前　言

美国数学月刊(The American Mathematics Monthly)是国际数学方面影响广泛、读者最多的刊物，它的内容大致分为三部分。第一部分以初等的方法阐述数学发展中出现的新思想和新方法，文章多出自数学大师(如陈省身)之手；第二部分以新思想和新方法或新技巧解决和发展古典或近代数学问题；第三部分是数学竞赛或征求解答的问题，这些问题大都是数学工作者在各自研究领域中遇到的比较初等的问题。

我国的数学教材或教学参考书以及研究生入学试题、大学生数学竞赛题等都曾吸收了该刊的许多内容；另外，该刊的不少文章成为我国一些数学工作者研究课题的参考文献。这些极大地推动了我国的数学教学和研究，但另外一方面，据我们所查资料，从 80 年代开始到现在的 16 年，该刊的《数学分析》内容，在我国的数学分析教材中反应很少，为了更新教材，加快吸收、借鉴国际数学发展的新思想和新方法，我们从 1980 年至今这 16 年来该刊发表的数学分析文章中，经过反复推敲、修改和筛选，并结合我们自己的教学以及科研工作，编写了这本书，选题不求全面，但求方法新颖而富有启发性，突出新的数学思想。

我们深知，数学分析博大精深，且其一些分支的内容仍在深入研究和发展中，因此，要囊括它的全部成果是不可能的；同时，也不是一个人所能做到的，正是这点曾是我深深感到自己非常渺小，幸亏我的导师—兰州大学陈文嫄教授给予了热情指导和

鼓励:突出数学思想和方法,要少而精。本着这个原则,我又认真全面地查阅了一遍美国数学月刊;以及国内的《数学译林》、《数学通报》、《数学的实践与认识》,并从后者中选取了六篇文章。在此对陈文塬教授、上述刊物和作者(译者)以及对烟台大学校领导、数学系领导、西北师范大学科研处领导的大力支持表示衷心的感谢!

本书的部分内容曾连续五年在西北师范大学数学系《数学分析选讲》课上进过。但由于作者水平所限,一些非常重要的内容未能编入,甚至书中一定有不少缺点,恳请读者批评指正。

张志军

1996.1 于西北师范大学数学系

1997.10 于烟台大学数学系

目　录

第一章　欧拉常数与斯特林公式

欧拉(Euler) 常数 γ(= 0.577 215 664 901 532 860 606 51…) 同圆周率 π、自然对数的底 e 一样，是数学中的一个著名常数，它有多种定义方式(见文献[1 ~ 3])。本章我们按最初等的定义。而斯特林(Stirling) 公式是数学中的常用公式。因为在理论和实际应用中(如概率统计等) 常常需要估计当 n 充分大时，$n!$ 的无穷大的阶数。将两者放在一起，主要是因为证明欧拉常数的存在性和斯特林公式以及余项估计的一些方法是相同的。本章应用多种方法讨论它们。

第一节　欧拉常数

本节首先用初等方法证明欧拉常数的存在性，随后介绍 Detemple[4] 的一种快速收敛于欧拉常数的方法，最后讨论广义欧拉常数的存在性以及余项的估计问题。

1.1　通常的欧拉常数

通常的欧拉常数 γ 定义为

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \gamma \tag{1}$$

其中，$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

将 $\ln n$ 替换为 $\ln(n+a)$ 也成立，这里 a 为任一固定的实数。

现在用单调有界原理证明(1) 极限的存在性。其中有界性的证明方法是经常要用到的。

应用基本不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \forall\, x > 0 \tag{2}$$

得

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$$

即 $\{D_n\}$ 严格单调递减。为证其有界，令

$$E_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

明显地，有 $E_n < D_n, n = 1,2,\cdots$，并且由(2) 可知

$$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 0$$

即 $\{E_n\}$ 严格单调递增。这样，我们得到了

$$0 < \ln\frac{e}{2}$$

$$= E_1 < E_2 < E_n < D_n < \cdots < D_2 < D_1 = 1$$

因此，由单调有界原理可知，$\{D_n\}$ 与 $\{E_n\}$ 都收敛于 γ($\gamma \in (0,1)$)。

1.2 余项的估计

1983 年孙燮华[5](下节将介绍其方法) 首先给出一个十分基本的结果

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}, n = 1,2,\cdots \quad (3)$$

1991 年 Young[6] 给出了另一种初等方法。这里，介绍 Detemple[4] 的初等面积比较方法。应用该方法不仅可得到(3)，而且还可得到一种快速收敛于欧拉常数的序列。

先证(3)

注意到

$$D_n - D_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

因此，可令

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}, \forall\ x \geqslant 1$$

则

$$D_n - D_{n+1} = f(n),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

应用基本不等式

$$x(x+1)^2 > (x+\frac{1}{2})^3, \forall\ x \geqslant 1$$

即得：对任意的 $x \geqslant 1$ 成立

$$\frac{1}{(x+1)^3} < -f'(x) < \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^3} \quad (4)$$

于是，有

$$\frac{1}{2(k+1)^2} = \int_k^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x < -\int_k^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(k) < \int_k^{+\infty} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(k+\frac{1}{2})^2}$$

这里的面积比较法如图 1 所示

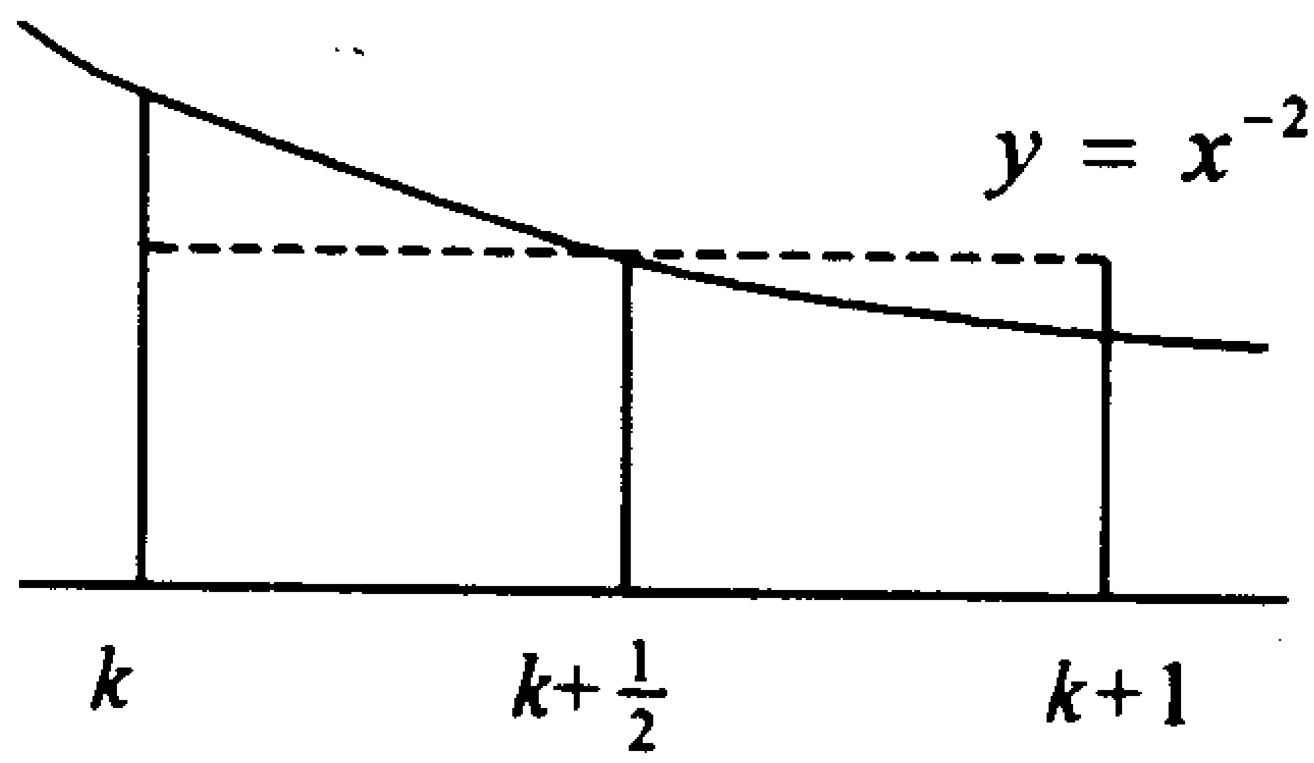


图 1

再结合$(k+\frac{1}{2})^2>k(k+1), k=1,2,3,\cdots$可得

$$
\begin{aligned}
D_n-\gamma &= \sum_{k=n}^{\infty}(D_k-D_{k+1})=\sum_{k=n}^{\infty}f(k) \\
&< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2(k+\frac{1}{2})^2}<\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
D_n-\gamma &> \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2(k+1)^2}>\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}
$$

至此(3)获证。

为了得到一个快速收敛于γ的序列，令

$$R_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+c)$$

其中，c为待定常数。

由于

$$R_n-R_{n+1}=\ln(n+1+c)-\ln(n+c)-\frac{1}{n+1}$$

同(3) 的证明相同,令

$$g(x)=\ln(x+1+c)-\ln(x+c)-\frac{1}{x+1},$$
$$\forall\, x>\max\{0,-c\}$$

则

$$R_n-R_{(n+1)}=g(n),$$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1+c}-\frac{1}{x+c}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=-\frac{(2c-1)x+c^2+c-1}{(x+c+1)(x+c)(x+1)^2}$$

由(3) 的证明过程可以看出,为使 R_n 更快速收敛于 γ,必须使 $g'(x)$ 在无穷远处趋于零的速度更快。为此,只有取 $c=\frac{1}{2}$ 才能使 $g'(x)$ 在无穷远处与$\frac{1}{x^4}$ 同阶。否则,当 $c\neq\frac{1}{2}$ 时,$g'(x)$ 在无穷远处与$\frac{1}{x^3}$ 同阶。因此,取 $c=\frac{1}{2}$,即

$$R_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+\frac{1}{2}),$$

$$g(x)=\ln(x+\frac{3}{2})-\ln(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{x+1},x\geqslant 1,$$

$$g'(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-2}(x+\frac{1}{2})^{-1}(x+\frac{3}{2})^{-1},x\geqslant 1。$$

余下的完全同(3) 的证明。

由于

$$k(k+1)<(k+\frac{1}{2})^2$$

$$(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=x^2+2x+\frac{3}{4}<(x+1)^2,\forall\, x\in R$$

得

$$(k+\frac{1}{2})^{-3}=\frac{2k+1}{2(k+\frac{1}{2})^4}<\frac{2k+1}{2[k(k+1)]^2}$$

$$= \int_k^{k+1} x^{-3} \mathrm{d}x \quad \text{（如图 2 的面积比较法），}$$

$$\frac{1}{4}(x+1)^{-4} < -g'(x) < \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^{-4}, \forall\, x \geqslant 1$$

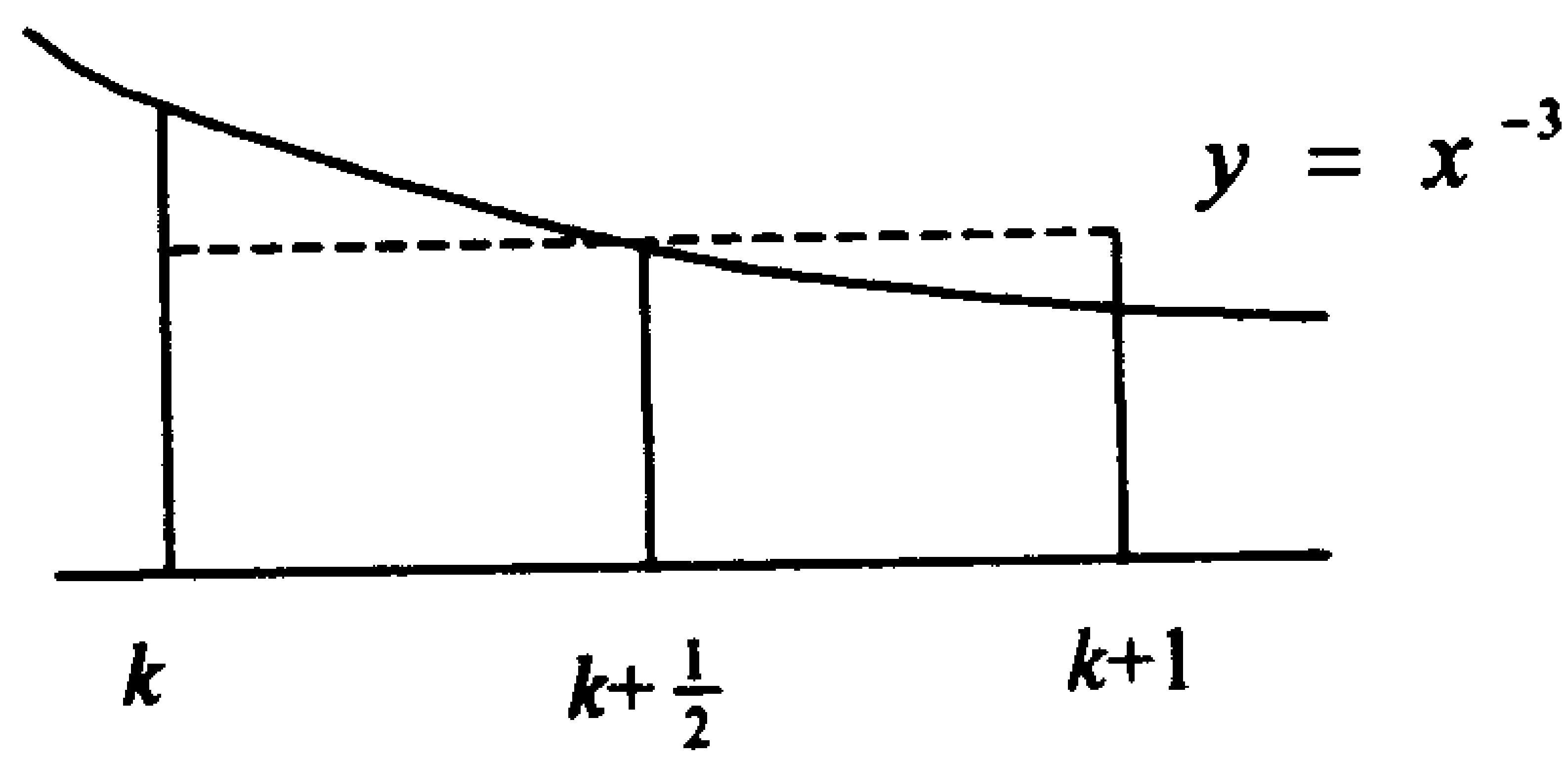


图 2

因此，有

$$R_n - \gamma < \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{\infty}(x+\frac{1}{2})^{-4}dx = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}(k+\frac{1}{2})^{-3}$$

$$< \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}x^{-3}dx = \frac{1}{24n^2}$$

同样，可得

$$R_n - \gamma > \frac{1}{24(n+1)^2}$$

总之有

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2} \tag{4}$$

注 1　(3) 可改进到(参见[8])

$$\frac{1}{2n+\frac{2}{5}} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n+\frac{1}{3}}$$

注 2　若令

$$r_n = R_n - \gamma - \frac{1}{24(n+\frac{1}{2})^2}$$

则同样的方法可将(4)的估计提高到

$$\frac{1}{960(n+1)^4} < r_n < \frac{1}{960n^4}$$

进一步的讨论可参见[8]。

注 3 包那[3]将(3)精确到

$$D_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(\frac{1}{n^6})$$

随后，张南岳[16]与吴福朝[17]应用Euler — Maclaurin 公式和 Bernoulli 数分别精确到

$$D_n - \gamma = \sum_{k+1}^{q} \frac{B_k}{kn^k} + O(\frac{1}{n^q}),$$

$$D_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + O(\frac{1}{n^{2(q+1)}})。$$

其中，B_k 为 Bernoulli 数。

1.3 广义欧拉常数以及余项的估计

考虑广义欧拉常数问题

设 $f:[1,\infty) \to (0,\infty)$ 为严格单调递减函数，定义

$$\gamma_f = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x] \tag{5}$$

γ_f 称为广义欧拉常数(若其存在)。特别，当 $f(x) = x^{-1}$ 时，γ_f 即为通常的欧拉常数 γ。先证 γ_f 存在，随后给出余项的估计。同(1)的证明一样，仍用单调有界原理。为此，令

$$B_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x] \tag{6}$$

$$C_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x] \tag{7}$$

明显地，$B_n > C_n$。另外注意到

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x < f(k)$$

因此，得到

$$C_n = [\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x] > 0,$$

$$B_{n+1} - B_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < 0,$$

$$C_{n+1} - C_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\mathrm{d}x > 0,$$

即

$$0 < f(1) - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = C_1 < C_2 < \cdots < C_n$$
$$< B_n < \cdots < B_2 < B_1 = f(1)$$

由单调有界原理可知，$\{B_n\}$ 收敛，即 γ_f 存在。为使 $\{C_n\}$ 亦收敛于 γ_f 和估计余项的需要，我们假定

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

即

$$0 < B_n - \gamma_f < B_n - C_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

特别。若 $f(x) = x^{-1}$，则

$$0 < B_n - \gamma = D_n - \gamma < \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \ln(1 + \frac{1}{n}) \tag{9}$$

显然，(9) 式要比(3) 式差。

为得到较精细的估计，还需附加一定的条件。下面几节中我们将继续讨论这个问题。现在介绍孙燮华的文章[5]。

设

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a^2 + \cdots + a_k + \tag{10}$$

是一正项级数，可以收敛，也可以发散。称

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

为级数(10)的部分和，又假定

$$a_k = f(k),(k = 1,2,\cdots)$$

这里 $f(x)$ 是在$[1,\infty)$上定义的正值连续函数，用

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (x \geqslant 1)$$

表示 $f(x)$ 的一个原函数.

我们证明如下的

定理 1 假定函数 $f(x)$ 是区间$[1,\infty)$上的正值连续函数且单调递减，$a_n = f(n) \to 0(n \to \infty)$，那末，存在常数 c 使得级数(10)的部分和 S_n 满足

$$S_n = c + F(n) + \theta_n a_n \tag{11}$$

这里 $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$

由(11)立即得到部分和 S_n 的估计式：

$$|S_n - c - F(n)| \leqslant a_n$$

证明 因为 $f(x)$ 是连续的，所以

$$F'(x) = (\int_1^x f(t)dt)' = f(x),\ (x \geqslant 1)$$

利用微分中值定理，并注意函数 $f(x)$ 的单调递减性，我们有

$$\begin{aligned} F(k+1) - F(k) &= F'(k+\theta') = f(k+\theta') \\ &\leqslant f(k),(0 < \theta' < 1) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} F(k) - F(k-1) &= F'(k-\theta'') = f(k-\theta'') \\ &\geqslant f(k),(0 < \theta'' < 1) \end{aligned} \tag{13}$$

由(12)和(13)得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(k) - [F(k+1) - F(k)] \\ &\leqslant [F(k) - F(k-1)] - [F(k+1) - F(k)] \end{aligned} \tag{14}$$

对于(14)式的右边，令 $k = 2,3,\cdots,n$，然后相加得

$$\sum_{k=2}^{n}\{[F(k)-F(k-1)]-[F(k+1)-F(k)]\}$$

$$=F(n)-F(n+1)+F(2) \tag{15}$$

在(12)中，令 $k=n$，我们有

$$|F(n)-F(n+1)|=f(n+\theta)\leqslant f(n)=a_n\to 0$$

$$(n\to\infty),(0<\theta<1) \tag{16}$$

于是，由(14)和(15)推得正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{[F(k)-F(k-1)]-[F(k+1)-F(k)]\}$$

收敛。由(14)和正项级数的比较判别法知道，存在常数 c，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-[F(k+1)-F(k)]\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(k)-F(n+1)\to c(n\to\infty) \tag{17}$$

记

$$r_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-F(n)-c=S_n-F(n)-c \tag{18}$$

由(17)和(18)得

$$r_n\to 0(n\to\infty)$$

这样(18)可以写成

$$S_n=c+F(n)+r_n,r_n\to 0(n\to\infty) \tag{19}$$

下面进一步估计 r_n 的阶，记

$$\triangle_k=f(k)-\int_k^{k+1}f(t)\mathrm{d}t,(k=1,2,\cdots)$$

则由 $f(x)$ 的单调性得

$$0=f(k)-f(k)\leqslant\triangle_k\leqslant f(k)-f(k+1) \tag{20}$$

考虑

$$S_n-F(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$

$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t]$$

$$= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \triangle_k \tag{21}$$

由(19) 和 $f(n) \to 0 (n \to \infty)$，从上式推得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \triangle_k = c \tag{22}$$

(21) 式减(22) 式得到

$$r_n = S_n - F(n) - c = f(n) - \sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \tag{23}$$

由(21) 得

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \leqslant f(n) \tag{24}$$

最后，由(23) 和(24) 得到

$$0 \leqslant r_n \leqslant f(n) = a_n$$

记

$$\theta_n = \frac{r_n}{a_n}$$

则 $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$，由上式和(19) 得到(11) 式，定理证毕。

为了对公式(11) 的余项作出更为精确的估计，我们需要应用凸函数的一些性质。

凸函数具有如下的性质：

1° 凸函数的图形(弧) 上所有的点都在相应弦的下面，或位于弦上。

2° 假定函数 $f(x)$ 和它的导数 $f'(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内有定义且连续，而且 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 的内部存在二阶导数。要使 $f(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 内的凸函数，必要而且充分条件是在 $\mathscr{X}$ 的内部恒成立

$$f''(x) \geqslant 0 (或\ f''(x) \leqslant 0)。$$

3° 假定函数 $f(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内有定义而且可导。要使函数

$f(x)$ 是凸的，必要而且充分条件是，它的图形（弧）上的一切点落在它的任意切线上面（或落在切线下面）。

定理 2 假定 $a_k = f(k)(k = 1,2,\cdots)$，函数 $f(x)$ 满足：

(i) $f(x)$ 是$[1,\infty)$ 上的单调递减的正值连续函数，且 $f(x) \to 0(x \to \infty)$。

(ii) $f(x)$ 是$[1,\infty)$ 上的凸函数。

(iii) $f(x)$ 在$[1,\infty)$ 上存在单调递增的导数 $f'(x)$，且满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(n)}{f(n)} = 0$$

那末，级数(10) 的部分和成立如下估计式：

$$S_n = c + F(n) + \frac{1}{2}a_n(1 + \delta_n) \tag{25}$$

这里

$$\delta_n \leqslant 0(n = 1,2,\cdots) \text{ 且 } \delta_n \to 0$$

证明 由于定理 1 证明中的(23)，我们只要进一步估计 $\triangle_k(k = 1,2,\cdots)$ 即可。参见图 3 和图 4，我们称由平行于 x 轴和 y 轴的线段 a_kb_{k+1}，$a_{k+1}b_{k+1}$ 和曲线 $f(x)(k \leqslant x \leqslant k+1)$ 所围成的图形为曲边 $\triangle a_ka_{k+1}b_{k+1}$，用直线连接 a_k 和 a_{k+1}，又在 a_k 处作函数 $f(x)$ 的切线，它与直线 $a_{k+1}b_{k+1}$ 交于 c_{k+1}，由凸函数的性质 1° 和 3°，曲线 $f(x)(k \leqslant x \leqslant k+1)$ 上的所有的点全部落在 $\angle a_{k+1}a_kc_{k+1}$ 内，由 $\triangle_k$ 的定义知

$$\triangle_k = \text{曲边 } \triangle a_ka_{k+1}b_{k+1} \text{ 的面积}$$

于是，由上面的论证得

$$\begin{aligned}\triangle_k &\geqslant \triangle a_ka_{k+1}b_{k+1} \text{ 的面积}\\ &= \frac{1}{2}(a_k - a_{k+1}),(k = 1,2\cdots)\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=n}^{\infty}\triangle_k \geqslant \frac{1}{2}a_n \tag{26}$$

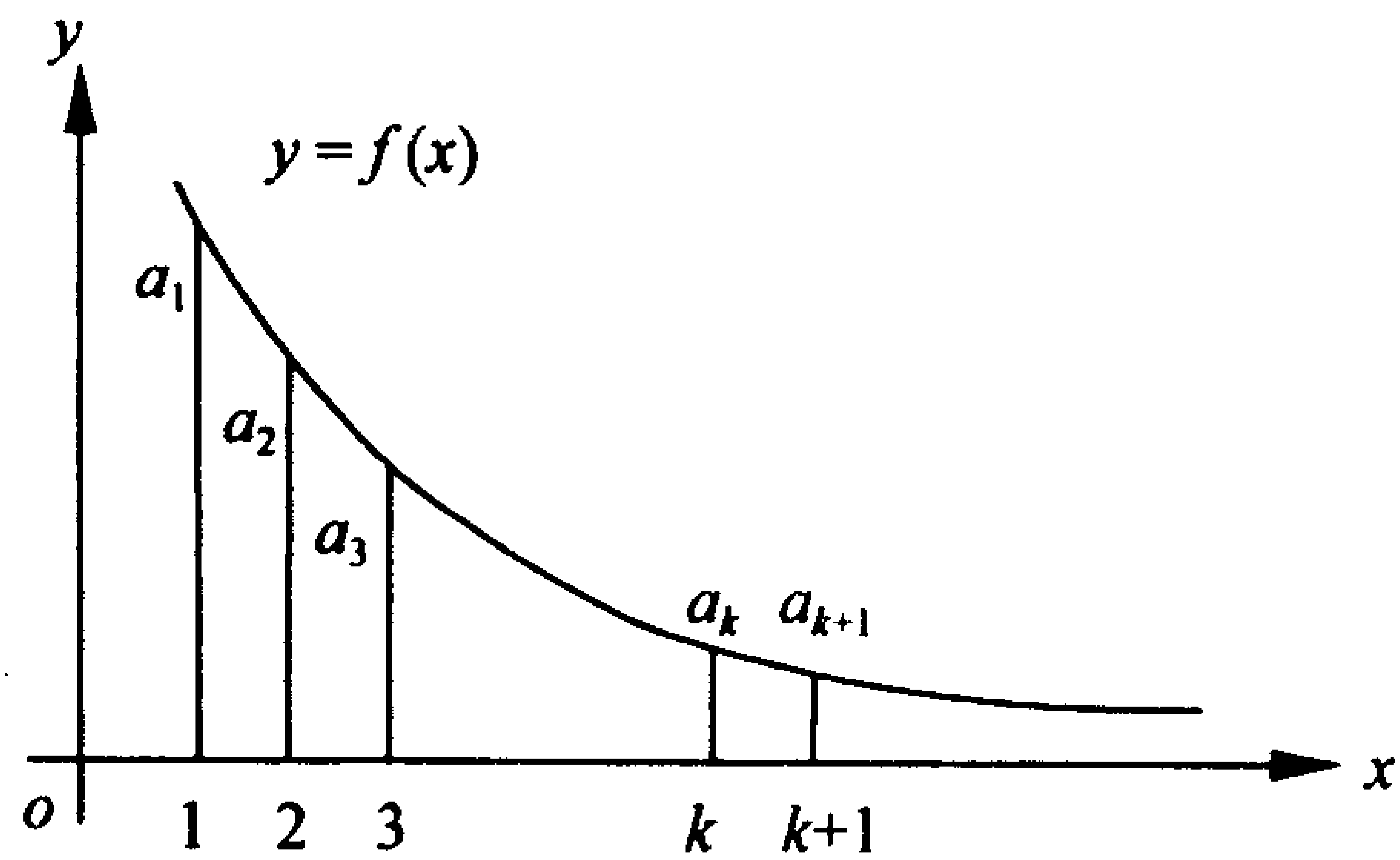


图 3

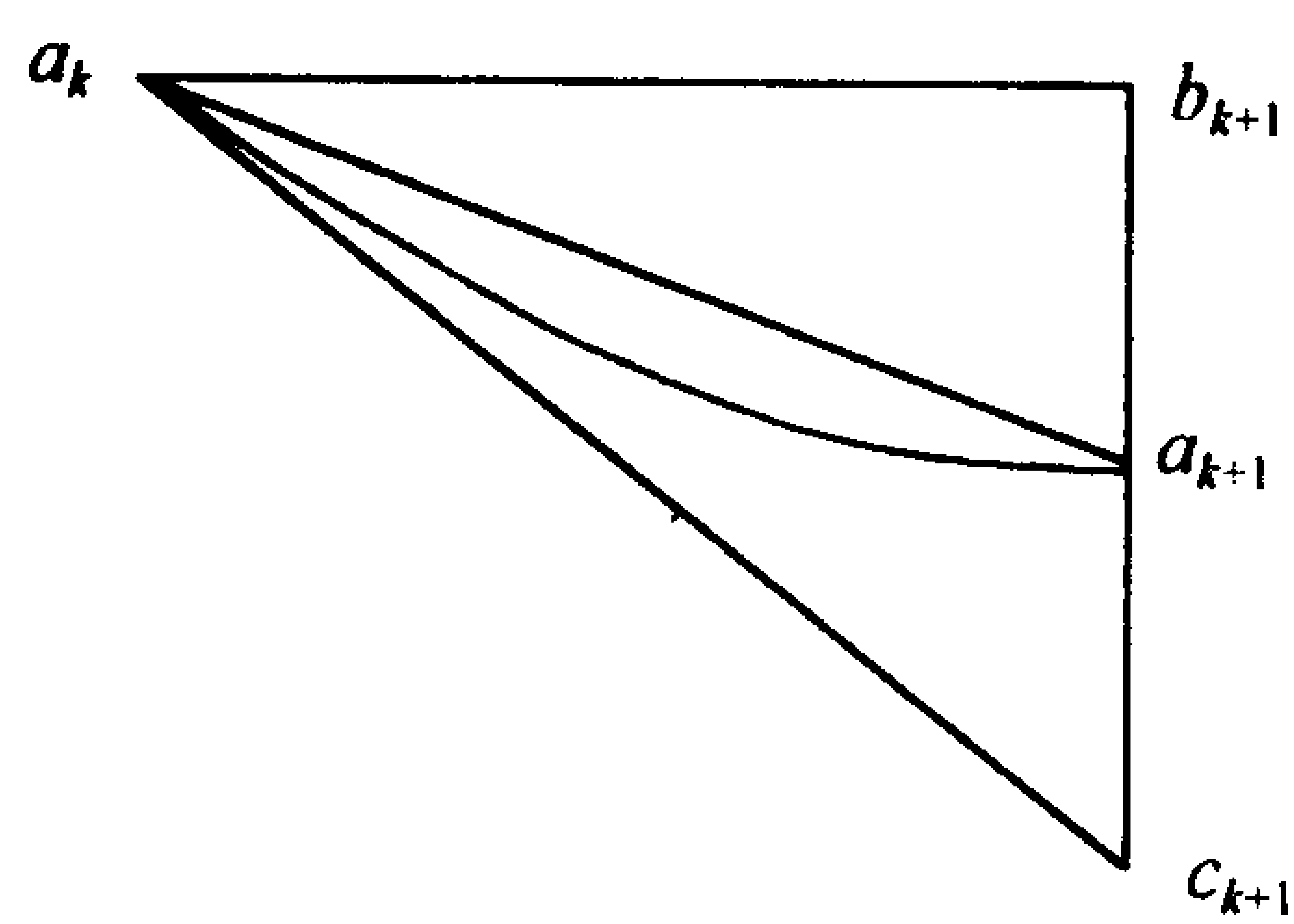


图 4

另一方面

$$\triangle_k \leqslant \triangle a_k b_{k+1} c_{k+1} \text{ 的面积}$$

而直线 $a_k c_{k+1}$ 的斜率为 $f'(k)$，所以点 c_{k+1} 的纵坐标 y_{k+1} 应满足

$$\frac{y_{k+1} - f(k)}{(k+1) - k} = f'(k)$$

即有

$$y_{k+1} = f(k) + f'(k)$$

于是

$$\triangle a_k b_{k+1} c_{k+1} \text{ 的面积} = -\frac{1}{2} f'(k)$$

由于 $f'(x)$ 单调递增，所以有

$$\sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \leqslant -\frac{1}{2} f'(n) - \frac{1}{2} \int_n^{\infty} f'(t) \mathrm{d}t =$$

$$-\frac{1}{2} f'(n) + \frac{1}{2} f(n) = \frac{1}{2} a_n \left(1 - \frac{f'(n)}{f(n)}\right) \tag{27}$$

