システム制御の基礎知識

1.1 システムの概念

複数の要素を結合させ、ある目的をもって、全体として一つの動きをするもの。

要素 の概念:

物・事を成り立たせるもととなっている（それ以上簡単なものに分離できない）もの。

静的システム

平衡状態における現象の関係を表すシステム。

動的システム

現時点の現象が過去の現象や入力に依存するシステム。

1.2 システムの分類

＊多入力多出力と一入力一出力システム

一入力一出力システムの重要性：解析のやさしさと多入力出力への可変換性（マトリクス変換）.

＊線形システムと非線型システム

線形システム：

物理学では、エネルギー蓄積要素と比例要素、むだ時間要素を含めて、入力と出力が比例関係にあり、局所的にいえる性質はその関係が定義される範囲内で、すなわち大局的に、すべて成り立つよな関係を**線形システム**とよぶ. **線形微分方程式で表現できるシステム.**

$$m\frac{d^2}{d^2t}x(t)+k_v\frac{d}{dt}x(t)+k_x x(t)+r=F(t)$$

非線形性システム：

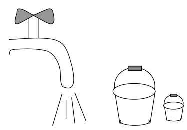
システム内での掛け算や割算のような演算のために、入出力が比例関係で表せないことがある。この場合は、局所的な性質が大局的に拡張できない。すなわち、システムが部分的な範囲で示す現象から全体的な範囲で示す現象を論じることができない。これを**非線形性システム**という。

＊時不変システムと時間変化システム

$$m(t)\frac{d^2}{d^2t}x(t)+k_v(t)\frac{d}{dt}x(t)+k_x(t)x(t)+r(t)=F(t)$$

連続時間システムと離散時間システム

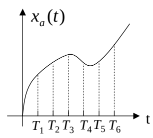
因果関係が時間的に連続して現象が起こる**動的システムは**連続時間システム。
因果関係が時間的に間欠して現象が起こる**動的システムは**離散時間システム。



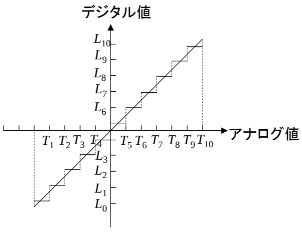
水道流量の測り方

標本化，量子化の概念

$$x(n)=x_a(nT)$$



標本化



量子化

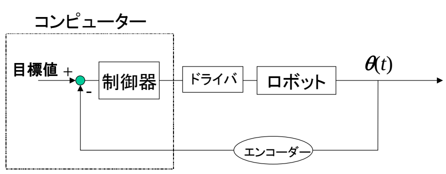
1.3 システムの制御

ある目的に適合するように対象となっているものに所要の操作を加えること。

よく使われる制御

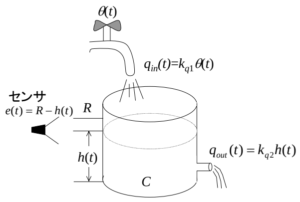
a. シーケンス制御
洗濯機，学校教育プログラム

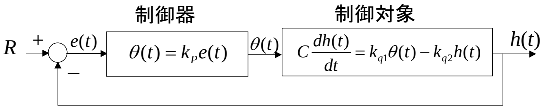
b. フィードバック　＆　フィードフォワード制御

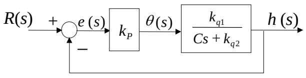


制御量(出力)： $h(t)$
操作量： $\theta(t)$
目標値(入力)： R
制御対象:

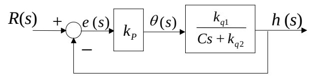
$$C\frac{dh(t)}{dt}=q_{in}(t)-q_{out}(t)$$
$$=k_{q1}\theta(t)-k_{q2}h(t)$$







$$h(s)=\left[R(s)-h(s)\right]\frac{k_P k_{q1}}{Cs+k_{q2}}$$
$$\left(1+\frac{k_P k_{q1}}{Cs+k_{q2}}\right)h(s)=\frac{k_P k_{q1}}{Cs+k_{q2}}R(s)$$
$$h(s)=\frac{k_P k_{q1}}{Cs+k_{q2}+k_P k_{q1}}R(s)$$
$$h(s)=\frac{k_P k_{q1}R\frac{1}{C}}{\left(s+\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}\right)s}$$
$$h(s)=\frac{k_P k_{q1}R}{k_{q2}+k_P k_{q1}}\frac{\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}}{\left(s+\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}\right)s}$$
$$h(t)=\frac{k_P k_{q1}R}{k_P k_{q1}+k_{q2}}\left[1-e^{-\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}t}\right]$$

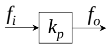


$k_P k_{q1}+k_{q2}>0$　の場合，収束

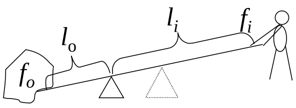
$$h(\infty)=\frac{k_P k_{q1}R+k_{q2}R-k_{q2}R}{k_P k_{q1}+k_{q2}}$$
$$=R-\frac{k_{q2}R}{k_P k_{q1}+k_{q2}}$$

