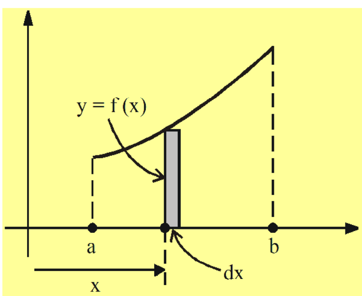
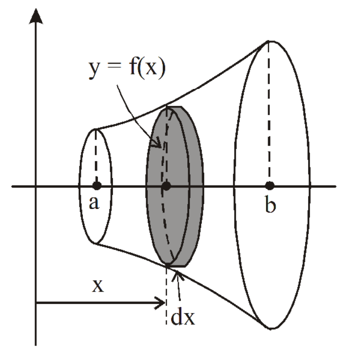
Bài 11

THỂ TÍCH. ĐỘ DÀI CUNG PHẲNG. DIỆN TÍCH MẶT TRÒN XOAY.

1. Tính thể tích vật thể tròn xoay.

a. Phương pháp đĩa :

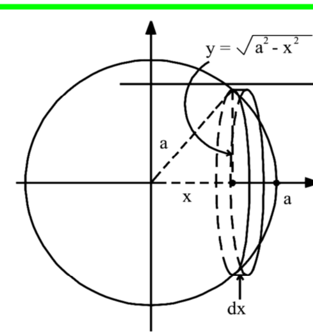




❖ ***Miền phẳng giới hạn bởi y = f(x), x = a, x = b quay quanh trục Ox sẽ tạo nên một vật thể ba chiều, được gọi là vật thể tròn xoay..***

- Vi phân thể tích dV : $dV = \pi y^2 dx = \pi\left[f(x)\right]^2 dx$
- Khi x biến thiên từ a đến b ta có thể tích: $V = \int dV = \int \pi y^2 dx = \int_a^b \pi\left[f\left(x\right)\right]^2 dx$.

• **Ví dụ 1.** Tính thể tích hình cầu tâm O bán kính a .



Giải : + Hình cầu là một vật thể tròn xoay do nửa hình tròn quay quanh đường kính của nó.

+ Phương trình nửa đường tròn là :

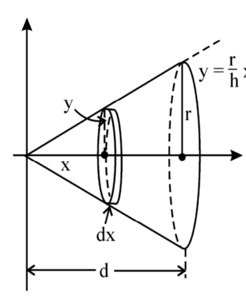
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{a^2 - x^2} \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$$

+ Vi phân thể tích là: $dV = \pi y^2 dx = \pi\left[a^2 - x^2\right]dx$

+ Thể tích hình cầu :

$$V = \int_{-a}^{a} \pi\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$

• **Ví dụ 2.** Tính thể tích hình nón chiều cao h , bán kính đáy r .



Hình 7.7

Giải : + Hình nón là vật thể tròn xoay được tạo thành do quay một tam giác vuông.

+ Cạnh huyền của tam giác vuông : $y = \dfrac{r}{h}x$,

+ Vi phân thể tích là $dV = \pi y^2 dx = \dfrac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$.

+ Thể tích cần tìm là : $V = \displaystyle\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

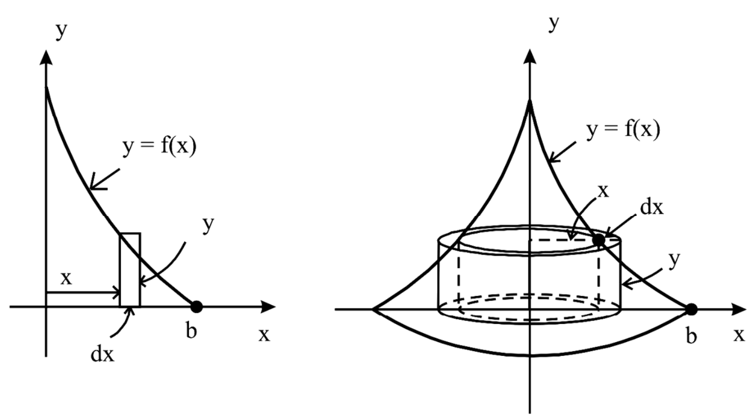
❖ **Chú ý:** Xét một dải quay quanh một trục nhưng cách trục một khoảng nào đó. Trong trường hợp này, vi phân thể tích do một dải quay quanh trục là một đĩa với lỗ hổng ở trong, giống như cái bồn rửa, thể tích của nó là :

$$V = dV = \int_a^b \pi\left(y_1^2 - y_2^2\right) dx,$$

trong đó y_1, y_2 lần lượt là bán kính ngoài và bán kính trong của bồn rửa.

b. Tính thể tích bằng phương pháp vỏ:

❖ **Bài toán**: Tính thể tích vật thể tròn xoay do miền phẳng $\begin{cases} y = f(x) > 0 \\ 0 \le x \le b \end{cases}$ quay một vòng xung quanh Ox.