再由(23)和(26)得

$$r_n = a_n - \sum_{k=n}^{\infty} \triangle_k \leqslant \frac{a_n}{2} \tag{28}$$

而由(23)和(27)得到

$$r_n \geqslant \frac{a_n}{2} \left(1 + \frac{f'(n)}{f(n)}\right) \tag{29}$$

结合(28)和(29)有

$$\frac{f'(n)}{f(n)} \leqslant \frac{2r_n}{a_n} - 1 \leqslant 0 \tag{30}$$

记

$$\delta_n = \frac{2r_n}{a_n} - 1$$

则有

$$r_n = \frac{a_n}{2}(1 + \delta_n), \delta_n \to 0^- \ (n \to \infty) \tag{31}$$

将(31)代入(19)即得(25)，定理证毕。

上述定理表明，(11)中的 $\theta_n \to \frac{1}{2}^- \ (n \to \infty)$，同时，也表明(25)式余项中 a_n 的系数 $\frac{1}{2}$ 是最佳常数，它不可能减小。

将定理2应用于函数

$$f(x)=\frac{1}{x^s}(s>0)$$

注意

$$f''(x)=\frac{s(s+1)}{x^{s+2}}>0,(x\geqslant 1)$$

由凸函数的性质 2° 知，函数$\frac{1}{x^s}(s>0)$是凸的，不难验证它还满足条件(i) 和(iii)，而且由(30) 还有

$$\delta_n=\frac{2r_n}{a_n}-1\geqslant\frac{f'(n)}{f(n)}=-\frac{s}{n}(s>0,n=1,2,\cdots)$$

所以，我们有下述的

推论 3　对于调和级数的部分和 H_n 成立

$$H_n=c+\ln n+\frac{1}{2n}(1+\frac{\theta_1}{n}),(-1\leqslant\theta_1\leqslant 0)\tag{32}$$

这里 c 是 Euler 常数。

推论 4　对于 p 级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}(0<p,p\neq 1)$ 的部分和 $s_n^{(p)}$ 成立如下估计式

$$s_n^{(p)}=c_{(p)}+\frac{1}{1-p}n^{1-p}+\frac{1}{2n^p}(1+\frac{\theta_2}{n}),\tag{33}$$
$$(-p\leqslant\theta_2\leqslant 0)$$

其中 $c_{(p)}$ 是一个仅与 p 有关的常数。

作为定理 1 和定理 2 的附注，我们指出凡是涉及“区间[1,∞) 的条件都可放宽到“在区间[A,∞]($A>1$) 上”因为一个级数的前有限项并不影响级数的敛散性。但是，这时的估计式(11) 和(25) 应加上限制：“当 $n\geqslant A+1$ 时”。

前面的(3)，(11)，(25)，(32) 和(33) 分别可写成

$$H_n=c+\ln n+o(1)\tag{3'}$$

$$s_n=c+F(n)+O(a_n)\tag{11'}$$

$$s_n = c + F(n) + \frac{1}{2}a_n + O(a_n) \tag{25'}$$

$$H_n = c + \ln n + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) \tag{32'}$$

$$s_n^{(p)} = c_{(p)} + \frac{1}{1-p}n^{1-p} + \frac{1}{2n^p} + O(\frac{1}{n^{p+1}}) \tag{33'}$$

例 试证:级数($a > 0$)

$$1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^a} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^a} + \cdots \tag{34}$$

当且仅当 $a = 1$ 时收敛。

证 当 $a = 1$ 时,级数(34) 是交错级数,显然收敛。但我们用(3′) 可估计其和。这时

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = H_{2n} -$$

$$2(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n = \ln 2 + O(1)$$

又

$$s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n} = \ln 2 + O(1)$$

所以,当 $a = 1$ 时,级数(34) 有和 $\ln 2$。

若 $a \neq 1$,利用(3) 和(33′),我们有

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^a} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^a} \\ &= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2^a} - (\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a}) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}c + O(1) - \frac{1}{2^a}[\frac{n^{1-a}}{1-a} + c_{(p)} + O(\frac{1}{n^a})] \\ &= \frac{1}{2}\ln n - \frac{n^{1-a}}{2^a(1-a)} + O(1) \end{aligned}$$

上式表明,当 $a \neq 1, a > 0$ 时,都有

$$\lim_{n\to\infty} |s_{2n}| = +\infty$$

此时级数(34) 发散。

参考文献

[1] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数. 北京：科学出版社，1965.

[2] 徐利治，王兴华. 数学分析的方法及例题选讲. 北京：高等教育出版社，1984.

[3] 包那. Euler 常数与 Euler 公式. 数学的实践与认识，1988(4)：53 ～ 62.

[4]Detemple D W. A quicker convergence to Euler's constant. The Amer. Math. Monthly, 1993,100:468 ～ 470.

[5] 孙燮华. Euler 公式的推广及其精确化. 数学通报，1983,11:22 ～ 25.

[6]Yong R M. Euler's constant. Math. Gaxetle,1991, 75:187 ～ 190.

[7]Hight R. Asmptotics of harmonic sum. The Amer. Math. Monthly, 1996,103:684 － 685.

[8]Detemple D W and Wang S H. Half integer approximations for the partial sums of the harmonic series. J. Math. Anal. Appl. ,1991,160:149 － 156.

[9]Boas R B. Partial sums of infinite series and how they grow. The Amer. Math. Monthly,1977,84:237 ～ 258.

[10]Barshinger R. Calculus Ⅱ and Euler also (with a nod to series integral remaider bounds)The Amer. Math. Monthly, 1994,101:244 ～ 248.

[11]Braden B. Calculating sums of infinite series. The Amer. Math. Monthly 1996,103:649 － 655.

[12] 欧阳光中. 近年来国外微积分（数学分析）教材介绍（上）. 数学通报，1992,1:30 ～ 33.

[13]Johnsonbaugh R. The trapezoid rule, Stirling's formula, and Euler constant. Amer. Math. Monthly, 1981, 88: 696 ～ 698.

[14]Rippon P L. Convergence with pictures. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 476 ～ 478.

[15] 张南岳. Euler － Maclaurin 公式与渐近估计. 数学的实践与认识, 1985, 1: 30 ～ 38.

[16] 张南岳. Euler 数及某些与Zeta 函数有关的和. 数学的实践与认识, 1990, 4: 80 ～ 82.

[17] 吴福朝. 关于调和级数部分和的估计. 数学的实践与认识, 1992, 4: 80 ～ 82.

[18]Patin J M. A very short proof of Stirling's formula. Amer. Math. Monthly, 1989, 96: 41 ～ 42.

[19]Namias V. A simple derivation of Stirling's asymptotic series. Amer Math. Monthly, 1986, 93: 25 ～ 29.

[20]Diaconis P and Pathak P K. An elementary proofs of Stirling's formul. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 123 ～ 125.

[21]Blyth C R and Pathak P K. A note on easy proofs of Stirling's theorem. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 376 ～ 379.

[22]Deeba E Y and Rodriguez D M. Stirling's series and Bemoulli number. Amer. Math. Monthly, 1991, 98: 423 ～ 426.

[23] 张志军. 斯特林公式的初等证明. 西北师范大学学报(自然科学版), 1997.

[24] 张志军. 欧拉常数和斯特林公式. 西北师范大学学报(自然科学版), 1998.

[25] 张筑生. 数学分析新讲(第二册). 北京大学出版社, 1990.

第二节　斯特林公式

本节我们用泰勒展式证明斯特林公式。同时，解答了欧阳光中在[1] 中提出的一个问题。其它多种初等证明方法将在下节给出。

斯特林公式是

$$n! = \sqrt{2n\pi}n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \theta_n \in (0,1) \tag{1}$$

或者

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{2}$$

但这个公式的证明却相当复杂。因此，国外一些学者近年来一直致力于它的基本证明（见[1 ～ 9]）。然而，除了[2 ～ 4] 的几何方法以及[1]、[2] 中的另一方法过于技巧化之外，从分析角度看，这些证明仍相当复杂或者超越了初等微积分（高等学和数学分析）的范围。本文给出一个极其初等的证明方法。

现在就证明(1)。自然地，令

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n},$$

则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \ln a_{n+1} - \ln a_n &= (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 \\ &= \frac{2n+1}{2}\ln\frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} - 1 \end{aligned} \tag{3}$$

再令

$$x_n = \frac{1}{2n+1}(\text{从而 } x_n \in (0,1)),$$

$$f(x) = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1, x \in (0,1)$$

应用$\frac{1}{1 \pm x}$的泰勒级数，得到

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots \tag{4}$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots \tag{5}$$

进而，有

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\right)$$

因此，得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 \\ &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n} + \cdots > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

即得　$\ln a_{n+1} - \ln a_n > 0, a_{n+1} > a_n, \{a_n\}$严格单调递增。下面再证$\{a_n\}$的有界性。

由(6)可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n} + \cdots \\ &< \frac{1}{3}x^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + \cdots) = \frac{x^2}{3(1-x^2)} \end{aligned} \tag{7}$$

即得

$$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2x_n}\ln\frac{1+x_n}{1-x_n} - 1 < \frac{x_n^2}{3(1+x_n^2)}$$

$$= \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

于是，我们得到了

$$a_{n+1}e^{\frac{1}{12(n+1)}} < a_n e^{\frac{1}{12n}} \tag{8}$$

这样，可令

$$b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$$

则 $b_{n+1} < b_n$，$\{b_n\}$ 严格单调递减。但 $b_n > a_n$，结合$\{a_n\}$ 严格单调递增，得到

$$e^{-1} = a^1 < a_n < b_n < b_1 = e^{-\frac{11}{12}}, n \geqslant 2 \tag{9}$$

从此，$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均收敛且收敛到同一个数 C。进一步，可应用区间套定理（注意到$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$）得到：存在唯一的 C 使得

$$a_n e^{\frac{1}{12n}} > C > a_n, \forall\ n \in N。$$

当然，这里也可以不用区间套定理，而应用单调性，得到

$$a_n e^{\frac{1}{12n}} > C > a_n e^0, \forall\ n \in N。$$

从而存在 $\theta_n \in (0, \frac{1}{12n})$，使得

$$C = a_n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

余下的问题就是如何确定 C 的值。应用瓦利斯($Wallis$) 公式可得[2]

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

至此，(1) 获证。

基于上述思想，而产生了下面的技巧化方法[1]（从而蕴藏了数学思想）分八个步骤。

1. 令 $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x, \forall\ x \in (0,1)$，

则 $f'(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}>0$。

2. 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$，

则 $g'(x)=-\dfrac{2x^4}{3(1-x^2)^2}<0$。

3. $f(0)=g(0)=0$，从而有

$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x<\frac{x^3}{3(1-x^2)},\forall\ x\in(0,1)$$

以上三个步骤实际上就是我们的(6)和(7)

4. 令 $x_n=\dfrac{1}{2n+1}$，

则 $\dfrac{1+x_n}{1-x_n}=\dfrac{n+1}{n}$，$\dfrac{x_n^3}{3(1-x_n^2)}=\dfrac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}$。

5. 从而有

$$0<\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}.$$

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}-1<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)。$$

6. 令 $a_n=\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$，$b_n=a_ne^{\frac{1}{12n}}$，则$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<1<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，$a_n<b_n$，即$\{a_n\}$严格单调递增，$\{b_n\}$严格单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，从而存在唯一的 C 使得

$$a_ne^{\frac{1}{12n}}>C>a_n,\forall\ n\in N。$$

7. $n!=\dfrac{e^{-n}}{C}n^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)$。

8. 确定 C 的值。

文[1]评论道："这样处理的好处是让学生自己去完成证明，增加学生的学习兴趣，至少对成绩好的学生可以达到这个要求。缺点是每一步的由来并不明显，过于技巧化。但话又说回来，数学中蕴藏着许多精致有用的技巧。"

本文揭示了这种“蕴藏”。

参考文献

[1] 欧阳光中. 近年来国外微积分(数学分析)教材介绍(上),数学通报,1992,1:30 ~ 33.

[2] 张筑生. 数学分析新讲(第二册). 北京大学出版社,1990:108 ~ 118.

[3]Johnsonbaugh R. The trapezoid rule,Stirling's formula,and Euler constant,Amer. Math. Monthly,1981,88:696 ~ 698.

[4]Rippon P L. Convergence with pictures. Amer. Math. Monthly,1986,93:476 ~ 478.

[5]Patin J M. A very short proof of Stirling's formula. Amer. Math. Monthly,1989,96. 41 ~ 42.

[6]Namia V. A simple derivation of Stirling's asymptotic series. Amer. Math. Monthly,1986,93:25 ~ 29.

[7]Diaconis P and Pathak P K. An elementary proofs of Stirling's formula. Amer. Math. Monthly, 1986,93:123 ~ 125.

[8]Blyth C R and Pathak P K. A note on easy proofs of Stirling's theorem. Amer. Math. Monthly,1986,93:376 ~ 379.

[9]Deeba E Y and Rodriguez D M. Stirling's series and Bernoulli number. Amer. Math. Monthly,1991,98:423 ~ 426.

[10] 张志军. 斯特林公式的初等证明. 西北师范大学学报(自然科学版),1997.

[11] 张志军. 欧拉常数和斯特林公式. 西北师范大学学报

(自然科学版),1998.

第三节　欧拉常数与斯特林公式

本节我们用几种初等方法同时证明欧拉常数与斯特林公式以及对余项进行估计。特别是 Rippon[1] 的几何直观思想导致了凸函数的一个新结果。

3.1　Rippon 的几何方法

所谓 Rippon 的几何方法，就是利用凸函数图象的几何直观得到的一种整体的、精细的面积比较结果，它比第一节定理 2 的凸函数广泛得多。

设 $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ 为下凸的、严格单调递减函数，或者为上凸的、严格单调递增函数。令

$$a_n=\left|\frac{1}{2}(f(n)+f(n+1))-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right| \tag{1}$$

其中，n 为自然数。

本节以下凸单调递减函数为例，对上凸单调递增的情形具有同样的结果。

如图 5 所示，a_k 表示位于 $[k,k+1]$ 上的阴影弓形 A_k 的面积。

从 Rippon 的几何直观图示可以非常清楚看到：对任意的自然数 n，$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的面积和有估计

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\frac{1}{2}|f(1)-f(2)| \tag{2}$$

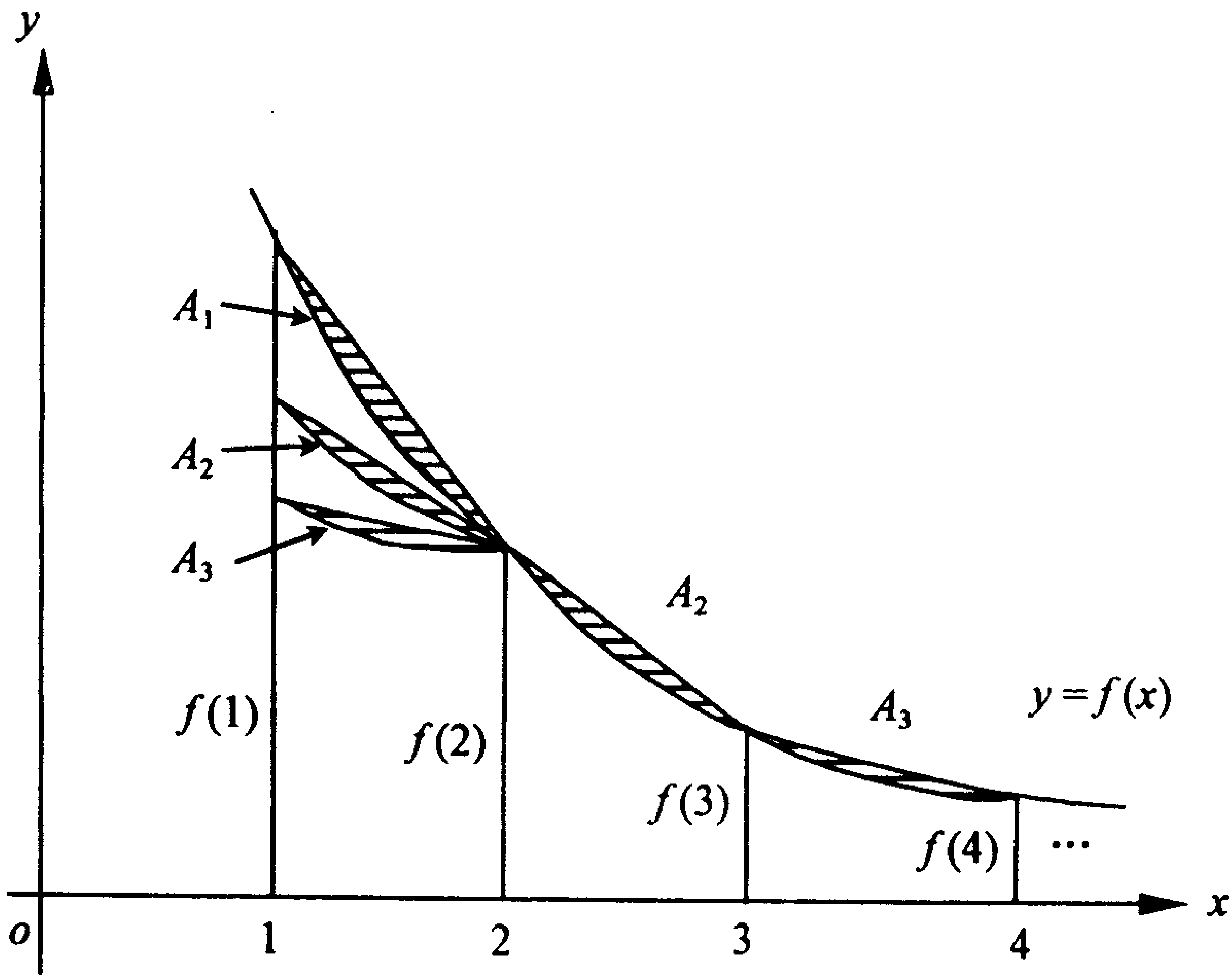


图 5

如果从 A_n 开始，重新作图，则有

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \frac{1}{2}|f(n) - f(n+1)| \tag{3}$$

注 1　自然地 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛。

现在我们先应用上述结果，而将其证明放在本节末的附录中。

例 1　证明斯特林公式。

令

$$f(x) = \ln x$$

则 $f(x)$ 在$[1,\infty)$ 上为下凸的、严格单调递增函数，应用(2) 得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_k^{k+1}\ln x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1))\right]$$

$$= \int_1^n \ln x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln k = \ln\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^{n-1}} < \frac{1}{2}$$

因此，正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，即

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \text{ 存在。}$$

余下的证明同[3]。这里略去。

例 2　设 $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ 为下凸的、严格单调递减函数。

下面我们给出广义欧拉常数更为精细的余项估计，并且不必要求 $f(x)$ 在无穷处趋于零。

由 1.3 节的结果可知

$$B_n = \left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right] \text{ 收敛，即 } \gamma_f \text{ 存在。}$$

应用(3) 可得

$$0 < \sum_{k=n}^{\infty} a_k < \frac{1}{2}(f(n) - f(n+1))$$

注意到

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}f(n) - \int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

而

$$\gamma_f - B_n = [\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) - \int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x]$$

因此，有

$$0 < \gamma_f - B_n + \frac{1}{2}f(n) < \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(n+1)$$

即

$$\frac{1}{2}f(n+1) < B_n - \gamma_f < \frac{1}{2}f(n)$$

特别，当 $f(x) = \frac{1}{x}$ 时，得到 1.2 节的结果

$$\frac{1}{2(n+1)} < B_n - \gamma_f = D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

3.2 应用数值积分中的梯形法则

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，如果知道了 $f(x)$ 的原函数，那么由牛顿－莱布尼兹公式就可直接求出$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。但在许多实际问题中，或者 $f(x)$ 的原函数不易求出，或者所求出的原函数很复杂，那么就很难求出$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的精确值。事实上，在许多实际问题中，人们只关心$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值和误差估计。这就发展了数值积分这门分支学科。本节仅考虑梯形法则最简单的情形，这就是对区间$[a,b]$不进行化分；或者换句话说，对区间$[a,b]$只化分一次，即

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可微，且 $f''(x)$ 在(a,b)存在且有界，则存在 $c \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_1 + E_1$$

其中，$T_1 = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$，$E_1 = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(c)$.

其几何意义是：用梯形的面积 T_1 近似替代曲边梯形的面积，误差为 E_1。明显地，若 $(b-a)$ 充分小，则误差至多与 $(b-a)^3$ 为同阶无穷小量。

证明 对任意的 $x \in [a,b]$，令

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(x) + f(a))(x-a)$$

$$G(x) = (x-a)^3,$$

则

$$F(a) = G(a) = F'(a) = G'(a) = 0$$

应用柯西微分中值公式可得

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = -\frac{1}{12}f''(c_2)。$$

其中，$c_1 \in (a,b)$，$c_2 \in (a,c_1)$。

现在应用该结果解决我们的问题。

例 3 取 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，在 $[k,k+1]$ 上应用上述结果得到

$$a_k = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}c_k^{-3}$$

其中，$c_k \in (k,k+1)$。

这样，有

$$\frac{1}{6}(k+1)^{-3} < a_k < \frac{1}{6}k^{-3},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2} < \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^{-3}$$
$$< \frac{1}{6}(1 + \sum_{k=2}^{n}k^{-3}) < \frac{1}{6}(1 + \int_1^{\infty}x^{-3}\mathrm{d}x) = \frac{1}{4}$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，也就是 γ 存在。

再来估计余项 $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

既然，当 $n \geqslant 2$ 时，成立

$$r_n < \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty} k^{-3} < \frac{1}{6}\int_{n-1}^{\infty} x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{12(n-1)^2}$$

另一方面

$$r_n > \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)^{-3} > \frac{1}{6}\int_{n+1}^{\infty} x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{12(n+1)^2}$$

这样，有

$$\frac{1}{12}(n+1)^{-2} < r_n < \frac{1}{12}(n-1)^{-2}$$

同样方法可以得到比 1.2 节不等式(3) 的下界好一些的如下余项的估计

$$\frac{1}{2}(n+1)^{-1} + \frac{1}{12}(n+1)^{-2} < D_n - \gamma < \frac{1}{2}n^{-1} + \frac{1}{12}n^{-2}$$

例 4　取 $f(x) = \ln x, x \geqslant 1$，在 $[k, k+1]$ 上应用上述梯形法则得到

$$a_k = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{12}c_k^{-2}$$

其中，$c_k \in (k, k+1)$

即

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n - \int_1^n \ln x\mathrm{d}x$$

$$= \ln\frac{n!e^{n-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} c_k^{-2} > -\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} k^{-2} > -\frac{1}{6}$$

右边不等式用到了如图 6 所示的估计。

因此，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-a_k)$ 收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \text{ 存在.}$$

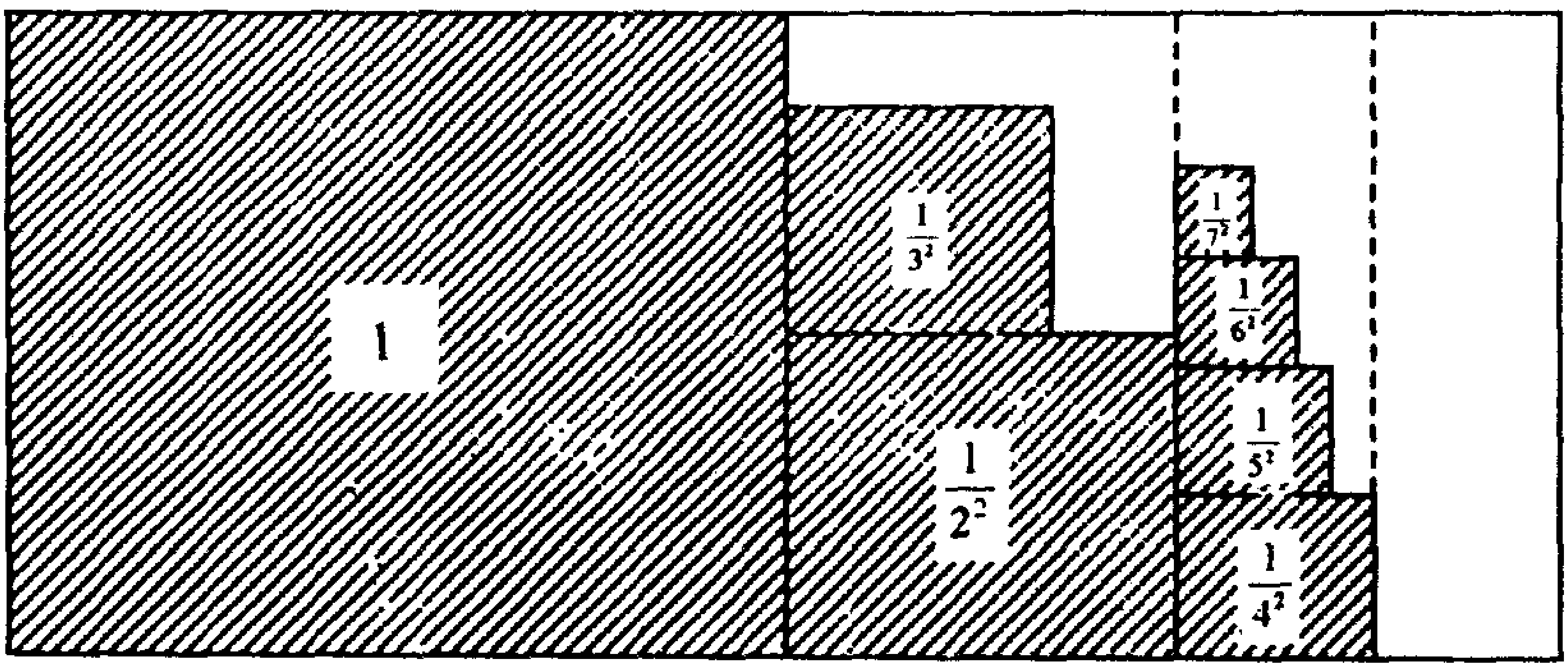


图 6

最后估计余项 $r_n = -\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$。

既然

$$r_n = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} c_k^{-2} < \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2} < \frac{1}{6}\int_{n-1}^{\infty} x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{12(n-1)}$$

同样可得

$$r_n > \frac{1}{12(n+1)}$$

总之，有

$$\frac{1}{12(n+1)} < r_n < \frac{1}{12(n-1)}, n = 2,3,\cdots$$

注 4 同样可应用数值积分中的矩形法则、抛物线法则以及 Euler－Maclaurin 公式最简单的情形来讨论欧拉常数与斯特林公式。

附录

现在，让我们边看图 5 边证明 2.1 节中的(2)。

弓形 A_k 的弦(连接点$(k,f(k))$与$(k+1,f(k+1))$的线段)的斜率为

$$f(k+1)-f(k)$$

弦的方程为

$$y_k(x)=f(k)+(f(k+1)-f(k))(x-k)$$

现将这条线段向左延长交于直线$x=k-1$。我们容易求出交点为$(k-1,y_k(k-1))$。

由下凸函数的性质可知

$$(f(k+1)-f(k))=\left(\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}\right)$$

关于 k 单调递增,即有

$$f(k+1)-f(k)>f(k)-f(k-1)$$

从而可得

$$y_k(k-1)=f(k)-(f(k+1)-f(k))<f(k-1)$$

(图示非常清楚)

再次应用下凸函数的性质可得

$$\frac{f(x)-f(k)}{x-k}<\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k},\forall\ x\in(k-1,k)$$

因此,有

$$\begin{aligned}f(x)-y_k(x)=&f(x)-f(k)\\&-(f(k+1)-f(k))(x-k)>0\end{aligned}$$

即

$$f(x)>y_k(x),\forall\ x\in(k-1,k)$$

因此,得

$$\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x>\int_{k-1}^{k}y_k(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(3f(k)-f(k+1))$$

于是

$$a_k=\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1))-\int_{k}^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$< \frac{1}{2}[f(k) + f(k+1) - 3f(k+1) + f(k+2)]$$

$$= \frac{1}{2}[f(k) - 2f(k+1) + f(k+2)],$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(k) - 2f(k+1) + f(k+2)],$$

$$= \frac{1}{2}[f(1) - f(2) + f(n+2) - f(n+1)]$$

$$< \frac{1}{2}[f(1) - f(2)$$

上式用到了 $f(x)$ 的单调递减性。这样 2.1 节中的(2) 获证。

参考文献

[1]Rippon P L. Convergence with pictures. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 476 ~ 478.

[2] 张志军. 欧拉常数和斯特林公式. 西北师范大学学报(自然科学版), 1998.

[3] 张筑生. 数学分析新讲(第二册). 北京大学出版社, 1990.

[4] 张志军. 斯特林公式的初等证明. 西北师范大学学报(自然科学版), 1997.

