\theta = \pi/3$.

+ Phần tử diện tích là:

$$dA = \frac{1}{2}r_1^2 d\theta - \frac{1}{2}r_2^2 d\theta = \frac{1}{2}\left[r_1^2 - r_2^2\right]d\theta = \frac{1}{2}\left[36a^2\cos\theta - 4a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\right]d\theta = 2a^2\left(8\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta\right)d\theta.$$



+ Do tính đối xứng:

$$A = 2\int_0^{\pi/3} 2a^2\left(8\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta\right)d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/3}\left[4\left(1+\cos 2\theta\right) - 1 - 2\cos\theta\right]d\theta$$
$$= 4a^2\left[3\theta + 2\sin 2\theta - 2\sin\theta\right]\Big|_0^{\pi/3} = 4\pi a^2$$

II Ứng dụng vật lý (tự đọc)

1. Công và năng lượng.

❖ Nếu lực không đổi F đưa một vật đi một quãng là d thì công sản ra là tích của lực và quãng đường:
$$W = Fd.$$

❖ Công của một lực biến thiên tác dụng lên vật theo hướng chuyển động của nó: coi hướng chuyển động là trục Ox thì vi phân công là: $dw = F(x)dx$ và $W = \int dw = \int_a^b F(x)dx$

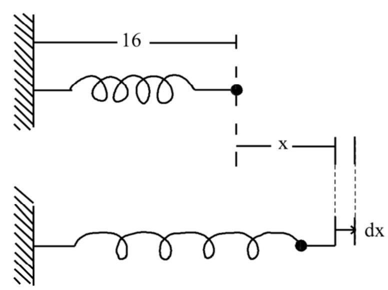
Ví dụ 1. Một lò xo có chiều dài tự nhiên là 16 in. Khi lò xo được kéo dài x in, theo định luật Hooke lò xo sẽ kéo lại một lực là $F = kx$ trong đó 3 là hằng số, được gọi là hệ số lò xo. Giả sử lực 8 lb kéo lò xo đi một đọan dài 2 in, tìm công sản ra khi kéo lò xo dài ra 24 in?

Giải: + Trước hết $F = 8, x = 2 \to k = 4$ và $F = 4x$ ..

+ Giả sử lò xo được kéo đi một đoạn nhỏ là dx, khi đó lực F được xem là không đổi và công sản ra là $dw = Fdx = 4xdx$

+ Công tổng cộng là:

$$W = \int dw = \int Fdx = \int_0^8 4xdx = 2x^2\Big|_0^8 = 128 \text{ in-lb}$$



❖ Giả sử lực F biến thiên tác động lên vật thể khối lượng m dịch chuyển đi được một quãng đường nào đó trên trục Ox. Lực này không chỉ sản ra một công mà còn truyền gia tốc $\frac{dv}{dt}$ cho vật thể, theo Định luật II của Newton: $F = m.\frac{dv}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$

Gia tốc được tạo ra bởi lực đã làm thay đổi vận tốc và vì vậy làm thay đổi động nặng – hay năng lượng do chuyển động được xác định bởi công thức : Động năng $=\dfrac{1}{2}mv^2$.

❖ Định lý quan trọng trong cơ học: "Công sản ra do lực F trong quá trình được mô tả trên đây đúng bằng sự thay đổi về động năng của vật thể : tức là, nếu vật thể bắt đầu từ trạng thái đứng yên thì công sản ra đối với vật thể thì bằng động năng mà nó đạt được".

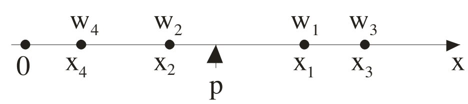
Thật vậy : Ta có: $F = m.\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = mv\dfrac{dv}{dx}.$

Do đó: $W = \displaystyle\int_a^b F dx = \int_a^b mv\frac{dv}{dx}dx = \int_{v_a}^{v_b} mv dv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2.$ (*)

2. Hệ rời rạc

Giả sử rằng n chất điểm với khối lượng w_k đặt tại điểm x_k, $k = 1,2,\ldots,n$. Theo qui tắc Ác-si-mét, hệ thống các vật này sẽ cân bằng, hay thăng bằng quanh p, nếu

$$\sum w_k(x_k - p) = 0.$$



Hình 11.2

Tổng bên trái này được gọi là ***mô-men*** của hệ thống quanh p, và hệ thống là cân bằng nếu mô-men này bằng không.

