Bài giảng, bài tập lấy ở trang web:

- vunamphong.wordpress.com
- Password: toan3-dstt3tc-dhtl

phongvn@tlu.edu.vn

wolframalpha.com

BÀI 1. VÉC TƠ – MA TRẬN

I. Véc tơ

1. Biểu diễn tọa độ của một véc tơ

Tọa độ mỗi véc tơ v trong R^n có 2 cách biểu diễn:

- $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$

- $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$

2. Phép toán véc tơ

Cho hai véc tơ $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ và số thực λ.

- Phép cộng: $u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

- Phép trừ: $u - v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$

- Phép nhân với một số thực: $\lambda u = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \dots\dots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$

- Tích vô hướng: $u.v = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

- Độ dài véc tơ: $|u| = \sqrt{x_1^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}$

VD. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\quad 2.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$

II. MA TRẬN

1. Định nghĩa

- Một bảng gồm m.n số thực được xếp thành m hàng và n cột đgl một ma trận cỡ $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Dùng các chữ cái:A, B, C,…đặt tên cho ma trận
- a_{ij} là phần tử nằm ở hàng i và cột j.
- $\left[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}\right]$ là hàng thứ i của ma trận A.

- $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ là cột thứ j của ma trận A.

- Ta cũng viết $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$ để chỉ ma trận cỡ $m \times n$ có các phần tử là a_{ij}.

2. Một số ma trận đặc biệt

a. Ma trận vuông cấp n là ma trận cỡ $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử a_{ii} lập nên đường chéo chính của nó.

b. Ma trận tam giác trên là ma trận vuông mà các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính là 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

c. Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông mà các phần tử nằm phía trên đường chéo chính là 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

d. Ma trận đường chéo là ma trận vuông mà các phần tử nằm ngoài đường chéo chính là 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e. Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo mà tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính là 1.

Ký hiệu là I hoặc E.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

f. Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 0. Kí hiệu: O.

g. Ma trận đối xứng là ma trận vuông mà các phần tử nằm đối xứng qua đường chéo chính thì bằng nhau, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j.

h. Ma trận hoán vị là ma trận thu được từ việc hoán vị các hàng, các cột của ma trận đơn vị. Do đó, mỗi hàng, mỗi cột có đúng một phần tử là 1, còn lại là 0.

3. So sánh hai ma trận

Hai ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ và $B = \left[b_{ij} \right]_{m \times n}$ đgl bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$. Ta viết $A = B$.

4. Phép toán ma trận

a. Phép cộng ma trận

Cho 2 ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ và $B = \left[b_{ij} \right]_{m \times n}$.

- $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij} \right]_{m \times n}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- $A-B=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]_{m\times n}$

VD. $$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -5\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

b. Phép nhân ma trận với 1 số

- Cho $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$ và 1 số λ.
- $\lambda A = \left[\lambda a_{ij} \right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$

$$VD: 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

c. Phép nhân ma trận với véc tơ

- Cho ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ và véc tơ $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$

- Đặt $h_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\right)$ là hàng thứ i của A.

- $Av = \begin{bmatrix} h_1.v \\ h_2.v \\ ... \\ h_m.v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$

VD. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1,0,-1,4).(1,2,3,4) \\ (0,2,1,-2).(1,2,3,4) \\ (-1,2,4,0).(1,2,3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

d. Phép nhân hai ma trận

- Cho 2 ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$
- Gọi $b_1,\ b_2, ..., \ b_p$ là các cột của ma trận B, tức là

$$B = \left[b_1\ b_2\ \dots\ b_p\right]$$

- Tích của 2 ma trận A và B là ma trận $m \times p$ xác định như sau:

$$AB = \left[Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_p\right]$$

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tính AB, BA.

NX: Tích 2 ma trận $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times n}$ và $B = \left[b_{ij} \right]_{n\times p}$ là ma trận $C = AB = \left[c_{ij} \right]_{m\times p}$

$$c_{ij} = (\text{ hàng i của A}).(\text{ cột j của B}).$$

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

VD. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính AB, BA.

