Bài số 4

ĐẠO HÀM HÀM NGƯỢC. ĐẠO HÀM CẤP CAO

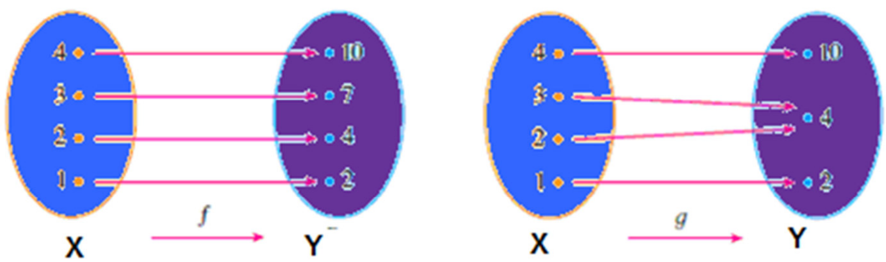
I. Hàm ngược. Đạo hàm của hàm ngược

a. *Định nghĩa :* Cho hàm số :

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Nếu tương ứng ngược : $Y \to X$ sao cho $y \to x \mid y = f(x)$ cũng là một hàm số thì ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược

$$\begin{aligned} f^{-1}: Y &\to X \\ y &\to x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$



Có hàm số ngược $f^{-1}(x)$ **Không có hàm số ngược**

b. Công thức hàm số ngược : Xét hàm số :

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Xét phương trình ẩn x : $f(x) = y \quad (*)$

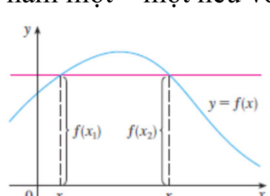
Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (*) có duy nhất một nghiệm $x \in X$ thì hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược :

$$\begin{aligned} f^{-1}: Y &\to X \\ y &\to x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

trong đó $x = f^{-1}(y)$ chính là công thức nghiệm duy nhất của phương trình (*).

c Điều kiện tồn tại hàm số ngược

Khái niệm : Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm một – một nếu với $x_1 \neq x_2$ thì ta có $f(x_1) \neq f(x_2)$.

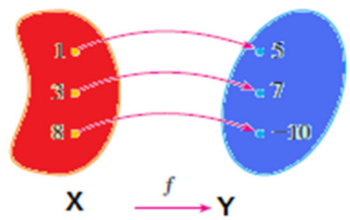


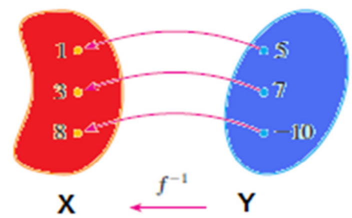
Không là hàm một - một

Nhận xét : + Hàm $y = f(x)$ là hàm một — một trên một miền nào đó thì một đường thẳng cùng phương với trục hoành sẽ cắt đồ thị của hàm số trên miền đó nhiều nhất tại một điểm.

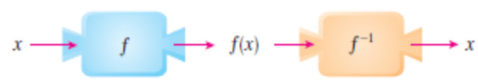
+ Một hàm số đơn điệu là hàm một — một.

Điều kiện : Nếu $y = f(x)$ là hàm số một — một có TXĐ là X và MGT là Y. Khi đó tồn tại hàm ngược f^{-1} với MXĐ là Y và TXĐ là X, hơn nữa $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.





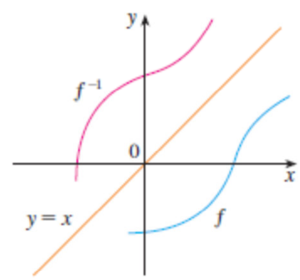
Chú ý : : + Nếu $y = f(x)$ có hàm ngược f^{-1} thì



$$+ \ f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \quad \forall x \in X.$$

$$+ \ f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \quad \forall y \in Y$$

d. Đồ thị : Nếu $y = f(x)$ có hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ thì đồ thị của hai hàm số đó sẽ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất $y = x$.



