Bài số 7

MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN

I. Tích phân của một số hàm số cơ bản

1. Tích phân các hàm phân thức hữu tỷ

◆ Ý tưởng cơ bản là phân tích hàm phân thức hữu tỷ đã cho thành tổng các phân thức đơn giản hơn (gọi là các *phân thức đơn giản)*.

Một hàm hữu tỉ được gọi là ***chính quy*** nếu số mũ lớn nhất của tử số nhỏ hơn số mũ lớn nhất của mẫu số, ngược lại nó được gọi là không chính quy.

+ Một hàm không chính quy bất kỳ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có thể biểu diễn thành:

$\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \text{đa thức} + \dfrac{R(x)}{Q(x)}}$ bậc của $R(x)$ thấp hơn bậc của $Q(x)$.

◆ **Một số dạng cơ bản**

$$(I)\quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + C$$

$$(II)\quad \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^k dx = \frac{a}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1)$$

$$(III)\quad \int \frac{A}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\,d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \int \frac{A\,dt}{t^2+a^2};\quad \left(p^2-4q<0; t = x+\frac{p}{2}; a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$= \frac{A}{a}\arctan\frac{\text{t}}{\text{a}} + C = \frac{2A}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

$$(IV)\quad \int \frac{udu}{(u^2+k^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(u^2+k^2), & n=1 \\ \dfrac{(u^2+k^2)^{1-n}}{2(n-1)}; & n>1 \end{cases}.$$

$$(V)\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{k}\right); & n=1 \\ \dfrac{1}{2k^2(n-1)}.\dfrac{u}{(u^2+k^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2k^2(n-1)}\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}}; n>1 \end{cases}.$$

• **Ví dụ 1.** Tìm $I = \displaystyle\int \frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}dx$

+ Viết

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \tag{3}$$

+ Chúng ta có thể tìm được A và B bằng cách đồng nhất các hệ số của x và nhận được:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A-B=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$$

+ Ta lấy tích phân của hàm đã cho,

$$\int \frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}dx = 3\ln\left(x-1\right) + 2\ln\left(x+3\right) + C$$

• **Ví dụ 2:** Tìm $I = \int \frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}dx$

Giải: + Chúng ta viết: $\frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x} = \frac{6x^2+14x-20}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$

$$\frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x} = \frac{5}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2}$$

+ Vì thế ta có : $\int \frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}dx = 5\ln x - 3\ln\left(x+2\right) + 4\ln\left(x-2\right) + C.$

• **Ví dụ 3.** Tìm $I = \int \frac{3x^3-4x^2-3x+2}{x^4-x^2}dx$

Giải: + Ta có

$$\frac{3x^3-4x^2-3x+2}{x^4-x^2} = \frac{3x^3-4x^2-3x+2}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

+ Vậy nên : $\int \frac{3x^3-4x^2-3x+2}{x^4-x^2}dx = ...$

• **Ví dụ 4.** Tìm $I = \int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}dx$

Giải: Ta có

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} = \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

+ Vậy nên: $\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}dx = ...$

2. Tích phân các hàm số lượng giác

❖ Xét tích phân dạng $I = \int f(\sin x, \cos x)dx$

- Phương pháp chung: Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$
- Nếu $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ đặt $t = \cos x$.
- Nếu $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ đặt $t = \sin x$.

❖ Xét các tích phân dạng $I = \int \sin^m x \; \cos^n x \; dx$ (*)

- **Nếu n lẻ, m chẵn:**

  + Tách ra thừa số $\cos x dx = d(\sin x)$

  + Vì số mũ của $\cos x$ là chẵn, nên ta có thể sử dụng tính chất : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ để biểu diễn phần còn lại của tích phân ban đầu dưới dạng tổ hợp của $\sin x$.

