BÀI SỐ 6. CƠ SỞ - SỐ CHIỀU CỦA MỘT KHÔNG GIAN VÉC TƠ

I. Sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

1. Định nghĩa

- Cho tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nằm trong R^m.
- Tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ đgl độc lập tuyến tính nếu hệ $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = \text{O}$ chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.
- Tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ đgl phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính.

VD. Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của tập véc tơ sau:

$$a.\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b.\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a, x_1v_1 + x_2v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow dltt$$

$$b, x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \ldots \Rightarrow pttt$$

2. Nhận xét

- Đặt $A = [v_1 \quad v_2 ... v_n]$; $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = O \Leftrightarrow Ax = O$$

- Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong R^m độc lập tuyến tính

$\Leftrightarrow Ax = O$ chỉ có nghiệm tầm thường $x = O$

$\Leftrightarrow r(A) = n.$

- Tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong R^m phụ thuộc tuyến tính

$\Leftrightarrow Ax = O$ có nghiệm $x \neq O$

$\Leftrightarrow r(A) < n.$

- Nếu $n > m$ thì $r(A) \leq m < n \Rightarrow \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ pttt.

• Nếu $m = n \Rightarrow A = [v_1 \quad v_2 \ldots v_n]$ là ma trận vuông

$+ \det A \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính

$+ \det A = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính

VD. Xét sự độc lập tuyến tính của các véc tơ sau:

a. $v_1 = (1;2;1;4);\ v_2 = (0;1;-1;2);\ v_3 = (3;1;2;0)$

b. $v_1 = (1;2;3);\ v_2 = (2;0;1);\ v_3 = (5;2;5); v_4 = (1;0;0)$

c. $v_1 = (1;2;3);\ v_2 = (2;0;1);\ v_3 = (5;2;5)$.

$$a, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[H4 \to H4 - 4H1]{\substack{H2 \to H2 - 2H1 \\ H3 \to H3 - H1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[H4 \to H4 - 2H2]{H3 \to H3 + H2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H4 \to H4 - \frac{1}{3}H3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow dltt$$

b, so vecto nhieu hon so thanh phan trong 1 vecto $\Rightarrow$ pttt

$$c, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \ldots = 0 \Rightarrow pttt$$

II. Tập sinh

1. Định nghĩa

- Cho tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ trong kgvt V.
- $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ đgl tập sinh của V $\left(\text{V được sinh bởi } \{v_1, v_2, ..., v_n\}\right)$ nếu mỗi véc tơ trong V đều biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, ..., v_n$.

2. Ví dụ

- Tập các véc tơ cột của A là tập sinh của $C(A)$.
- Tập các véc tơ hàng của A là tập sinh của $C\left(A^T\right)$
- Tập các nghiệm đặc biệt của hệ $Ax = \mathrm{O}$ là tập sinh của $N(A)$.
- Tập các nghiệm đặc biệt của hệ $A^T y = 0$ là tập sinh của $N\left(A^T\right)$.

VD. Tập véc tơ nào sau đây là tập sinh của R^2

$$a.\ \left\{e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\ e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$b.\ \left\{e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\ e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ u = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

a, Xet v bat ki trong $\mathbf{R}^2$, gia su: $v = (a,b)$

Xet he: $x_1e_1 + x_2e_2 = v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases}$, he co nghiem $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$

$\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ la he sinh cua $\mathbf{R}^2$

III. Cơ sở, số chiều

1. Định nghĩa

Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ đgl một cơ sở của kgvt V nếu nó thỏa mãn 2 tính chất sau:

- $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là tập sinh của V.
- $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính.

VD + Tập $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ là một cơ sở của R^2.

Cơ sở này được gọi là cơ sở chính tắc của R^2.

+ $\{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,...,0,1)\}$

là cơ sở chính tắc của R^n.

Định lý: Tập véc tơ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nằm trong R^n là 1 cơ sở của $R^n \Leftrightarrow \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính.

VD. + Hệ $\{v_1 = (1;2);\ v_2 = (2;5)\}$ có là 1 cơ sở của R^2 ?

+ Hệ véc tơ sau có phải là cơ sở của R^3 không?

$$\{v_1 = (1;2;3);\ v_2 = (2;3;4);\ v_3 = (3;4;5)\}$$

$$+, Xet: A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\}\ dltt \Rightarrow \text{la co so cua } \mathbf{R}^2$$

$$+, Xet: B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}\ pttt \Rightarrow \text{ko la co so}$$

2. Ứng dụng của cơ sở

Nếu $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là 1 cơ sở của V thì mỗi véc tơ trong V được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

3. Số chiều của một không gian véc tơ

Định nghĩa: Số chiều của kgvt V là số véc tơ trong 1 cơ sở của V, kí hiệu dimV.