◆ Dải mỏng có một cạnh dx và một cạnh y quay quanh trục Oy sẽ tạo ra một vỏ hình trụ mỏng.

+ Vi phân thể tích của vỏ này là $dV = 2\pi xydx$. ở đây x là bán kính của vỏ còn y là chiều cao của vỏ.

+ Khi bán kính x của vỏ này tăng từ $x = 0$ đến $x = b$, có thể thấy rằng thể tích của vật thể là tích phân của vi phân thể tích dV:

$$\boxed{V = \int dV = \int 2\pi xydx = \int_0^b 2\pi x.f(x)dx}$$

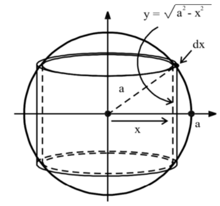
Chú ý :

1. Nếu vật thể do miền phẳng quay quanh trục $Oy : V = 2\pi \displaystyle\int_0^b (\text{bán kính}).(\text{chiều cao})dx$

2. Nếu vật thể do miền phẳng quay quanh trục $Ox: V = 2\pi\int_0^b (\text{bán kính}).(\text{chiều cao})\,dy.$

Ví dụ 3. Tính thể tích hình cầu tâm O bán kính a bằng phương pháp vỏ.

Giải : + Ta có : $dV = 2\pi x(2y)dx = 4\pi x\sqrt{a^2 - x^2}dx$



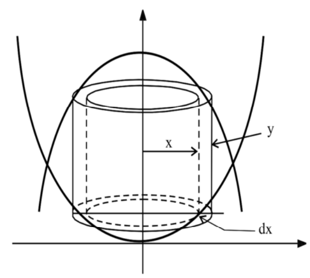
+ Thể tích hình cầu là

$$V = 4\pi\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\pi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Phương pháp vỏ thì tiện hơn nhiều.

Ví dụ 4. Tính thể tích do hình phẳng được giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ trong góc phần tư thứ nhất quay quanh trục Oy.

Giải: + Chiều cao của vỏ là: $y = (2 - x^2) - x^2 = 2 - 2x^2$.



+ Thành phần thể tích:

$$dV = 2\pi xydx = 2\pi x(2 - 2x^2)dx = 4\pi(x - x^3)dx$$

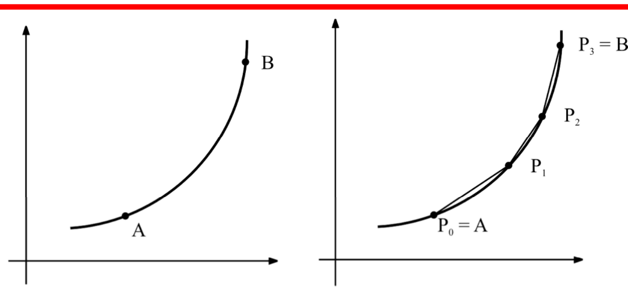
+ Vì hoành độ giao điểm của các đường là $x = \pm 1$ nên:

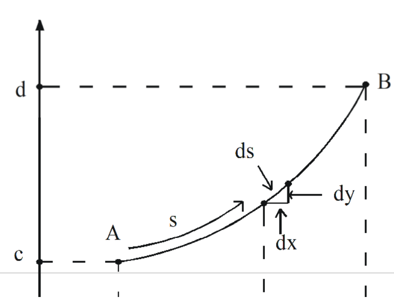
$$V = 4\pi\int_0^1 \left(x - x^3\right)dx = 4\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \pi$$

2. Tính độ dài cung phẳng

a. Độ dài cung.

❖ ***Bài toán :*** Tính độ dài của một đường cong là phần đồ thị $(C): y = f(x)$ nối từ điểm A đến điểm B.