第二章 微分学

在微积分学中，关于多变元映象（从多元函数到向量值函数）的极限（包括连续性）、微分、积分及其性质（如隐函数定理等等），人们总是类比一元函数，首先考虑一元函数的性质能否平移或推广过来。本章首先介绍的就是将一元函数中极值的第一判别准则（即一阶导数判别法）与洛尔定理从本质上（而不是从形式上）分别推广到多元函数和向量值函数中去。这是十余年来，国外一些学者研究的新结果（见文献[1 ～ 3]）。其数学思想和方法非常具有启发性。最后两节给出了一元函数微分学中若干基本和典型的问题的新思想和新方法。

第一节 多元函数极值的一阶偏导数判别准则及其应用

本节介绍多元函数极值的一阶偏导数判别准则，这本来是一元函数极值的第一判别准则即一阶导数判别法的自然推广。但令人奇怪的是这个判别准则直到1986年才由Botsko[1]给出：

定理1 设B表示以$a=(a_1,a_2,\cdots a_n)\in R^n$为中心以$r$为半径的开球，$f:B\to R$连续且在$B/\{a\}$内可微，则有

（Ⅰ）如果对任意的 $x \in B/\{a\}$，成立

$$(x-a)\cdot\nabla f(x)<0$$

则 $f(x)$ 在 a 点达到严格极大值.

（Ⅱ）如果对任意的 $x \in B/\{a\}$，成立

$$(x-a)\cdot\nabla f(x)>0$$

则 $f(x)$ 在 a 点达到严格极小值.

这里，$\nabla f(x)$ 表示 f 在 x 的梯度，即

$$\nabla f(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)),$$

符号"·"表示 R^n 中的内积，即 $\forall\ x=(x_1,x_2,\cdots x_n)\in R^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_n$，$x\cdot y=\sqrt{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+(x_ny_n)}$。

现在就让我们回顾一元函数极值的第一判别法则吧.

设一元函数 f 在 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 内连续，在 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 内可微，则有

1° 如果 $(x-a)f(x)<0,\forall\ x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，即

$$f'(x)<0,\forall\ x\in(a,a+\delta),$$
$$f'(x)>0,\forall\ x\in(a-\delta,a),$$

则 $f(x)$ 在 a 点达到严格极大值。

2° 如果 $(x-a)f(x)>0,\forall\ x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，即

$$f'(x)>0,\forall\ x\in(a,a+\delta),$$
$$f'(x)<0,\forall\ x\in(a-\delta,a),$$

则 $f(x)$ 在 a 点达到严格极小值。

显然，定理 1 是上述一元函数极值判别法的自然推广。

我们知道，研究多变元映象时，基本思想是将其转化成一元函数，进而应用一元函数的性质直接得到多变元映象的性质。例如关于多元函数的泰勒展式就是一个典型的例子。现在就让我

们应用这一思想来证明定理 1。

定理 1 的证明 任取 $x \in B/\{a\}$ 固定。令

$$F(t) = f(a + t(x - a)), \forall\, t \in [0,1]$$

则由假设条件可知，F 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微。应用拉格朗日微分中值定理可知，存在某个 $t_0 \in (0,1)$ 使得

$$F(1) - F(0) = F'(t_0)$$

即

$$f(x) - f(a) = (x - a) \cdot \nabla f(a + t_0(x - a)) \qquad (1)$$

令

$$y = a + t_0(x - a)$$

则

$$0 < \| y - a \| = t_0 \| x - a \| < \| x - a \| < r$$

这里，$\| \cdot \|$ 表示 R^n 中的范数.

即 $y \in B/\{a\}$。因此，在( ) 条件下，由(1) 得到

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{t_0}(y - a) \cdot \nabla f(y) < 0$$

即 $f(x) < f(a)$，由 $x \in B/\{a\}$ 的任意性，立即知道 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的严格极大值。同样在( ) 下，可得 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的严格极小值。定理 1 获证。

现在让我们回到传统的关于多元函数极值的二阶偏导数判别准则。这是一元函数极值第二判别法的自然推广，是应用泰勒展式结合代数学中二次型的正定性得到的。

定理2 设多元函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域内至少二次连续可微，且 $\nabla f(a) = 0$。如果 $f(x)$ 在 a 的海赛(Hasse) 方阵 $H_f(a)$ 是正定的(或负定的)，即对 R^n 中任意的单位向量 a，$(a \cdot \nabla)^2 f(a) > 0$(或 $a \cdot \nabla)^2 f(a) < 0$). 则 $f(x)$ 在 a 达到严格极小值(或严格极大值)。这里，$(a \cdot \nabla)^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$；$f(x)$

在 a 的海赛方阵 $H_f(a)$ 为

$$H_f(a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(a)\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\end{bmatrix}_{n\times n}$$

注1　同一元函数极值的判别法一样，定理1的条件要比定理2弱，即能用定理1判别的，未必能用定理2判别。而且定理1比定理2使用更方便、更简捷（这不同于一元函数），这是因为，当 n 较大时，具体判别一个方阵是否为正定或否定这件事是很麻烦的，工作量也较大；但应用定理1则比较容易。

。

下面举几个简单例子予以说明。

例1　求 $g(x,y)=1-x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{4}{5}}$ 的极值。

明显地，g 无临界点，即满足 $\nabla g(x,y)=0$ 的 (x,y) 不存在，因此不能应用定理2。但应用定理1可知，$\forall\ (x,y)\neq(0,0)$，成立

$$(x,y)\cdot\nabla g(x,y)=-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{5}y^{\frac{4}{5}}<0$$

即 $(0,0)$ 为 g 的严格极大值点。当然，例1也可用初等方法得到。

例2　求 $f(x,y)=25+(x-y)^4+(x-1)^4$ 的极值。

同样不能应用定理2，这是因为 $(1,1)$ 为 f 的唯一临界点，而且

$$H_f=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

但应用定理1可知，$\forall\ (x,y)\neq(1,1)$，成立

$$\begin{aligned}&(x-1,y-1)\cdot\nabla f(x,y)\\ &=4[(x-1)^4+(y-1)^4]>0\end{aligned}$$

即(1,1)为f的严格极小值点。当然，例2也可用初等方法得到。

由例1、例2可以看出，应用定理1时，如何找定理1中的a？即这样确定a：求出f的临界点和不可微的点。

再举一个简单例子。

例3 求$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+2x+10y+9$的极值。

由于f可微且$(1,-2)$为f的唯一临界点，而且$\forall\ (x,y)\neq(1,-2)$，有

$$(x-1,y+2)\cdot\nabla f(x,y)=2(x-1)(x+y+1)+2(y+2)(x+3y+5) \qquad (2)$$

将$(1,-2)$平移到原点，即作平移变换$u=x-1, v=y+2$，则(2)变为

$$2u(u+v)+2v(u+3v)=2(u+v)^2+4v^2>0,$$

$$\forall\ (u,v)\neq(0,0)$$

即$(1,-2)$为f的严格极小值点。

还可举出许多应用定理1的例子，如通常微积分教材中有关极值的例子和习题。

最后我们证明：**定理1隐含定理2，即能用定理2判别的一定能用定理1判别。**

证明 设对R^n中任意的单位向量a，$(a\cdot\nabla)^2f(a)>0$，并且定理2成立。记

$$S=S(0,1)=\{a\in R^n:\|a\|=1\}$$

$g:S\to(0,\infty)$定义为

$$g(a)=(a\cdot\nabla)^2f(a)$$

明显地，二次型在有界闭集S上连续，因此，g在S上某一点达到最小值m，且$m>0$。

由a为单位向量可知

$$|(a\cdot\nabla)^2f(x)-(a\cdot\nabla)^2f(a)|$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

结合 f 的二阶偏导数在 a 连续，于是存在 $\delta > 0$，使得当 $\| x - a \| < \delta$ 时，成立

$$|(a \cdot \nabla)^2 f(x) - (a \cdot \nabla)^2 f(a)| < \frac{m}{2}$$

即

$$(a \cdot \nabla)^2 f(x) > (a \cdot \nabla)^2 f(a) - \frac{m}{2} \geqslant \frac{m}{2} > 0$$

取定上述 x。令

$$F(t) = f(a + t(x - a)), \forall\, t \in [0,1]$$

则对任意的 $t \in [0,1]$，有

$$F'(t) = (x - a) \cdot \nabla f(a + t(x - a))$$

$$F''(t) = ((x - a) \cdot \nabla)^2 f(a + t(x - a))$$

取 $x \neq a, a = \dfrac{x - a}{\| x - a \|}$，于是有

$$F''(t) = \| x - a \|^2 (a \cdot \nabla)^2 f(a + t(x - a)) > 0$$

即 $F'(t)$ 在$[0,1]$上严格单调递增，而 $F'(0) = 0$，因此，$F'(t) > 0, \forall\, t \in (0,1]$。从而，得到

$$F'(1) = (x - a) \cdot \nabla f(x) > 0, \forall\, x \in B(a,\delta) \backslash \{a\}.$$

证毕。

参考文献

[1]Botsko M W. A first derivative test for function of several variables. Amer. Math. Monthly, 1986, 93:558 ~ 561.

[2] 欧阳光中. 近年来国外微积分(数学分析)教材介绍(上、下). 数学通报, 1992, 1:30 ~ 33; 1992, 2:33 ~ 39.

[3] 张筑生. 数学分析新讲(第一册 ~ 第三册). 北京大学出

版社,1990.

[4] 张志军,多元函数极值的一阶偏导判别准则及其应用.西北师范大学学报(自然科学版),1998.

第二节　多变元情形下的洛尔定理及其应用

先让我们回顾一下洛尔定理。

设一元函数 f 满足下列条件

(Ⅰ)　f 在 $[a,b]$ 上连续;

(Ⅱ)　f 在 (a,b) 内可微;

(Ⅲ)　$f(a)=f(b)$;

则至少存在一点 $c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=0$,即若 f 满足条件(Ⅰ)和(Ⅱ),则 f 在边界 a 与 b 的值决定了 f 在 (a,b) 内某点 c 的微分性质(对拉格朗日中值定理同样成立)。尽管 c 在一般情况下很难求出,但这并不影响洛尔定理和拉格朗日中值定理的重要应用。但十分不幸的是,就形式而言,洛尔定理对向量值函数不成立。

例1　$f:R\to R^2$ 定义为

$$f(t)=(\cos t,\sin t)$$

则 f 在 $[0,2\pi]$ 上连续,在 $(0,2\pi)$ 内可微,并且

$$f(0)=f(2\pi)=(1,0)$$

但

$$|f'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1,\forall\, t\in(0,2\pi)$$

即洛尔定理不再成立。

按照常理,我们绝大多数人就回到此为止。事实的确如此,国内外的教材由于此例或类似反例因此都回避了这个问题。但

我们在教学中对该问题一直迷惑不解，尽管 1985 年 Marden[1]、1992 年 Evard 与 Jafari[2] 在复变函数(解析函数) 情形下揭示了洛尔定理的本质。直到 1995 年，Furi 与 Martelli[3] 对向量值函数才基本上解决了这一推广问题，其本质含义是：在闭域上连续、开域内可微的向量值函数，洛尔定理情形下的边界函数值确定了开域内某点的微分性质。这样该结果就可以应用于几何学。

为方便起见，先作些记号和预备。记

$0_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列的零矩阵；

$\overline{B}(x_0,r) = \{x \in R^n : \| x - x_0 \| \leqslant r\}$,

$B(x_0,r) = \{x \in R^n : \| x - x_0 \| < r\}$;

$S = \{x' R^n : \| x - x_0 \| = r\}$.

下面两个引理是多元函数的两个基本性质。

引理 1(临界点定理) 设 $f:\overline{B} \to R, c \in B(x_0,r)$ 为 f 的极值点。那么，如果 f 在 c 可微，则有 $f'(c) = 0_{1\times n}$。

引理 2 设 $f:\overline{B}(x_0,r) \to R$ 连续，则 f 的值域为一有界闭区间。

现在再举一个例子。

例 2 设 $f:R^2 \to R^2$ 定义为

$f(x,y) = (x(x^2+y^2-1), y(x^2+y^2-1)), \forall\ x,y \in R$

则 f 在 $\overline{B}(0,1)$ 上连续，在 $B(0,1)$ 内可微，并且 f 在 S 上恒为零，但 $\forall\ x,y \in R$，有

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2-1 & 2xy \\ 2xy & x^2+3y^2-1 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times 2}$$

现在我们就叙述 Furi 与 Martelli 的主要结果。

定理 1 设 $f:\overline{B}(x_0,r) \subset R^n \to R^m$ 满足下列条件

(Ⅰ) f 在 $\overline{B}(x_0,r)$ 上连续；

(Ⅱ) f 在 $B(x_0,r)$ 内可微；

(Ⅲ) 存在非零向量 $v \in R^m$ 使得对任意的 $x \in S(x_0,r)$

成立

$$v \cdot f(x) = 0 \quad (\cdot \text{ 表示内积}),\text{即 } v \text{ 与 } f(x) \text{ 正交},$$

则至少存在一点 $c \in B(x_0,r)$，使得(注意到 $f'(c): R^n \to R^m$ 为 $m \times n$ 矩阵)

$$v \cdot f'(c)u = 0, \forall\, u \in R^n$$

即

$$v \text{ 与向量组 } \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) \text{ 正交。}$$

明显地，上述两个例子均满足定理 1 的条件。

下面先给出定理 1 的证明，随后将其推广到更为一般的边界条件。

定理 1 的证明　定义 $k: R^m \to R$ 为 $k(w) = v \cdot w, \forall\, w \in R^m$，再定义 $g: R^n \to R$ 为

$$g(x) = k(f(x)), \forall\, x \in \overline{B}(x_0,r)$$

则容易验证 g 满足定理 1 的条件(Ⅰ)与(Ⅱ)，并且

$$g(x) = 0, \forall\, x \in S(x_0,r)$$

由引理 2 可知，g 在 $\overline{B}(x_0,r)$ 上有最大、最小值。不失一般性，可设 g 在 $B(x_0,r)$ 内一点 c 达到最大值。应用引理 1 可得

$$g'(c) = 0_{1\times n}$$

即

$$v \cdot f'(c)u = 0, \forall\, u \in R^n$$

推论 1　若将定理 1 中的条件(Ⅲ)改为

(Ⅳ)　存在非零向量 $v \in R^m$ 使得对任意的 $x \in S(x_0,r)$ 成立

$$v \cdot f(x) \text{ 恒为常数}$$

则定理 1 的结论仍成立。

证明　设对任意的 $x \in S(x_0,r)$，$v \cdot f(x) = a_0$，令

$$g(x) = f(x) - \frac{a_0}{\| v \|^2}v$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 v 的范数，则 g 满足定理 1 的条件，从而存在 $c \in B(x_0, r)$，使得

$$v \cdot g'(c)u = 0, \forall\ u \in R^n$$

而

$$f'(x) = g'(x), \forall\ x \in B(x_0, r)$$

结论获证。

应用推论 1 容易得到洛尔定理、拉格朗日中值定理和柯西微分中值定理。这里只需推出柯西微分中值定理。

推论 2　设一元函数 f、g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

证明　若 $f(a) = f(b)$，$g(a) = g(b)$，则结论自然成立。现设

$$(f(b) - f(a))^2 + (g(b) - g(a))^2 > 0$$

定义 $T:[a,b] \to R^2$ 为

$$T(t) = (g(t), f(t))$$

并设

$$v = (f(b) - f(a), g(a) - g(b))$$

则

$$v \cdot T(a) = v \cdot T(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

应用推论 1 得到，存在一点 $c \in (a,b)$，使得

$$v \cdot T'(c)t = 0, \forall\ t \in R$$

取 $t \neq 0$ 即得结论。

推论 3　设 $T:[a,b] \to R^m$ 为 k 次连续可微，并且存在非零向量 v 与向量组 $T''(a), T'''(a), \cdots, T^{(k-1)}(a)$ 正交，则存在一点 $c \in (a,b)$，使得 $T^{(k)}(c)$ 与 v 正交。

证明　在 $[a,b]$ 上应用定理 1 可知，存在 $c_1 \in (a,b)$，使得 $T'(c_1)$ 与 v 正交；再在 $[a,c_1]$ 上应用定理 1 可知，存在 $c_2 \in (a,$

c_1)，使得 $T''(c_2)$ 与 v 正交；以此类推，最后在 $[a, c_{k-1}]$ 上应用定理 1 可知，存在 $c = c_k \in (a, c_{k-1})$，使得 $T^{(k)}(c)$ 与 v 正交。

定理2　设 $f: \overline{B}(x_0, r) \subset R^n \to R^m$，除了满足定理1的(Ⅰ)、(Ⅱ)两个条件外，还满足下列条件

(Ⅴ)存在非零向量 $v \in R^m$、$z_0 \in B(x_0, r)$，使得对任意的 $x \in S(x_0, r)$ 成立

$$v \cdot (f(x) - f(z_0)) \text{ 不变号}$$

则定理 1 的结论仍成立。

证明　不失一般性，可设

$$v \cdot (f(x) - f(z_0)) \leqslant 0, \forall\ x \in S(x_0, r)$$

即

$$v \cdot f(x) \leqslant v \cdot f(z_0), \forall\ x \in S(x_0, r) \tag{1}$$

令

$$M = \max\{v \cdot f(x): x \in \overline{B}(x_0, r)\},$$

$$g(x) = v \cdot f(x), \forall\ x \in \overline{B}(x_0, r).$$

由于 g 是 $\overline{B}(x_0, r)$ 上的多元连续函数，结合(1)式可知，g 在 $B(x_0, r)$ 内的一点 c 达到其在 $\overline{B}(x_0, r)$ 上的最大值，由引理 1 可知，$g'(c) = 0_{1\times n}$，即

$$v \cdot f'(c)u = 0, \forall\ u \in R^n$$

注1　若 $n = m = 1$，则定理 2 即为：设一元函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且存在 $z_0 \in (a, b)$，使得成立

(J)　$f(z_0) \geqslant \max\{f(a), f(b)\}$，或者

(JJ)　$f(z_0) \leqslant \min\{f(a), f(b)\}$，

则存在 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$。

注2　定理 1 与定理 2 的开球 $B(x_0, r)$ 可由 R^n 中的有界单连通子集所替代，结论仍成立。

推论 4 设一元函数 f 在$[a,b]$上可导，且 $f'(a)=f'(b)$，则存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

证明 令 $g(x)=f(x)-xf'(a)$，则 g 在$[a,b]$上可导，且 $g'(x)=f'(x)-f'(a)$。进而由已知条件 $f'(a)=f'(b)$ 得，$g'(a)=g'(b)=0$。因此，可设 $f'(a)=f'(b)=0$，令

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a)=0, & x=a\end{cases}$$

则 h 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且有 $h'(b)=-\dfrac{h(b)}{b-a}$。若 $h(b)=0$，即 $f(a)=f(b)$，那么由 $h(a)=f'(a)=0$，结合洛尔定理即知，存在 $c'\in(a,b)$ 使得 $h'(c)=0$，也就是

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

或者，应用注 1，任取 $z_0\in(a,b)$，都使得 $h(z_0)$ 满足注 1 中的条件(J) 或者(JJ)，也可得到结论。

若 $h(b)\neq 0$，由 $h(a)=0$，$h(b)h'(b)<0$，则由导数的定义可知，存在 $z_0\in(a,b)$ 使得 $h(z_0)$ 满足注 1 中的条件(J) 或者(JJ)，同样可得到结论。

下面将定理 1 与定理 2 应用到几何学上。

例 3 设 $f:\overline{B}(0,1)\subset R^2\to R^3$ 定义为

$$f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

并满足下列条件

(i) f 在 $\overline{B}(0,1)$ 上连续；

(ii) f 在 $B(0,1)$ 内可微；

(iii) 且存在 R^3 中的平面 $P:ax+by+cz=0$，使得对任意的$(u,v)\in S(0,1)$ 成立

$$f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in P$$

则存在$(u_0,v_0)\in B(0,1)$，使得在曲面G上$f(u_0,v_0)$处的切平面平行于平面P。这里，$G=\mathrm{im}f$，表示f的值域，或者表示$f(u,v)$的曲面。

证明 令$v_0=(a,b,c)$，则v_0表示平面P的法向量，由假设条件(iii)可知，对任意的$(u,v)\in S(0,1)$，都有v_0与$f(u,v)$正交，从而由定理1可知，存在$(u_0,v_0)\in B(0,1)$，使得v_0与向量组

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\ \text{正交}$$

另一方面，在G上$f(u_0,v_0)$处的切平面向量式参数方程为

$$f(u_0,v_0)+m\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)+n\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0),$$

这里m,n为参数。因此，切平面的法线与v_0平行，从而切平面平行与平面P。

例4 若将例3中的条件(iii)改为

(iiii) 存在R^3中的平面$P:ax+by+cz+d=0$，使得$G_0=f(S(0,1))$位于P的一侧，并在$B(0,1)$内存在一点(u_1,v_1)位于P的另一侧，则例3的结论仍成立。

证明 由假设条件(iiii)可知，对任意的$(u,v)\in S(0,1)$，成立

$$(a,b,c)\cdot(f(u,v))-f(u_1,v_1))\ \text{不变号}$$

那么由定理2即知结论成立。

具体地，取例4中的

$$f(u,v)=(u^2+v^2-u,u^2+v,u^2-v)$$

则

$$f(0,0)=(0,0,0),$$
$$G_0=\{(1-u,u^2+v,u^2-v):u^2+v^2=1\}$$

由于G_0中的点满足

$$1-u+u^2+v+u^2-v=(u-\frac{1}{2})^2+u^2+\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$$

因此，$f(0,0)$ 与 G_0 分别位于 $P:x+y+z=\frac{1}{2}$ 的两侧，这样由定理2的结果可知，存在 $(u_0,v_0)\in B(0,1)$ 使得 G 上 $f(u_0,v_0)$ 处的切平面平行平面 P。事实上容易计算出，$(u_0,v_0)=(\frac{1}{6},0)$。

最后，再举一个例子。

例5 设 $T:[a,b]\to R^3$ 为

$$T(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

T 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，并设 $A=T(a)$，$B=T(b)$。则对于任何包含线段 AB 的平面 P，都存在 $c\in(a,b)$，使得向量 $T'(c)$ 与平面 P 平行。特别，若平面 P 通过原点 $(0,0,0)$，则

$$T'(c)=(x'(c),y'(c),z'(c))$$

满足

$$x(a)(y(b)z'(c)-z(b)y'(c))+y(a)(z(b)x'(c)-x(b)z'(c))+z(a)(x(b)y'(c)-y(b)x'(c))=0$$

证明 取平面 P 的法向量 v_0，则 v_0 与 AB 正交，即 $v_0\cdot T(a)=v_0\cdot T(b)$，由推论1即知，存在 $c\in(a,b)$，使得 v_0 与 $T'(c)$ 正交，从而 $T'(c)$ 与平面 P 平行。特别，若平面 P 通过原点 $(0,0,0)$，那么，平面 P 即为 A 与 B 两个向量组成的平面，从而 A 与 B 的向量积 $A\times B$ 即为平面 P 的法向量。因此，$A\times B$ 与 $T'(c)$ 正交，即

$$(T(a)\times T(b))\cdot T'(c)=0$$

写成分量形式即为结论。

注3 上述关于向量值函数的洛尔定理在无穷维情形下不再成立，参见[4]。

参考文献

[1]Marden M. The search for a Roell's theorem in the complex domains. Amer. Math. Monthly, 1985, 92: 643 ~ 650。

[2]Evard J C and Jafari F. A complex Roll's theorem. Amer. Math Monthly, 1992, 99: 858 ~ 861.

[3]Furi M and Martelli M. A multidimensional version of Roell's theorem. Amer. Math. Monthly, 1995, 102: 243 ~ 249.

[4]Ferrer J. Roell's theorem fails in l_2, Amer. Math. Monthly, 1996, 103: 161 ~ 165。

[5] 张志军. 多变元情形下的洛尔定理及其应用. 西北师范大学学报(自然科学版), 1998.

第三节　一元函数微分学中若干基本和典型的问题

本节讨论如下问题

1. **解函数方程的一种简单方法**
2. **一类迭代数列的渐近状态**
3. **不用求导而将几类函数展成泰勒级数**
4. **用积分方法证明洛必达法则**
5. **得到洛必达法则的几何途径**
6. **导数的一个等价定义**
7. **关于一类函数的右导数**
8. **关于中值定理"中间点"的渐近性**

3.1 解函数方程的一种简单方法

函数方程是一个广阔而应用广泛的课题，Hilbert 著名的关于未解问题的演讲中的第五个问题第二部分专门谈到该问题。本节我们将不采用通常教材中的柯西方法，即先在有理点确定未知函数的值，然后应用连续性延拓到实数范围；而介绍目前文献中普遍使用的一种简单方法，并将其中应用二阶线性常微分方程的解法改为初等微积分法，这样该方法仅仅用到微分、积分的一些基本知识，下面以达朗贝尔函数方程为例，其它函数方程可类似的解；同时，我们以未知函数为连续作为假设条件，对未知函数为黎曼可积、勒贝格可积甚至其它可积类，相信结合《实变函数》等课程后，这个问题会得到很好地解答。

达朗贝尔函数方程为：对任意的 $x,y\in R$，求满足

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{1}$$

的连续函数 $f(x)$。

解 在(1) 中，取 $x=y=0$，得

$$f(0)=[f(0)]^2$$

若 $f(0)=0$，在(1) 中，取 $y=0$，得

$$f(x)=0,\forall\ x\in R$$

若 $f(0)=1$，在(1) 中，取 $x=0$，得到 $f(x)$ 为偶函数。下面分两步解(1).

Ⅰ. 若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 无穷次连续可微。

证明 对任意的 $t>0$，(1) 的两边关于 y 从 $-t$ 到 t 积分，得

$$2\int_{-t}^{t}f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_{-t}^{t}f(x+y)\mathrm{d}y+\int_{-t}^{t}f(x-y)\mathrm{d}y$$

即

$$2f(x)\int_{-t}^{t}f(y)\mathrm{d}y=2\int_{x-t}^{x+t}f(s)\mathrm{d}s=2\int_{x-t}^{x+t}f(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

由 $f(x)$ 为连续的偶函数，且由 $f(0)=1$ 可知，存在 $t>0$，使得

$$\int_{-t}^{t} f(y)\mathrm{d}y > 0$$

固定这样的 t，由微积分基本知识可知，(2) 的右边关于 x 可微。因此，(2) 的左边 $f(x)$ 可微；从而得到(2) 的右边关于 x 二次可微，进而导致(2) 的左边 $f(x)$ 二次可微。以此类推，得到 $f(x)$ 无穷次连续可微。

Ⅱ. 现在应用 Ⅰ 的结果

(1) 两边关于 y 求二次导，得

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$

取 $y=0$，得

$$f''(x)=f''(0)f(x) \tag{3}$$

为方便起见，令 $f''(0)=k$。注意到，$f(x)$ 在 R 内为偶函数，从而 $f'(x)$ 为奇函数，而奇函数必经过原点，即 $f'(0)=0$，这样我们只须解

$$\begin{cases} f''(x)=kf(x), x\in R \\ f(0)=1, f'(0)=0 \end{cases} \tag{4}$$

现在再不涉及二阶线性常微分方程的理论下，解(4)。

若 $k=0$，则 $f'(x)$ 恒为常数，即 $f(x)$ 为线性函数，结合初值得到，$f(x)$ 恒为 1。

若 $k<0$，令 $b=\sqrt{-k}$，$s=bx$，则(4) 中的方程变为

$$y''+y=0 \tag{5}$$

其中，$y=f(\frac{s}{b})$.

(5) 两边同乘以 y' 并积分，得

$$\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{2}y^2=\text{正常数}=\frac{1}{2}C^2\text{（否则与(4) 矛盾）}$$

则

$$y'=\pm\sqrt{C^2-y^2}$$

取 $C>0$,得

$$\int \frac{1}{\sqrt{C^2-y^2}}\mathrm{d}y=\pm s+C_1,$$

$$y=C\sin(\pm s+C_1),$$

$$f(x)=C\sin(\pm bx+C_1)$$

即然 $f(x)$ 在 R 内为偶函数,结合初值,得

$$f(x)=\cos(\sqrt{-k}x)$$

若 $k>0$,令 $b=\sqrt{k}$,$s=bx$,则(4) 中的方程变为

$$y''-y=0 \tag{6}$$

(6) 两边同乘以 y' 并积分,得

$$\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}y^2=\text{常数}=\pm\frac{1}{2}C^2, C\text{ 为常数}$$

$$y'=\pm\sqrt{y^2\pm C^2}$$

即 $C>0$,得

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2\pm C^2}}\mathrm{d}y=\pm s+C_1,$$

$$\ln|y+\sqrt{y^2\pm C^2}|=\pm s+C_1$$

由双曲函数的反函数可知

$$\operatorname{arsh}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

$$\operatorname{arch}y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$$

即然 $f(x)$ 在 R 内为偶函数,结合初值,得 $y=\operatorname{ch}s$,即

$$f(x)=\operatorname{ch}(\sqrt{k}x)$$

总之,达朗贝尔函数方程的解为

$$f(x)\equiv 0, f(x)\equiv 1,$$

$$f(x)=\operatorname{ch}(\sqrt{k}x), f(x)=\cos(\sqrt{-k}x).$$

其中,k 为任意的负常数或正常数。

3.2 一类迭代数列的渐近状态

本节给出一类数列的渐近状态，同时给出数列收敛与发散的一个判别法则。这是应用导数研究函数的一个典型例子。

我们先从具体例子开始。

设 r 为正常数，$c_0 \geqslant 0$，考虑迭代数列

$$c_{n+1} = f(c_n), n = 0,1,2\cdots \tag{7}$$

其中，$f(x) = x + r - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$。

问题是

(i) 对哪些 r，$\{c_n\}$ 收敛？

(ii) 如果 $\{c_n\}$ 收敛，记其极限为 $\bar{c}(\bar{c} \neq c_0)$，证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - \bar{c}}{c_n - \bar{c}} \tag{8}$$

存在并求出极限值。

(iii) 给出当 n 趋于无穷大时，$\{c_n\}$ 渐近状态的一种表达式。

(7) 无论是在现代数学还是在生物、力学、大气等学科都起着最基本的作用。我们将在第三章详细讨论。

容易证明 $f(x)$ 具有下列性质

1) $f:[0,\infty] \to [r,\infty]$ 为连续可微的严格单调递增函数；

2) 当 $r \in (0,1)$ 时，方程 $f(c) = c$ 有唯一实根 $\bar{c} = \dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}$；而当 $r \geqslant 1$ 时，方程 $f(c) = c$ 没有实根。因此，如果 $r \geqslant 1$，则(7) 中的数列 $\{c_n\}$ 发散。事实上，有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \tag{9}$$

这是因为当 $r \geqslant 1, c_0 \geqslant 0$ 时，由归纳法以及

$$\frac{c_n}{\sqrt{1+c_n^2}} < 1 \leqslant r, \frac{c_n}{\sqrt{1+c_n^2}} \leqslant c_n$$

可得

$$1 \leqslant c_n < c_{n+1}$$

即$\{c_n\}$严格单调递增。由性质2)可知，当$r \geqslant 1$时，$\{c_n\}$发散。因而(9)成立。

那么，在这种情形下，如何表示$\{c_n\}$的渐近状态呢?