- **Nếu m lẻ, n chẵn:**

  + Tách ra thừa số $\sin x dx = -d(\cos x)$

- ***Ví dụ 5.***

$$\int \sin^2 x \; \cos^3 x \; dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right)d(\sin x)$$
$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

- ***Ví dụ 6.*** $\int \sin^3 x \; dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int \left(1 - \cos^2 x\right)d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

◆ ***Chú ý:*** Nếu một trong các số mũ trong (*) là số lẻ dương và rất lớn, thì cần phải sử dụng công thức nhị thức. Ví dụ, với bất kỳ số mũ dương lẻ nào của $\cos x$:

$$\cos^{2n+1} x = \cos^{2n} x \cos x = \left(\cos^2 x\right)^n \cos x = \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos x,$$

Ta đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$, và khi đó:

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int (1 - u^2)^n du$$

❖ Xét các tích phân dạng $I = \int \sin^m x \; \cos^n x \; dx$

- **Nếu n và m là số nguyên chẵn, không âm:** thì cần phải biến đổi hàm dưới dấu tích phân bằng các công thức góc chia đôi .

- **Ví dụ 7.** Ta có:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \int \cos 2x dx\right] = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\int \cos 2x d2x\right] = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

• **Ví dụ 8.** Áp dụng liên tiếp hai lần công thức góc chia đôi đối với côsin cho ta

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

3. Tích phân hàm số vô tỷ

◆ ***Một số phép thế cơ bản :***

+ Nếu tích phân chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$, thì đổi biến x bằng θ bằng cách viết $x = a\sin\theta$,

thay thế $\sqrt{a^2 - x^2}$ bằng $a\cos\theta$.

+ Nếu tích phân chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$, xét phép thế $x\tan\theta$, thay thế $\sqrt{a^2 + x^2}$ bằng $a\dfrac{1}{\cos\theta}$.

+ Nếu nó có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$, xét phép thế $x = a\dfrac{1}{\cos\theta}$, thay thế $\sqrt{x^2 - a^2}$ bằng $a\tan\theta$.

• **Ví dụ 11.** Tìm $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$

Giải: +Ta đặt : $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta d\theta, \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$

+ Khi đó $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx = \int \frac{a\cos\theta}{a\sin\theta}a\cos\theta d\theta = \int \frac{a\cos^2\theta}{a\sin\theta}d\theta$

$= a\displaystyle\int \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}d\theta$ .... (7)

• **Ví dụ 12.** Tìm $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Giải: + Ta đặt: $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta; \sqrt{a^2 + x^2} = a\dfrac{1}{\cos\theta}$ ....

+ Do đó : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) + C$

❖ **Xét tích phân có chứa $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.**

Sử dụng công thức: $(x + A)^2 = x^2 + 2xA + A^2$; sau đó qua phép thế đưa về các dạng trên.

• **Ví dụ 14.** Tìm $\displaystyle\int \frac{(x + 2)dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

Giải: + Ta có: $3+2x-x^2=3-\left(x^2-\ 2x\right)=4-\left(x^2-2x+1\right)=4-\left(x-1\right)^2$

+ Đặt $u=x-1\Rightarrow x=u+1\Rightarrow dx=du$ và do đó

$$\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\frac{(u+3)du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\int\frac{udu}{\sqrt{a^2-u^2}}+3\int\left(\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\right)$$

$$=\sqrt{a^2-u^2}+3\sin^{-1}\frac{u}{a}=\sqrt{3+2x-x^2}+3\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

• **Ví dụ 15.** Tìm $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\sqrt{u^2+a^2}+\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)=\sqrt{x^2-2x+5}+\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C.$$

• **Ví dụ 16:** Tìm $\int$ $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

+ Từ đó : $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)=\ln\left((x-2)+\sqrt{x^2-4x-5}\right)+C.$

II. Tích phân xác định

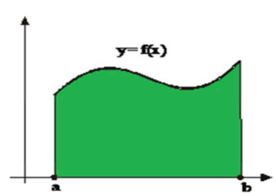
1. Bài toán diện tích

❖ ***Bài toán tổng quát :*** Tìm diện tích của một miền với biên là đường cong : cụ thể, tìm diện tích miền :

+ Nằm dưới đồ thị của hàm số ***liên tục, không âm*** $y=f(x)$ với $a\le x\le b$.

+ Nằm phía trên trục hoành.

+ Nằm giữa hai đường thẳng thẳng đứng $x=a$ và $x=b$.



