Bài số 12

CHUỖI SỐ. SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ DƯƠNG

I. Chuỗi số.

1. Một số định nghĩa :

◆ Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ là một dãy số, thì khi đó biểu thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (**)$$

được gọi là một chuỗi vô hạn hay đơn giản là một chuỗi số, và a_n được gọi là các phần tử của chuỗi đó.

• Tổng riêng : $s_n = a_1 + a_2 + \ldots \quad + a_n$.

◆ Chuỗi số (**) được gọi là **hội tụ** nếu dãy $\{s_n\}$ hội tụ; và nếu $\lim s_n = s$, thì ta nói chuỗi hội tụ tới s hay s là tổng của chuỗi, và chúng ta biểu diễn nó như sau :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s \text{ hoặc } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

◆ Nếu chuỗi **không hội tụ,** chúng ta nói rằng ***chuỗi phân kỳ***, và không tồn tại tổng của chuỗi.

Ví dụ 1. Có lẽ ví dụ đơn giản và quan trọng nhất về chuỗi vô hạn là chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

+ Tổng riêng thứ n của chuỗi này được viết dưới công thức sau

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \text{ nếu } x \neq 1.$$

Nếu $|x| < 1$, chúng ta có $s_n \to \dfrac{1}{1-x}$, do vậy : $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$

Nếu $|x| \geq 1$ chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 2. CMR : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$

+ Ta thấy rằng: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

+ Do đó tổng riêng thứ *n* như sau : $s_n = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

+ Từ đó: $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$.

2. Tính chất và các phép toán

i. Nếu : $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = s$ và $\sum_{n=k}^{\infty} b_n = t$ khi đó :

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a_n \pm b_n) = s \pm t \quad \text{và} \quad \sum_{n=k}^{\infty}\lambda a_n = \lambda s \text{ với } \lambda \text{ là hằng số.}$$

ii. Sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số sẽ không thay đổi nếu ta bỏ đi một số hữu hạn các số hạng của chuỗi số đó.

◆ ***Phần dư*** : Giả sử chuỗi $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = s$ (hội tụ), khi đó $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ được gọi là phần dư và khi đó $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

3. Điều kiện cần của sự hội tụ.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Điều ngược lại không đúng.

Tuy nhiên nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ sẽ phân kỳ

Ví dụ 3 : $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ và ta nhận thấy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.

+ Nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ (sẽ CM ở mục sau) mặc dù $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

+ $\sum_{n=1}^{\infty} n$ phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

II. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số dương

Chuỗi số dương : Xét chuỗi số dương : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots, \quad a_n > 0, \forall n$.

1. Tiêu chuẩn bị chặn

Ta có $s_n \le s_n + a_{n+1} = s_{n+1}, \forall n$ đối với mọi n, và do đó các phần tử của s_n cấu thành một dãy số tăng. Điều này suy ra chuỗi $\{s_n\}$ các tổng riêng ***hội tụ khi và chỉ khi*** các phần tử của s_n bị chặn trên.

Ví dụ 1. Xét chuỗi số điều hoà : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ Gọi m là một số nguyên dương và chọn $n > 2^{m+1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} s_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\ &> \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \dots + 2^m.\frac{1}{2^{m+1}} = (m+1)\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng các phần tử s_n không bị chặn và do đó chuỗi phân kỳ.

◆ Một số chuỗi - hội tụ hoặc phân kỳ – có thể tạo ra từ chuỗi điều hoà, bằng cách xoá một số phần tử dựa trên một quy luật nhất định.

+ Ví dụ nếu bỏ tất cả các phần tử ngoại trừ các phần tử có mũ bằng 2, thì phần còn lại là một chuỗi cấp số nhân hội tụ : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$

+ Nếu bỏ tất cả các phần tử ngoại trừ các phần tử có mẫu số là số nguyên tố, thì ta sẽ có một chuỗi phân kỳ : $\sum\frac{1}{p_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots=\infty$.

Ví dụ 2. Chuỗi nghịch đảo bình phương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots$ là chuỗi hội tụ.

Giải : + Chuỗi đã cho là chuỗi dương , ta có $\{s_n\}$ là dãy tăng

+ Hơn nữa:

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\ldots+\frac{1}{n.n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n} \\ &=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2 \end{aligned}$$

+ Do đó chuỗi hội tụ.

2. Tiêu chuẩn so sánh

Tiêu chuẩn so sánh 1: nếu $0\le a_n\le b_n$, khi đó

$\sum a_n$ hội tụ nếu $\sum b_n$ hội tụ,

$\sum b_n$ phân kỳ nếu $\sum a_n$ phân kỳ

Ví dụ 3. Tiêu chuẩn so sánh dễ dàng được áp dụng vào chuỗi sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1} \quad \text{và} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

+ Chuỗi thứ nhất hội tụ vì : $\frac{1}{3^n+1}\le\frac{1}{3^n}$, và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ là chuỗi hội tụ.

+ Chuỗi thứ hai phân kỳ vì : $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\ln n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

◆ **Chú ý:** điều kiện $0\le a_n\le b_n$ đối với tiêu chuẩn so sánh không cần phải tiến hành với toàn bộ *n*, mà chỉ cần bắt đầu từ một giá trị xác định nào đó.

