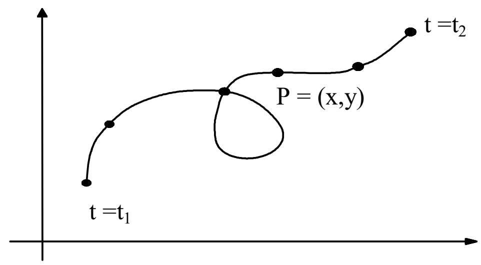
Bài số 9

PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ. TỌA ĐỘ CỰC

I. Phương trình tham số

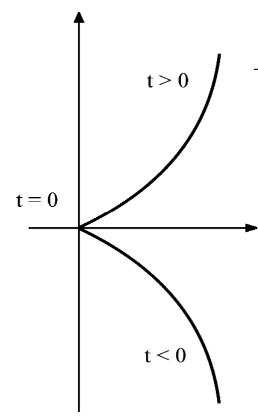
❖ ***Dạng:*** $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2$



Hình 17.1

❖ ***Vẽ đường cong tham số***

• **Ví dụ 1**. Vẽ đường cong $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ và tìm phương trình vuông góc.



t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	4	8
-1	1	-1
-2	4	-8

Giải : • ***Cách 1 :*** + Ta tính x và y với một vài giá trị của t.

+ Nối những điểm đó ta sẽ được đường cong.

• ***Cách 2 :*** Khảo sát sự biến đổi của x và y khi t biến đổi.

+ Khi t tăng từ 0 đến ∞, x và y cùng bắt đầu tại 0 và tăng tới các giá trị dương, nhưng y tăng nhanh hơn x.

+ Với các giá trị âm của t thì x vẫn dương, nhưng y lại âm, vì vậy phần này của đường cong đối xứng qua trục x với phần trên mà ta đã mô tả.

+ Dáng điệu của độ dốc của tiếp tuyến dy/dx có thể tính được bằng cách chia $dy = 3t^2dt$ cho $dx = 2tdt$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2dt}{2tdt} = \frac{3}{2}t \begin{cases} \to 0 & \text{khi } t \to 0 \\ \to \infty & \text{khi } t \to \infty \\ \to -\infty & \text{khi } t \to -\infty \end{cases}$$

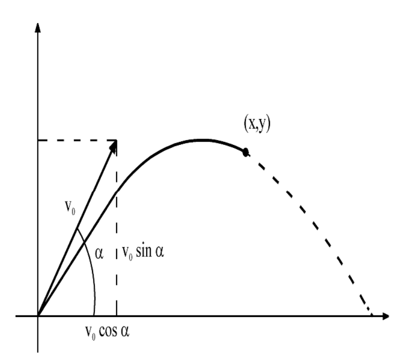
• Ta có : $y^2 = x^3$ hay $y = x^{3/2}$ là phương trình vuông góc của đường cong.

• **Ví dụ 2.** Một viên đạn được bắn ra khỏi tâm tại thời điểm $t = 0$ với tốc độ ban đầu v_0 ft/s (hay m/s) và được định hướng bởi một góc α, và giả sử rằng chỉ có lực hấp dẫn tác dụng lên viên đạn. Xem xét quỹ đạo của chuyển động.

Giải : Ta xét các thành phần x và y của gia tốc : $a = (a_x, a_y)$

Do lực hấp dẫn hướng xuống ta có

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$



trong đó $g = 32\text{ft}/s^2$ (hay 9,80 m/s^2) là gia tốc trọng trường.

+ Suy ra: $\begin{cases} v_x = c_1 \\ v_y = -gt + c_2 \end{cases}$

+ Nhưng khi $t = 0$, ta có $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha. \end{cases}$

+ Lấy nguyên hàm cho ta : $\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t + c_3 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + c_4. \end{cases}$

+ Nhưng $x = y = 0$ khi $t = 0$ suy ra $c_3 = c_4 = 0$ và

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

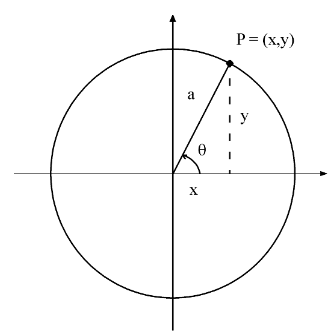
Đây là phương trình tham số của quỹ đạo viên đạn.