既然当$r > 1$时，有

$c_{n+1} \geqslant c_n + r - 1$

由归纳法容易得到

$$c_{n+1} \geqslant n(r-1)$$

而且，由(9)，结合(7)式本身和泰勒展式，有

$$1 - \frac{c_n}{\sqrt{1+c_n^2}} = 1 - [1 + c_n^{-2}]^{-\frac{1}{2}} = O(c_n^{-2})$$

于是

$$c_{n+1} = c_n + r - 1 + O(n^{-2})$$

从而，得到

$$c_n \sim (r-1)n$$

当$r = 1$时，不能直接估计出$\{c_n\}$的渐近行为，但由下列引理结合泰勒展式可得，$\{c_n\}$的渐近行为：$c_n n^{-\frac{1}{3}} \sim (1.5)^{1.3}$

引理1 设$c_0 \geqslant 0$，考虑迭代数列$c_{n+1} = f(c_n), n = 0,1,2,\cdots$。如果$f:[0,\infty) \to (0,\infty)$为连续的、单调递减函数，并记$y(x)$为下列初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), x > 0 \\ y(0) = c_0 \end{cases}$$

在$[0,\infty)$的唯一整体解，则当$n \to \infty$时，有

$$c_n = y(n) + O(1)$$

引理的证明、应用，参见文献[13]。

再考虑 $r \in (0,1)$ 的情形。由性质 1)、2) 和归纳法容易证明

$$\begin{cases} 当 c_0 < \bar{c} 时，\{c_n\} 单调递增趋于 \bar{c}; \\ 当 c_0 > \bar{c} 时，\{c_n\} 单调递减趋于 \bar{c}; \\ 当 c_0 = \bar{c} 时，c_n \equiv \bar{c}; \end{cases}$$

并且，当 $\bar{c} \neq c_0$ 时，应用微分中值定理可直接得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - \bar{c}}{c_n - \bar{c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n) - f(\bar{c})}{c_n - \bar{c}}$$

$$= f'(\bar{c}) = 1 - (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \in (0,1) \qquad (10)$$

即当 $n \to \infty$ 时，应用等比数列的性质，可直接得到

$$c_{n+1} - \bar{c} \sim f'(\bar{c})(c_n - \bar{c})$$

$$c_n \sim [f'(\bar{c})]^{n-N_0}(c_{N_0+1} - \bar{c}) + \bar{c} \qquad (11)$$

这里，N_0 表示足够大的自然数。

由于上述讨论的启示，我们得到数列收敛与发散的一个判别法则。

定理 1　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续可微，并且方程 $f(c) = c$ 有实根 $\bar{c}$，$f'(\bar{c}) \neq 1$，则存在 $\bar{c}$ 的一个邻域区间 I，使得迭代数列

$$c_0 \in I, c_{n+1} = f(c_n), n = 0,1,2,\cdots \qquad (12)$$

具有特性：

(J) 如果 $|f'(\bar{c})| > 1$，则 $\{c_n\}$ 必不收敛到 $\bar{c}$；

(JJ) 如果 $|f'(\bar{c})| < 1$，则 $\{c_n\}$ 收敛到 $\bar{c}$，且(10)、(11) 成立。

证明　由于 $|f'(x)|$ 连续，从而当 $|f'(\bar{c})| > 1$（或者 $|f'(\bar{c})| < 1$）时，存在 $\delta > 0$ 以及 $\rho_0 > 1$（或者 $\rho_0 < 1$），使得在 $I = (\bar{c} - \delta, \bar{c} + \delta)$ 内成立

$$\rho_0 \leqslant |f'(x)| \text{（或者 } \rho_0 \geqslant |f'(x)|\text{）}$$

先证(J)　因 $\bar{c} \neq c_0$，并且在 $I = (\bar{c} - \delta, \bar{c} + \delta)$ 内成立：$1 < \rho_0 \leqslant |f'(x)|$，于是由归纳法容易得到 $c_n \neq \bar{c}$。因此，函数

$|f'(x)|$ 在 I 内严格单调递增，且由已知条件，得

$$|c_{n+1}-\bar{c}| = |f(c_n)-f(\bar{c})| = |f'(\theta_n)||c_n-\bar{c}|$$
$$> |c_n-\bar{c}| > |c_0-\bar{c}| > 0$$

这里，θ_n 介于 c_n、$\bar{c}$ 之间。

故 $\{c_n\}$ 必不收敛到 $\bar{c}$。

再证(JJ)　既然在 $I=(\bar{c}-\delta,\bar{c}+\delta)$ 内成立：$1>\rho_0\geqslant |f'(x)|$，从而有

$$|c_{n+1}-\bar{c}| = |f(c_n)-f(\bar{c})| = |f'(\theta_n)||c_n-\bar{c}|$$
$$\leqslant \rho_0|c_n-\bar{c}| \leqslant \rho_0^{n+1}|c_0-\bar{c}|$$

故 $\{c_n\}$ 收敛到 $\bar{c}$，且同样可知成立(10)、(11)。这里 θ_n 介于 c_n、$\bar{c}$ 之间。

注 1　在定理 1 中，如果 $|f'(\bar{c})|=1$，那么我们不能断定 $\{c_n\}$ 收敛还是发散。

例 1　在(12)中，取 $f(x)=e^x-1, x\in R$。

应用基本事实

$$e^x-1>x, \forall\ x\neq 0$$

则方程 $e^x-1=x$ 只有一个实根 $\bar{c}=0$，并且 $|f'(\bar{c})|=1$。容易证明：对任意的 $c_0>0$，迭代数列 $\{c_n\}$ 必发散于 $+\infty$；当 $c_0\equiv 0$ 时；$c_n\equiv 0$；而对任意的 $c_0<0$，$\{c_n\}$ 严格单调递增趋于 0。

3.3　不用求导而将几类函数展成泰勒级数

本节我们不用导数而用牛顿一莱布尼兹公式证明几个常用不等式和将几类函数展成泰勒级数。

(Ⅰ) 对任意的 $x\geqslant 0$，$f(t)=\cos t$ 在 $[0,x]$ 上连续且满足

$$\cos t \leqslant 1 \tag{13}$$

(13) 两边关于 t 在 $[0,x]$ 积分，得

$$\sin x \leqslant x \tag{14}$$

(14) 中将 x 换成 t 再在 $[0,x]$ 上积分，得

$$1-\cos x\leqslant\frac{1}{2}x^2$$

以此类推，得

$$x-\sin x\leqslant\frac{1}{3!}x^3$$

与(14)结合起来，得

$$x-\frac{1}{3!}x^3\leqslant\sin x\leqslant x$$

再类推一次，得

$$x-\frac{1}{2}x^2\leqslant\cos x\leqslant 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4$$

继续下去，得到

$$\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|\leqslant\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leqslant\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

为展成泰勒级数，需要一个基本事实(很容易用 $\varepsilon-\delta$ 语言证实)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

其中 a 为常数。

这样，令 $n\to\infty$，立即得到

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

而且由奇偶性可知，上面两个泰勒级数对任意的 $x\in R$ 均成立。

(Ⅱ) 对任意的 $x\geqslant 0$，$f(t)=e^{-t}$ 在 $[0,x]$ 上连续且满足

$$0<e^{-t}\leqslant 1$$

重复(Ⅰ)的过程，得

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

(Ⅲ) 对任意的 $b\geqslant 0$，$f(t)=e^t$ 在 $[0,b]$ 上连续且满足

$$1\leqslant e^t\leqslant e^b$$

重复上述过程，得

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

由 b 的任意性，上式对任意的 $x\geqslant 0$ 均成立。

由(Ⅱ)和(Ⅲ)可以得到几个常用不等式。这里略去。

3.4 用积分方法证明洛必达法则

本节我们不用柯西微分中值公式而用牛顿—莱布尼兹公式证明洛必达法则。

洛必达法则(Ⅰ) 设存在 $M>0$，使得 $f(x)$、$g(x)$ 满足下列条件

(i) 在 $[M,\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$；

(ii) 对任意的 $x\in[M,\infty)$，$g'(x)\neq 0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'x}{g'(x)}=l(\text{或}\ \infty)；$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\quad(\text{或}\ \infty)$$

证明 不失一般性，可设 l 有限($l=\infty$ 可同样证明)以及对任意的 $x\in[M,\infty)$，$g'(x)>0$(由达布定理保证)。从而 $g(x)$ 在 $[M,\infty)$ 严格单调递增。由(i)可知，存在 $M_1\geqslant M$，使得 $g(x)$ 在 $[M_1,\infty)$ 恒为正，再由(ii)可知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\, M_2\geqslant M_1$，使得

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon,\forall\ x\geqslant M_2$$

即

$$|f'(x)-lg'(x)|<\varepsilon g'(x),\forall\ x\geqslant M_2$$

于是，任取 $a,b\in[M_2,\infty)$，$a<b$，成立

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b[f'(x)-lg'(x)]dx\right|=|f(b)-f(a)-l(g(b)-g(a))|\\&\leqslant\int_a^b|f'(x)-lg'(x)|dx\leqslant\int_a^b\varepsilon g'(x)\mathrm{d}x=\varepsilon(g(b)-g(a))\end{aligned}\tag{15}$$

两边同除以 $g(b)$，即得

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)}-\frac{f(a)}{g(b)}-l\left(1-\frac{g(a)}{g(b)}\right)\right|\leqslant\varepsilon\left(1-\frac{g(a)}{g(b)}\right)<\varepsilon$$

取 b 足够大，使得

$$\frac{|f(a)|}{g(b)}<\varepsilon,\quad\frac{g(a)}{g(b)}l<\varepsilon$$

因此，得到

$$\left|\frac{f(b)}{g(b)}-l\right|\leqslant3\varepsilon$$

结论获证。

注 1　若将 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$，上述方法仍适用。而当 $x\to x_0$ 时，作变量代换 $F(x)=f(x_0+\frac{1}{x})$，$G(x)=g(x_0+\frac{1}{x})$，则问题转化为 $x\to\infty$ 的情形。

注 2　对 $\frac{0}{0}$ 型上述方法仍然适用，即若下列条件成立

(iii) $f(x)$、$g(x)$ 在 $[M,\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$；

(iiii) 对任意的 $x\in[M,\infty)$，$g'(x)\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$(或 ∞)；

则　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$(或 ∞)

证明　由于对任意的 $x\in[M,\infty)$，$g'(x)\neq0$，同样道理，不妨设 $g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $[M,\infty)$ 严格单调递增，由(iii) 可知，存在 $M_1\geqslant M$，使得 $g(x)$ 在 $[M_1,\infty)$ 恒为负，在(15) 中，令 $b\to+\infty$，
则有

$$|lg(a)-f(a)|\leqslant\varepsilon(-(g(a)))$$

其中，$a, b \in [M_2 + \infty)$
即

$$|\frac{f(a)}{g(a)} - l| \leqslant \varepsilon$$

结论获证。其它情形同注1。

3.5 得到洛必达法则的几何途径

本节我们介绍由范先信译、袁向东校的G. Gorni的这篇文章(原文发表在Amer. Math. Monthly，1990年第97卷；译文发表在《数学译林》1991年第10卷第3期)。

1. 引言

对计算极限的L'Hopital法则，微积分教科书通常给出的解释很少。L'Hopital法则最简单的情形几乎不需要证明：如果$f(0) = g(0) = 0$，f、g可微，$g'(0) \neq 0$，那么

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}}{\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}} \to \frac{f'(0)}{g'(0)} \text{ 当 } x \to 0 \text{ 时。}$$

当我们假定函数在极限点x_0的邻域内可微，而不一定在x_0本身可微，如在$x_0 = \infty$的情形，问题就变得复杂了。此时，L'Hopital法则的标准证明变成技巧性的，不能给读者提供任何几何上的洞见。我们将要提出的方法，试图对该问题的这一方面作一些阐明。

考虑函数$f \cdot g^{-1}$的想法并不新颖，但是我们不知道以前有人利用过它的几何含义。我们也将为序列情形下的“法则”进行平行的处理提供一个线索。

2. 初步审视

跟$f \pm g$和$f \cdot g$这几种容易的情况不同，知道了$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，本质上未必总能确定$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ 存在（先不管它取什么值）。当知道了$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ 时，就产生两种难于处理的情形。

为什么会发生这种情况呢？对 x 的一个值，让我们在笛卡儿 $t-u$ 平面上选取点$(g(x),f(x))$（图 7）。当 $g(x)\neq 0$ 时，比值 $f(x)/g(x)$ 就是连接原点和点$(g(x),f(x))$ 的直线的斜率。如果我们正好知道当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 趋近于零，那么点$(g(x),f(x))$ 就能随意地靠近原点，但是靠近的方式表现在前述那一直线的斜率上。任意想象一种比值函 $x\to f(x)/g(x)$ 的状态，我们可以在几何上容易想象出怎样以比值 f/g 精确地确定 f 和 g（两者都是无穷大或无穷小）。

所以，为了知道在极限情形下，f/g 的性状，我们可能需要搜集比只知道 f 和 g 的极限值更多的信息。

在 f 和 g 上加上怎样的一类限制，才可保证比值 f/g 趋于极限 $\lambda\in R$ 呢？让我们暂时将 x 看作时间，考虑动点$(g(x),f(x))$ 的“轨迹”。在 0/0 的情形，如图形所提示的，“$f/g\to\lambda$”似乎意味着，直线 $u=\lambda t$ 是轨迹在原点处的切线（图 8）。这样的解释对于 ∞/∞ 情形无法用图表示。

现在，我们的问题就是要把与这种轨迹“相切”的概念精确化。如果这一轨迹是一个函数 $t\to u$ 的图象本身，这一任务是容易的，因为那时能够运用熟知的普通微积分学的技巧。举例来说，当 g 是一对一的时候就出现上述情况。（我们不打算运用充要条件 $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$。）那时这一轨迹的确是 $h=f\cdot g^{-1}$ 的图象。但一对一尚不充分。如果允许我们打乱 $x\to g(x)$ 的次序来看，那么原点（0/0 情形）可能被由完全与 x_0 不同的 x 所对应的一大群点$(g(x),f(x))$ 所包围。在将(g,f) 转到 h 的过程中，应当放弃“$x\to x_0$”这一概念。如果 g 是单调的

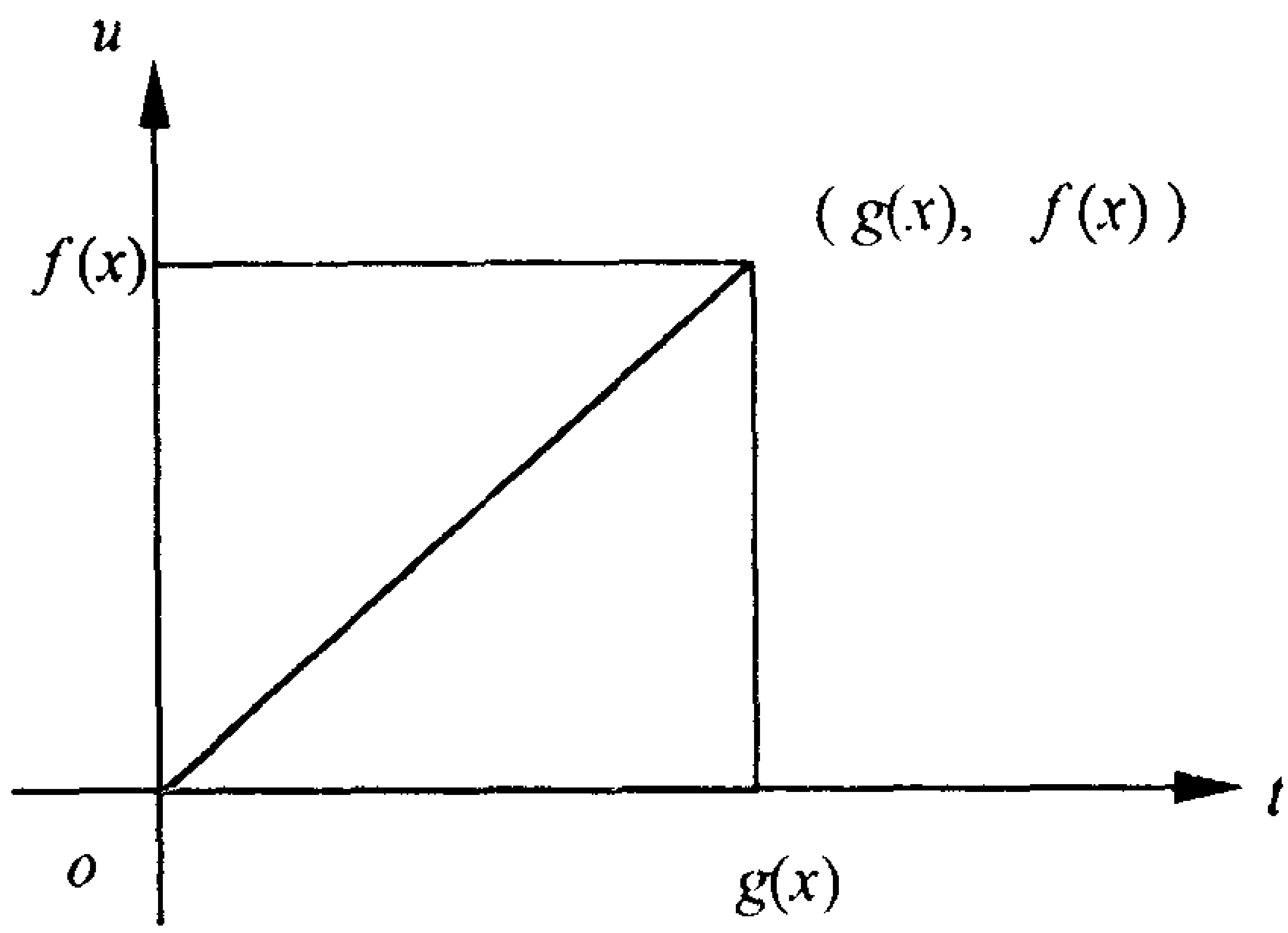


图 7

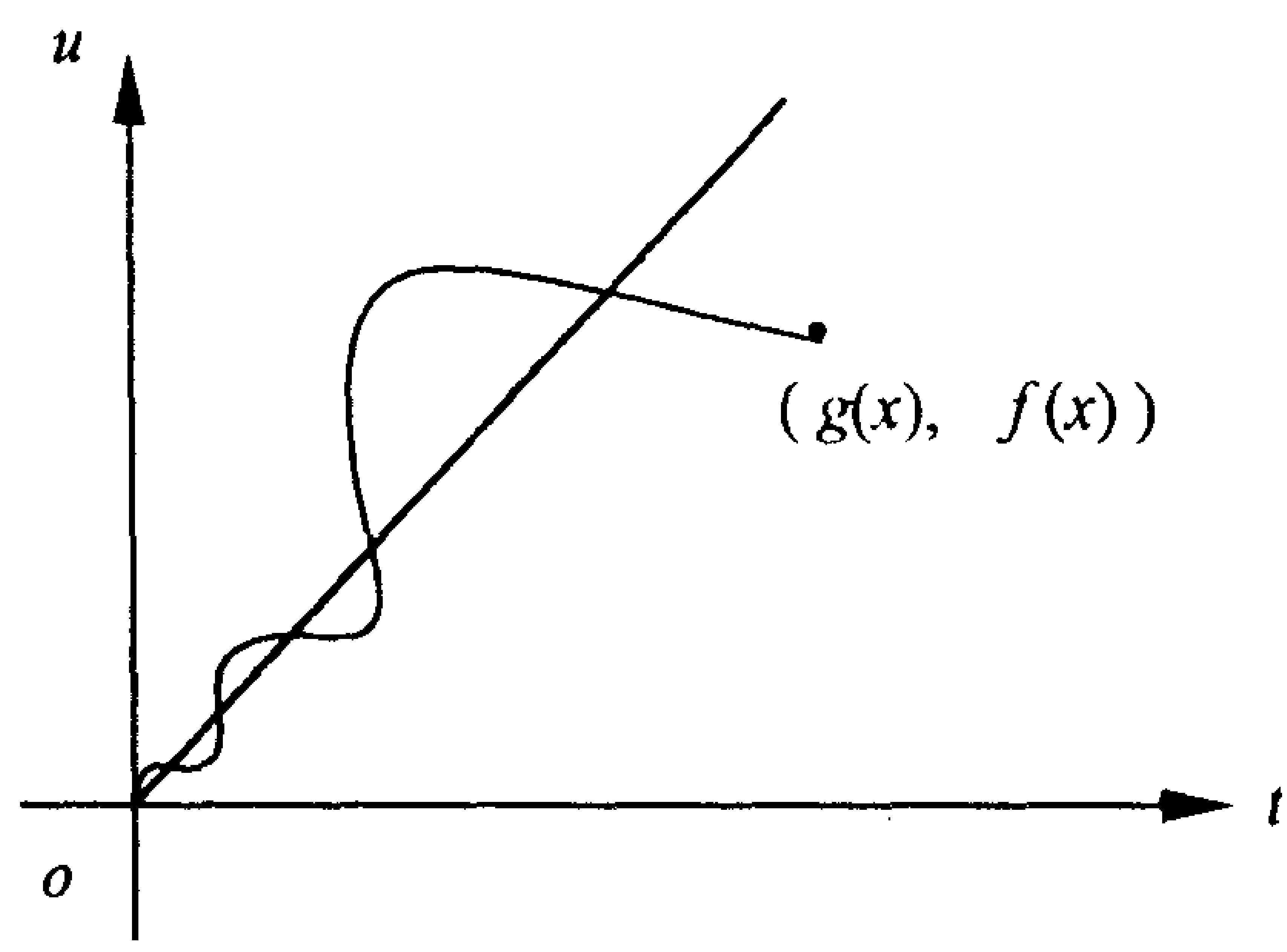


图 8

($\lim_{t\to 0} g^{-1}(t) = x_0$ 已经足够了)，就不会发生这种情形。

让我们总结一下到此为止所提出的想法：如果 g 是一对一和单调的，那么 f/g 的极限(0/0 情形)类似 $h'(0)$，这里函数 h 定

义为 $h \equiv f \cdot g^{-1}$。在 ∞/∞ 的情形，我们得到 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ 与 $\lim\limits_{t \to \infty} h(t)/t$ 等价。

有一个细节（0/0 情形）需要说明：从一开始，我们就可以假设如果 x 足够接近 x_0 时有 $g(x) \neq 0$，这正好使得 $(g(x), f(x))$ 有意义。此时，严格说来，h 在 $t = 0$ 处是没有定义的。但是，当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于零，所以，我们可以令

$$h(0) = 0 = \lim_{t \to 0} h(t) = \lim_{t \to 0} f(g^{-1}(t)) = \lim_{x \to x_0} f(x)。$$

在陈述 L'Hopital 法则之前，我们先问：什么样的条件可以保证 $h'(t)$ 至少在 $t \neq 0$ 时存在呢？因为 $h = f \cdot g^{-1}$，假定 f 和 g^{-1} 可微是很自然的；当 g 在一个区间内定义、单调、可微，$g'(x) \neq 0$，则 $(g^{-1})'$ 也存在。如果上述所有条件都满足，我们可以计算

$$h' = (f \circ g^{-1})' = (f' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})' = (f' \circ g^{-1}) = \frac{f'}{g'} \circ g^{-1},$$

$$h' \circ g = \frac{f'}{g'}, \text{即 } h'(g(x)) = \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{16}$$

这里的符号“$\circ$”是表示函数的合成运算，即 $(f \circ g^{-1})(t) = f(g^{-1}(t))$，所以，这里求导数是求复合函数的导数。

如果我们考虑到当给 x 一个增量 dx（图 9）时，点 $(g(x), f(x))$ 所发生的情况，上述公式（16）就毫不奇怪了。

3. L'Hopital 法则

设 J 是 R 中一非空开区间，$x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 是它的两个端点之一，f、g：$J \to R$ 是两个可微函数，g 严格单调，且对所有 $x \in J$，$g'(x) \neq 0$。假定以下两个条件中的随便哪一个得到满足：

(i) 当 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to 0$，$g(x) \to 0$；

(ii) 当 $x \to x_0$ 时，$g(x) \to \pm\infty$（没有关于 f 的假设）

那么下述结论成立：

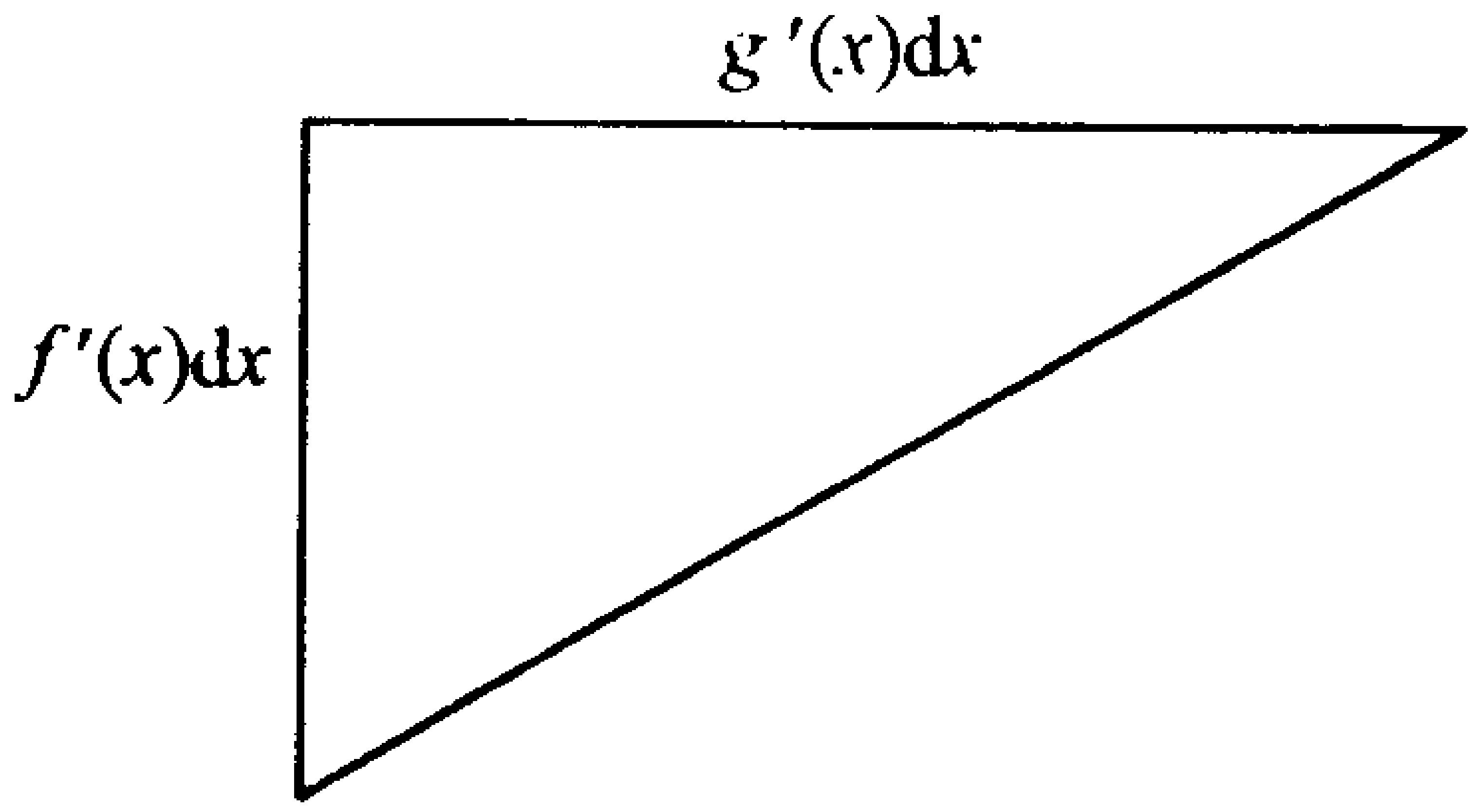


图 9

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在并等于 $\lambda\in R\cup\{\pm\infty\}$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 存在并等于 }\lambda。\tag{17}$$

证 在假设中没有限定 $g(x)>0$，如果必要的话，可改变 f 和 g 两者的符号。因为 g 是连续的，$I=g(J)$ 也是一个区间。因为 g 是单调的，在情形(i)，I 的端点之一是 0；在情形(ii)，I 的端点之一是 $+\infty$。函数 $h=f\circ g^{-1}$ 在 I 上有定义、可微，且具有导数 $h'=(f'/g')\circ g^{-1}$。

首先让我们考虑较易的情形(i)。根据连续性，我们可以将 h 的定义开拓到 $h(0)=0$。对于任何 $x\in J$，我们可以在区间$[0,g(x)]$上(图 10) 对 h 应用 Lagrange 中值定理，

$$\frac{h(g(x))-h(0)}{g(x)-0}=h'(\xi),\xi\in(0,g(x)),\tag{18}$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(g^{-1}(\xi))}{g'(g^{-1}(\xi))}.\tag{19}$$

并且，$g^{-1}(\xi)$ 位于 x 和 x_0 之间，因为 g 是单调的(在我们的假设中 g 是递减的，但是不影响证明的一般性)。所以，如果我们知道当 $x\to x_0$ 时，$f'(x)/g'(x)$ 趋于 λ，那么，每当 x(从而 $g^{-1}(\xi)$

也）足够接近 x_0，我们就得到，(19) 式两边对应相同 x 的值就能随意地接近 λ。注意：公式(17) 中出现的 λ 就是 $h'(0)$。

因为我们没有"在无穷远处的导数 $h'(+\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}h(t)/t$ 的概念，对情形(ii) 需要更多的诀窍。

我们说 $f(x)/g(x)\to\lambda\in R$($\lambda=\pm\infty$ 这种情形较容易) 意味着，对任意选定的 $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$，我们可以保证，当 x 充分接近 x_0 时，点 $(g(x),f(x))$ 总位于两条半直线 $u=\lambda_1 t$ 和 $u=\lambda_2 t\ (t>0)$ 之间。

如果我们仅仅知道 $f'/g'\to\lambda$，我们怎么能得到上述那样一个结论呢?让我们选取 $\lambda_1<\mu_1<\lambda<\mu_2<\lambda_2$，$M\in J$ 使得

$$(x\text{ 在 }M\text{ 和 }x_0\text{ 之间})\Rightarrow\mu_1\leqslant\frac{f'}{g'}\leqslant\mu_2 \tag{20}$$