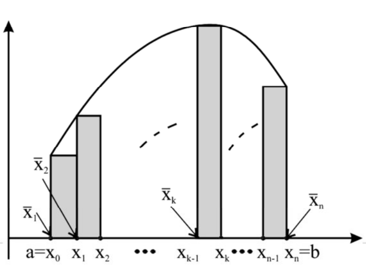
◆ ***Cách tính :***

+ Cho n là số nguyên dương, chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bằng nhau bởi $(n-1)$ điểm chia:

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots.<x_n=b$$

+ Ta được n đoạn con: Δx_k , nghĩa là

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n},\quad k=1,2,\ldots,n$$



+ Gọi m_k là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn thứ k, và giả sử giá trị này đạt được tại $\overline{x_k}$:

$$f(\overline{x_k}) = m_k \qquad x_{k-1} \le \bar{x}_k \le x_k .$$

+ Khi đó tổng xấp xỉ s_n của diện tích tất cả những hình chữ nhật tạo thành là:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_K})\Delta x_k \qquad (**)$$

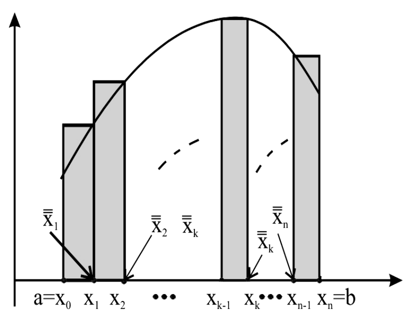
và : Diện tích của miền = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{K=1}^{n} f(\overline{x_K})\Delta x_K$.

◆ **<u>Chú ý:</u>** Tổng (**) được gọi là ***tổng dưới*** vì nó biểu diễn diện tích của miền xấp xỉ dưới.
Chúng ta cũng xây dựng được miền xấp xỉ trên như sau:
+ Lấy mỗi đoạn con làm cạnh và xây dựng hình chữ nhật bé nhất và nằm hoàn toàn bên trên đường cong.
+ Ký hiệu M_k là giá trị lớn nhất của $f(x)$ đoạn con thứ $k : [x_{k-1}; x_k]$ và giá trị lớn nhất đó đạt được tại điểm $\overline{\overline{x_k}} \in \left[x_{k-1}; x_k\right] : f\left(\overline{\overline{x_k}}\right) = M_k$

+ Tổng diện tích của miền bậc thang được tạo thành là:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{\overline{x_k}})\Delta x_k \qquad (***)$$

Tổng này được gọi là ***<u>tổng trên</u>*** vì nó là giá trị diện tích xấp xỉ của miền nằm bên trên.



Hình 6.12

Diện tích của miền = $\lim\limits_{max\ \Delta x_i\to 0} \sum\limits_{k=i}^{n} f\left(\overline{\overline{x}}_k\right)\Delta x_k$

+ Hơn nữa, nếu x_k^* là điểm bất kỳ trong đoạn thứ k thì:

$$s_n \le \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k \le S_n .$$

+ Khi đó kết hợp (**) và (***) ta nhận được

Diện tích của miền = $\lim\limits_{max\ \Delta x_i\to 0} \sum\limits_{k=i}^{n} f\left(x^*{}_k\right)\Delta x_k, \qquad x_{k-1} \le x_k^* \le x_k$

<u>2. Định nghĩa</u> : Giới hạn(nếu tồn tại): $\lim\limits_{max\ \Delta x_i\to 0} \sum\limits_{k=i}^{n} f\left(x^*{}_k\right)\Delta x_k$ (****) được ký hiệu bởi : $\int_a^b f(x)dx$ và được gọi là **<u>tích phân xác định</u>** từ a đến b của $f(x)dx$. Như vậy :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k .$$

◆ **Chú ý :+** Khi đó ta nói rằng hàm $y = f(x)$ ***<u>khả tích</u>*** trên $\left[a,b\right]$. Giá trị của (****) không phụ thuộc vào cách chia đoạn $\left[a,b\right]$.

+ Mọi hàm liên tục đều khả tích.

• **Ví dụ 1.** Xét hàm số $y = f(x) = x$ trên đoạn $[0;b]$. Miền nằm dưới đồ thị này là tam giác vuông có chiều cao là b và cạnh đáy là b. Tính diện tích của của miền đó.