+ Khử tham số ta có:

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (v_0 \sin\alpha)\frac{x}{v_0 \cos\alpha} = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x.$$

- **<u>Ví dụ 3</u>.** Xét đường tròn bán kính a và tâm tại gốc. Phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$$



+ Để ý rằng $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ta có :

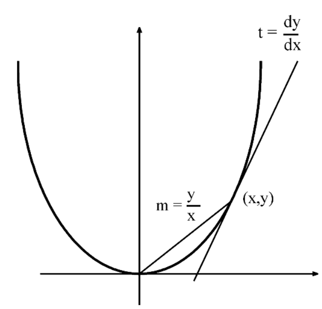
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

❖ ***<u>Ta có thể có nhiều cách tham số hóa.</u>***

- **<u>Ví dụ 4</u>.** Xét Parabol $x^2 = 4py$.

◆ Sử dụng độ nghiêng của tiếp tuyến tại điểm (x, y) như một tham số : $t = \dfrac{dy}{dx}$.

Từ : $2x = 4p\dfrac{dy}{dx}$ hay $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2p}$,



Phương trình tham số trong trường hợp này là : $\begin{cases} x = 2pt \\ y = pt^2 \end{cases}$.

◆ Xét tham số : $m = \dfrac{y}{x}$ là độ nghiêng của bán kính qua điểm (x, y).

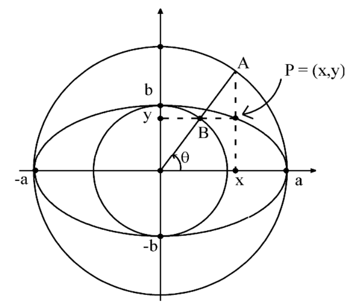
Khi đó: $y = mx$ và $x^2 = 4py = 4pmx$

Phương trình tahm số: $\begin{cases} x = 4mp \\ y = 4mp^2 \end{cases}$.

❖ Biểu diễn đường cong trong toạ độ vuông góc $y = f(x)$ chuyển thành hệ tham số :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Ví dụ 5. Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có thể được tham số hoá như sau.

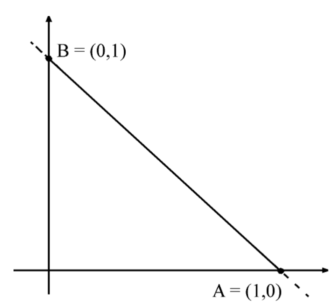


Từ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, nên tồn tại một góc θ sao cho :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}.$$

Ví dụ 6. Vẽ đường cong $\begin{cases} x = \cos^2(\pi/2)t \\ y = \sin^2(\pi/2)t \end{cases}$, và tìm phương trình vuông góc.

Lời giải . Từ $\cos^2(\pi/2)t + \sin^2(\pi/2)t = 1$, điểm $P = (x, y)$ chuyển động trên đường thẳng $x + y = 1$ (hình 17.7). Nhưng không chỉ x mà y cũng không thể âm, vì vậy ta chỉ xét mộtphần của đường này nằm trong góc phần tư thứ nhất.



II. Tọa độ cực

1. Khái niệm:

• **Một điểm được hoàn toàn xác định bởi: khoảng cách và hướng của nó đến gốc toạ độ**

+ ***Hướng*** được chỉ rõ bằng một góc θ (tính bằng radian), được đo từ chiều dương trục Ox. Góc này được mô tả theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nếu θ dương và theo chiều kim đồng hồ nếu θ âm, như trong lượng giác.

+ Khoảng cách được tính bởi ***khoảng cách định hướng*** r đo từ gốc dọc tới điểm cuối của góc θ.