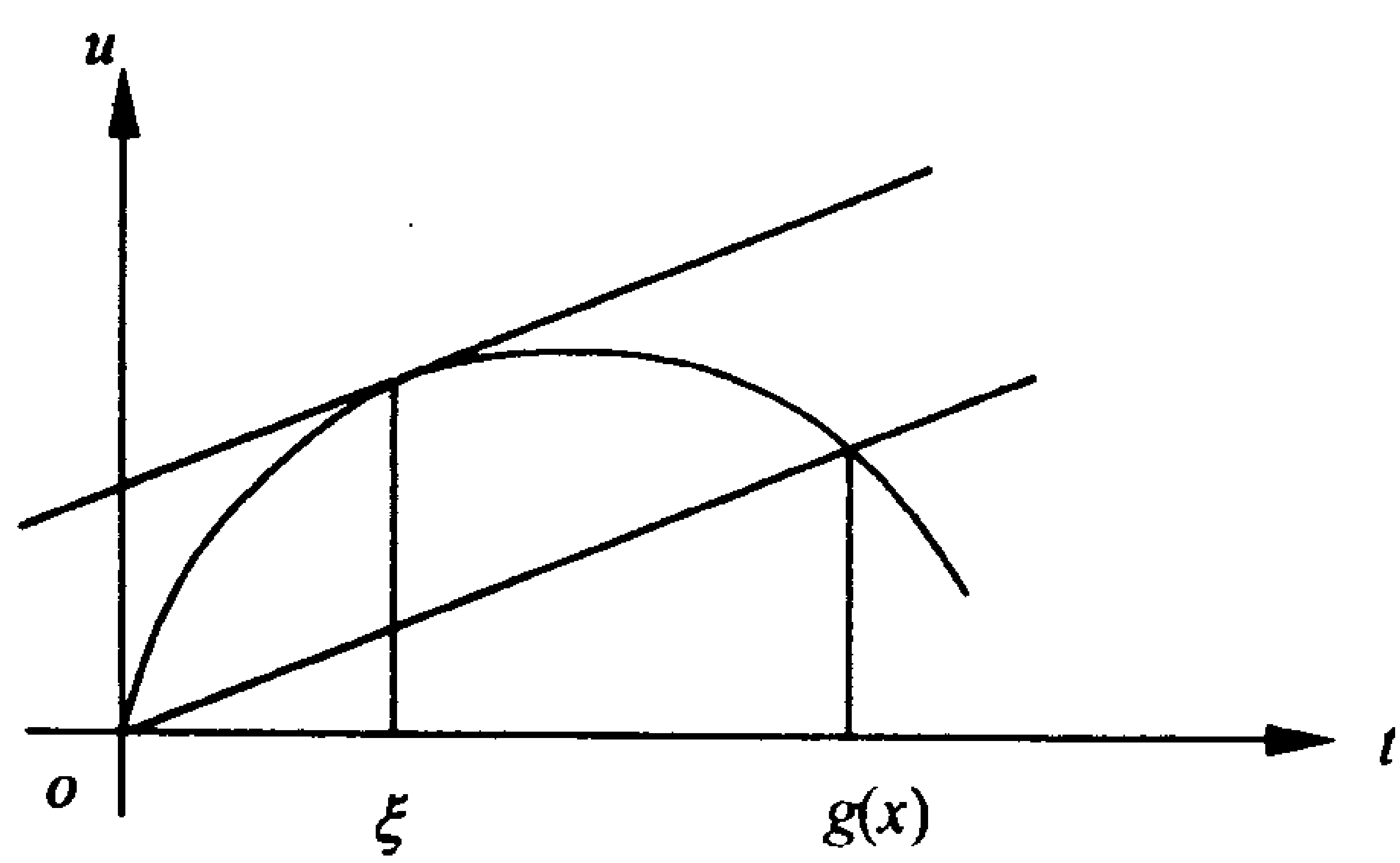


图 10

如果我们在 $[g(M),g(x)]$ 上对 h 使用中值定理，我们将看到对 $t\geqslant g(M)$，h 的图象位于图 11 中的阴影区域之内。根据各条半直线之间的关系，我们容易直接用肉眼(或从形式上) 验

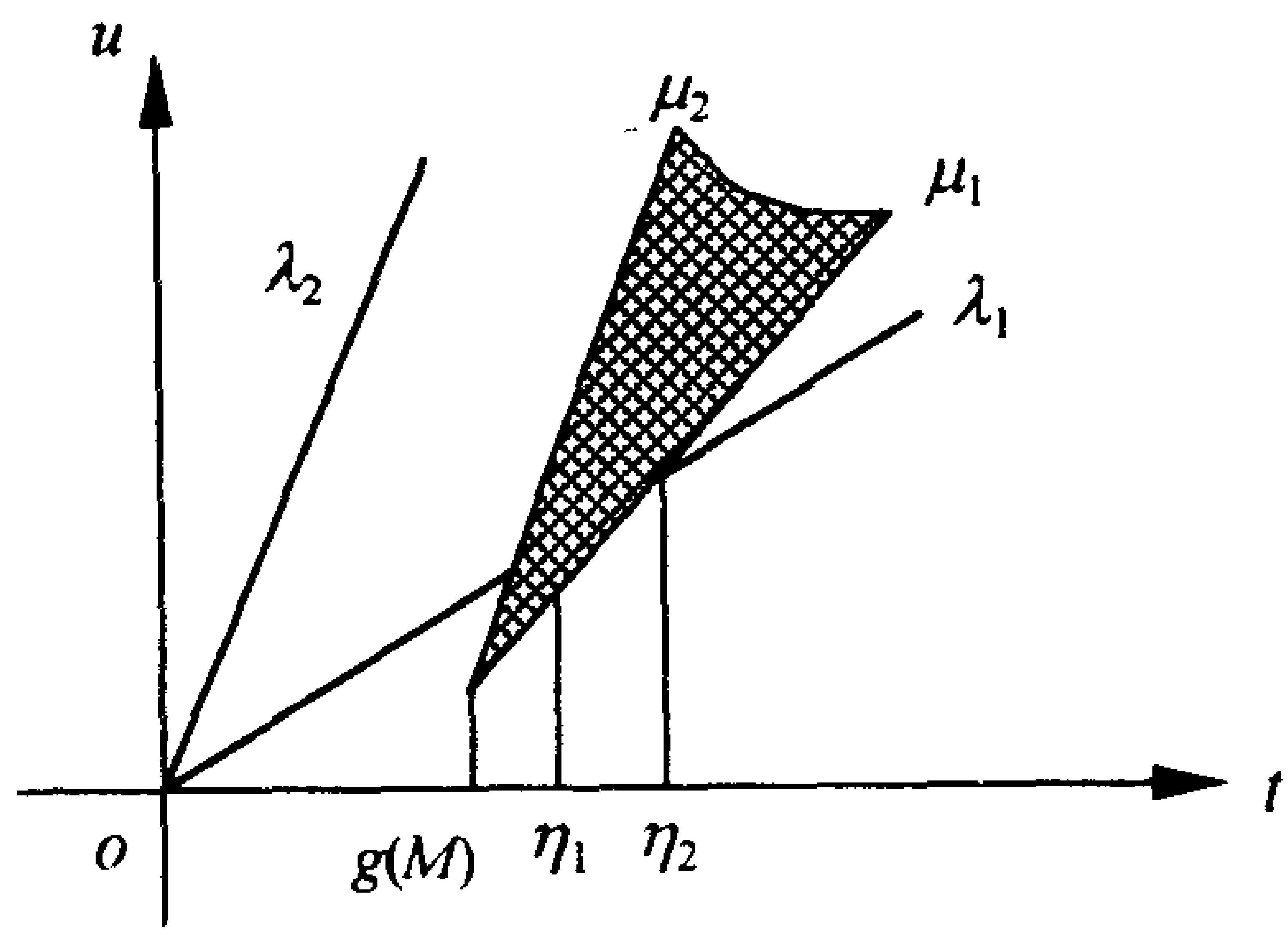


图 11

证，对 $t \geqslant \bar{t} = \max\{\eta_1, \eta_2\}$，$h$ 的图象（即对 $x \geqslant M$ 的点 $(g(x), f(x))$）落在直线 $u = \lambda_1 t$ 和直线 $u = \lambda_2 t$ 之间，这就是我们的目的所在。

4. 推广与反例

我们可以稍微减弱 $g'(x) \neq 0$ 这一假设。假定 g 仍然是严格单调的，仅在一些彼此孤立的点（这些点可能群集于 x_0 附近）处 $g'(x) = 0$；$f'(x)$ 也在这些点处等于零。最后，假定函数 $x \to f'(x)/g'(x)$ 在所有这些点处具有限值。那么，根据连续性，f'/g' 可开拓成函数 $m: J \to R$，结果 h 仍然是可微的，并且有 $h' = m \circ g^{-1}$。从轨迹的观点来看，情况是 h 在 I 上可微但当“时间”流逝时，$(g(x), f(x))$ 点的运动可能慢下来、暂停，又在某一瞬间开始光滑地运动。如果在公式(17)中用 m 代替 f'/g'，L'Hopital 法则仍然有效。

如果 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在某些点处等于零，由于在 f'/g' 中消去一个公因子，留下一个无害的函数 m，它至少在 $f'(x)$ 和

$g'(x)$ 等于零的那些点是连续的，那么我们就可以应用上述推广。当然我们必须检验 $g'(x)$ 的确不改变符号（即 g 是单调的）。

如果取消 g 是严格单调的这一假设，我们的证明就失效了，因为不再存在适当的 h。但是，若知道没有单调性，公式(16) 成立无望，我们也就安心了。考虑图 12，我们在两条不同的半直线之间画一条锯齿形轨迹，它在与半直线的交点处（可认为动点在这里暂停，并又从这里向相反的方向开始光滑的运动）具有水平方向的尖点。当点趋向原点(0,0) 或无穷远点时，锯齿形振荡沿两条半直线在垂直方向的间距应该以如下方式缩小，即轨迹的斜率在两个方向都趋于零（做到这一点并无更多的困难）。从分析上看，$g'(x)$ 在整个过程中无限多次改变符号，在尖点处 $f'(x)=g'(x)$，而通过比值 $f'(x)/g'(x)$ 将零抵消，得到一个在尖点处等于零，在 J 的两个端点处趋于 0 的函数。但 f/g 仍然没有极限，因为它不停地在那两条直线的斜率之间振荡。

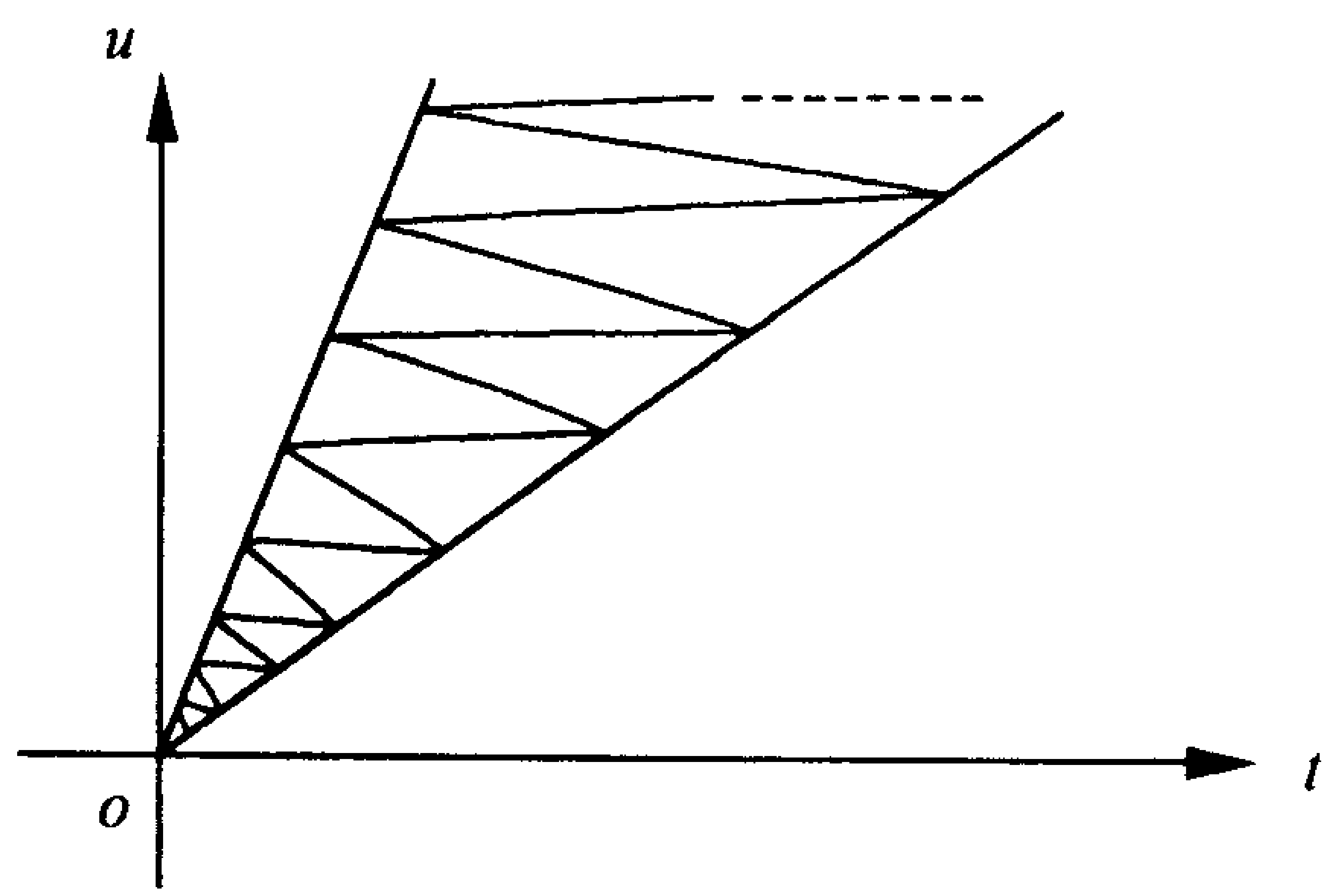


图 12

5. 用于序列情形的法则

有一个关于两个序列比值的定理，跟 L'Hopital 法则十分相似，有时称之为 Cesàro 法则。设 a_n 和 b_n 是两个实数序列，b_n 是严格单调的，假定或是(i) 它们两者都是无穷小，或是(ii)b_n 是无穷大，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \text{ 存在并等于 } \lambda \in R \cup \{\pm\infty\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \text{ 存在并等于 } \lambda。 \tag{21}$$

可以按照象对 L'Hopital 法则同样的方式，作出该法则的证明。中值定理将用包含归纳法的论证来代替。我们将其细节留给读者，并请参看图 13.

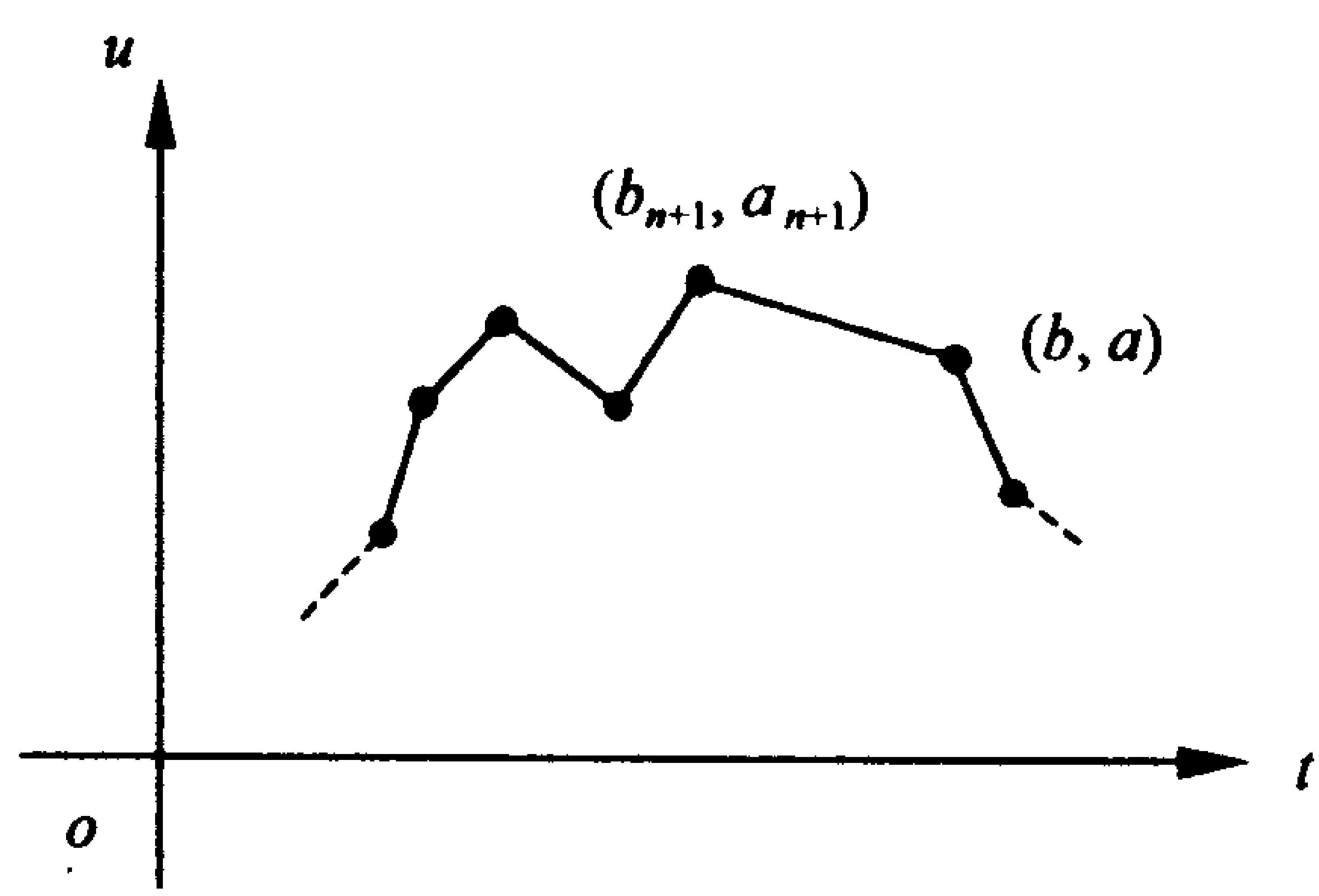


图 13

3.6 导数的一个等价定义

设 $f(x)$ 在 0 的一个邻域 I 内有定义，且在 0 点可导，那么容易得到

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \text{ 存在} (= f'(0)) \tag{22}$$

但反之，若(22)极限存在，并不能保证 $f(x)$ 在 0 点可导，例如，$f(x) = |x|$。

但令人多少有点惊奇的是下列结果(注意到导数定义中含有 $f(0)$)。

定理2 设 $f(x)$ 在0的一个邻域 I 内有定义，且在0点连续，则 $f(x)$ 在 0 点可导的充分必要条件是

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h} \quad \text{存在} \tag{23}$$

这里，a 为实常数，且 $a \neq \pm 1$。特别，当 $a = -2$ 时，(23) 变为

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-2h)}{3h} \text{ 存在} \tag{24}$$

证明 只需证充分性。记

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h} = l \tag{25}$$

不妨设 $l = 0$。否则，以 $f(x) + lx$ 替代 $f(x)$。令

$$G(a,h) = \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h}$$

(i) 当 $a = 0$ 时，(23) 即为导数的定义。

(ii) 当 $a \in (0,1)$ 时，在(25)中用 $a^k h$ 替代 h，得到

$$G(a, a^k h) = \frac{f(a^k h) - f(a^{k+1} h)}{(1-a)a^k h}$$

进而，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} a^k G(a, a^k h) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a^k h) - f(a^{k+1} h)}{(1-a)h} \\ &= \frac{f(h) - f(a^n h)}{(1-a)h}\end{aligned} \tag{26}$$

由 $\lim\limits_{h \to 0} G(a,h) = 0$，以及 $0 < a^k \leqslant a < 1, k = 1,2,\cdots$，结合 $f(x)$ 在 0 点连续，得到

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,使得当 $0 < |h| < \delta$ 时,成立

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon, |G(a,h)| < \varepsilon, |G(a,a^k h)| < \varepsilon \tag{27}$$

从而,由(26)得到

$$\left|\frac{f(h) - f(a^n h)}{(1-a)h}\right| < \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon < \frac{\varepsilon}{1-a}$$

另外,由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$,那么对上述 ε,δ 以及 $h \in (0,\delta)$,总存在 N,使得当 $n > N$ 时,成立

$$|f(a^n h) - f(0)| < \varepsilon |h|$$

这样,得到

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{f(h) - f(a^n h)}{h}\right| + \left|\frac{f(a^n h) - f(0)}{h}\right|$$
$$\leqslant 2\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 0 点可导。

(iii) 当 $-1 < a < 0$ 时,令 $a^2 = b$,则 $0 < b < 1$,并且

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} G(b,h) &= \lim_{h\to 0} G(a^2,h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(a^2 h)}{(1-a^2)h} \\
&= \frac{1}{1+a} \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h} \\
&\quad + \frac{a}{1+a} \lim_{h\to 0} \frac{f(ah) - f(a^2 h)}{(1-a)ah} \\
&= \frac{1}{1+a} l + \frac{a}{1+a} l = l
\end{aligned}$$

即(iii)转化为(ii)。

(iiii) 若 $|a| > 1$,令 $b = \dfrac{1}{|a|}$,同样可转化为(ii)。

定理获证。

3.7 关于一类函数的右导数

设 $f(x)$ 在[0,1]上有定义,且满足

(Ⅰ) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界;

(Ⅱ) $f(x)$ 在 $(0,1]$ 连续;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在.

由(Ⅰ)与(Ⅱ)可知,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积,令

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[0,1]$$

则容易证明:

(J) $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续;

(JJ) $F(x)$ 在 $(0,1]$ 可导

现在的问题是:$F(x)$ 在 0 点的右导数是否存在,即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} \tag{28}$$

是否存在?

注意到,由于条件(Ⅲ),我们不能应用洛必达法则去求(28)的极限。

为了解决该问题,让我们先考察两个具体例子。

例 1

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\ln x), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易验证,$f(x)$ 满足条件(Ⅰ)~(Ⅲ),而且由分部积分可得

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)], & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

令 $x_n=e^{-n\pi}, n=1,2,\cdots$ 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)}{x_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[\sin(\ln x_n)-\cos(\ln x_n)]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(-1)^n。$$

不存在。即 $F(x)$ 在 0 点的右导数不存在。

例 2

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\in(0,1]\\ 0, \quad x=0\end{cases}$$

容易验证，$f(x)$ 满足条件(Ⅰ)～(Ⅲ)，而且

$$F'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sin\frac{1}{t}dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin s}{s^2}ds}{x}=0$$

这里，应用了基本事实

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \quad 广义可积 \tag{29}$$

以及当 $x>0$ 时，$\forall A>\frac{1}{x}$，由积分第二中值定理可知，存在 $B\in(\frac{1}{x},A)$，使得

$$\int_{\frac{1}{x}}^{A}\frac{\sin t}{t}\frac{1}{t}dt=x\int_{\frac{1}{x}}^{B}\frac{\sin t}{t}dt+\frac{1}{A}\int_B^A\frac{\sin t}{t}dt \tag{30}$$

在(30)中，令 $A\to\infty$，得到

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\frac{1}{t}dt=x\int_{\frac{1}{x}}^{B}\frac{\sin t}{t}dt$$

进而，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{B}\frac{\sin t}{t}\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to0^+}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=0$$

上式用到了 $B\in(\frac{1}{x},A)$ 以及(28)。

由例 1 可知，$F(x)$ 在 0 点的右导数不存在；而例 2 中的 $F(x)$ 在 0 点右可导，这到底是什么原因呢？

现在来分析这个问题。在0点附近，例1中 $f(x)$ 的有无穷多

个零点，$x_n = e^{-n\pi}, n = 1,2,\cdots$，相邻两个零点之间的距离为

$$l_n(f) = e^{-(n+1)\pi}(e^{\pi} - 1) \tag{31}$$

而例2中的函数 $f(x)$ 也有无穷多个零点，$x_n = \dfrac{1}{n\pi}, n = 1,2,\cdots$，相邻两个零点之间的距离为

$$l_n(f) = \frac{1}{n(n+1)\pi} \tag{32}$$

注意到，(31) 的 $l_n(f)$ 以 $e^{-(n+1)\pi}$ 这样的速度趋于零；而(32) 中的 $l_n(f)$ 以 n^{-2} 这样的速度趋于零。因此，我们断言：若 $f(x)$ 满足条件(Ⅰ)～(Ⅲ)，并且在$(0,1]$有无穷多个零点$\{x_n\}$满足

$$x_{n+1} < x_n, \text{且} \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

而相邻两个零点之间的距离 $l_n(f)$ 以 $n^{-a}(a > 1)$ 这样的速度趋于零，则

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{在 0 点右可导且 } F'(0^+) = 0\text{。}$$

证明留给读者。

3.8 关于中值定理"中间点"的渐近性

本节选自李文荣的《关于中值定理"中间点"的渐近性》(发表于"数学的实践与认识"，1985 年第 2 期)。

中值定理在数学分析中的重要意义是众所周知的。无论微分中值定理(包括泰勒定理)或积分中值定理，实际上都是适合特定等式的某区间内的"中间点"的存在定理。中值定理虽能肯定"中间点"的存在性，但却没有给出确定"中间点"位置的方法，诚然，这种不确定性并不影响中值定理有着多方面的应用。

1982 年，美国数学月刊(The American Mathematical Monthly)上有两篇文章[14],[15]研究了当区间长度趋于零时中

值定理的“中间点”的渐近性，获得了有趣的结果。本节将简洁地综述[14]、[15]中的两个主要结果，还要对柯西微分中值定理和推广的积分中值定理的“中间点”分别给出其渐近性定理。

一、关于积分中值定理的“中间点”的渐近性

简单的积分中值定理可叙述如下：

积分中值定理 如果 $f(t)$ 是闭区间 $[a,x]$ 上的连续函数，那末至少存在一个数 $c(a<c<x)$，使

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(c)(x-a). \tag{33}$$

关于该定理中确定的“中间点”c，文[14]给出了如下的渐近性定理：

定理 1 如果 $f(t)$ 在点 a 处可微，$f'(a)\neq 0$，c 是积分中值定理所确定的，那末

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\frac{1}{2} \tag{34}$$

对于[14]的证明，这里就不再引述了。不难看出，定理 1 意味着：在积分中值定理中，当区间$[a,x]$的长度趋于 0 时，“中间点”c 趋近于区间的中点。

二、关于泰勒定理“中间点”的渐近性

泰勒(Taylor)定理(也称泰勒公式)乃是微分中值定理的推广。具有拉格朗日(Lagrange)型余项的泰勒定理可叙述如下：

泰勒定理 如果 $f(x)$ 在点 a 的邻域 I 内有直到 n 阶的导数，$x\in I$，那末至少存在一个数 r(r 介于 a 与 x 之间)，使得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(r)(x-a)^n \tag{35}$$

关于泰勒定理确定的“中间点”r，文[15]给出了如下的渐近定理：

定理 2 设$f^{(n+p)}(x)(n \geqslant 1, p \geqslant 1)$在点$a$的某邻域$I$内存在，在点$a$处连续，又$f^{(n+j)}(a) = 0(1 \leqslant j < p)$，且$f^{(n+p)}(a) \neq 0$，那末对由泰勒定理确定的数$r$成立

$$\lim_{x \to a} \frac{r - a}{x - a} = \binom{n+p}{n}^{-1/p} \tag{36}$$

文[15]中的证明这里就不引述了。

显然，定理 2 刻划了在一定条件下泰勒定理的“中间点”的渐近性态。应该强调指出，条件$f^{(n+p)}(a) \neq 0$是不可缺少的。例如，函数$f(x) = cx + d$在$n = p = 1$情况下的泰勒公式的“中间点”r可以是包括端点a与x在内的区间内的任何地方，不妨取$\frac{r-a}{x-a} = \frac{1}{3}$；然而，根据定理 2 应有$\lim\limits_{x \to a} \frac{r-a}{x-a} = \binom{2}{1}^{-1} = \frac{1}{2}$。这是因为此处$f''(x) \equiv 0$，因而不适合定理的条件。

三、关于拉格朗日中值定理的“中间点”的渐近性

拉格朗日中值定理可视为泰勒定理的特例之一。

拉格朗日中值定理 设函数$f(x)$在$[a,x]$上连续，在(a,x)内可导，则在(a,x)内至少存在一个数r，使

$$f(x) = f(a) + f'(r)(x - a) \tag{37}$$

显而易见，关于拉格朗日中值定理“中间点”r的渐近性应是定理 2 的特殊情况。

推论 设$f''(x)$在点a的某邻域I内存在，在点a处连续，$f''(a) \neq 0$，且$x \in I$，那末对由拉格朗日中值定理所确定的数r，成立

$$\lim_{x \to a} \frac{r - a}{x - a} = \binom{2}{1}^{-1} = \frac{1}{2} \tag{38}$$

从推论与定理 1 容易看出，微分中值定理与积分中值定理

在“中间点”的渐近性方面有着很强的内在联系：两者的“中间点”都以区间中点为其渐近位置。也就是说，随着区间长度无限地缩短，“中间点”越来越接近于区间的中点。

四、关于柯西中值定理的“中间点”的渐近性

让我们先引述柯西(Canchy)中值定理。

柯西中值定理 若 $f(t)$、$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续，在 (a,x) 内可导，且 $g'(t) \neq 0$，则在 (a,x) 内至少存在一个数 r，使

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(r)}{g'(r)} \tag{39}$$

关于柯西中值定理的“中间点”r，我们有如下的渐近性质：

定理 3 设 $f(t)$、$g(t)$ 在点 a 的某邻域 I 内有直至二阶导数，$g'(t) \neq 0$，$f'(t)$ 与 $g''(t)$ 在点 a 处连续，且 $f''(a)g'(a) - f'(a)g''(a) \neq 0$，$x \in I$，那末对柯西中值定理确定的数 r，成立

$$\lim_{x\to a} \frac{r-a}{x-a} = \frac{1}{2} \tag{40}$$

证 由定理条件，根据柯西中值定理可得

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(r)}{g'(r)},$$

其中 r 是介于 a 与 x 之间的数。由于 $g(t)$ 在 I 内可导，且 $g'(t) \neq 0$，故函数 $y = g(x)$ 存在连续反函数 $x = g^{-1}(y)$。若令 $g(a) = b$，就有 $a = g^{-1}(b)$，从而(39)变为

$$\frac{f(g^{-1}(y)) - f(g^{-1}(b))}{y-b} = \frac{f'(r)}{g'(r)} \tag{41}$$

设 $F(y) = f(g^{-1}(y))$，由定理条件可得

$$F'(y) = f'(g^{-1}(y))/g'(g^{-1}(y)) \tag{42}$$

此外，由介值定理，必存在一个数 r_1（r_1 介于 b 与 y 之间），使 $g^{-1}(r_1) = r$。这样，据(42)可将(41)写成

$$F(y) - F(b) = F'(r_1)(y-b) \tag{43}$$

容易验证，在定理条件下，$F(y)$ 在点 b 的邻域内符合推论的全部条件，譬如

$$F''(y)=\frac{f''(g^{-1}(y))g'(g^{-1}(y))-f'(g^{-1}(y))g''(g^{-1}(y))}{[g'(g^{-1}(y))]^3}$$

在点 b 处连续，且

$$F''(b)=\frac{f''(a)g'(a)-f'(a)g''(a)}{[g'(a)]^3}\neq 0$$

这样，根据推论，对(43) 中的 r_1 有

$$\lim_{y\to b}\frac{r_1-b}{y-b}=\frac{1}{2} \tag{44}$$

另外，又有

$$\begin{aligned}\lim_{y\to b}\frac{r_1-b}{y-b}&=\lim_{x\to a}\frac{g(r)-g(a)}{g(x)-g(a)}\\&=\lim_{x\to a}\left[\frac{g(r)-g(a)}{r-a}\Big/\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\&\cdot\lim_{x\to a}\frac{r-a}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{r-a}{x-a}\end{aligned} \tag{45}$$

由(44) 与(45)，立即得 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{r-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$。证毕。

从定理 3 的证明可见，前述的推论也可视为下面定理 4 的推论。

五、关于推广的积分中值定理"中间点"的渐近性

先引述分析中的推广的积分中值定理。

推广的积分中值定理 若 $f(t)$、$g(t)$ 在$[a,x]$上连续，且 $g(t)$ 在$[a,x]$上不变号，则在$[a,x]$上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi)\int_a^x g(t)dt \tag{46}$$

对于这个推广的积分中值定理的"中间点"ξ，我们有下面的渐近定理：

定理 4 若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续，在点 a 处可微，且 $f'(a) \neq 0$；$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续且不变号，且 $g(a) \neq 0$，ξ 由推广的积分中值定理所确定，那末

$$\lim_{x \to a} \frac{\xi - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

证 由于 $f(t)$、$g(t)$ 满足定理 4 的条件，故(14) 成立。我们来考察函数

$$h(x) = \frac{\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t - f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

一方面，根据积分中值定理及定理 1，有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} h(x) &= \lim_{x \to a} \frac{f(\xi)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t - f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2} \\
&= \lim_{x \to a}\left[\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \cdot \frac{\xi - a}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}\right] \\
&= f'(a) \lim_{x \to a} \frac{\xi - a}{g(\eta)(x - a)} = \frac{f'(a)}{g(a)} \lim_{x \to a} \frac{\xi - a}{x - a}
\end{aligned} \tag{48}$$

其中数 η 介于 a 与 x 之间，当 $x \to a$ 时，必有 $\eta \to a$.