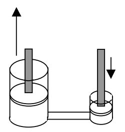
制御システムの基本要素：

１．比例要素：

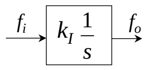


比例要素

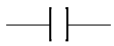




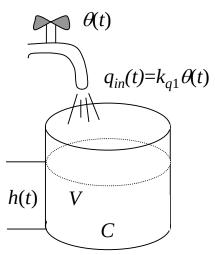
２．積分要素：



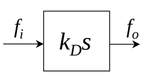
積分要素



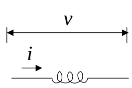
$$q(t)=\int_0^t I(\tau)d\tau=CV(t)$$



３．微分要素：



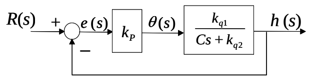
微分要素



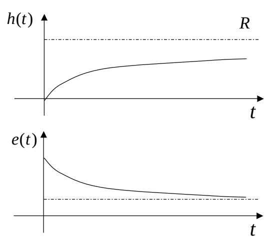
$$v=L\frac{d}{dt}i$$

比例制御（P制御）：
前頁の例を用いて説明する．
制御量(出力)： $h(t)$
操作量： $\theta(t)$
目標値(入力)： R

制御対象： $\frac{k_{q1}}{Cs+k_{q2}}$



$$h(t)=\frac{k_P k_{q1}R}{k_P k_{q1}+k_{q2}}\left[1-e^{-\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}t}\right]$$
$$e(t)=R-\frac{k_P k_{q1}R}{k_P k_{q1}+k_{q2}}\left[1-e^{-\frac{k_{q2}+k_P k_{q1}}{C}t}\right]$$



積分制御（I制御）

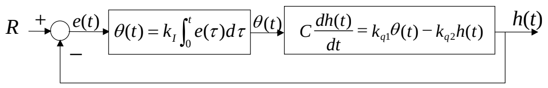
前頁の例を用いて説明する. $r(t)$

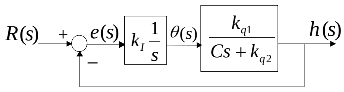
制御量(出力): $h(t)$

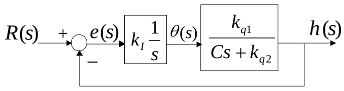
操作量: $\theta(t)$

目標値(入力): R

制御対象： $\dfrac{k_{q1}}{Cs+k_{q2}}$



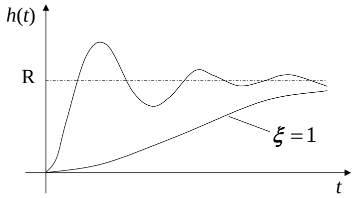




$$h(s)=\frac{\dfrac{k_{q1}}{Cs+k_{q2}}k_I\dfrac{1}{s}}{1+\dfrac{k_{q1}}{Cs+k_{q2}}k_I\dfrac{1}{s}}R(s)=\frac{kk_I}{s+kk_I}R(s)$$

$$h(s)=\frac{k_{q1}k_I}{s(Cs+k_{q2})+k_{q1}k_I}R(s)=\frac{k_{q1}k_I}{Cs^2+k_{q2}s+k_{q1}k_I}\frac{1}{s}R$$

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{k_{q1}k_I}{s(Cs+k_{q2})+k_{q1}k_I}R(s)\right]$$



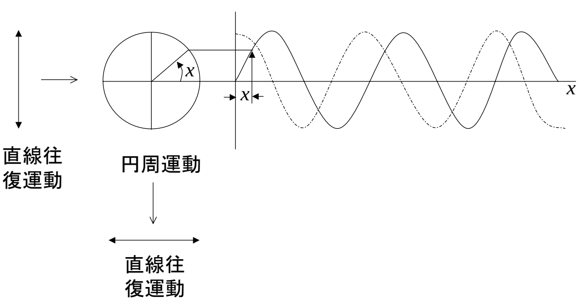
$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{q1}k_I}{C}},\qquad \xi=\frac{k_{q2}}{2\sqrt{k_{q1}k_IC}}$$

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{k_{q1}k_I}{Cs^2+k_{q2}s+k_{q1}k_I}\frac{1}{s}R\right]$$

$$=R-R\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1+\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\varphi\right)$$