Ví dụ 4: Ta muốn CM: chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^n}$ hội tụ bằng cách so sánh nó với $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

+ Bất đẳng thức

$$\frac{n+1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{chỉ đúng với } n \geq 4.$$

+ Chuỗi này do vậy hội tụ bằng cách so sánh với chuỗi hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Tiêu chuẩn so sánh 2 : Nếu $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là các chuỗi số dương và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad 0 < L < +\infty .$$

Khi đó hoặc là cả hai chuỗi **đều hội tụ** hoặc cả hai **đều phân kỳ**.

Ví dụ 5. + Chuỗi $\sum \frac{n+2}{2n^3-3}$ hội tụ, vì ta có

$$\frac{\dfrac{n+2}{2n^3-3}}{\dfrac{1}{2n^2}} = \frac{2n^3+4n^2}{2n^3-3} \to 1 \quad \text{khi } n \to \infty, \text{ hơn nữa : } \sum \frac{1}{2n^2} \text{ hội tụ.}$$

+ Chuỗi $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ phân kỳ vì: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{\frac{1}{n}} = 1$ và $\sum \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 6. Nếu p là hằng số dương, khi đó $p-$ **chuỗi:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$

phân kỳ nếu $p \leq 1$ và hội tụ nếu $p > 1$.

+ **Nếu $p \leq 1$** : khi đó $n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$,

do vậy chuỗi phân kỳ bằng cách so sánh với chuỗi điều hoà $\sum \frac{1}{n}$.

+ **Nếu $p > 1$:** ta sẽ chỉ ra tổng riêng của nó bị chặn trên.

- Lấy n là một số bất kỳ, chọn m sao cho $n < 2^m$. Khi đó

$$s_n \leq s_{2^m-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^p} + \cdots + \frac{1}{\left(2^m-1\right)^p}\right]$$

$$\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{\left(2^{m-1}\right)^p}$$

- Đặt $a = \frac{1}{2^{p-1}}$, khi đó $a < 1$ khi $p > 1$, và

$$s_n \le 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} = \frac{1-a^m}{1-a} < \frac{1}{1-a}$$

- Như vậy dãy các tổng riêng $\{s_n\}$ bị chặn trên, do đó chuỗi hội tụ.

Ví dụ 7. Xét chuỗi : $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ hội tụ, vì $p-$chuỗi (với $p = 3/2$) : $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ và

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^3+3}} \to 1$$

◆ **Chú ý** : Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ **chưa chắc hội tụ** nếu p là một biến lớn hơn 1.

Ví dụ 8 : Xét chuỗi $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

+ Ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+1/n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, vì $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

+ Ta lại có $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, do đó chuỗi $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$ phân kỳ.

◆ ***Tổng quát*** : nếu p là một hằng số dương, thì chuỗi : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

+ Hội tụ nếu $p > 1$
+ Phân kỳ nếu $p \le 1$.

3) Tiêu chuẩn tỷ số (Tiêu chuẩn D'ALambert)

◆ Nếu $\sum a_n$ là một ***chuỗi dương*** thoả mãn: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

Khi đó + nếu $L < 1$, chuỗi hội tụ;

+ nếu $L > 1$, chuỗi phân kỳ;

+ nếu $L = 1$, chưa kết luận được.

Ví dụ 9: Xét chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Ví dụ 10 : Xét chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Ví dụ 11: Xét chuỗi dương: $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+...+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.5.8...(3n-1)}+...$

+ Ta có:

$$L=\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim \frac{1.3...(2n-1)(2n+1)}{2.5...(3n-1)(3n+2)}.\frac{2.5...(3n-1)}{1.3...(2n-1)}=\lim \frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}$$

Và chuỗi hội tụ vì $L<1$.

◆ ***Chú ý:*** Tiêu chuẩn tỷ số thường được sử dụng đối với chuỗi dương có chứa giai thừa, mũ.

4) Tiêu chuẩn căn thức (Tiêu chuẩn Cauchy)

◆ Nếu Σa_n là một chuỗi gồm các phần tử không âm thoả mãn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

Khi đó: + Nếu $L<1$, chuỗi hội tụ

+ Nếu $L>1$, chuỗi phân kỳ

+ Nếu $L=1$, chưa kết luận được.

Ví dụ 12 . Xét chuỗi dương sau $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$

◆ ***Chú ý:*** + Tiêu chuẩn căn thức chủ yếu áp dụng cho các chuỗi trong đó a_n phức tạp nhưng $\sqrt[n]{a}$ lại đơn giản, như vậy lim $\sqrt[n]{a}$ dễ dàng tính được.

+ Tiêu chuẩn căn thức thường được xét đối với chuỗi số mũ hoặc chuỗi chứa lũy thừa bậc n.

Bài tập về nhà: Các bài **Tr. 388; 418, 423, 430, 434, 439**

Đọc các mục: 13.3, 14.7 14.8, : 14.10, 14.11chuẩn bị cho **Bài số 13:**

Chuỗi đan dấu. Chuỗi lũy thừa. Chuỗi Taylor