Giải : + Chia đoạn $[0;b]$ thành $(n-1))$ phần bằng nhau bởi các điểm chia :

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n},\ x_n = b$$

+ Các cạnh của hình chữ nhật là $\Delta_k = b/n$, và chiều cao của các hình chữ nhật là:

$$f(x_1) = \frac{b}{n}; f(x_2) = \frac{2b}{n}; \ldots; f(x_n) = \frac{nb}{n}$$

+ Ta có : $S_n = \frac{b}{n}.\frac{b}{n} + \frac{2b}{n}.\frac{b}{n} + \ldots. + \frac{nb}{n}.\frac{b}{n} = \frac{b}{n^2}\left[1+2+\ldots+n\right] = \frac{b^2}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}(1+\frac{1}{n})$

+ Như vậy: Diện tích của miền = $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Sn} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{b}^2}{2}(1+\frac{1}{n}) = \frac{b^2}{2}$

+ Theo định nghĩa tích phân xác định ta có: $\int_x^b x dx = \frac{b^2}{2}$.

• **Ví dụ 2.** Xét hàm số $y = f(x) = x^2$ trên đoạn $[0;b]$

+ Chia đoạn [0,b] thành n đoạn bằng nhau với độ dài $\Delta x_k = b/n$ bởi các điểm chia :

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n},\ x_n = b.$$

+ Chiều cao của các hình chữ nhật là : $f(x_1) = (\frac{b}{n})^2$; $f(x_2) = (\frac{2b}{n})^2$; …..; $f(x_n) = (\frac{nb}{n})^2$.

+ Khi đó:

$$S_n = (\frac{b}{n})^2.\frac{b}{n} + (\frac{2b}{n})^2.\frac{b}{n} + \ldots. + (\frac{nb}{n})^2.\frac{b}{n}$$
$$= \frac{b}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right] = \frac{b^2}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^2}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

+Cho $n \to \infty$ ta được : Diện tích của miền : $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{3}$. Hay là : $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$.

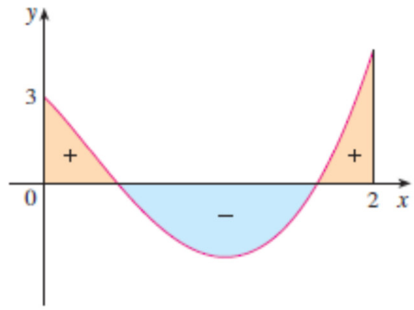
Tổng quát : $\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$ đúng với mọi số nguyên dương $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Một số tính chất của tích phân xác định.

a). Diện tích Đại số

❖ Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục $[a;b]$, $(a < b)$ công thức tính tích phân xác định:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \qquad (1)$$



◆ Nếu $y = f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [a,b]$, diện tích miền được giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \\ y = f(x) \geq 0 \end{cases}$:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

◆ Nếu $y = f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [a,b]$, diện tích miền được giới hạn bởi: $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \\ y = f(x) \leq 0 \end{cases}$:

$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)dx}$$

◆ Xét hàm số $y = f(x)$ với $\forall x \in [a,b]$, trong đó $a < b_1 < b_2 < b_3 < b$; giả thiết:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, & \forall x \in [a,b_1] \cup [b_2,b_3] \\ f(x) \leq 0, & \forall x \in [b_1,b_2] \cup [b_3,b\ ] \end{cases}$$

và: A_1 là diện tích miền : $\begin{cases} y = f(x) \\ a_1 \leq x \leq b_1 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$; A_2 là diện tích miền : $\begin{cases} y = f(x) \\ b_1 \leq x \leq b_2 \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$

A_3 là diện tích miền: $\begin{cases} y = f(x) \\ b_2 \leq x \leq b_3 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$; A_4 là diện tích miền: $\begin{cases} y = f(x) \\ b_3 \leq x \leq b \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$

Khi đó:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4.} \qquad (2)$$

Tích phân (2) được gọi là ***<u>diện tích đại số</u>*** của miền được giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ và trục Ox.

• **<u>Ví dụ 1:</u>** Tính diện tích đại số của miền hữu hạn được giới hạn bởi đường cong $y = f(x) = x(x^2 - 1)$ và trục hoành.