e. Hàm ngược của một số hàm sơ cấp

i) Hàm số:

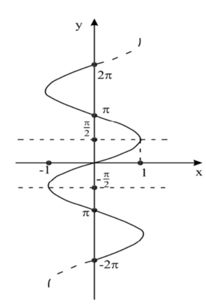
$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

có hàm số ngược là $y = x^2$.

ii) Hàm số ngược của hàm $y = \sin x$:

Nếu xét hàm số :

$$\begin{array}{lll} \sin: \left[-\pi/2, \pi/2\right] & \rightarrow & \left[-1,1\right] \\ x & \rightarrow & y = \sin x \end{array}$$



Khi đó tồn tại hàm số ngược :

$$\begin{array}{lll} \sin^{-1}: \left[-1,1\right] & \rightarrow & \left[-\pi/2, \pi/2\right] \\ y & \rightarrow & x = \sin^{-1} y \end{array}$$

Ký hiệu khác : $\sin^{-1} x = \arcsin x$.

• ***Chú ý :*** $a = \sin^{-1} b = \arcsin b$ chính là số đo góc mà $\sin a = b$.

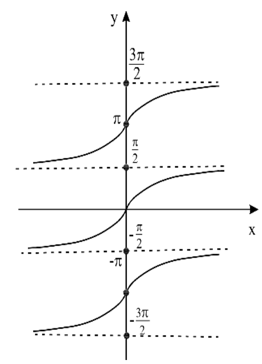
- **Ví dụ 1:** $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\arcsin\frac{1}{2}$.
- **Ví dụ 2:** Giải phương trình $\sin x=\frac{1}{3}$

Ta viết nghiệm : $\begin{array}{l} x=\sin^{-1}(1/3)+k2\pi \\ x=\pi-\sin^{-1}(1/3)+k2\pi \end{array}$

iii) Hàm ngược của hàm cosine : Tương tự, nếu xét

$$\begin{array}{rcl} \cos:\left[0,\pi\right] & \to & \left[-1,1\right] \\ x & \to & y=\cos x \end{array}$$

Khi đó sẽ tồn tại hàm ngược : $y=\cos^{-1}x$.



iv. Hàm ngược của hàm tang

Xét hàm số :

$$\begin{array}{rcl} \tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \to & (-\infty,\infty) \\ x & \to & y=\tan x \end{array}$$

khi đó tồn tại hàm số ngược $\tan^{-1}:(-\infty,+\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Chú ý : $a=\tan^{-1}b$ chính là số đo của góc mà $\tan b=a$.

Đồ thị của hàm $y=\tan^{-1}x$ là đường đậm nét ở Hình 9.19.

v. Hàm ngược của hàm cotang :

Khi xét

$$\begin{array}{rcl} \text{cotan}:\left(0,\pi\right) & \to & (-\infty,\infty) \\ x & \to & y=\cot x \end{array}$$

Tương tự: Hàm $y=\text{arccot } x=\left(\cot\right)^{-1}(x)$.

f. Đạo hàm của hàm ngược

Cho hàm $y=f(x)$ là hàm liên tục, một – một trên khoảng (a,b). Khi đó tồn tại hàm ngược $x=f^{-1}(y)$ xác định trong lân cận của y_0 với $y_0=f(x_0)$. Giả sử $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f(x_0)\neq 0$, thì hàm ngược $x=f^{-1}(y)$ sẽ có đạo hàm tại y_0 và $\left[f^{-1}\right]'(y_0)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$.

Ví dụ 3: Hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y) = y^2$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0$; $\left[f^{-1}\right]'(y) = 2y = 2\sqrt{x} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{f'(x)}, \forall x > 0$.

Bảng các đạo hàm các hàm cơ bản.