Một điểm $p = \overline{x}$ mà tại đó hệ thống sẽ cân bằng được gọi là ***trọng tâm*** của hệ thống đã cho.

+ Công thức: $\overline{x} = \dfrac{\sum w_k x_k}{\sum w_k}$

◆ Mở rộng lên hệ thống hai chiều các vật thể m_k được xác định bởi các điểm $(x_k; y_k)$ trong mặt phẳng xy. Chúng ta định nghĩa ***mô-men*** của hệ thống này trên trục y như sau: $M_y = \sum m_k x_k$.

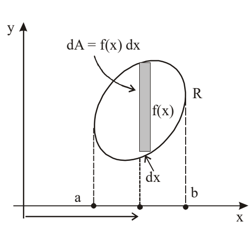
mô-men của hệ thống quanh trục x: $M_x = \sum m_k y_k$.

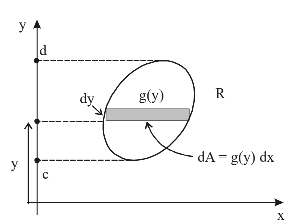
+ Tổng khối lượng của vật thể của tất cả các phần tử trong hệ thống là $m = \sum m_k$.

+ *Tâm của vật thể* của hệ thống được định nghĩa là điểm $(\overline{x}, \overline{y})$, với

$$\overline{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_y}{m} \quad \text{và} \quad \overline{y} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{M_x}{m}.$$

3. Hệ liên tục. Xét sự phân bố liên tục của vật thể trong một miền R trong mặt phẳng xOy.





Chúng ta coi R là một mặt mỏng đồng chất – là một đĩa đồng đều – có mật độ δ (= khối lượng của một đơn vị diện tích) là một hằng số.

- Mô-men của quanh trục $Ox : M_x = \int_c^d y\delta g(y)dy$
- Mô-men của quanh trục $Oy : M_y = \int_c^d x\delta f(x)dx$

- Tổng khối lượng của cái đĩa có thể được xác định rõ ràng theo hai cách :

$$m = \int_a^b \delta f(x)dx = \int_c^d \delta g(y)dy$$

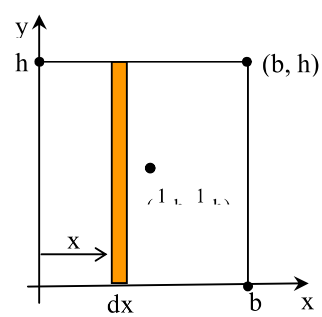
- Khối tâm $(\overline{x}, \overline{y})$ của đĩa bây giờ được định nghĩa là

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\delta f(x)dx}{\int_a^b \delta f(x)dx} = \frac{M_y}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_c^d y\delta g(y)dy}{\int_c^d \delta g(y)dy} = \frac{M_x}{m}$$

<u>Ví dụ 1.</u> Tìm trọng tâm của hình chữ nhật.

Lời giải : + Nếu hình chữ nhật có chiều cao h và đáy b, thì ta có thể đặt hệ toạ độ sao cho gốc toạ độ nằm ở góc bên trái phía dưới,



+ Vì diện tích của hình chữ nhật này là hb, nên ta có :

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b x.h\,dx}{hb} = \frac{1}{hb}\left[\frac{1}{2}hx^2\right]_0^b = \frac{1}{hb}\left[\frac{1}{2}hb^2\right] = \frac{1}{2}b$$

+Tương tự: $\overline{y} = \frac{1}{2}h$,

+ Do đó trọng tâm của hình là điểm $(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}h)$.

- ***<u>Chú ý:</u>*** Trọng tâm của một miền nói chung khác xa với khái niệm tâm của một hình hình học.

Bài tập về nhà: Các bài **Tr.** 209, 219, 540, 544, 222, 226
<u>Đọc trước các mục</u>: **7.5, 7.6, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 14.3** chuẩn bị cho **Bài số 11**
Tính thể tích. Độ dài cung. Tính diện tích mặt tròn xoay.