NX. Nếu $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ là hai cơ sở của kgvt V thì $m = n$.

IV. Cơ sở, số chiều bốn không gian con của A

Định lý: Cho ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ và $r(A) = r$.

- Số chiều của $C(A), C\left(A^T\right)$ cùng bằng r.
- Số chiều của N(A) bằng n – r.
- Số chiều của $N\left(A^T\right) = m - r$.

Nhận xét:

- Cơ sở của $C(A)$ là các cột chứa trụ của A.
- Cơ sở của $C\left(A^T\right)$ là các hàng chứa trụ của A.
- Cơ sở của $N(A)$ là các nghiệm đặc biệt của $\mathrm{A}x = \mathrm{O}$.
- Cơ sở của $N\left(A^T\right)$ là các nghiệm đặc biệt của $A^T y = \mathrm{O}$

VD. Tìm cơ sở và số chiều bốn không gian con của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Từ đó mô tả các không gian $C(A)$, $C(A^T)$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 5\\ 5 & 5 & 0 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3\to h_3-5h_1]{h_2\to h_2-3h_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 5\\ 0 & -5 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3\to h_3-h_2]{h_2\to -\frac{1}{5}h_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

+ Cơ sở của $C(A)$ là: $\{(1;3;5);(2;1;5)\}$

$$\Rightarrow C(A)=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}\middle|x_1,x_2\in R\right\}$$

lấp đầy mp trong R^3 nhận $(1;3;5);(2;1;5)$ làm cặp vtcp.

+ Cơ sở của $C\left(A^T\right)$ là: $\left\{(1;2;1;0);(3;1;-2;5)\right\}$

$$\Rightarrow C\left(A^T\right)=\left\{y_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+y_2\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\5\end{bmatrix}\middle| y_1,y_2\in R\right\}$$

$$+\ Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Biến trụ: x_1, x_2;   Biến tự do: x_3, x_4.

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow s_1 = (1;-1;1;0)$$

$$x_4 = 1,\ x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow s_2 = (-2;1;0;1)$$

Cơ sở của $N(A)$: $\{s_1 = (1;-1;1;0); s_2 = (-2;1;0;1)\}$

$$+ \ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 + h_2]{h_2 \to -\frac{1}{5}h_2 \quad h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 5y_3 = 0 \\ \qquad\quad y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

Biến trụ: y_1, y_2. Biến tự do: y_3.

Cho $y_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow s_1 = (-2; -1; 1)$

Cơ sở của $N(A^T)$ là $\{s_1 = (-2; -1; 1)\}$.

$\dim C(A) = 2;\ \dim C(A^T) = 2;$

$\dim N(A) = 2;\ \dim N(A)^T = 1$

VD. Cho W là một không gian con sinh bởi 3 véc tơ:

$$v_1 = (2,-1,4);\ v_2 = (4,2,3);\ v_3 = (2,7,-6).$$

Hãy tìm một cơ sở và số chiều của W.

$$Xet: A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow W = C(A)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[H3 \to H3 - 2H1]{H2 \to H2 + \frac{1}{2}H1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{H3 \to H3 + \frac{5}{4}H2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Co so cua } C(A) \text{ hay } W: \{(2,-1,4),(4,2,3)\} \Rightarrow \dim W = 2$$

VD Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$

là không gian con của R^3. Tìm 1 cơ sở và dimW.

Xet he : $Ax = 0$ voi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow W = N(A)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H2 \to H2 - \frac{1}{2}H1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{bien tru: } x_1, x_2 \\ \text{bien tu do: } x_3 \end{matrix}$$

$Co : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, cho $x_3 = 1$ ta dc nghiem d/b: $s = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$

$\Rightarrow$ Co so cua N(A) hay $W : \{s\} \Rightarrow \dim W = 1$

VD. Cho $W = \left\{ v = \begin{bmatrix} x+y-z \\ x+2y+4z \\ x-y-z \\ -x+y+z \end{bmatrix} \middle| x,y,z \in R \right\}$ là một không gian con của R^4. Tìm 1 cơ sở và dimW.

$$Co: W = \left\{ x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbf{R} \right\} = C(A) \text{ voi } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H4 \to H4+H1]{H2 \to H2-H1,\ H3 \to H3-H1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[H4 \to H4+H3]{H3 \to H3+2H2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Co so cua C(A) hay W : $\{(1,1,1,-1),(1,2,-1,1),(-1,4,-1,1)\}$ $\Rightarrow \dim W = 3$