Bài số 5

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

I. Bái toán cực trị

1) Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[a;b\right]$, ta nói :

i. Hàm số đạt GTLN nếu : $\begin{cases} f(x) \le M, & \forall x \in [a,b] \\ \exists c \in [a,b]: & f(c) = M \end{cases}$

ii. Hàm số đạt GTNN nếu : $\begin{cases} f(x) \ge m, & \forall x \in [a,b] \\ \exists c \in [a,b]: & f(c) = m \end{cases}$

2) Cách tìm : + Tìm các điểm tới hạn của $y = f(x)$ trong đoạn $\left[a;b\right]$: chẳng hạn là c

+ Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\left\{f(a),\ f(b),\ f(c)\right\}$ hoặc $\min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\left\{f(a),\ f(b),\ f(c)\right\}$.

❖ **Chú ý : 1)** Nếu hàm số $y = f(x)$ ***liên tục trên*** D, và trên đó nó ***có duy nhất một điểm tới hạn*** **(là điểm dừng)**, ***và tại điểm tới hạn đó hàm số đạt cực trị***

+ Nếu cực trị đó ***là cực tiểu*** thì đó cũng là **GTNN** của hàm số trên miền đó.

+ Nếu cực trị đó ***là cực đại*** thì đó cũng là **GTLN** của hàm số trên miền đó.

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left[a,b\right]$ thì $\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(b)$, $\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(a)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\left[a,b\right]$ thì $\max\limits_{[a,b]} f(x) = f(a)$, $\min\limits_{[a,b]} f(x) = f(b)$.

3) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[a,b\right]$ thì luôn tồn tại GTLN và GTNN trên miền đó.

Ví dụ 1: Tìm hai số dương mà tổng của chúng bằng 16 và tích của chúng đạt giá trị lớn nhất.

Giải: + Giả sử x và y là hai số dương mà tổng của chúng bằng 16

+ Vì vậy: $x + y = 16$

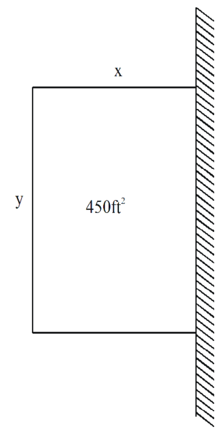
+ Tích của chúng : $P = xy$

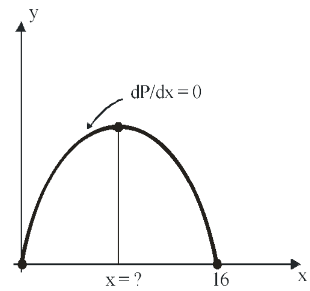
+ Ta có : $y = 16 - x$, khi đó :

$$P = xy = x(16 - x) = 16x - x^2 \text{ , với } 0 < x < 16$$

+ Tìm các điểm tới hạn : $\dfrac{dP}{dx} = 16 - 2x;\quad \dfrac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 8$.

+ Đây là giá trị của x làm cực đại P với giá trị tương ứng của y cũng là 8, hơn nữa tại tại đây P cũng đạt GTLN và GTLN đó là : $\max P = 64$.





• Ví dụ 2: Một mảnh vườn hình chữ nhật $450m^2$ được rào lại. Nếu một cạnh của mảnh vườn được bảo vệ bởi bức tường của một kho thóc, thì kích thước chiều dài của tường rào ngắn nhất là bao nhiêu?

Giải: + Gọi x là chiều rộng của vườn, y là chiều dài của mảnh vườn, L là chiều dài của hàng rào.

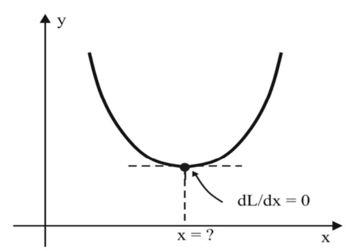
Chúng ta cần tìm GTNN của : $L = 2x + y$

với : $xy = 450 \Rightarrow y = \dfrac{450}{x}$

+ L có thể được viết như là hàm của một biến x : $L = 2x + \dfrac{450}{x}$; $x > 0$

+ Ta là tính đạo hàm của

$$\frac{d\ L}{dx} = 2 - \frac{450}{x^2}; \quad \frac{d\ L}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 15, \quad (x > 0)$$



Hình 4.16

+ Giá trị tương ứng của y là *y = 30.*

+ Ta có : $\dfrac{d^2L}{dx^2} = \dfrac{900}{x^3} > 0$, nên L đạt cực tiểu khi

$x = 15; y = 30$.