Hai số r và θ, viết theo thứ tự (r, θ) : gọi là ***toạ độ cực*** của điểm đó. Hướng θ = 0 (hướng dương trục Ox) được gọi là trục cực.

• ***Mỗi điểm có nhiều cặp toạ độ cực:***

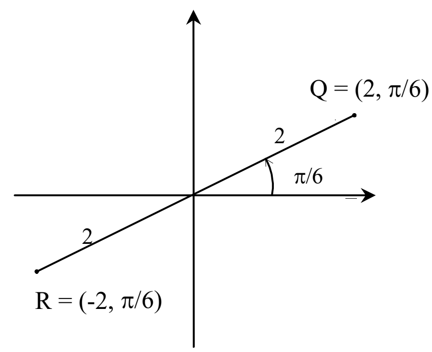
+ Chẳng hạn, điểm P trong có các toạ độ cực là:

$$\left(3, \pi / 4\right), \ \left(3, \pi / 4 + 2\pi\right), \left(3, \pi / 4 - 4\pi\right), \ldots$$

Tức là nếu tọa độ cực của điểm P là : $\left(r, \alpha\right)$ thì ta cũng có các tọa độ cực là: $\left(r, \alpha + k2\pi\right)$.

❖ Thuật ngữ ***"khoảng cách định hướng"*** tức là r có thể là số âm khi mà với hướng θ cho trước, khi ta chuyển ngược qua gốc một khoảng $|r|$ theo hướng ngược lại.

Ta có hai điểm: $Q = \left(2, \pi / 6\right)$; $R = \left(-2, \pi / 6\right)$, để ý rằng hai điểm này đối xứng nhau qua gốc tọa độ.



Hình 16.3

• Giá trị $r = 0$ chính là gốc, không cần kể đến giá trị của θ. Chẳng hạn, các cặp $\left(0, 0\right)$, $\left(0, \pi / 2\right)$, $\left(0, -\pi / 4\right)$ đều là toạ độ cực của gốc toạ độ.

2. Mối liên hệ giữa toạ độ vuông góc và toạ độ cực.

◆ Khi đã biết r, θ, ta có: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

◆ Khi đã biết x và y ta cũng có: $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

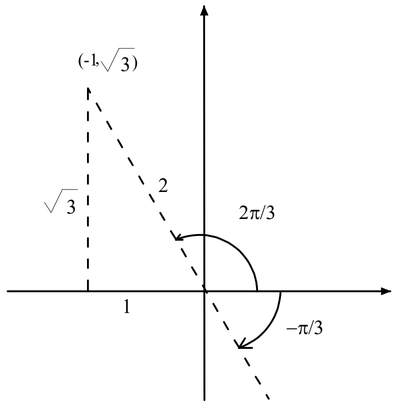
◆ Khi sử dụng các công thức này cần phải cẩn thận ***xác định chính xác dấu*** của r và chọn θ thích hợp với góc phần tư mà điểm $\left(x, y\right)$ nằm trên.

• **Ví dụ 1.** Toạ độ vuông góc của một điểm là $\left(-1, \sqrt{3}\right)$. Tìm toạ độ cực của điểm này.

Giải. + Một cặp toạ độ cực là $\left(2, 2\pi / 3\right)$. Một cặp toạ độ cực khác: $\left(-2, -\pi / 3\right)$.

❖ **Đồ thị của phương trình cực :** $F(r, \theta) = 0$**:** là tập hợp tất cả các điểm $P = \left(r, \theta\right)$ sao cho toạ độ cực này thoả mãn phương trình.

+ Mà một điểm $P = \left(r, \theta\right)$ có nhiều cặp toạ độ khác nhau nên P ***nằm trên đồ thị*** nếu ***một cặp toạ độ bất kì*** trong các toạ độ của điểm đó thoả mãn phương trình.