另一方面，由积分中值定理与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} h(x) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{2g(x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(\eta)}\right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{f'(a)}{g(a)}
\end{aligned} \tag{49}$$

由(48) 与(49)，有

$$\frac{f'(a)}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}\frac{f'(a)}{g(a)},$$

由此立即得(47)。证毕。

显然，定理 1 是定理 4 的特殊情况。

注　张保林[16] 进一步发展了定理 1。其主要结果是：

定理 5　设函数 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续，在 a 点二次可导，且 $f'(a)=0$，$f''(a)\neq 0$。那么，对由积分中值定理（公式(33)）确定的数 c 成立。

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{50}$$

证明　应用泰勒展式

$$f(t)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2+\varepsilon(t)(t-a)^2 \tag{51}$$

其中，$\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t)=0$。

(51) 两边关于 t 从 a 到 x 积分，得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(a)(x-a)^3+\int_a^x\varepsilon(t)(t-a)^2\mathrm{d}t \tag{52}$$

另一方面，取 $t=c$，代入(51)，得

$$f(c)=f(a)+\frac{1}{2}f''(a)(c-a)^2+\varepsilon(c)(c-a)^2 \tag{53}$$

即

$$f(c)(x-a)=f(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(c-a)^2(x-a)+\varepsilon(c)(c-a)^2(x-a) \tag{54}$$

由(33)、结合(52) 与(54) 得到

$$f''(a)(x-a)^3+6\int_a^x\varepsilon(t)(t-a)^2\mathrm{d}t$$

$$= 3f''(a)(c-a)^2(x-a) + 6\varepsilon(c)(c-a)^2(x-a) \quad (55)$$

另外，容易得到

$$\lim_{x \to a} \frac{\int_a^x \varepsilon(t)(t-a)^2 dt}{(x-a)^3} = 0, \lim_{x \to a} \frac{\varepsilon(c)(c-a)^2}{(x-a)^2} = 0 \quad (56)$$

即然 $f''(a) \neq 0$，因此，由(55) 得

$$\lim_{x \to a} (\frac{c-a}{x-a})^2 = \frac{1}{3}$$

结论获证。

一般地，有下列结果

定理 6 设函数 $f(t)$ 在$[a,x]$上连续，在 a 点 k 次可导，且 $f^{(i)}(a) = 0 (i = 1,2,\cdots,k-1)$，$f^{(k)}(a) \neq 0$。那么，对由积分中值定理(公式(33)) 确定的数 c 成立

$$\lim_{x \to a} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$$

参考文献

[1]Popp F J. The D'alembert's function equation, Amer. Math. Monthly, 1985, 92:273 ~ 274.

[2]Criffiths H B, Oldknow A 著. 模型数学 — 连续动力系统和离散动力系统. 萧礼，张志军编译。北京：科学出版社，1996。

[3]Leonard I E, Duemmel J. More and more power series without Tarlor's theorem. Amer. Math. Monthly, 1985, 92:588 ~ 589.

[4]Hartig D. L'Hopital's rule via integration. Amer.

Math. Monthly, 1991, 98: 156 ~ 157.

[5]Eggermont P P B. Nonceetral difference quotients and thr derivations. Amer. Math. Monthly, 1988, 95: 551 ~ 553.

[6]Miller A D, Vy'borny'G. Some remarks on the functions with one — sided derivatives. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 471 ~ 475.

[7]Klippert J. On the right — hand derivative of a certain integral function. Amer. Math. Monthly, 1991, 98: 751 ~ 752.

[8]Botsko M W. Gosser R A. On the differentiablity of functions of several variables. Amer. Math. Monthly, 1985, 92: 663 ~ 665.

[9]Suhn S. The derivatity a'la Carathēodory. Amer. Math. Monthly, 1991, 98: 40 ~ 44.

[10]Botsko M W. Gosser R A. Stronger versions of the fundamental theorem of calculus. Amer. Math. Monthly, 1986, 93: 294 ~ 295.

[11]Emesto A G, Cesar D G. Fre'chet vs. Carathēodory. Amer. Math. Monthly, 1991, 98: 40 ~ 44.

[12]Urruty J B H, A short proof of the variational principle for approximate solutions of minimization priblem. Amer. Math. Monthly, 1983, 90: 206 ~ 207.

[13] 其它的可参看 Amer. Math. Monthly (problems and solutions), 1997, 104: 72 ~ 74; 1989(solutions 744); 1991 (solu -tions 448).

[14]Bernard Jacobson. On the mean value theoreorem for integrals. Amer. Math. Monthly, 89 (1982), 300 ~ 301.

[15]Altonso G. Azpeitla. On the Lagrange remalnder of the taylor formula. Amer. Math. Monthly, 89 (1982), 311 ~

312.

[16]Zhang Bao — Lin. A note on the mean value theorem for integrals. Amer. Math. Monthly, 1997, 104: 561 ～ 562.

第三章　连续函数的一个重要定理 — Sarkovskii 定理

本章我们选取了三篇文章。第一篇为万哲先教授的《Sarkovskii 定理》(特例即为著名的周期 3 蕴含混沌)(发表于《数学通报》1997 年第 2 期和第 3 期);第二篇为井竹君译、袁向东校的 Li — Yorke 定理 — 周期 3 蕴含混沌。在附录中,李天岩教授本人讲了关于 Li — Yorke 定理的写作背景、撰写与发表经过的故事(后两篇文章均发表于《数学译林》1989 年第 8 期)。

第一节　Sarkovskii 定理

1. 引言

1964 年 A. N. Sarkovskii 发表了一篇短文[4]。在这篇短文里他证明了一条非常漂亮的关于连续函数的定理。连续函数在数学里已经被研究了两、三百年,Newton(1642—1727) 和 Leibnitz(1646—1716) 等大数学家都曾经研究过它,居然还有如此重要的一条定理留到本世纪六十年代才被数学家发现,这条定理假设的条件很简单,但是结论却很强,后来这条定理就被

叫做Sarkovskii 定理。Sarkovskii 的这篇短文是用俄文写的，发表在乌克兰数学杂志上，在很长一段时间里并没有引起数学界的重视。1975 年 T. Y. Li 和 J. Yorke[3] 证明了 Sarkovskii 定理的一个非常特殊的特例，即周期 3 定理；在[3] 中他们还首次使用了"混沌" 这个词。随后，Sarkovskii 定理才引起了数学界的重视，认为是动力系统中十分重要的发现，被写进了许多动力系统的教科书中。本节试图对这一定理作一介绍，在 1. 2 中介绍不动点和周期点的定义和性质，在 1. 3 中介绍证明Sarkovskii 定理所需要的连续函数的中间值定理，在 1. 4 中介绍周期 3 定理，在 1. 5 中介绍Sarkovskii 定理并在 1. 6 中介绍Sarkovskii 定理的逆定理。

1. 2　不动点和周期点

设 $f:R\to R$ 是定义在实数轴 R 上并取实数值的函数。再设 $c\in R$。如果 $f(c)=c$，c 就叫做 f 的一个不动点。设平面上的点 (c,d) 是曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 的一个交点，那么 $d=f(c)$ 而且 $d=c$，因此 $f(c)=c$，即 c 是 f 的一个不动点。显然 f 的不动点都可以这样得到。

图 14 说明 $f(x)\doteq x^2$ 只有两个不动点 0 和 1。

仍设 $f:R\to R$ 是定义在 R 上并在 R 中取值的函数。对任意 $x\in R$，记

$$f^2(x)=f(f(x)),$$

$$f^3(x)=f(f(f(x))),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^n(x)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n\text{个}f}(x))\cdots))$$

对任意大于或等于 1 的整数 n.

再设 $c\in R$。如果 $f^n(c)=c$，c 就叫做 f 的周期 n 的周期点，

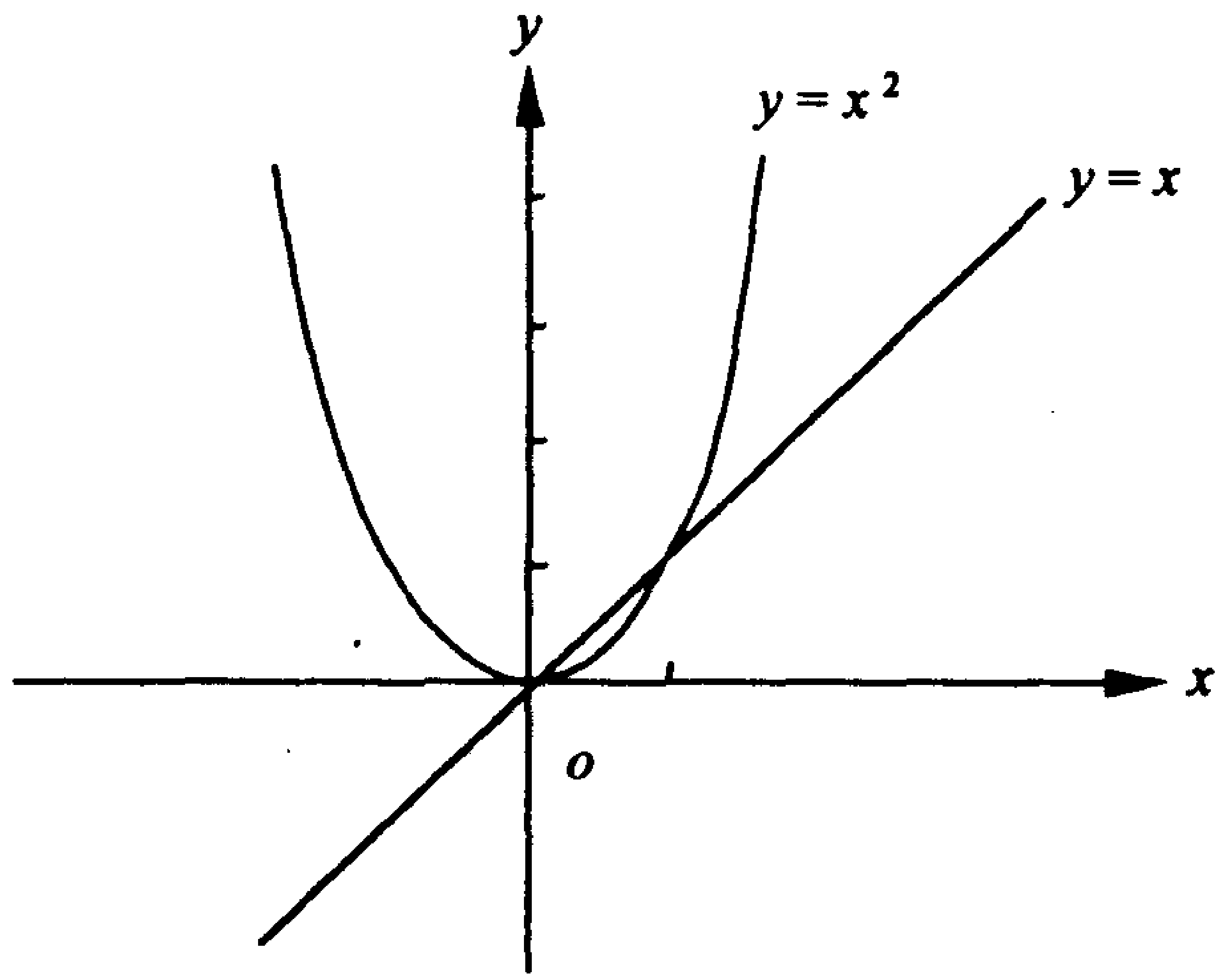


图 14

也说 n 是周期点 c 的一个周期；如果对于 $k=1,2,\cdots,n-1$，还有 $f^{n-1}(c)\neq c$，n 就叫 c 的极小周期。这时集合 $\{c,f(c),f^2(c),\cdots,f^{n-1}(c)\}$ 叫做 c 的轨道。显然，f 的周期 1 的周期点即是 f 的不动点；如果 c 是 f 的周期 n 的周期点，那么 c 是 f^n 的不动点，而且反过来也对。因此求 f 的周期 n 的周期点可以化为求 f^n 的不动点。

设 c 是 f 的极小周期 n 的周期点，而 m 是 c 的一个周期，即 $f^m(c)=c$，那么 m 一定是 n 的倍数，记作 $n|m$。实际上，根据除法算式，$m=qn+r$，其中 $q\geqslant 0$，$0\leqslant r<n$。于是

$$\begin{aligned} c &= f^m(c) = f^{qn+r}(c) \\ &= f^r(f^n(\cdots(f^n(c)\cdots)) = f^r(c)。\end{aligned}$$

因为 n 是 c 的极小周期，而 $0\leqslant r<n$，所以 $r=0$，即 $n|m$。

我们再给最终不动点和最终周期点来下定义。设 $f:R\to R$ 是定义在实数轴上而取实数值的函数，$x\in R$。如果有一个正整

数 n 使得 $f^n(x)$ 是 f 的不动点(或周期点),我们就说 n 是 f 的最终不动点(或最终周期点)。根据这个定义,不动点(或周期点)分别也是最终不动点(或最终周期点)。例如,-1 是 $f(x)=x^2$ 的最终不动点。

1.3 中间值定理

定理 1(中间值定理) 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,而 p 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中间的一个值,即 $f(a)\leqslant p\leqslant f(b)$(如果 $f(a)\leqslant f(b)$)或 $f(b)\leqslant p\leqslant f(a)$(如果 $f(b)\leqslant f(a)$),那么 a 和 b 之间一定有一个数 c,即 $a\leqslant c\leqslant b$,使 $f(c)=p$.

中间值定理是连续函数的一个重要性质。它的证明在数学分析和微积分书中都可以找到,我们不打算重复,只作图来说明它的涵义。

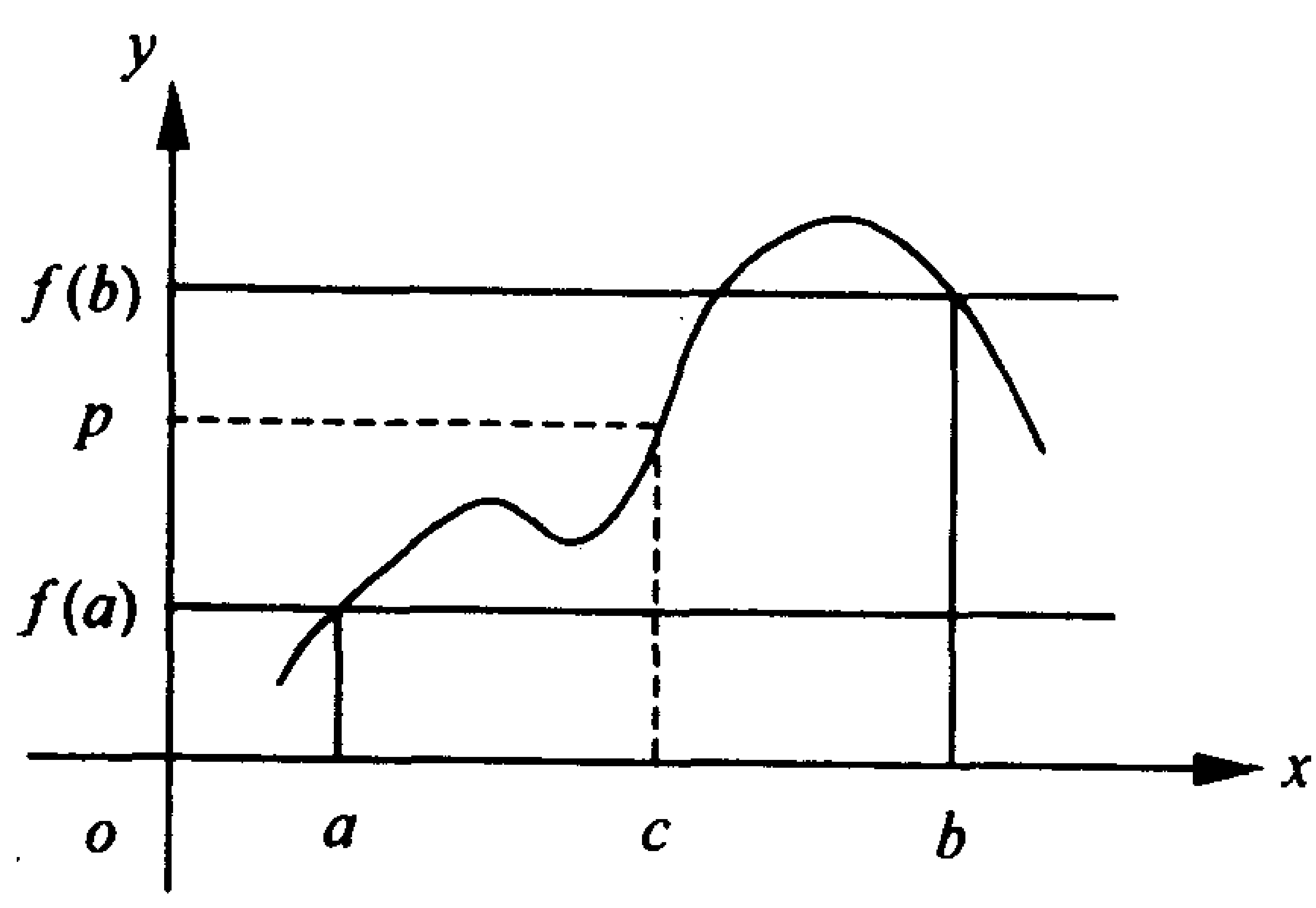


图 15

从中间值定理可以推出下面这个结论:

推论 2　设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数。令 $I = [a,b]$，再令

$$J = \begin{cases} [f(a), f(b)], \text{如果 } f(a) \leqslant f(b), \\ [f(b), f(a)], \text{如果 } f(a) > f(b) \end{cases}$$

那么 $f(I) \supset J$。

利用中间值定理可以推出连续函数何时有不动点的两个推论。

推论 3　设 f 是定义在闭区间 I 上的连续实函数，并且 $f(I) \subset I$，那么 f 在 I 中有不动点。

证明　设 $I = [a,b]$。如果 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$，那么 a 或 b 就是 f 的不动点，现在设 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$。因为 $f(I) \subset I$，所以 $f(a) > a, f(b) < b$。令 $g(x) = f(x) - x$，那么 $g(x)$ 也是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，而 $g(a) = f(a) - a > 0, g(b) = f(b) - b < 0$，根据中间值定理，有 $c \in [a,b]$ 使 $g(c) = 0$，即 $f(c) = c$。

推论 4　设 f 是定义在闭区间 I 上的连续实函数，而 $f(I) \supset I$，那么 f 在 I 中有不动点。

证明　设 $I = [a,b]$. 因为 $f(I) \supset I$，所以有 $c, d \in I$ 使 $f(c) = a, f(d) = b$，如果 $c = a$ 或 $d = b$，那么 a 或 b 是 f 的不动点。如果 $c \neq a, d \neq b$，则 $a < c \leqslant b, a \leqslant d < b$。令 $g(x) = f(x) - x$，那么 $g(x)$ 也是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，而 $g(c) = f(c) - c = a - c < 0, g(d) = f(d) - d = b - d > 0$，根据中间值定理，在 c 和 d 中间有一点 e，使 $g(e) = 0$，即 $f(e) = e$。显然 $e \in [a,b]$。

利用函数的图形，可以直观地看出连续函数 f 如果适合推论 3 或推论 4 的假设，那么 f 就有不动点。

对于函数的周期点，即使周期值很小，从函数的图形也很难看出来。

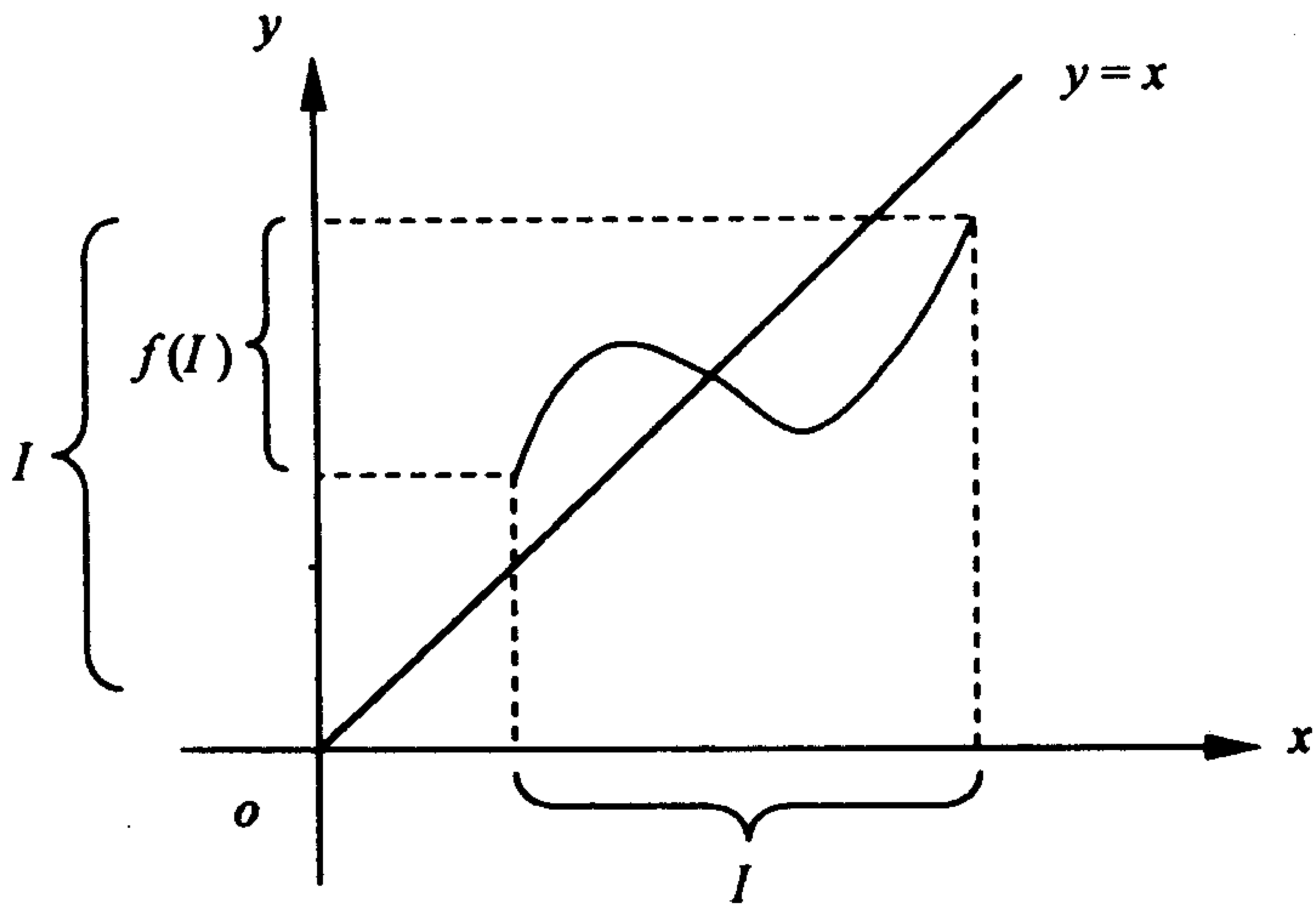


图 16

例 1 考察函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2x+4, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

显然 f 是连续函数，它的图形如下

易见 $f(0)=1, f^2(0)=2, f^3(0)=0$。因此 f 有极小周期 3 的周期点。但是 f 是不是有极小周期 5 的周期点？极小周期 7 的周期点？从图形并不易看出来。

为了函数的周期点，需要推论 4 的一个推广。先证

引理 5 设有闭区间 $I=[a,b], J=[c,d]$。再设 f 是定义在 I 上的连续函数，而 $f(I)\supset J$。那么有一个闭区间 $I^*\subset I$ 使 $f(I^*)=J$。

证明 因为 $f(I)\supset J$ 而 $c\in J$，所以有 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=c$。同样有 $y_0\in[a,b]$ 使 $f(y_0)=d$。区别 $y_0\in[a,x_0]$ 和 $y_0\in[x_0,b]$ 这两种情形来讨论。

(1) 设 $y_0\in[x_0,b]$。令 $x_2=\inf\{y\in[x_0,b]\mid f(y)=d\}, x_1$

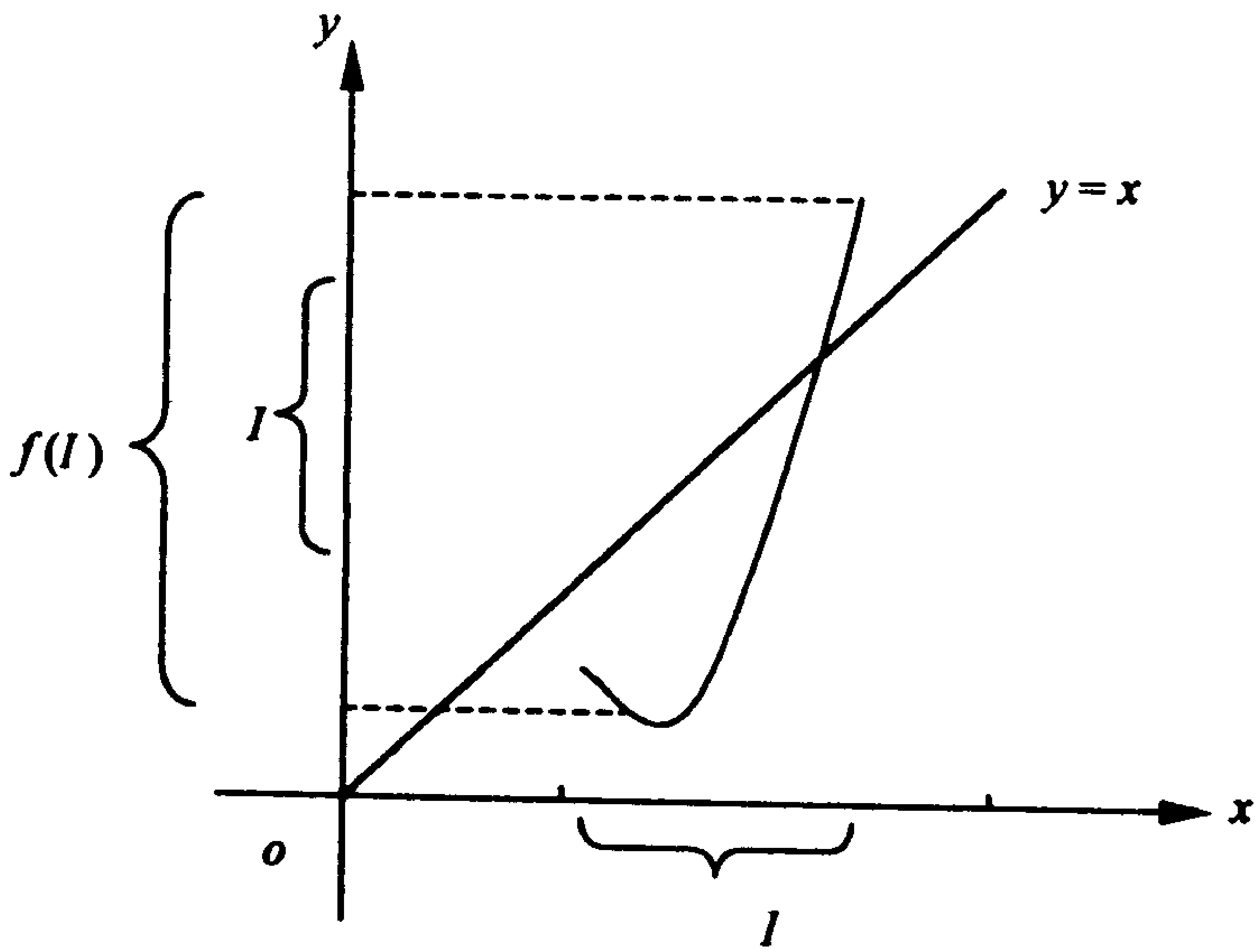


图 17

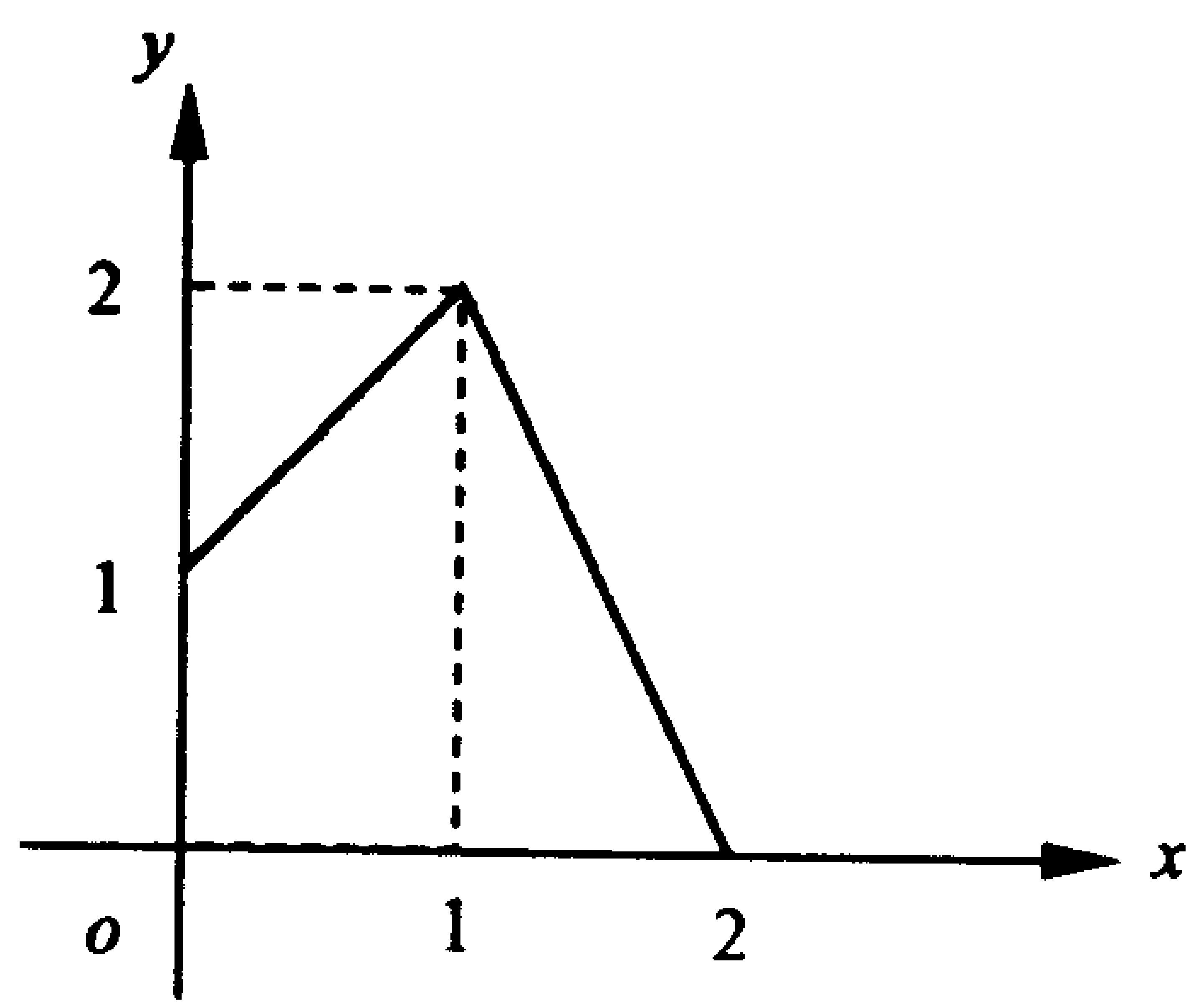


图 18

$=\sup\{x\in[x_0,x_2]\mid f(x)=c\}$. 再令 $I^*=[x_1,x_2]$，那么 $I^*\subset I$；$f(x_1)=c$，$f(x_2)=d$。根据推论 2，$f(I^*)\supset J$。对开区间 (x_1,x_2) 中任意一点 x，如果 $f(x)<c$，因为 $f(x_2)=d$，根据中间值定理，有 $x'\in[x_1,x_2]$ 使 $f(x)=c$，但 $x'>x_1$，这与 x_1 的定义相矛盾。因此 $f(x)\geqslant c$。同理可证 $f(x)\leqslant d$。因此 $f(I^*)\subset J$. 所以 $f(I^*)=J$。