$y = f(x)$	$y = f'(x)$	$y = f(x)$	$y = f'(x)$
$y = C$	$y' = 0$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x$	$y = -\sin x$	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = \text{arccot}\, x$	$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$		
$y = e^x$	$y' = e^x$		

Kết hợp với đạo hàm của hàm hợp ta có

● **Ví dụ 4**. Ta có: $\dfrac{d}{dx}e^{4x} = ?$; $\dfrac{d}{dx}e^{x^2} = ?$; $\dfrac{d}{dx}e^{1/x} = ?$.

$$\frac{d}{dx}\ln(3x+1) = ?; \quad \frac{d}{dx}\ln(1-x^2) = ?; \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = ?,$$

● **Ví dụ 5.** Tìm đạo hàm của các hàm dưới đây:

a) $y = \sin 5x$; b) $y = \sin\sqrt{x}$; c) $y = \cos(2 - 3x^4)$

● **Ví dụ 3.** Tìm đạo hàm của các hàm dưới đây :

a) $y = \sin^3 4x$ b) $y = e^{\cos x}$ c) $y = \ln(\sin x)$ d) $y = \sin(\ln x)$

● **Ví dụ 6.** Chứng tỏ rằng $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right) = \sin^3 x$

II.Vi phân

a. Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Cho số gia Δx, nếu số gia của hàm số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ có thể viết được dưới dạng :

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \text{ trong đó } A \text{ chỉ phụ thuộc } x_0 \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

thì ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 và biểu thức $A\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được ký hiệu là dy. Như vậy : $dy = df = A.\Delta x$.

b. Liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 thì nó có đạo hàm tại x_0; ngược lại nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó khả vi tại x_0 và : $dy = df = f'(x).\Delta x$.

+ Tuy nhiên : Nếu $y = f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$ nên $dy = dx = \Delta x$, do đó : $dy = df = f'(x)dx$

+ Và từ đó ta có : $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Ví dụ 1 : $y = x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow dy = 2x.dx$.

c. Quy tắc tính vi phân. Quy tắc tính đạo hàm dẫn đến các công thức vi phân tương ứng.

$\dfrac{d}{dx}c = 0$	$d(c) = 0$
$\dfrac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$
$\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$	$d(cu) = cdu$
$\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	$d(u+v) = du + dv$
$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	$d(uv) = vdu + udv$
$\dfrac{d}{dx}(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$
$\dfrac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$

Ví dụ 2. Giả sử $y = x^4 + 3x^2 + 7$ tìm dy

Giải : + **Cách 1** : Một cách để làm là tìm đạo hàm

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x$$

và nhân với dx

$$dy = (4x^3 + 6x)dx$$

+ **Cách 2**: Chúng ta cũng có thể dùng các công thức vi phân ở trên

$$dy = d(x^4 + 3x^2 + 7) = d(x^4) + 3d(x^2) + d(7)$$
$$= 4x^3dx + 6xdx = (4x^3 + 6x)dx$$

Ví dụ 3. Tính $d\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Giải: + Dùng công thức vi phân của một thương:

$$d\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{\sqrt{x^2+1}.d(x^2) - x^2d(\sqrt{1+x^2})}{x^2+1}$$

$$d\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2x\sqrt{x^2+1}dx - \dfrac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^3+2x}{(x^2+1)^{3/2}}dx.$$

Ví dụ 4: Giả thiết rằng y là một hàm khả vi đối với x và thỏa mãn phương trình:

$$x^2y^3 - 2xy + 5 = 0.$$

Hãy sử dụng vi phân để tìm $\dfrac{dy}{dx}$.

Giải: + Lấy vi phân 2 vế phương trình ta có:

$$2xy^3dx + 3x^2y^2dy - 2ydx - 2xdy = 0$$

hay là

$$\left(3x^2y^2 - 2x\right)dy = \left(2y - 2xy^3\right)dx,$$

+ Kết quả :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x} \text{ với đ/k } 3x^2y^2 - 2x \neq 0.$$

d. Ứng dụng của vi phân trong tính gần đúng (tự đọc)

Xét hàm số $y = f(x)$ khả vi trong lân cận của $x_0 \in (a,b)$. Theo công thức số gia của hàm khả vi ta có

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

• Ví dụ: Tính xấp xỉ $\ln 11$.