• **Ví dụ 2**. Chứng minh rằng điểm $\left(1,\pi/2\right)$ và điểm $\left(0,\pi/2\right)$ đều nằm trên đồ thị của $r=\sin^2\theta$.

3. Đường trong tọa độ cực.

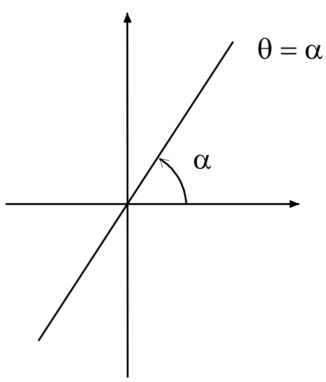
❖ Xét hàm số trong tọa độ cực dạng: $r=f\left(\theta\right)$

+ Nếu hàm $f\left(\theta\right)$ là một hàm đơn giản, đồ thị của nó khá dễ vẽ :

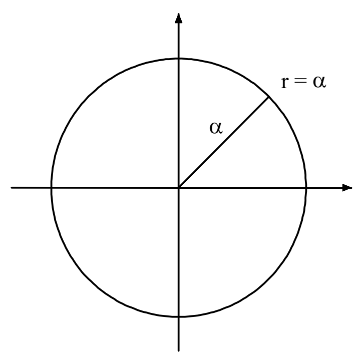
- Ta chọn một dãy các giá trị của θ,
- Mỗi giá trị xác định một hướng từ gốc ta tính toán giá trị tương ứng của r.

• **Ví dụ 3**. Phương trình $\theta=\alpha$, trong đó α là một hằng số, có đồ thị là một đường thẳng qua gốc toạ độ và tạo với trục dương x một góc α.

• **Ví dụ 4**. Phương trình $r=a$, trong đó a là một hằng số dương, biểu diễn một đường tròn tâm tại gốc và có bán kính bằng a.

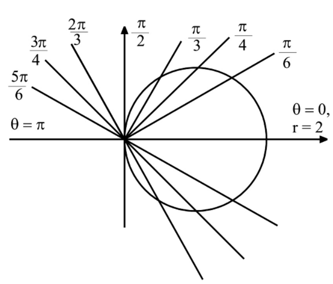


Hình 16.5



Hình 16.6

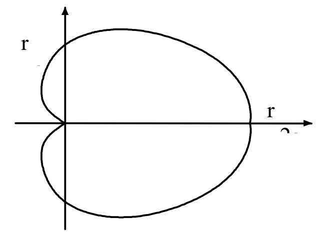
• **Ví dụ 5**. Hàm $r=2\cos\theta$ biểu diễn một đường tròn.



+ Để kiểm tra kết quả: Ta có $r = 2\cos\theta$ suy ra

$$r^2 = 2r\cos\theta, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Đây là một đường tròn tâm $(1,0)$ và bán kính bằng 1.



• **Ví dụ 6.** Đường cong $r = a(1+\cos\theta)$ với $a > 0$ được gọi là cardioid (đường hình tim).

❖ ***Chuyển p/trình cực về p/trình trong hệ toạ độ vuông góc.***

Ta sử dụng mối liên hệ: $$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

• ***Ví dụ 7:*** + Đường hình tim cardioid $r = a(1+\cos\theta)$ trở thành

$$r = a\left(1 + \frac{x}{r}\right), \quad r^2 = a(r + x), \quad x^2 + y^2 - ax = ar,$$

+ Cuối cùng: $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

◆ ***Chú ý :*** + Đường cong ***đối xứng qua trục*** x khi r là một hàm chỉ chứa $\cos\theta$.

+ Nếu r là một hàm chỉ chứa $\sin\theta$, đường cong là một đường ***đối xứng qua trục*** y.

+ Phương trình dạng $r^2 = f(\theta)$:

- Nếu θ là một góc sao cho $f(\theta) < 0$ thì không có một điểm nào trên đường cong.