• Gọi ds là vi phân cung; dx, dy là số gia tương ứng theo x và y.
Từ định lý Pitago, ta có $ds^2 = dx^2 + dy^2$, từ đó

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

• Độ dài toàn bộ đường cong AB là tích phân của các vi phân cung ds khi ds biến thiên dọc theo cung, từ A đến B:

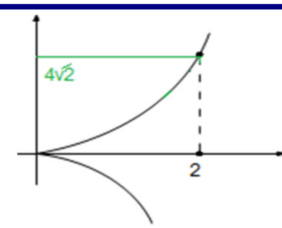
Độ dài cung $\overline{AB}$ bằng $\int ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Chú ý: ***Nếu xem x là hàm của hàm y.*** Khi đó :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

và độ dài của cung $\overline{AB}$ là: $l = \int ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$.

Ví dụ 1: Tìm độ dài của đường cong $y^2 = 4x^3$ từ điểm $(0;0)$ đến điểm $(2;4\sqrt{2})$.



Giải: + Phần đường trong góc phần tư thứ nhất.

+ Nếu giải theo y thì: $y = 2x^{3/2}; \frac{dy}{dx} = 3x^{1/2}$, và $0 \le x \le 2$.

+ Vi phân cung : $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + 9x}\,dx$

+ Ta có độ dài cung :

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+9x}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^2 (1+9x)^{1/2}.9dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{27}\left(19\sqrt{19} - 1\right) \text{ (đvd).}$$

b. Độ dài cung trong tọa độ cực: Xét một đường cong có phương trình cực là $r = f(\theta)$, gọi s là độ dài cung đo dọc theo đường cong từ một điểm xác định theo một hướng xác định. Do

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

+ Nhưng $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ nên : $ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)d\theta^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$.

+ Độ dài cung của một đường cong cực với $\alpha \le \theta \le \beta$: $s = \int ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$

Ví dụ 2. Tìm tổng chiều dài của đường cardioid $r = a(1 - \cos\theta)$.

Giải. + Ta có $dr = a\sin\theta d\theta,$ do đó :

$$ds^2 = a^2\left(1-\cos\theta\right)^2 d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\theta^2 = a^2\left[\left(1-\cos\theta\right)^2 + \sin^2\theta\right]d\theta^2 = a^2\left(1-\cos\theta\right)d\theta^2.$$

+ Suy ra: $ds = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos\theta}d\theta = 2a\left|\sin\frac{1}{2}\theta\right|d\theta$

+ Vì $\sin\frac{1}{2}\theta \geq 0$ với $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ta có thể viết

$$s = \int ds = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{1}{2}\theta d\theta = -4a\cos\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = 4a - \left(-4a\right) = 8a.$$

+ Do tính đối xứng của đường cong qua trục Ox nên :

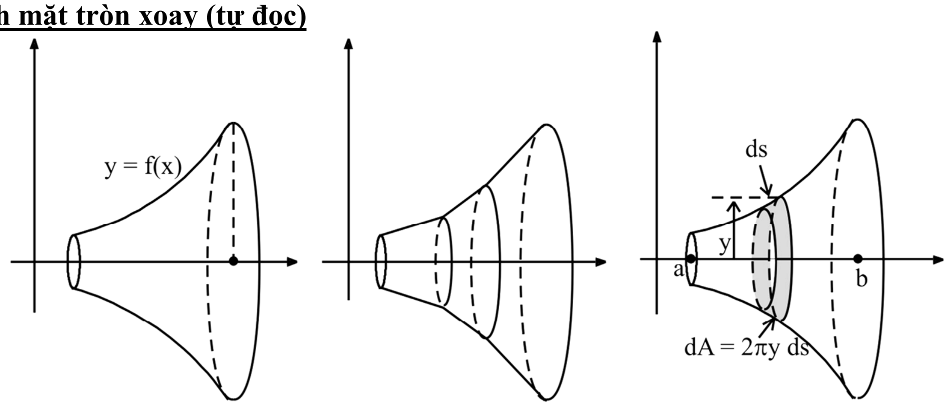
$$s = 2\int_0^{\pi} 2a\sin\frac{1}{2}\theta d\theta = -8a\cos\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi} = 0 - \left(-8a\right) = 8a \text{ (đvd)}$$

b. Độ dài cung tham số (tự đọc):

❖ **Độ dài cung:** với p/t: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \leq t \leq t_2$ ta có $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$, do đó độ dài cung là:

$$s = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \quad .$$

3. Diện tích mặt tròn xoay (tự đọc)



1. Diện tích mặt tròn xoay trong tọa độ vuông góc

❖ ***Bài toán:*** Cho đường cong trơn $(C): y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành. Khi đường cong này quanh xung quanh trục hoành, nó sẽ tạo ra một mặt tròn xoay. Chúng ta hãy tính diện tích mặt này.