Giải: + Miền hữu hạn được giới hạn trong miền $-1 \leq x \leq 1$

+ $f(x) \ge 0$ với $-1 \le x \le 0$: diện tích miền được giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ -1 \le x \le 0 \\ y = f(x) \ge 0 \end{cases}$ là

$$A_1 = \int_{-1}^{0} x(x^2 - 1)dx = \frac{1}{4}$$

+ $f(x) \le 0$ với $0 \le x \le 1$: diện tích miền được giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ 0 \le x \le 1 \\ y = f(x) \le 0 \end{cases}$ là

$$A_2 = -\int_{0}^{1} x(x^2 - 1)dx = \frac{1}{4}$$

+ Diện tích đại số cần tìm là: $I = A_1 - A_2 = 0$.

b). Diện tích hình học : $S = \int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

c) Một số tính chất của tích phân xác định:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Khi $a \ne b$: ta có $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Tính tuyến tính: $\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b f(x)dx$
- Nếu $f(x) \ge 0, \forall x \in$ [a,b] thì ta có: $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
- Nếu $f(x) \le g(x), \forall x \in$ [a,b] thì ta có: $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in$ [a,b] thì ta có $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$
- Nếu f(x) khả tích trên [a, b] $\rightarrow \left|f(x)\right|$ cũng khả tích trên [a, b] và :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx$$

• Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì tồn tại ξ sao cho $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

• ***Tích phân với cận thay đổi:*** Với a là hằng số và $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ ta có thể xây dựng một hàm số mới dưới dạng: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$

Và khi đó ta cũng có thể lấy đạo hàm hàm số này: $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

• **Ví dụ 2:** $\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{1+x^2}$.

4 Định lý cơ bản của giải tích

• **Định lý** : *Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên một đoạn $[a;b]$, và $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

.

◆ **Chú ý :** Như vậy, ta cũng có các phương pháp tìm tích phân xác định tương ứng với các phương pháp tìm nguyên hàm (tích phân không xác đinh) :

+ Áp dụng trực tiếp bảng các nguyên hàm cơ bản,

+ Phương pháp thế (Cần chú ý thêm tới quá trình thế cận)

+ Phương pháp tích phân từng phần,…

• **Ví dụ 3.** Tính các tích phân xác định sau : $a)\ I_1 = \int_1^2 x^4dx$, $b)\ I_2 = \int_8^{27} \sqrt[3]{x}dx$, $c)\ I_3 = \int_{13}^{14} (x-13)^{10}dx$

• **Ví dụ 4.** Tính $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{7+x^5}}dx$

Giải: + Trước hết tìm nguyên hàm

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{7+x^5}} = \int (7+x^5)^{-1/3}x^4dx = \int u^{-1/3}\left(1/5du\right) = \frac{1}{5}\int u^{-1/3}du = \frac{1}{5}.\frac{3}{2}u^{2/3} = \frac{3}{10}(7+x^5)^{2/3}$$

(ở đây ta đặt : $u = 7 + x^5 \Rightarrow du = 5x^4dx$)

+ Từ định lý cơ bản ta có : $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{7+x^5}}dx = \frac{3}{10}(7+x^5)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{10}[4-7^{2/3}] = \frac{3}{10}[4-\sqrt[3]{49}]$.

• **Ví dụ 5.** Tính $I = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \frac{dx}{x^2}$

Giải: + Ta có

$$\int (1+\frac{1}{x})^4 \frac{dx}{x^2} = \int u^4(-du) = -\frac{1}{5}u^5 = -\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$$

$$(u = 1+\frac{1}{x}, du = -\frac{dx}{x^2})$$

+ Định lý cơ bản cho ta $\int_1^2 (1+\frac{1}{x})^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{5}(1+\frac{1}{x})\Big|_1^2 = -\frac{1}{5}[\frac{x+3}{32} - 32] = \frac{781}{160}$

Ví dụ 6: Tính : $I = \int_0^{\pi/4} x \arctan x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \to \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$

Khi đó: $\int_0^{\pi/4} x \arctan x dx = x \arctan x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctan x\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$$= \left(x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right).$$

Bài tập về nhà: **Tr. 209, 214, 250, 255, 280, 287, 296, 304, 312**
Đọc trước các mục: 12.4 chuẩn bị cho **Bài số 8**
Tích phân suy rộng