+ Hơn nữa khi đó L cũng đạt GTNN

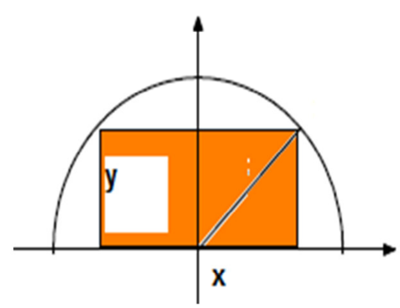
+ Vì vậy mảnh vườn có hàng rào ngắn nhất là 15 và 30, và khi đó $\min L = 60(m)$.

Ví dụ 3: Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà nó có thể nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính là a.

Giải : + Xét nửa trên của đường tròn : $x^2 + y^2 = a^2$

+ Chúng ta phải tìm GTLN của: $A = 2xy$ (7)

với điều kiện : $x^2 + y^2 = a^2; y \geq 0$ (8)



+ Từ (8) ta có $y = \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, khi đó (7) trở thành:

$$A = 2x(a^2 - x^2)^{1/2}, 0 < x < a.$$

+ Tính $\dfrac{dA}{dx}$. Cho $\dfrac{dA}{dx} = 0$ ta nhận được :

$$\frac{dA}{dx} = 2(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 2x.\frac{1}{2}(-2x)(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \to x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

+ Xét dấu của $\frac{dA}{dx}$ khi đi qua $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra GT cực đại của A.

+ Giá trị tương ứng của y là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Và A cũng đạt GTLN tại $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Vì vậy kích thước của hình chữ nhật nội tiếp lớn nhất là $2x = a\sqrt{2}$ và $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, hình chữ nhật này có chiều dài gấp đôi chiều rộng và kích thước đó làm cho A đạt GTLN và GTLN đó là : $A = a^2$.

Ví dụ 4: Một người bán hàng dự định bán 500kg khoai tây bóc vỏ với giá 1,5 USD/kg (giá gốc là 70 cent /kg). Tuy nhiên nếu cứ hạ giá một cent thì sẽ bán thêm được 25 kg. Hỏi người bán hàng nên bán với giá nào để đạt lợi nhuận lớn nhất?

Giải: + Gọi x là số cent mà người bán hàng đã hạ giá,

+ Lợi nhuận của mỗi một kg khoai tây gọt vỏ là $(80 - x)$ cent

+ Số lượng bán được là: $500 + 25x$.

+ Vì vậy toàn bộ lợi nhuận sẽ là (bằng cent)

$$P = (80 - x)(500 + 25x) = 40000 + 1500x - 25x^2$$

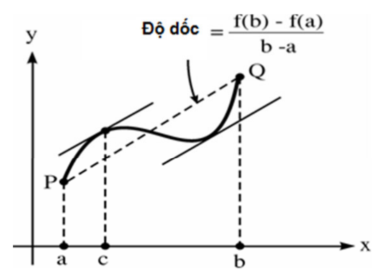
+ Ta có : $\frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dx} = 1500 - 50x = 0 \to x = 30$

+ Từ việc xét dấu của $\frac{dP}{dx}$ rồi suy ra GTcực đại của P, và từ đó ta nhận được GTLN của lợi nhuận.

+ Giá bán thuận lợi nhất là $1,2USD / kg$.

II . Định lý giá trị trung bình (tự đọc)

❖ **Nhận xét hình học :** Giữa hai điểm bất kỳ P và Q trên đồ thị của hàm số khả vi, tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó có đường tiếp tuyến song song với dây cung nối hai điểm P và Q, nói cách khác : Tồn tại ít nhất một điểm c nằm giữa a và b, $(a < c < b)$ thoả mãn điều kiện:

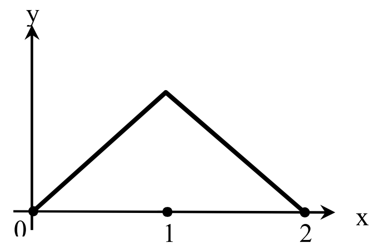


$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

1) Định lý 1 (Định lý Rolle). *Nếu hàm số $f(x)$* ***liên tục trên đoạn*** *$[a;b]$ và khả vi trong khoảng mở $(a;b)$ và nếu $f(a) = f(b) = 0$ thì khi đó tồn tại ít nhất một số c* nằm giữa a và b *thoả mãn $f'(c) = 0$.*