+ Chúng ta sẽ tính xấp xỉ độ dài đường cong trơn $(C): y = f(x)$ bởi một đường gấp khúc gồm nhiều đoạn ngắn nối các điểm kề nhau trên đường cong.

+ Diện tích mặt tròn xoay tạo ra do quay đường cong quanh trục Ox xấp xỉ với diện tích do đường gấp khúc quanh trục Ox tạo ra.

+ Nếu các vi phân cung ds quay quanh trục Ox, nó sẽ tạo ra vi phân diện tích dA có hình dạng một dải ruy băng.
+ Nếu khoảng cách từ trung điểm ds tới trục Ox là y thì vi phân diện tích sẽ là :

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

+ Diện tích mặt tròn xoay tích phân của các vi phân diện tích dA khi dA biến thiên khắp mặt tròn xoay:

$$A = \int dA = \int 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \ \text{, trong đó } (C): y = f(x).$$

• Nếu đường cong quanh quanh trục Oy, bằng cách tương tự, diện tích mặt tròn xoay được tạo ra là :

$$A = \int 2\pi x ds \quad .$$

• ***Công thức tổng quát:***

A = ∫ 2π × (bán kính mặt tròn xoay). ds

Ví dụ 1. Tìm diện tích mặt cầu bán kính bằng a.

Giải: + Mặt cầu được xem là mặt tròn xoay do nửa đường tròn $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ quay quanh Ox.

+ Vì $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ nên

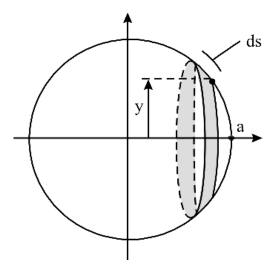
$$A = \int 2\pi y ds = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 4\pi\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx = 4\pi\int_0^a a dx = 4\pi a^2 \text{ (đvdt).}$$

◆ ***Nếu xem y là biến lấy tích phân***:

+ Ta coi đường cong trong góc phần tư thứ nhất: $x = \sqrt{a^2 - y^2}$

+ Khi đó: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left(a^2 - y^2\right)^{1/2} = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

+ Diện tích mặt cần tìm là (coi y là biến lấy tích phân) :



$$A = \int 2\pi y ds = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = 4\pi a\int_0^a \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} = 4\pi a^2 \text{ (đvdt).}$$

b. Diện tích mặt tròn xoay trong tọa độ cực (tự đọc):

❖ ***Phần tử diện tích mặt tròn xoay trong tọa độ cực :*** Cung ds sinh ra một phần tử diện tích mặt: $dA = 2\pi y ds$, trong đó

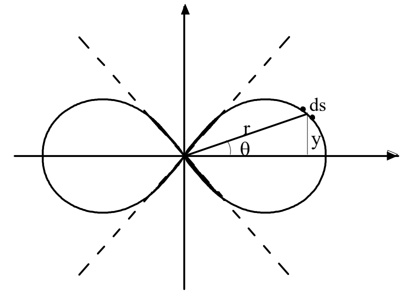
$$y = r\sin\theta \quad \text{và} \quad ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2},$$

do đó : $dA = 2\pi\sin\theta\sqrt{r^2d\theta^2 + dr^2} = 2\pi\sin\theta\sqrt{r^4d\theta^2 + r^2dr^2}$.

Khi đó diện tích mặt là : $S = \int dA$

• **Ví dụ 2**. Tìm diện tích của mặt tròn xoay sinh bởi đường lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ quay quanh trục Ox

Giải. : + Từ p/trình đường cong ta có: $rdr = -2a^2 \sin 2\theta d\theta$,



Do vậy:

$$\begin{aligned} r^4 d\theta^2 + r^2 dr^2 &= \left(4a^4 \cos^2 2\theta + 4a^4 \sin^2 2\theta\right) d\theta^2 \\ &= 4a^4 d\theta^2 \end{aligned}$$

và $dA = 4\pi a^2 \sin\theta d\theta$.

+ Diện tích

$$A = 2\int_0^{\pi/4} 4\pi a^2 \sin\theta d\theta = -8\pi a^2 \cos\theta\Big|_0^{\pi/4} = -8a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 4\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)(\text{đvdt})$$

Bài tập về nhà: **Tr. 229, 233, 242,**

Đọc trước các mục**: 14.4, 14.5, 14.6, 14.7** chuẩn bị cho **Bài số 12: Chuỗi số. Sự hội tụ của chuỗi số**