Giải: + Xét $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 10, \quad \Delta x = 1$

+ Áp dụng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ ta có

$$\ln 11 = \ln(10+1) \approx \ln 10 + \frac{1}{10.\ln 10}.1 \approx 1,043.$$

III. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác đinh trong khoảng $\left(\mathrm{a},\mathrm{b}\right)$. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ và $f'(x)$ có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm của nó là đạo hàm cấp hai của hàm $y = f(x)$.

Kí hiệu: $y'' = f''(x) = \left[f'(x)\right]'$.

Tương tự ta có đạo hàm cấp n của hàm $y = f(x)$: $y^{(n)}(x) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'$.

Ví du 1: Cho hàm số $y = e^{-x^2}$. Tính y''' ?

Ta có: $y' = -2xe^{-x^2}$

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$
$$y''' = -2xe^{-x^2}(4x^2 - 2) + 8xe^{-x^2} = 4e^{-x^2}(3x - 2x^3).$$

2. Các qui tắc lấy đạo hàm cấp cao

1) Với bất kì hàm số f, g có đạo hàm cấp n và $\lambda, \mu \in R$, ta có

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))^{(n)} = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

2) ***Qui tắc Leibniz***: Với bất kì hàm số f, g có đạo hàm cấp n ta có:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Ví du 2: Tính các đạo hàm cấp 100 của hàm số sau:

$$y = x^2e^{2x}.$$

Áp dụng qui tắc Leibniz ta có:

$$y^{(100)} = (x^2e^{2x})^{(100)} = C_{100}^0 x^2(e^{2x})^{(100)} + C_{100}^1(x^2)'(e^{2x})^{(99)} + C_{100}^2(x^2)''(e^{2x})^{(98)}$$

Ta có: $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$

Do vậy: $y^{(100)} = 2^{100}x^2e^{2x} + 100(2x)2^{99}e^{2x} + 4950.2.2^{98}e^{2x} = 2^{100}(x^2 + 100x + 2475)e^{2x}$.

Ví du 3: $y = x^2\sin 2x$. Tính $y^{(50)}$?

Ta có: $y^{(50)} = (x^2\sin 2x)^{(50)} = x^2(\sin 2x)^{(50)} + 50(x^2)'(\sin 2x)^{(49)} + 1225.(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$

ap dụng công thức:

$$(\sin 2x)^{(2n)} = 2^{2n}(-1)^n \sin 2x$$
$$(\sin 2x)^{(2n+1)} = 2^{2n+1}(-1)^n \cos 2x$$

Ta được: $y^{(50)} = x^2\left(-2^{50}\right)\sin 2x + 50.2x.2^{49}\cos 2x + 1225.2.2^{48}\sin 2x$

$$= -2^{50}\left(x^2\sin 2x - 50x\cos 2x - \frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

3. Vi phân cấp cao

Vi phân cấp hai của hàm số $f(x)$ tại một điểm nào đó (nếu có) là vi phân của vi phân (cấp một) df.

Kí hiệu: $d^2f = d(df)$,

Quy nạp ta có: Vi phân cấp n, kí hiệu là d^nf là vi phân cấp một của vi phân cấp $(n-1)$:

$$d^nf = d(d^{n-1}f).$$

Ví du 4: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Suy ra $df = 2xdx$ và $d^2f = 2(dx)^2 = 2dx^2$.

❖ **Chú ý:** Khi tìm vi phân cấp cao của hàm số ta luôn coi dx như là hằng số.

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''(dx)^2 = y''dx^2$$

……..

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}dx^n.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \ln x$. Tìm d^5y?

Ta có: $d^5y = y^{(5)}dx^5 = \dfrac{4!}{x^5}dx^5 = \dfrac{24}{x^5}dx^5$.

Bài tập về nhà: Tr. 112, 117 175.
Đọc trước các mục*: 4.3 ; 4.4 ; 12.1 ; 12.2 ; 12.3** chuẩn bị cho ***Bài số 5
Ứng dụng của đạo hàm: Bài toán cực trị.
Định lý giá trị trung bình. Quy tắc L'Hospital.