- Nếu góc θ là một góc sao cho $f(\theta) > 0$ thì có hai họ điểm tương ứng trên đường cong với $r = \pm\sqrt{f(\theta)}$. Các điểm này có khoảng cách bằng nhau tới tâm nhưng hướng ngược nhau, vì vậy đồ thị của $r^2 = f(\theta)$ luôn luôn ***đối xứng qua gốc toạ độ***.

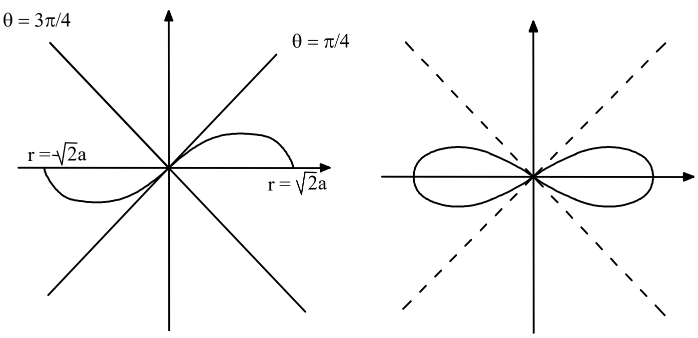
• **Ví dụ 9.** Đường cong $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ được gọi là một đường lemniscate.

+ Với mỗi θ có hai giá trị của r: $\quad r = \pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}$. (1)

+ Khi θ tăng từ $0 \to \pi/4$, 2θ tăng từ $0 \to \pi/2$ nên $\cos 2\theta$ giảm từ 1 đến 0.

+ Hai giá trị r trong (1) đồng thời vẽ nên hai phần của đường cong trong Hình 16.10.

+ Khi θ tiếp tục tăng qua nửa thứ hai của góc phần tư thứ nhất và nửa thứ nhất của góc phần tư thứ hai, 2θ biến đổi qua góc phần tư thứ hai và thứ ba và $\cos 2\theta$ âm, vì vậy không có đồ thị cho tập điểm này. Qua nửa thứ hai của góc phần tư thứ hai, $\cos 2\theta$ lại dương, và hai giá trị của r cho bởi (1) đồng thời hoàn thành hai vòng bắt đầu ở bên trái hình vẽ.



Hình 16.10

• **Ví dụ 10.** Đường cong $r = a\sin 2\theta$ với $a > 0$ được gọi là một bông hồng bốn cánh.

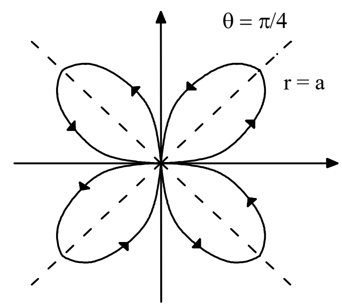
+ Để để ý rằng khi θ tăng từ $0 \Rightarrow \pi/4$, 2θ tăng từ $0 \Rightarrow \pi/2$ và r tăng từ 0 đến a;

+ Khi θ tăng từ $\pi/4$ đến $\pi/2$, 2θ tăng từ $\pi/2$ đến π và r giảm từ 0 đến a.

+ Từ đó cho ta lá thứ nhất trong góc phần tư thứ nhất (Hình 16.11).

+ Giá trị của θ giữa $\pi/2$ và π (2θ giữa π và 2π) cho giá trị r âm, ta vẽ được lá trong góc phần tư thứ tư;

+ θ giữa π và $3\pi/2$ (2θ giữa 2π và 3π) cho giá trị r dương, ta vẽ được lá trong góc phần tư thứ ba;



Hình 16.11

+ θ giữa $3\pi/2$ và 2π (2θ giữa 3π và 4π) cho giá trị r âm, ta vẽ được lá trong góc phần tư thứ hai.

Bài tập về nhà: Các bài **Tr. 551, 515, 517, 525,**
***Đọc trước các mục*: 7.2, 15.5, 7.3, 7.4** chuẩn bị cho **Bài số 10**
Ứng dụng của tích phân: Tính diện tích miền phẳng và thể tích.