周波数の理論とその応用

周期性の運動ー＞円周運動ー＞正弦運動



一般の物理運動系に瞬間の力を加えたとき

$$m\frac{d^2}{d^2t}x(t)+k_v\frac{d}{dt}x(t)+k_xx(t)+r=F(t)$$

$$m\frac{d^2}{d^2t}x(t)+k_v\frac{d}{dt}x(t)+k_xx(t)=\delta(t)$$

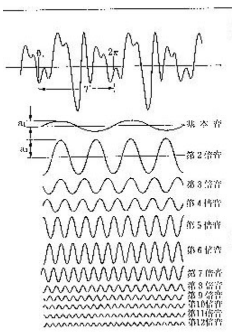
$$x(s)=\frac{1}{ms^2+k_vs+k_x}=\frac{1}{m(s^2+\frac{k_v}{m}s+\frac{k_x}{m})}$$

$$=\frac{1}{m\left(s^2+\dfrac{k_v}{m}s+\left(\dfrac{k_v}{2m}\right)^2-\left(\dfrac{k_v}{2m}\right)^2+\dfrac{k_x}{m}\right)}$$

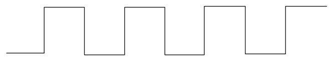
$$=\frac{\sqrt{\left(\dfrac{k_v}{2m}\right)^2+\dfrac{k_x}{m}}}{m\sqrt{\left(\dfrac{k_v}{2m}\right)^2+\dfrac{k_x}{m}}\left(\left(s+\dfrac{k_v}{2m}\right)^2-\left(\dfrac{k_v}{2m}\right)^2+\dfrac{k_x}{m}\right)}$$

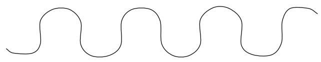
$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{k_v}{2}\right)^2+k_xm}}e^{-\frac{k_v}{2m}t}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{k_v}{2m}\right)^2+\frac{k_x}{m}}\right)t$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\sin(nx+\varphi_n)$$

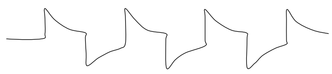


$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$$





高周波数が失ったとき



低周波数が失ったとき

概形は低周波数で決まる

複素フーリエ級数

オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

オイラー展開

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\cdots$$
$$i\sin x=ix-i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$

オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

から
$$\cos n\omega t=\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}$$
$$\sin n\omega t=\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}$$

$x=\omega t$ に置き換えたことに注意

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t}\qquad\left(c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\right)$$

複素フーリエ級数

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t}$$
$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-in\omega_0 x}dx\qquad(\omega_0=2\pi/T)$$
$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-in\omega_0 x}dx\right]e^{in\omega_0 t}$$

$\omega_0=2\pi/T$ なので、$T\to\infty$ のとき、$\omega_0\to d\omega$, $n\omega_0\to\omega$

と定義することができる。したがって $\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi}d\omega$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \longleftarrow \text{フーリエ変換}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \longleftarrow \text{フーリエ逆変換}$$

ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

初期値が必要

線形システム

$$m\frac{d^2}{d^2t}x(t)+k_v\frac{d}{dt}x(t)+k_x x(t)=F(t)$$

$F(t)=F_1(t)$　の時の解は $x_1(t)$

$F(t)=F_2(t)$　の時の解は $x_2(t)$

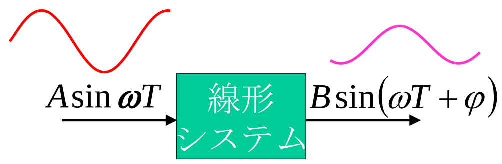
の場合、

$$F(t)=aF_1(t)+bF_2(t)$$

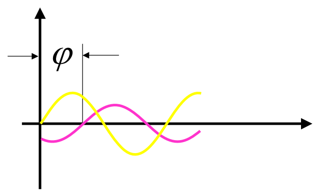
の時の解は

$$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$$

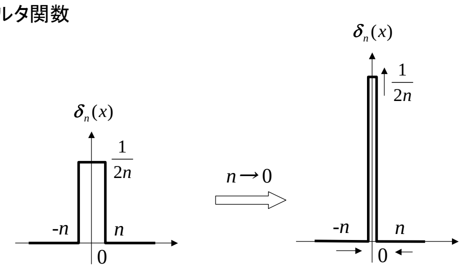
重ね合わせの原理が適用できるシステム



$$Gain=\frac{B}{A}$$



デルタ関数



$$\delta_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2n} & (-n\le x\le n)\\ 0 & (x>n,\ x<-n)\end{cases}$$

$$\delta(x)=\lim_{n\to 0}\delta_n(x)=\begin{cases}\infty & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$$

単位インパルス

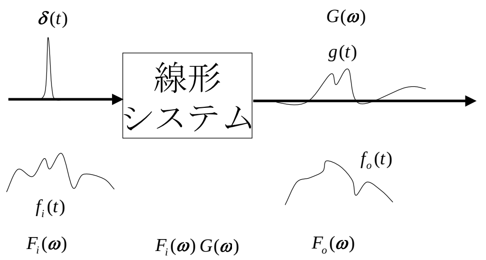
$$F(\omega)=F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=\left[e^{-i\omega t}\right]_{t=0}=1$$

$$\delta(t)=F^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\bullet e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega t d\omega$$

偶関数　奇関数

インパルス応答



宿題：

（1）　粘弾性モデルを用いて
筋肉の筋電信号（または運動神経の入力）と筋力との関係を解析する