1 次元静電 PIC コードについて

東京工業大学 科学技術創成研究院　長谷川 純 *

2019/5/31

1　基礎方程式

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は

$$m_j \frac{d\boldsymbol{v}_j}{dt} = q_j[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_j) + \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_j)] \tag{1.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}_j}{dt} = \boldsymbol{v}_j \tag{1.2}$$

である．電磁場の時間発展は以下の Maxwell 方程式で記述される．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.6}$$

数値計算をするにあたり，基本物理量の長さ，時間，電荷，質量に対して以下のような規格化を行う．

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{c/\omega_{pe}}, \qquad \hat{t} = \frac{t}{1/\omega_{pe}}, \qquad \hat{q}_j = \frac{q_j}{e}, \qquad \hat{m}_j = \frac{m_j}{m_e}.$$

ここで，c, e, m_e はそれぞれ，光速，素電荷，電子の質量である．ω_{pe} は電子プラズマ周波数であり，$\omega_{pe} = \sqrt{n_e e^2/m_e\epsilon_0}$ で定義される（n_e は電子密度）．基本量の組み合わせとして，速度，周波数，電磁場は無次元量として以下のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \qquad \hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \qquad \hat{\boldsymbol{E}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m_e c\omega_{pe}}, \qquad \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{e\boldsymbol{B}}{m_e\omega_{pe}}, \qquad \hat{\phi} = \frac{e\phi}{m_e c^2}$$

これらの規格化された無次元量を用いて，運動方程式 (1.1)–(1.2) は次のように規格化される．

$$\hat{m}_j \frac{d\hat{\boldsymbol{v}}_j}{d\hat{t}} = \hat{q}_j[\hat{\boldsymbol{E}}(\hat{\boldsymbol{x}}_j) + \hat{\boldsymbol{v}}_j \times \hat{\boldsymbol{B}}(\hat{\boldsymbol{x}}_j)] \tag{1.7}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}_j}{d\hat{t}} = \hat{\boldsymbol{v}}_j \tag{1.8}$$

* hasegawa.j.aa@m.titech.ac.jp

一方，規格化された Maxwell 方程式は，

$$\hat{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \hat{\boldsymbol{B}}}{\partial \hat{t}} \tag{1.9}$$

$$\hat{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\hat{\boldsymbol{j}}}{n_0} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{E}}}{\partial \hat{t}} \tag{1.10}$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{E}} = -\frac{\hat{\rho}}{n_0} \tag{1.11}$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{1.12}$$

となる．ここで，電流密度と電荷密度はそれぞれ，

$$\hat{j} = \frac{j}{\tilde{n}ec}, \qquad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\tilde{n}e}$$

と規格化されている．ここで，$\tilde{n}$ は密度の規格化定数であり，計算機で取り扱う粒子の総数に応じて決める値である．このとき計算機内の超粒子 1 個は，$\tilde{N} = \tilde{n}\tilde{x} = \tilde{n}c/\omega_{pe}$ 個の実粒子を代表することになる．規格化された Maxwell 方程式中の n_0 は超粒子の密度であり，電子密度と $n_0 = n_e/\tilde{n}$ の関係にある．

1 次元 2 速度の静電 PIC コードでは，空間は x 方向のみであるが，速度は x および y 方向を考える．これは z 方向に印加された外部磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$ 中での粒子の Larmour 運動を計算するためである．静電モデルでは外部磁場は一様かつ定常なので， Maxwell 方程式の $\boldsymbol{B}$ の空間微分および時間微分の項は全て 0 となる．したがって，Poisson 方程式のみを考えればよく，基礎方程式は大幅に簡略化され以下のようになる．

$$\hat{m}_j \frac{d\hat{v}_{x,j}}{d\hat{t}} = \hat{q}_j[\hat{E}_x(\hat{x}_j) + \hat{v}_{y,j}\hat{B}_z] \tag{1.13}$$

$$\hat{m}_j \frac{d\hat{v}_{y,j}}{d\hat{t}} = \hat{q}_j[\hat{v}_{x,j}\hat{B}_z] \tag{1.14}$$

$$\frac{d\hat{x}_j}{d\hat{t}} = \hat{v}_{x,j} \tag{1.15}$$

$$\frac{d^2\hat{\phi}}{d\hat{x}^2} = -\frac{\hat{\rho}}{n_0} \tag{1.16}$$