(2) 设 $y_0\in[a,x_0]$。令 $y_1=\sup\{y\in[a,x_0]\mid f(y)=d\}$，$y_2=\inf\{x\in[x_1,x_0]\mid f(x)=c\}$。再令 $I^*=[y_1,y_2]$，那么 $I^*\subset I$，仿照情形(1) 可证 $f(I^*)=J$。

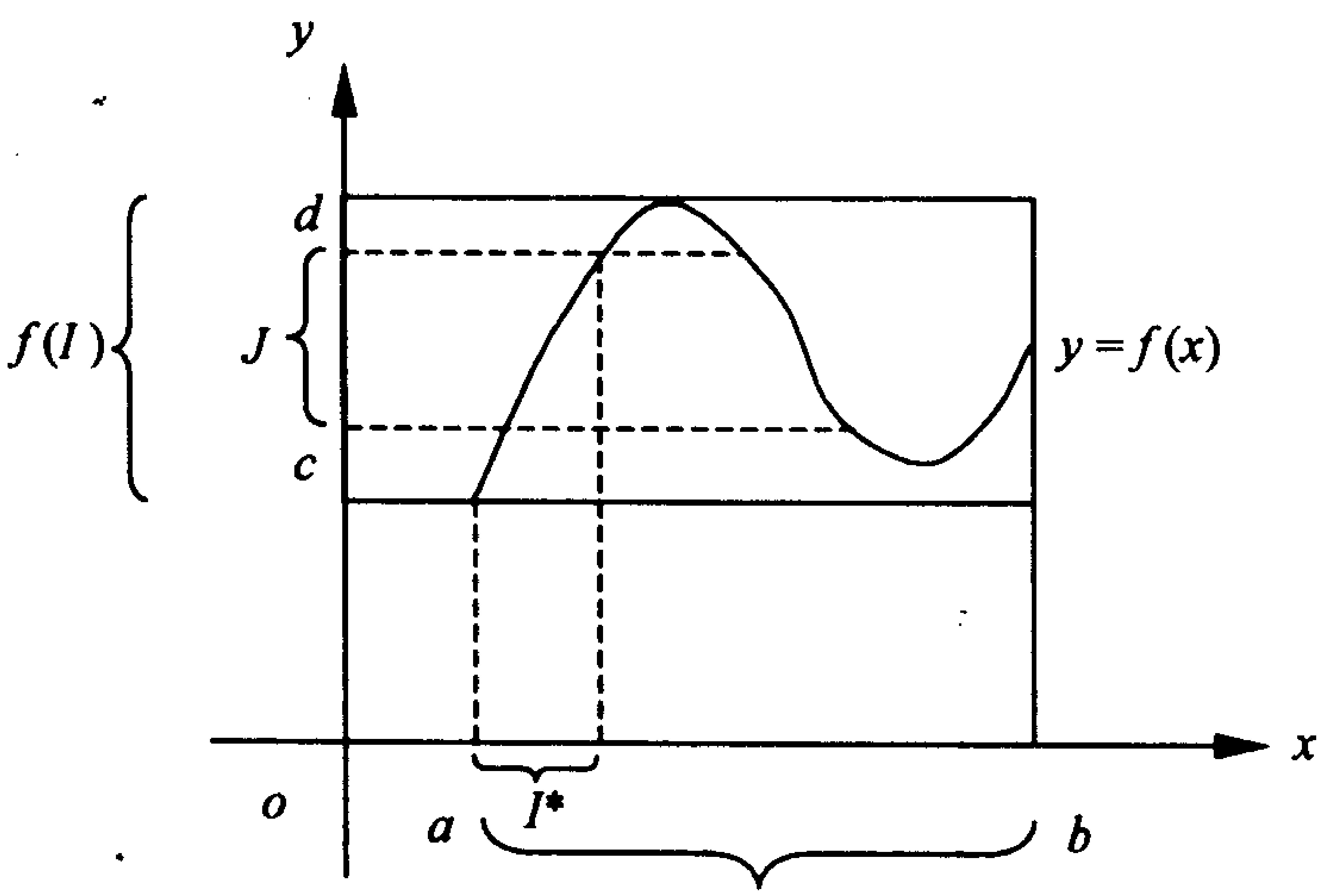


图 19

为了节省语言，我们引进一个记号，假定我们讨论的函数 f 已经固定。设 I 和 J 都是闭区间，如果 $f(I)\supset J$，就记

$$I\to J \quad 或 \quad J\leftarrow I。$$

更进一步，设 I,J,K 都是闭区间，而 $f(I)\supset J$，$f(J)\supset K$，那么

记

$$I \to J \to K。$$

依次类推;设 $I_0, I_1, \cdots I_{n-1}$ 都是闭区间,那么

$$I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n$$

表示 $f(I_k) \supset I_{k+1}$ 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 都成立。

推论 4 可以推广成:

命题 6 设 f 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数,$I_0, I_1, \cdots, I_{n-1}$ 都是包含在 $[a, b]$ 中的闭区间,假定

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0,$$

那么方程

$$f^n(x) = x \tag{1}$$

在 I_0 中至少有一个解 x_0 而

$$f^k(x_0) \in I_k, k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{2}$$

证明 当 $n = 1$ 时,命题 6 化为推论 4,因此这时命题 6 成立。

再考察 $n > 1$ 的情形。这时有 $I_{n-1} \to I_0$,即 $f(I_{n-1}) \supset I_0$;根据引理 5,有闭区间 $I_{n-1}^* \subset I_{n-1}$ 使 $f(I_{n-1}^*) = I_0$,又有 $I_{n-2} \to I_{n-1}$,即 $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1}$,因此 $f(I_{n-2}) \supset I_{n-1}^*$;仍根据引理 5,有闭区间 $I_{n-2}^* \subset I_{n-2}$ 使 $f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*$. 用倒退归纳法可证,对 $k = n-2, n-3, \cdots, 1, 0$,有闭区间 $I_k^* \subset I_k$ 使 $f(I_k^*) = I_{k+1}^*$. 于是 $f^k(I_0^*) = I_k^*$ 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$,而 $f^n(I_0^*) = I_0$。因为 $I_0^* \subset I_0$,所以 $f^n(I_0^*) \supset I_0^*$,根据推论 4,方程(1) 在 I_0^* 中至少有一个解 x_0,仍因为 $I_0^* \subset I_0$,所以 $x_0 \in I_0$。又有 $f^k(x_0) \in f^k(I_0^*) = I_k^* \subset I_k$ 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$,即(2) 式也成立。

1.4 周期 3 定理

定理 7 设 $f: R \to R$ 是定义在实数轴 R 上取实数值的连续函数。假定 f 有极小周期 3 的周期点,那么对任意 $n \geqslant 1$,f 都有

极小周期 n 的周期点。

证明 设$\{a,b,c\}$是 f 的极小周期 3 的轨道，$f(a)=b$，$f(b)=c$，$f(c)=a$。不妨设$a<b<c$或$a<c<b$。我们只讨论前一情形，后一情形可以类似地讨论.

设$a<b<c$。令$A_0=[a,b]$，$A_1=[b,c]$。根据中间值定理的推论 2，$f(A_0)\supset A_1$，$f(A_1)\supset[a,c]$。因此$f(A_1)\supset A_0$，$f(A_1)\supset A_1$。于是

$$A_0 \leftrightarrows A_1$$

根据 $A_1\to A_1$ 及引理 4 可知 f 在 A_1 中有不动点，即极小周期 1 的周期点。

现在设$n>1$。令

$$I_0=I_1=\cdots=I_{n-2}=A_1, I_{n-1}=A_0,$$

则命题 6 的假设成立，因此命题 6 的结论也成立，即有 $x_0\in A_1$ 使 $f^n(x_0)=x_0$ 并且

$$f^k(x_0)\in A_1, k=0,1,\cdots,n-2 \tag{3}$$

$$f^{n-1}(x_0)\in A_0 \tag{4}$$

由 $f^n(x_0)=x_0$ 可知 x_0 是 f 的周期 n 的周期点。如果 x_0 的极小周期小于 n，那么 $f^{n-1}(x_0)$ 必为 $x_0, f(x_0),\cdots,f^{n-2}(x_0)$ 中之一。由(3)和(4)式可知，$f^{n-1}(x_0)\in A_0\cap A_1$，于是 $f^{n-1}(x_0)=b$。因此 $x_0=f^n(x_0)=f(b)=c$，$f(x_0)=f(c)=a\notin A_1$，这是一个矛盾。因此 x_0 的极小周期等于 n。

例 1 中的连续函数 f 有极小周期 3 的周期点，因此根据周期 3 定理，对于任意正整数 n，它有极小周期 n 的周期点。如此简单的一个函数却有如此复杂的现象，这是超出常人想象力的，所以 Li 和 York[3] 说，周期 3 蕴涵了混沌。

1.5 Sarkovskii

引理 8 设 f 是定义在闭区间 I 上的连续实函数，并且

$f(I)\supset I$。再设 f 有极小周期 $2n+1$ 的周期点 x_0，但是对于任意小于 n 的自然数 m，f 都没有极小周期 $2m+1$ 的周期点。设在含 x_0 的轨道中 $2n+1$ 个点里，x_0 是中间的一个，并记 $x_k=f^k(x_0)$，$k=0,1,\cdots,2n$，那么 $x_0,x_1,\cdots,x_{2n}$ 这些点在实数轴上的排列次序必为以下这两种情况之一：

$$(i)x_{2n}<x_{2n-2}<\cdots<x_2<x_0<x_1<\cdots<x_{2n-3}<x_{2n-1},\tag{5}$$

$$(ii)x_{2n-1}<x_{2n-3}<\cdots<x_1<x_0<x_2<\cdots<x_{2n-2}<x_{2n}\tag{6}$$

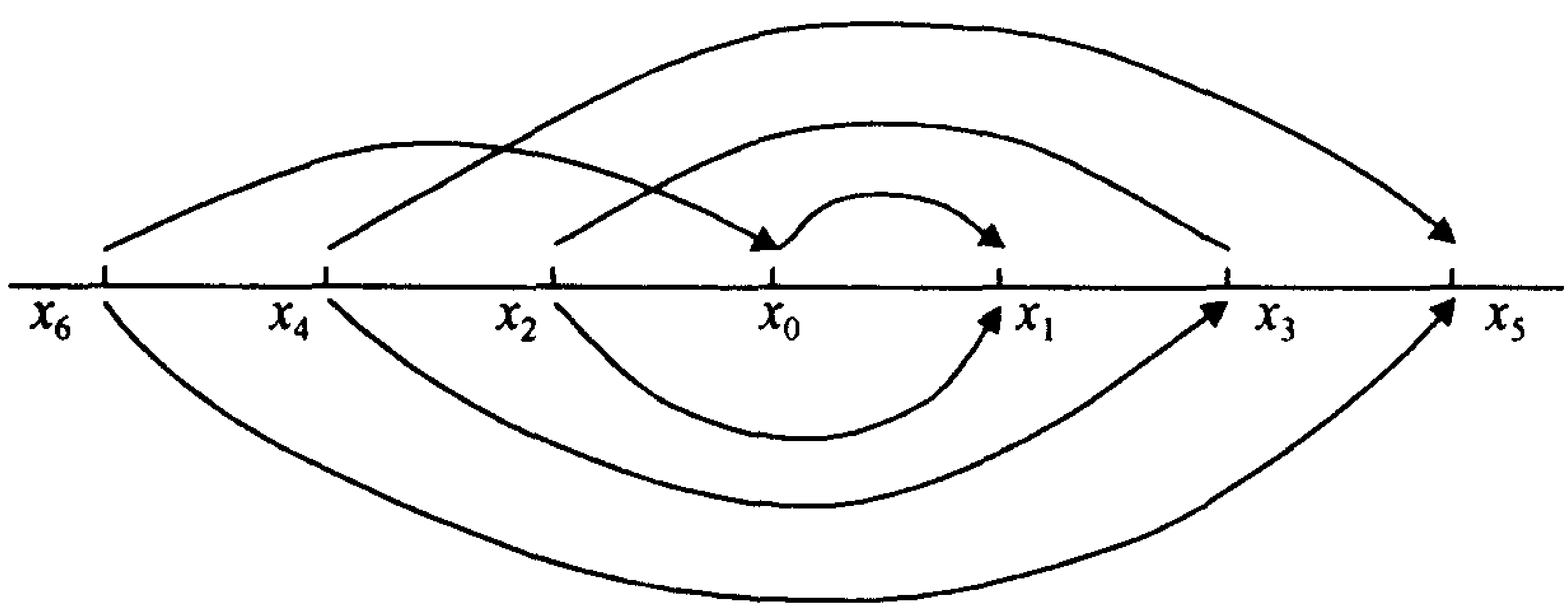


图 20

图 21　$n=3$ 的情形

证明　$n=1$ 时，引理 8 显然成立，下面我们假设 $n>1$。设 x_0 是 f 的极小周期 $2n+1$ 的周期点。令 $x_k=f^k(x_0)$，$k=0,1,\cdots 2n$。把集合 $\{x_i: i=0,1,\cdots,2n\}$ 中的点按大小排列成 $\{z_i: i=1,2,\cdots,2n+1\}$，即

$$z_1<z_2<\cdots<z_{2n+1}$$

设 $1\leqslant k\leqslant l\leqslant 2n+1$。令

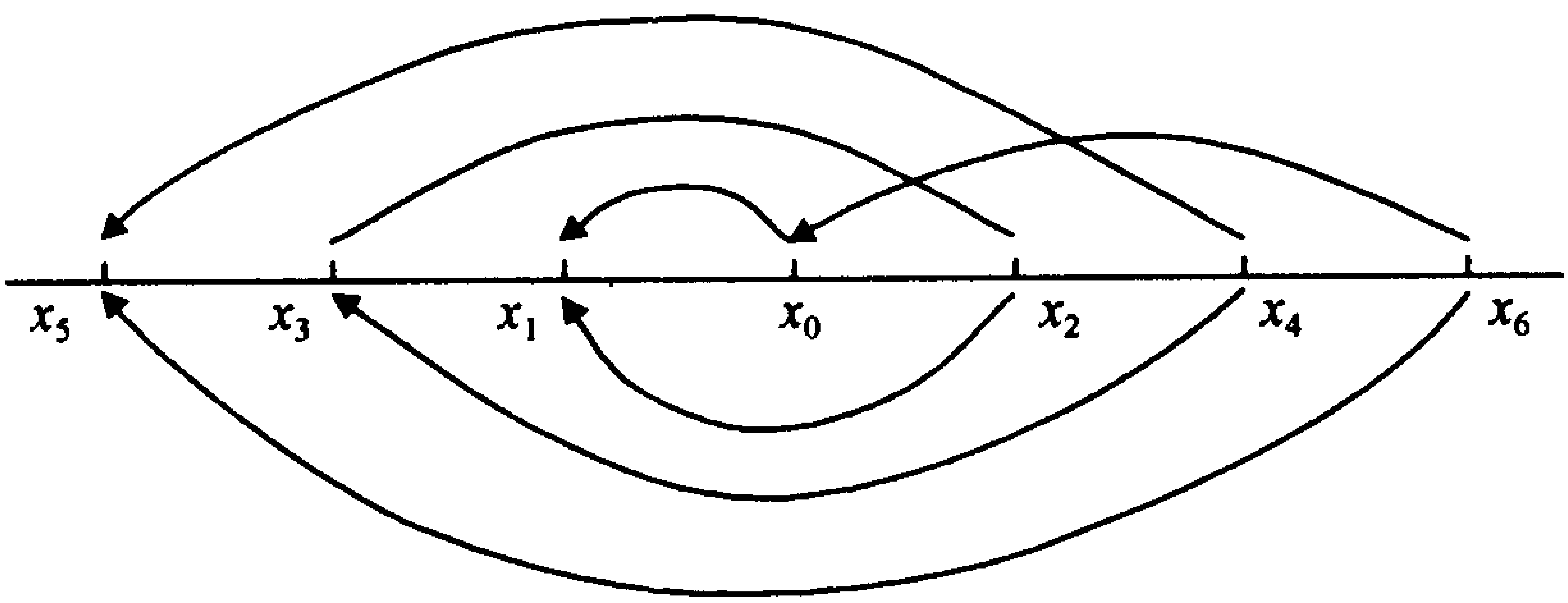


图 21　$n = 3$ 的情形

$$S_{kl} = \{z_i : k \leqslant i \leqslant l\}$$

假定

$$\min\{f(z) : z \in S_{kl}\} = z_i,$$
$$\max\{f(z) : z \in S_{kl}\} = z_j,$$

按下式来定义一个集函数 f^*

$$f^*(S_{kl}) = S_{ij}$$

如果 $f^*(S_{kl}) \supset S_{ij}$，仿照第 3 小节引理 5 之后所作的约定，记 $S_{kl} \to S_{ij}$。

因为 $f(z_1) > z_1$，$f(z_{2n+1}) < z_{2n+1}$，所以有一个最大的 i，设为 m，使 $f(z_m) > z_m$。显然 $m \leqslant 2n$。令 $S_1 = S_{m,m+1} = \{z_m, z_{m+1}\}$，$S_2 = f^*(S_1), \cdots, S_{i+1} = f^*(S_i), \cdots$。因为 $f(z_m) > z_m$，$f(z_{m+1}) < z_{m+1}$，所以 $S_2 = S_{f(z_{m+1}), f(z_m)} \supset S_1$。再利用数学归纳法可推出 $S_{i+1} \supset S_i$，$i = 1, 2, \cdots$。因为 x_0 是极小周期等于 $2n+1$ 的周期点，所以 $S_{i+1} \neq S_i$，除非 $S_i = \{z_1, z_2 \cdots, z_{2n+1}\}$。

S_{1m} 有 m 个点，$S_{m+1,2n+1}$ 有 $2n+1-m$ 个点，而 $m \neq 2n+1-m$。如果 $m > 2n+1-m$，因为 $f(z_m) \geqslant z_{m+1}$，所以有一个

$l(1 \leqslant l \leqslant m-1)$ 使 $f(z_l)$ 和 $f(z_{l+1})$ 在 $[z_m, z_{m+1}]$ 的不同侧。如果 $m < 2n+1$，同理有 $l(m+1 \leqslant l \leqslant 2n)$，使 $f(z_l)$ 和 $f(z_{l+1})$ 在 $[z_m, z_{m+1}]$ 的不同侧。因此总有 $l(1 \leqslant l \leqslant 2n+1)$ 而 $l \neq m$，使 $f(z_l)$ 和 $f(z_{l+1})$ 在 $[z_m, z_{m+1}]$ 的不同侧，于是 $[z_l, z_{l+1}] \to [z_m, z_{m+1}]$。因为 $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$，所以有一个最小的 $i(1 \leqslant i \leqslant 2n)$，设为 $t-1$，使 $S_{t-1} \to \{z_l, z_{l+1}\}$，即 $f^*(S_{t-1}) \supset \{z_l, z_{l+1}\}$. 令 $S_t^1 = \{z_l, z_{l+1}\}$，则 $S_{t-1} \not\supseteq S_t^1$。上一段里定义的 $S_t, S_{t+1}, \cdots$ 今后不再出现，那么我们把 S_t^1 改记成 S_t，于是我们找到了两个正整数 m 和 l、m、$l \leqslant 2n$ 而 $m \neq l$，和 $\{z_1, z_2, \cdots, z_{2n+1}\}$ 的 t 个子集 $S_i = S_{k_i l_i}(i = 1, 2, \cdots, t)$ 具有以下诸性质：

$$S_1 = \{z_m, z_{m+1}\}, S_t = \{z_l, z_{l+1}\} \tag{7}$$

$$S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_{t-1} \to S_t \to S_1 \tag{8}$$

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{t-1} \not\supseteq S_t \tag{9}$$

$$S_i \neq S_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, t-1 \tag{10}$$

我们要证明 $t = 2n$。因为 $S_{t-1} \not\supseteq S_t = \{z_l, z_{l+1}\}$，而 S_{t-1} 至少含 t 个点，所以 $t \leqslant 2n$，假定 $t < 2n$。设 I_i 是含 S_i 的最小闭区间，$i = 1, 2, \cdots, t$。从(8)式推出

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_t \to I_1$$

如果 t 是奇数，那么由命题 6 推出有 $x^* \in I_1$ 使

$$f^t(x^*) = x^*$$

$$f^k(x^*) \in I_{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots, t-1$$

于是 x^* 的极小周期是 t 的因数，因而是奇数。但我们假定了 f 没有极小周期 $2m+1(1 \leqslant m < n)$ 的周期点。因此 x^* 是 f 的不动点。那么

$$x^* = f^{t-1}(x^*) \in I_1 \cap I_t$$

由(5)知 $I_1 = [z_m, z_{m+1}]$，$I_t = [z_l, z_{l+1}]$。但 $m \neq l$，所以 $I_1 \neq I_t$。因此 $I_1 \cap I_t = \{z_m\}$ 或 $\{z_{m+1}\}$，但它们都不是 f 的不动点，这是一

个矛盾。如果 t 是偶数，那么 $t \leqslant 2n-2$。由(8),(9) 两式又有

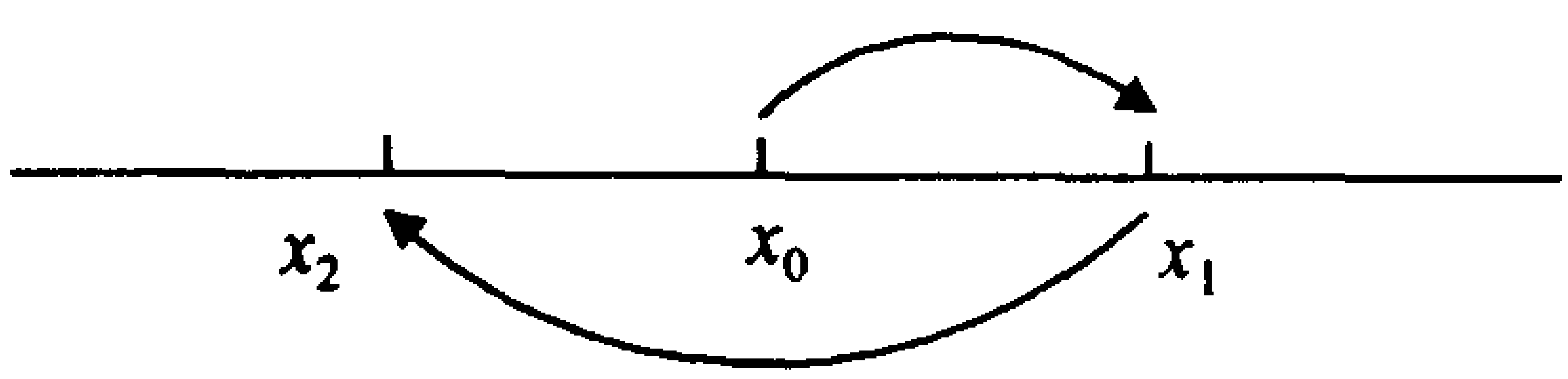
$$I_1 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_t \to I_1。$$

和 t 是奇数的情形一样，仍然推出一个矛盾。因此 $t=2n$。于是由(7),(9),(10) 三式推出，对每个 $i=1,2,\cdots,2n-1$, $S_{i+1} \backslash S_i$ 都只含一个点。

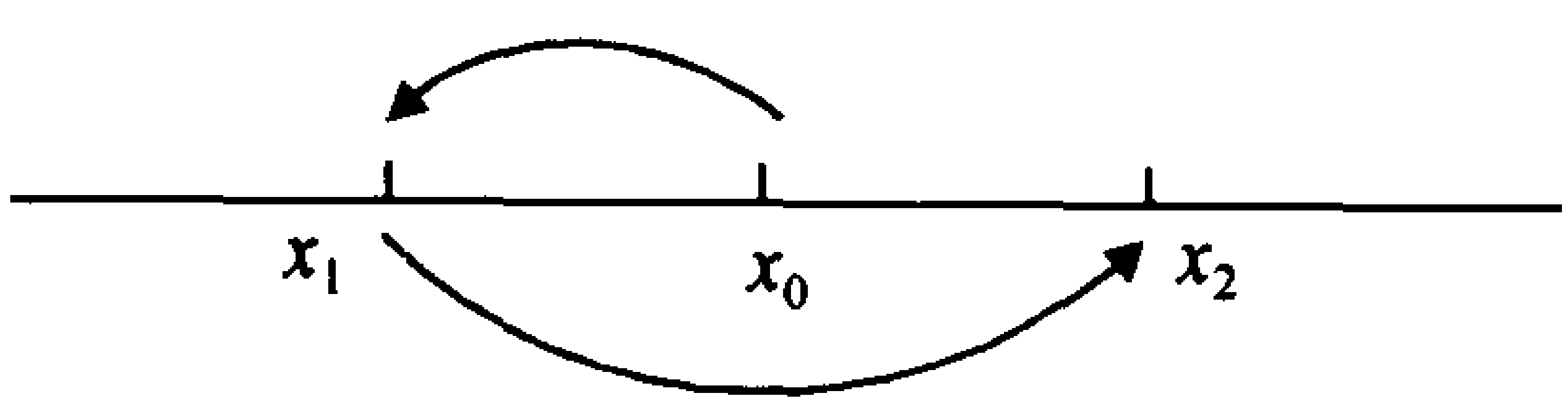
已知 $S_1=\{z_m,z_{m+1}\}$。设 $S_2 \backslash S_1=\{x_2\}$。有两种可能的情况：

(1) $x_2<z_m<z_{m+1}$。这时令 $z_m=x_0$, $z_{m+1}=x_1$。因为 $f^*(S_1)=S_2$，所以一定有 $f(x_0)=x_1$, $f(x_1)=x_2$。

(2) $z_m<z_{m+1}<x_2$。这时令 $z_m=x_1$, $z_{m+1}=x_0$。因为 $f^*(S_1)=S_2$，所以 $f(x_0)=x_1$, $f(x_1)=x_2$。



情况 1



情况 2

图 22

两种情况的讨论完全一样，因此我们只讨论情形(1).