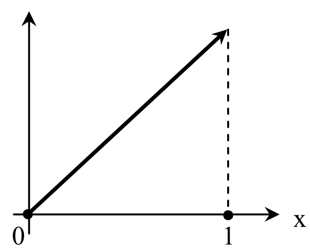
◆ ***Ý nghĩa hình học:*** Định lý này phát biểu rằng nếu một đường cong trơn cắt trục O*x* tại 2 điểm, thì khi đó sẽ có ít nhất một điểm của đường cong này nằm giữa 2 điểm trên mà tại đó tiếp tuyến có phương nằm ngang.

◆ **Ví dụ 1.** Hàm số : $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$



Hàm số này có giá trị bằng 0 tại $x = 0$ và $x = 2$, và liên tục trên khoảng đóng $\left[0;2\right]$. Hàm số khả vi trong khoảng mở $(0;2)$, trừ điểm $x = 1$ vì khi đó đạo hàm của nó không tồn tại. Đạo hàm $f'(x)$ rõ ràng là không bằng 0 tại bất kỳ điểm nào trên khoảng đó. Đây là một thất bại trong kết luận của Định lý Rolle vì thực tế là hàm số không khả vi tại điểm $x = 1$.

◆ **Ví dụ 2.** Hàm số: $f(x) = \begin{cases} x \ , 0 \le x < 1 \\ 0 \ , x = 1 \end{cases}$



Hàm số bằng 0 tại $x = 0$ và $x = 1$, và khả vi trong khoảng $(0;1)$. Hàm số liên tục trên $\left[0;1\right)$, không liên tục tại $x = 1$. Đạo hàm $f'(x)$ không bằng 0 tại bất kỳ điểm nào trên khoảng này, và trong trường hợp này kết luận của Định lý Rolle không còn đúng.

◆ **Ví dụ 3.** Giả sử $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0$$

có nghiệm trong $\left(0,1\right)$.

Giải: Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$:

+ Xác định liên tục trên $\left[0,1\right]$, khả vi trên $\left(0,1\right)$

+ Ta có $f(0) = f(1) = 0$

+ Do đó tồn tại $x_0 \in (1,0)$ sao cho $f'(x_0) = 0$, tức là $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Vậy ta được cần chứng minh.

2) Định lý 2 (Định lý giá trị trung bình). Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$, khi đó tồn tại ít nhất một số c nằm giữa a và b thoả mãn:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

◆ **Ví dụ 4.** CRM nếu $0<b<a$ thì ta có $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

Giải: Xét hàm số $f(x)=\ln x$:

+ Xác định liên tục trên $[b,a]$, khả vi trên (b,a), hơn nữa $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

+ Khi đó tồn tại $x_0\in(b,a): f'(x_0)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}$

+ Ta có $f(x)=\ln x$ là hàm đồng biến nên :

$$0<b<x_0<a\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{x_0}<\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{1}{a}<f'(x_0)<\frac{1}{b}$$

+ Tức là $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}<\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\dfrac{a-b}{b}\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

❖ **Chú ý :** + Rõ ràng rằng đạo hàm của hàm hằng số là bằng 0.

☎ ***Câu hỏi đặt ra*** : Một hàm số có đạo hàm bằng 0 trên một khoảng thì hàm số đó có nhất thiết phải bất biến không?

+ Định lý giá trị trung bình sẽ cho ta câu trả lời.

3) Định lý 3. *Nếu một hàm số $f(x)$* ***liên tục trên khoảng đóng*** *$[a;b]$, và nếu $f'(x)$ tồn tại và bằng 0* ***trong khoảng mở*** *$(a;b)$, khi đó hàm $f(x)$ là một hằng số trên $[a;b]$.*

4) Định lý 4. *Cho $f(x)$ là một hàm số* ***liên tục trên khoảng đóng*** *$[a;b]$ và* ***khả vi trong khoảng mở*** *$(a;b)$. Nếu $f'(x)>0$ trong $(a;b)$, khi đó $f(x)$ tăng trên $[a;b]$. Tương tự, nếu $f'(x)<0$ trong $(a;b)$ thì $f(x)$ giảm trên $[a;b]$.*

Định lý sau sẽ cần thiết để xây dựng quy tắc L'Hospital.