VD. $\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0).(3,1) & (1,0).(3,2) & (1,0).(0,1) \\ (2,4).(3,1) & (2,4).(3,2) & (2,4).(0,1) \\ (2,1).(3,1) & (2,1).(3,2) & (2,1).(0,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 10 & 14 & 4 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3,3,0).(1,2,2) & (3,3,0).(0,4,1) \\ (1,2,1).(1,2,2) & (1,2,1).(0,4,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Nhận xét:

+ Phép nhân ma trận không có tính giao hoán

+ $AB = \mathrm{O}$ không suy ra được $A = \mathrm{O}$ hoặc $B = \mathrm{O}$

e. T/c của các phép toán thông thường của ma trận

1. $A+B=B+A$
2. $A+O=A$
3. $A+(-A)=O$
4. $(A+B)+C=A+(B+C)$
5. $x(A+B)=xA+xB$
6. $(x+y)A=xA+yA$
7. $(xy)A=x(yA)$
8. $\mathrm{I}A=AI=A$
9. $\mathrm{AO}=OA=O$

10. $(AB)C = A(BC)$

11. $(A+B)C = AC + BC$

12. $A(B+C) = AB + AC$

Chú ý: Lũy thừa ma trận vuông: $A^n = A.A....A$.

VD. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tính A^3.

f. Phép nhân Hadamard (viết tắt: phép nhân H**)**

- **Định nghĩa**: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$, tích Hadamard của A và B kí hiệu là: $A \Theta B = [c_{ij}]_{mxn}$, với $c_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}$
- **Tính chất**:

1. $A \Theta B = B \Theta A$, $\quad A \Theta (B \Theta C) = (A \Theta B) \Theta C$
2. $A \Theta (B + C) = A \Theta B + A \Theta C$
3. Ma trận đơn vị của phép nhân H là ma trận có tất cả các phần tử đều là 1
4. Ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$ khả nghịch với phép nhân H nếu $a_{ij} \neq 0$ với mọi i, j và nghịch đảo của A dưới phép nhân H là $A^{\Theta-1} = [b_{ij}]_{mxn}$ với $b_{ij} = 1/a_{ij}$

Cho:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Tính: } A\square\ B=?, A^{\square\,-1}=?, B^{\square\,-1}=?$$

$$A\Box\ B=\begin{bmatrix}1\times 9 & 2\times 4 & 3\times 1\\ 4\times 8 & 5\times 7 & 6\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8 & 3\\ 32 & 35 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{\Box -1}=\begin{bmatrix}1/1 & 1/2 & 1/3\\ 1/4 & 1/5 & 1/6\end{bmatrix}, \nexists B^{\Box -1}$$

5. Ma trận chuyển vị, ma trận chuyển vị liên hợp

a. Định nghĩa:

- **Ma trận chuyển vị** của ma trận A, kí hiệu là A^T, là ma trận thu được từ A bằng việc chuyển hàng thành cột tương ứng.
- **Ma trận chuyển vị liên hợp** của ma trận A, kí hiệu là A^H, là ma trận thu được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột tương ứng, sau đó thay các phần tử trong ma trận mới bằng số phức liên hợp với nó.

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix} 2-3i & 4 & 5i \\ 1+6i & -7i & -8 \end{bmatrix}, A^T=\begin{bmatrix} 2-3i & 1+6i \\ 4 & -7i \\ 5i & -8 \end{bmatrix}, A^H=\begin{bmatrix} 2+3i & 1-6i \\ 4 & 7i \\ -5i & -8 \end{bmatrix}$$

b. Tính chất:

Các tính chất tiêu biểu dưới đây vẫn đúng nếu thay chữ T bằng chữ H. (x là số thực bất kì)

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(xA)^T = xA^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(A+B)^T = A^T + B^T$

6. Ma trận bậc thang và trụ

- Ma trận bậc thang là ma trận thỏa mãn:

  + Phía dưới phần từ khác 0 đầu tiên ở mỗi hàng (nếu có) là các phần tử 0.

  + Những hàng chỉ chứa phần tử 0 (nếu có) nằm dưới tất cả các hàng chứa phần tử khác 0.

- Trong ma trận bậc thang những phần tử khác 0 đầu tiên trong mỗi hàng đgl các trụ.

VD. Chỉ ra ma trận bậc thang và trụ của nó:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$