5) Định lý 5 (Định lý giá trị trung bình tổng quát). *Cho hàm số $f(x)$* ***liên tục trên đoạn*** *$[a;b]$ và* ***khả vi trong khoảng*** *$(a;b)$, và giả sử rằng $g'(x)\neq 0$ đối với $x\in(a;b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một giá trị c nằm giữa a và b sao cho: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

III. Quy tắc L'Hospital

1. *Quy tắc L'Hospital cho giới hạn dạng* $\dfrac{0}{0}$:

Nếu $f(x)$ *và* $g(x)$ *đều bằng* 0 *tại* $x = a$ *và khả vi thì :* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

- **Ví dụ 1** : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2+5x-14} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-7}{2x+5} = \dfrac{5}{9}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{e^{2x-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sec^2 6x}{2e^{2x}} = 3.$$

- **Ví dụ 2**: Áp dụng qui tắc L'Hospital hai lần ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-(1+\frac{1}{2}x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1/2(x+1)^{-1/2}-1/2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1/4(x+1)^{-3/2}-1/2}{2} = -\frac{1}{8}.$$

2. *Quy tắc L'Hospital cho giới hạn dạng* $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***và một số dạng khác***:

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *có dạng* $\dfrac{\infty}{\infty}$; *các hàm số* $f(x), g(x)$ *khả vi, thì :* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\Bigg|$

- **Ví dụ 3**: Chứng tỏ rằng : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{e^x} = 0$ với mọi hằng số p.

Giải: + Nếu $p \le 0$: giới hạn xác định và giá trị giới hạn bằng 0.

+ Với $p > 0$ giới hạn có dạng không xác định : ∞/∞,

+ Áp dụng Qui tắc L'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{px^{p-1}}{e^x}$$

+ Quá trình này tiếp tục từng bước thì chúng ta sẽ giảm thiểu số mũ tới 0 hoặc tới một số âm, và ta nhận được điều cần chứng minh.

- ***Nhận xét :*** khi $x \to +\infty$ thì e^x nhanh hơn bất kỳ đa thức nào.

- **Ví dụ 4**: Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}=0$ với mọi hằng $p>0$.

Giải: + Giới hạn có dạng ∞/∞, theo qui tắc L'Hospital ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{px^{p-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{px^p}=0$$

• ***Nhận xét :*** khi $x\to+\infty$ thì $\ln x$ tăng chậm hơn ***mọi hàm mũ dương*** của x cho dù hàm mũ đó nhỏ đến cỡ nào.

- **Ví dụ 5**. Tìm: $L=\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$

Giải: + Giới hạn có dạng $0.\infty$

+ Biến đổi v ề d ạng ∞/∞ và áp dụng qui tắc L'Hospital như sau:

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

- **Ví dụ 6.** Tính: $L=\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x\text{ - }\tan x)$

+ Giới hạn có dạng dạng ∞-∞.

+ Chúng ta sẽ chuyển qua dạng 0/0 và áp dụng qui tắc L'Hospital:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\mathrm{secx\text{-}tanx})=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{\mathrm{cosx}}-\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{cosx}}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\mathrm{sinx}}{\mathrm{cosx}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\mathrm{cosx}}{\text{-}\mathrm{sinx}}=0$$

- **Ví dụ 7.** Tìm $L=\lim\limits_{x\to0^+}x^x$

Giải: + Giới hạn có dạng : 0^0

+ Đưa về dạng $0.\infty$ bằng cách sử dụng phép toán loga.

+ Đặt $y=x^x$, ta có: $\ln y=\ln x^x=x\ln x$

+ Theo Ví dụ 3 : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x^x=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

+ Từ đó : $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^0=1$

- **Ví dụ 8.** Tìm $L=\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$

Giải: + Giới hạn có dạng ∞^0. + Đặt $y=x^{1/x}$ ta có: $\ln y=\ln x^{1/x}=\dfrac{\ln x}{x}\to0\,khi\;x\to\infty$

+ Như vậy : $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^0=1$

- **Ví dụ 8.** Hãy chứng tỏ rằng : $\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{1/x}=e^a$ với mọi hằng số a. .

Bài tập về nhà : Tr. 117 ; 141 ; 362 ; 367

Đọc trước các mục : **5.3, 5.4** chuẩn bị cho ***Bài số 6***

Nguyên hàm và tích phân của hàm số một biến