设 $S_3 \backslash S_2=\{x_3\}$。于是有 $x_1<x_0<x_2<x_3$ 或 $x_3<x_2<x_0<x_1$。因为 $f(S_2)=S_3$，所以 $f(x_2)=x_3$。我们来证明 $x_3<x_2<x_0<x_1$ 这一情况不能发生。假定 $x_3<x_2<x_0<x_1$ 成立. 设

$S_4 \backslash S_3 = \{x_4\}$，那么 $x_3 < x_2 < x_0 < x_1 < x_4$ 或 $x_4 < x_3 < x_2 < x_0 < x_1$，而 $f(x_3) = x_4$. 无论那一情形都有

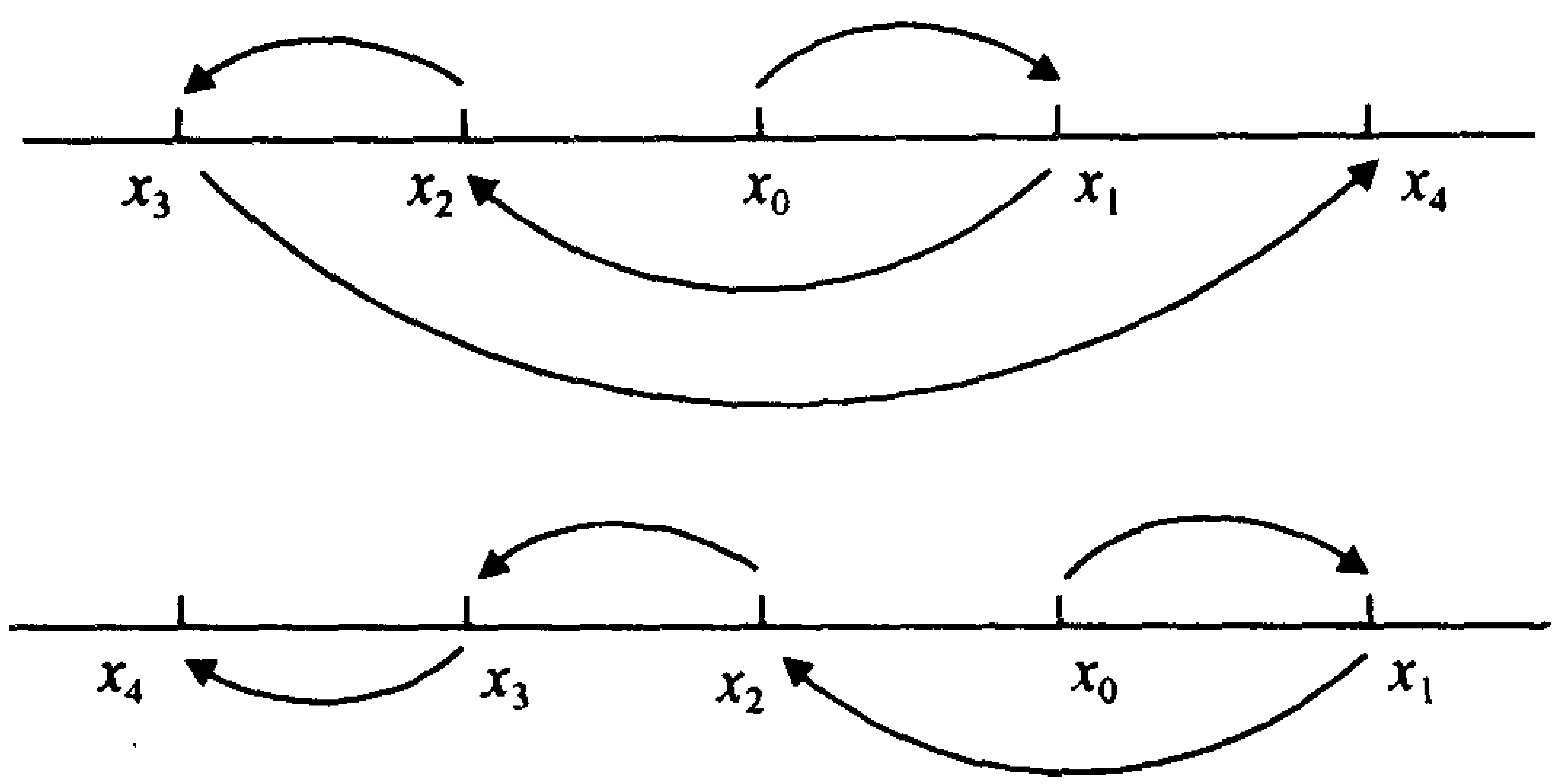


图 23

$$[x_2, x_0] \to [x_3, x_1] \to [x_0, x_1] \to [x_2, x_0]$$

根据命题 6，$f^3(x) = x$ 在$[x_2, x_0]$中有解 x^*，而 $f(x^*) \in [x_3, x_1]$，$f^2(x^*) \in [x_0, x_1]$。因为 $n > 1$，根据假设，x^* 不能是 f 的极小周期 3 的周期点，所以 x^* 是 f 的不动点，于是 $x^* \in [x_2, x_0] \cap [x_0, x_1] = \{x_0\}$，这也是不可能的，因此 $x_2 < x_0 < x_1 < x_3$.

设 $S_4 \backslash S_3 = \{x_4\}$. 于是 $x_4 < x_2 < x_0 < x_1 < x_3$ 或 $x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_4$，而 $f(x_3) = x_4$. 假定 $x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_4$ 成立. 先讨论 $n = 2$ 的情形.

这时 $f(x_4) = x_0$。于是有

$$[x_2, x_0] \to [x_1, x_3] \to [x_2, x_1] \to [x_2, 0]。$$

由命题 6 推出矛盾. 再讨论 $n > 2$ 的情形。

设 $S_5 \backslash S_4 = \{x_5\}$，那么有 $x_5 < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_4$ 或 $x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < x_4 < x_5$ 而 $f(x_4) = x_5$。无论那一种情况都有

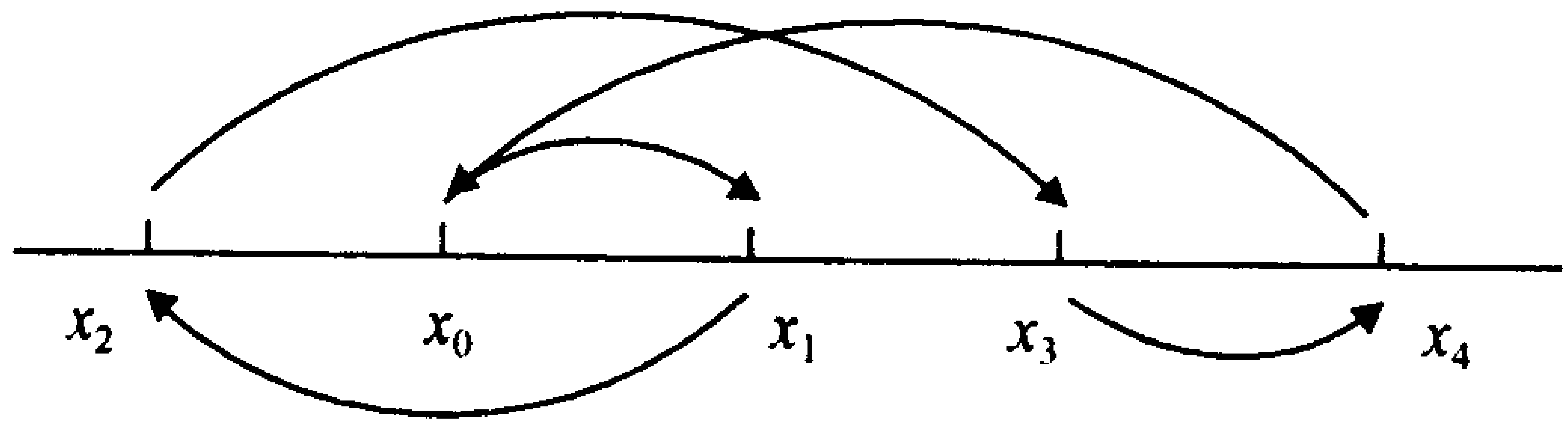


图 24

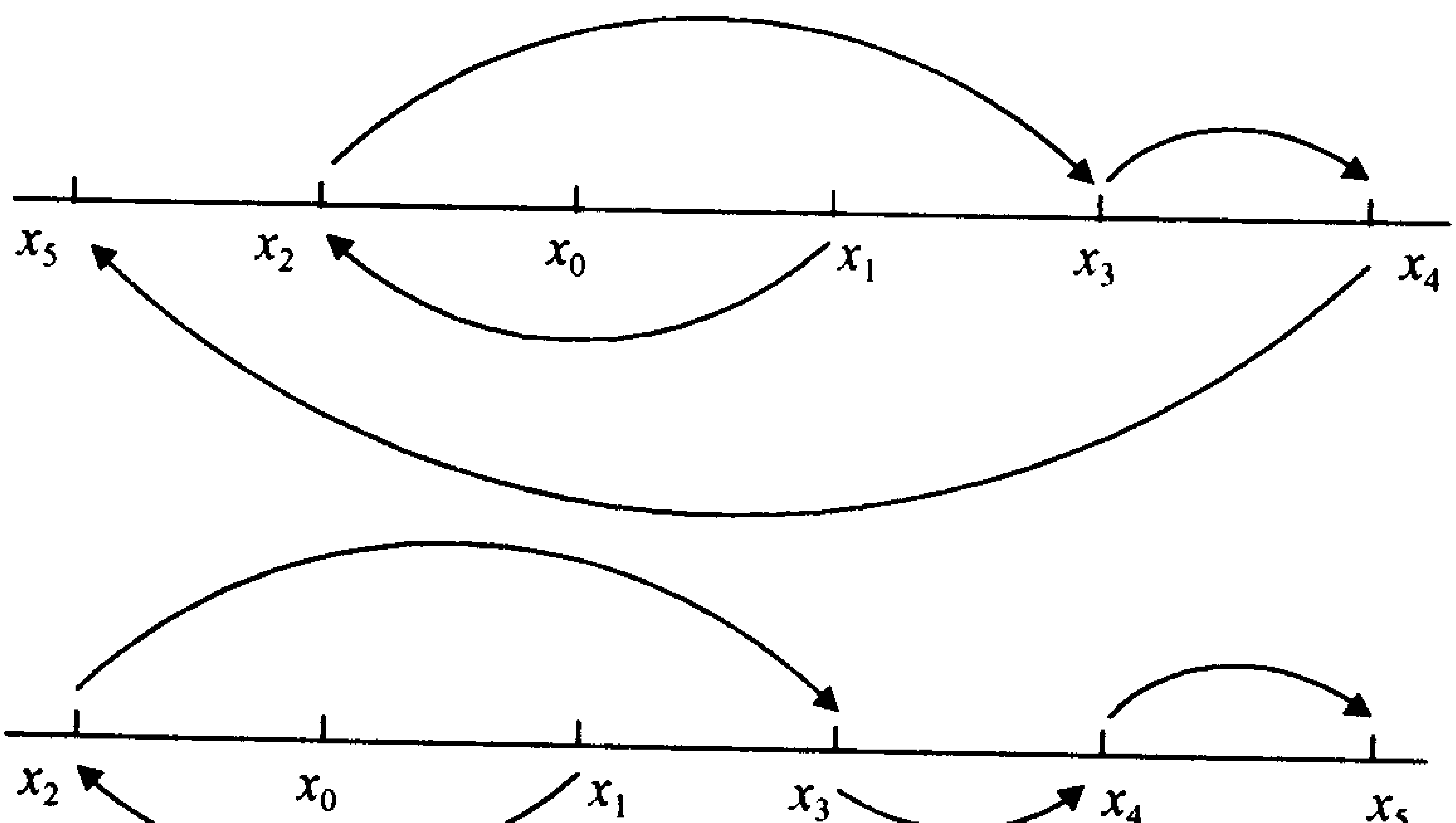


图 25

$$[x_1,x_3]\to[x_2,x_4]\to[x_2,x_1]\to[x_1,x_3]$$

由命题 6 仍推出矛盾。因此一定有 $x_4<x_2<x_0<x_1<x_5$。特别我们证明了，当 $n=2$ 时，引理 8 成立。

现在设 $n>2$. 设 $S_{i+1}\backslash S_i=\{x_{i+1}\}, i=1,2,\cdots,2n$。用前面的办法和数学归纳法可以证明

$$x_{2n-2}<\cdots<x_2<x_0<x_1<\cdots<x_{2n-1}$$

证明的细节留给读者。最后我们来证明

$x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n}$ 不可能发生。假定发生，那么 $f(x_{2n}) = x_0$，而且有

$$\begin{aligned}&[x_{2n-3}, x_{2n-1}] \to [x_{2n-1}, x_{2n}]\\ &\to [x_{2n-1}, x_{2n}] \to [x_{2n-3}, x_{2n-1}]\end{aligned}$$

由命题 6 仍推出矛盾。因此(5) 一定成立。

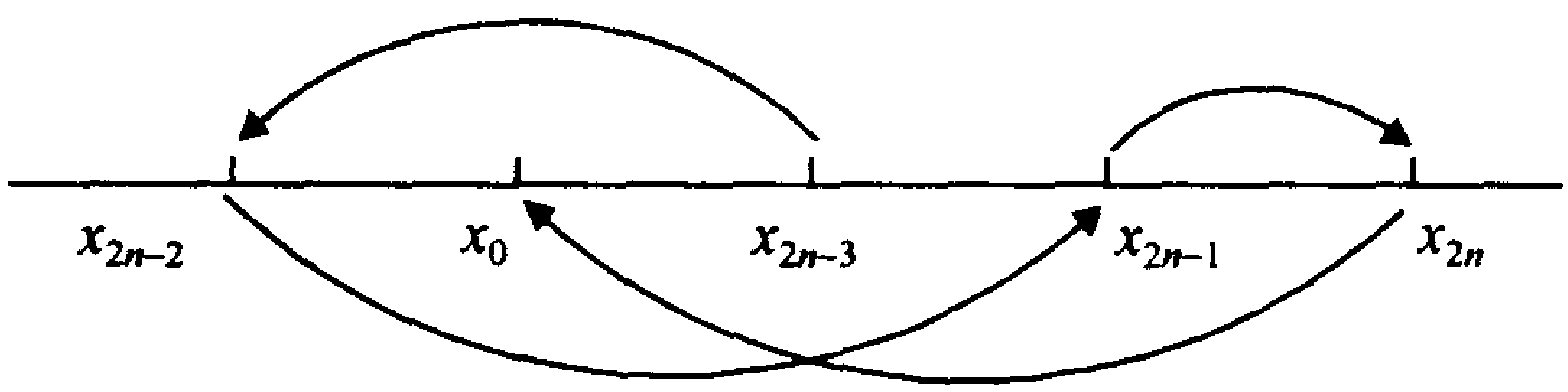


图 26

我们再来介绍自然数集 $N = \{1,2,3,\cdots\}$ 上的 Sarkovskii 序 $\lhd$。如果 $m, n \in N$，而 $m \lhd n$，就说 m 在 n 的前面，或 n 在 m 的后面. N 上的 Sarkovskii 序就是如下的序：

$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \cdots \lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^3 \cdot 3 \lhd 2^3 \cdot 5 \lhd 2^3 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1$

这就是，先按大小排列所有奇数，小的排在大的前面；再按大小排列所有奇数的 2 倍，仍是小的排在大的前面；再按大小排列所有奇数的 2^2 倍，也是小的排在大的前面；如此继续下去；最后按大小排列所有 2 的幂 $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2, 2^3, \cdots$，但这次是大的排在小的前面。换句话说，对于 $m, n \in N$，设 $m = 2^{m_1} \cdot m_2, n = 2^{n_1} \cdot n_2$，而 m_2 和 n_2 都是奇数，那么规定 $m \lhd n$，如果下列情形之一成立：(i) $m_1 < n_1$ 而 $m_2 > 1$，或者 (ii) $m_1 = n_1$ 而 $1 < m_2 < n_2$，或者 (iii) $m_1 > n_1$ 而 $m_2 = n_2 = 1$。

定理 9(Sarkovskii) 定理　设 $f: R \to R$ 是定义在实数轴 R

上取实数值的连续函数，并假定 f 有极小周期 k 的周期点。如果对 Sarkovskii 序来说，$k \lhd l$，那么 f 也有极小周期 l 的周期点。

证明 我们分 k 是 2 的幂和不是 2 的幂这两个情形来证明。

情形 1 $k = 2^m$，设 f 有极小周期 2^m 的周期点。

如果 $m = 0$，那么 $k = 1$。因为按 Sakovskii 序，1 是排在最后面的一个自然数，所以没有什么需要证的。

设 $m > 0$。我们要证明：对任意 $n < m$，f 有极小周期 2^n 的周期点。只要证明 f 有极小周期 2^{m-1} 的周期点就行了。对 m 来作归纳法。

如果 $m = 1$，那么 f 有极小周期 2 的周期点。设 x_0 是极小周期 2 的周期点。设 x_0 是极小周期 2 的周期点，令 $x_1 = f(x_0)$，那么 $f(x_1) = x_0$。如果$_0 < x_1) = x_0$。如果 $x_0 < x_1$，令 $I = [x_0, x_1]$；如果 $x_1 < x_0$，令 $I = [x_1, x_0]$。根据中间值定理，$f(I) \supset I$，再根据推论 3，f 在 I 中有不动点。

假定对 $m = r \geqslant 1$ 的情形，f 有极小周期 2^{r-1} 的周期点。我们来证明，当 $m = r + 1$ 时，f 有极小周期 2^r 的周期点。令 $g = f^2$，那么 g 有极小周期 2^r 的周期点。根据归纳法假设，g 有极小周期 2^{r-1} 的周期点，设 x_0 是其中的一个，即

$$g^{2r-1}(x_0) = x_0,$$

$$g^t(x_0) \neq x_0 \quad \text{对 } t = 1, 2, \cdots, 2^{r-1} - 1.$$

于是

$$f^{2r}(x_0) = x_0,$$

$$f^{2t}(x_0) \neq x_0 \quad \text{对} \quad t = 1, 2, \cdots, 2^{r-1} - 1.$$

如果 x_0 的极小周期不等于 2^r，而等于 s_0，那么 $s_0 \in \{1, 3, \cdots, 2^r - 1\}$，但是 s_0 卜 2^r，这是一个矛盾，因此 x_0 是 f 的极小周期 2^r 的周期点。

情形 2 k 不是 2 的幂。我们再区分以下几个情形。

情形 2.1　$k=2m+1$ 是奇数的情形。设 f 有极小周期 k 的周期点。当 $m=0$ 时，没有什么要证的。当 $m=1$ 时，周期 3 定理已在上一节证明。因此可以设 $m>1$。

设 $k \lhd l$，我们要证明 f 有极小周期 l 的周期点。因此不妨设 f 没有极小周期 $2n+1(1 \leqslant n < m)$ 的周期点。根据引理 8，我们可以选 f 的一个极小周期 $2m+1$ 的周期点 x_0 并令 $x_k = f^k(x_0)$，$k=0,1,\cdots,2m$，使 $x_0, x_1, \cdots x_{2m}$ 在实数轴上的排列如(5) 或 (6)。我们只讨论前一情形，后一情形的证明完全类似。令 $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_2, x_0], \cdots, I_{2m-1} = [x_{2m-3}, x_{2m-1}], I_{2m} = [x_{2m}, x_{2m-2}]$，那么有

$$I_1 — I_2 — I_3 — I_4 — I_5 — \cdots — I_{2m-1} — I_{2m} \tag{11}$$

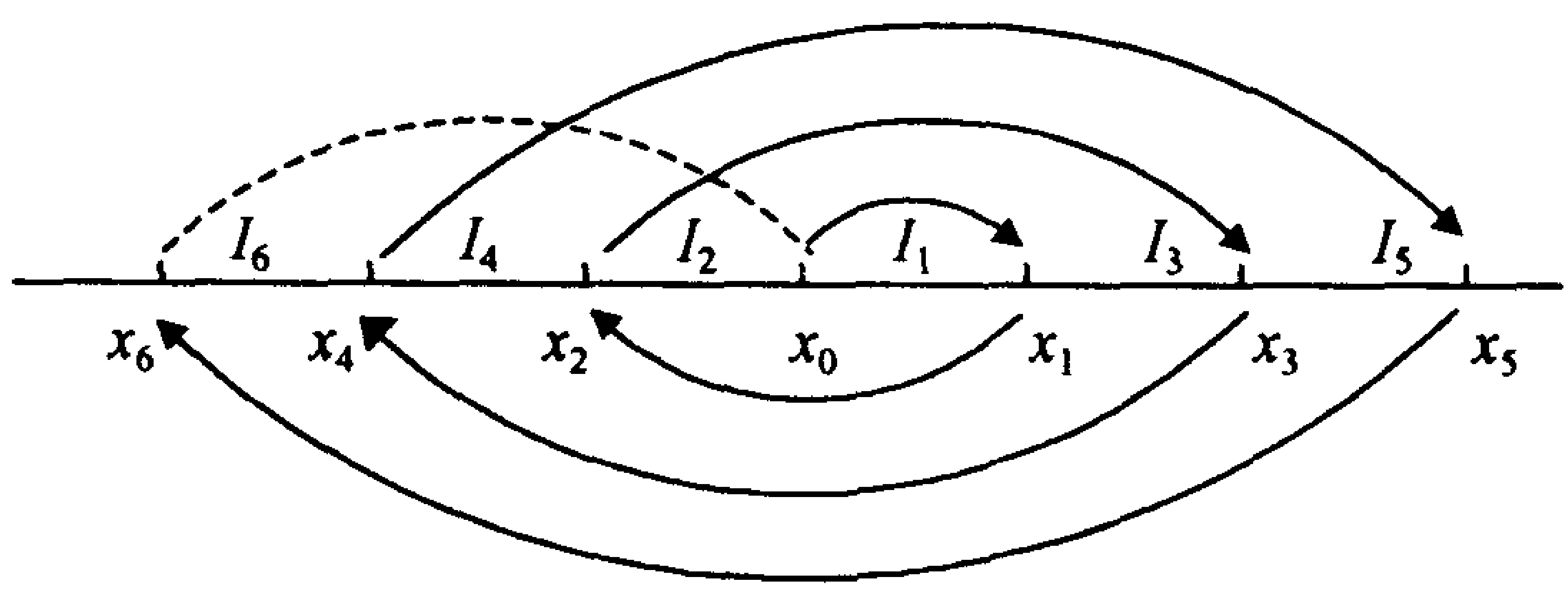


图 27

再分别讨论以下两个情形。

情形 2.1.1　l 是奇数的情形。这时 $l > k = 2m+1$。由(11) 有

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l-2m+1} \to I_2 \to I_3 \to \cdots \to I_{2m} \to I_1$$

根据命题 6，有 $x^* \in I_1$ 使

$$f^{l}(x^{*}) = x^{*} \tag{12}$$

$$f^{s}(x^{*}) \in I_1, s = 0,1,\cdots,l-2m, \tag{13}$$

$$f^{l-2m+t}(x^{*}) \in I_{t+1}, t = 1,2,\cdots,2m-1 \tag{14}$$

由(12)式，x^{*}是f的周期l的周期点。设x^{*}的极小周期是p，那么$p|l$。根据前面对f所作的假设，$p \geqslant 2m+1$。如果$p<l$，由(13)，(14)两式分别推出$f^{l-p-2}(x^{*}) \in I_1$和$f^{l-2}(x^{*}) \in I_{2m-1}$。因为$x^{*}$的极小周期是$p$，所以$f^{l-p-2}(x^{*}) = f^{l-2}(x^{*})$，因此$I_1 \cap I_{2m-1} \neq \varnothing$。但$m>1$，只有在$m=2$时才有$I_1 \cap I_{2m-1} = I_1 \cap I_3 \neq \varnothing$。这时$I_1 \cap I_3 = \{x_1\}$，因此$x^{*}$在$x_1$的轨道中。但$x^{*} \in I_1$，所以$x^{*} = x_0$或$x_1$。因$l \geqslant (2m+1)+2$，由(13)式推出$f^{3}(x^{*}) \in I_1$，这是一个矛盾。因此$p = l$。

情形 2.1.2　l是偶数的情形。设$l = 2r$，r是任意自然数。如果$r \leqslant m$，由(11)有

$$I_{2(m-r)+1} \to I_{2(m-r)+2} \to \cdots \to I_{2m} \to I_{2(m-1)+1}$$

利用上一段的方法，可以证明f有极小周期l的周期点。如果$r>m$，由(11)有

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{2(r-m)+1} \to I_2 \to I_3 \to \cdots \to I_{2m} \to I$$

仍利用上一段的方法，可以证明f有极小周期l的周期点。

情形 2.2　$k = 2^{m}$。$n,m \geqslant 1$，而n是大于1的奇数。设f有极小周期k的周期点，再设$k \lhd l$，$l = 2^{s} \cdot t$而t是奇数。那么$s \geqslant m$，而当$s = m$时还有$t>n$。令$g = f^{2^{m}}$，那么g有极小周期n的周期点。如果$s>m$，根据情形2.1.2，g有极小周期$2^{s-m}t$的周期点，于是f有极小周期$l = 2^{s} \cdot t$的周期点。如果$s = m$，那么$t>n$，根据情形2.1.1，g有极小周期t的周期点，于是f有极小周期$l = 2^{s} \cdot t$的周期点。

这样定理9就完全证明了。

最后，我们再给出几点注记。

注 1 Sarkovskii 定理对于定义在区间 I 上并在 I 中取值的连续函数也成立，而 I 可以是开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开半闭的区间 $(a,b]$，$[a,b)$，或半数轴 $(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$。这只要仔细检查一下 *Sarkovskii* 定理的证明就可以了。

注 2 周期 3 定理是 Sarkovskii 定理的推论。

注 3 如果连续函数 f 只有有限个极小周期的周期点，那么这些极小周期只能是连续的有限个 2 的幂：$2^0=1,2^1,2^2,\cdots 2^l$。这也是 Sarkovskii 定理的简单推论.

1.6 Sarkovskii 定理的逆

定理 10（Sarkovskii 定理的逆） 对任意的自然数 k，都存在一个连续函数 $f:R\to R$，它有极小周期 k 的周期点，但是对于任意自然数 $l\lhd k$，它都没有极小周期 l 的周期点。

证明 先构造一个连续函数，它有极小周期 5 的周期点，但是没有极小周期 3 的周期点。定义一个逐段线性的函数 f 如下

$f(x)=3$，当 $x\leqslant 1$ 时，

$f(2)=5, f(3)=4, f(4)=2$，

$f(x)=1$，当 $x\geqslant 5$ 时

f 的图形如图 28 所示。

易证 1,2,3,4,5 都是 f 的极小周期 5 的周期点。我们再证明 f 没有极小周期 3 的周期点。显然，f 在区间 $(-\infty,1)$，和 $[1,+\infty)$ 里没有极小周期 3 的周期点。因为 $f^3([1,2])=[2,5]$，$f^3([2,3])=[3,5]$，$f^3([4,5])=[1,4]$，因此 f 在 $[1,2]$，$[2,3]$，$[4,5]$ 中没有极小周期 3 的周期点。因为 $f^3([3,4])=[1,5]$ 而 f^3 在 $[3,4]$ 上单调递增，所以有唯一的一点 $x_0\in[3,4]$ 使 $f^3(x_0)=x_0$。又因为 $f([3,4])=[2,4]$，而 f 在 $[3,4]$ 上单调递

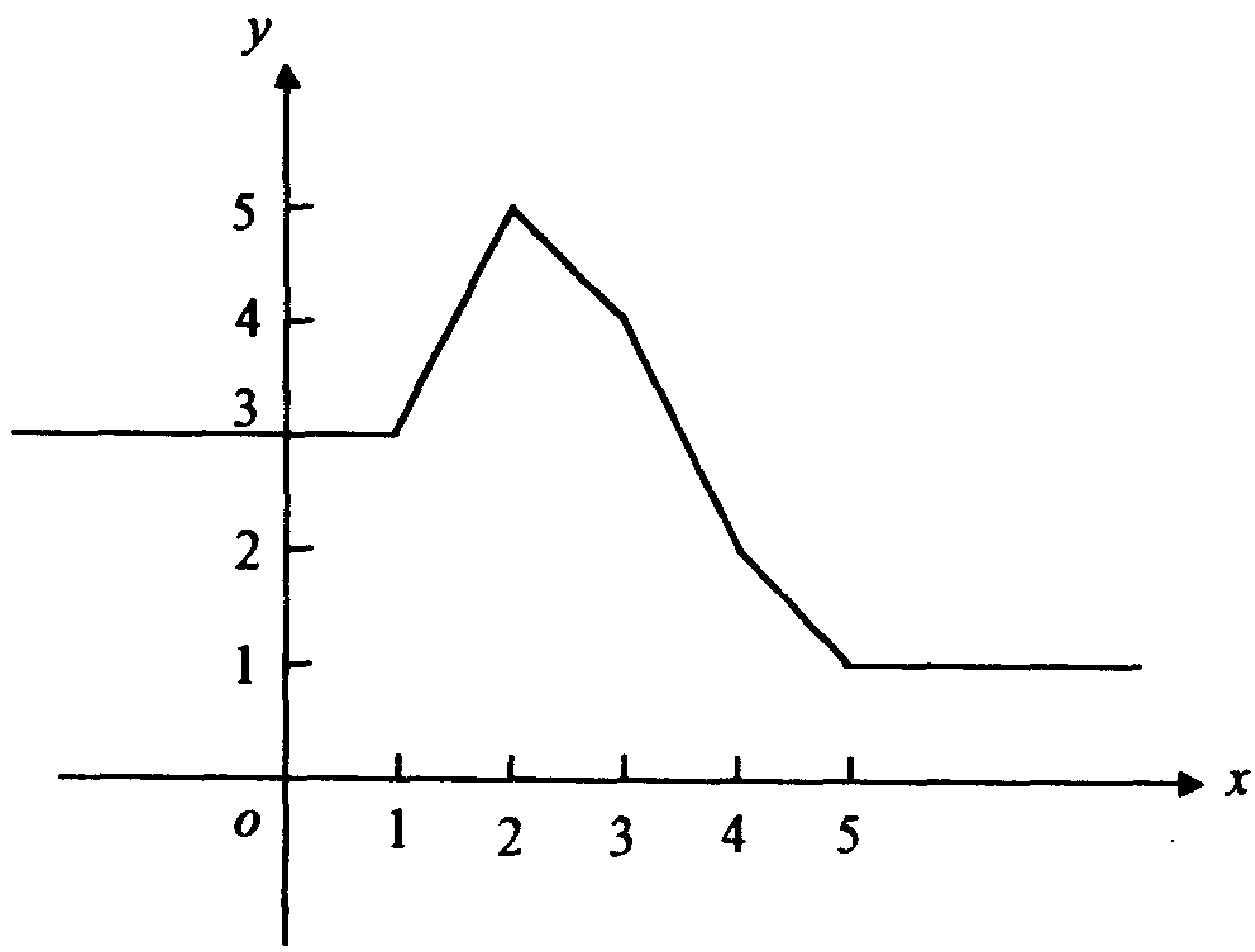


图 28

减。所以有唯一的一点 x_1 使 $f(x_1)=x_1$，那么 $f^3(x_1)=x_1$，因此 $x_0=x_1$。所以 x_0 不是 f 的极小周期 3 的周期点。因此 f 没有极小周期 3 的周期点。定理 10 对 $k=5$ 成立。

上述构造连续函数的方法可以推广来构造一个有极小周期 $k=2n+1(n\geqslant 2)$ 的周期点，但没有极小周期 $2n-1$ 的周期点的连续函数。按下式来定义一个逐段线性的连续函数 f。

$$f(x)=\begin{cases} n+1, & \text{当 } x\leqslant 1 \text{ 时}, \\ 2n+3-x, & \text{当 } x=2,3,\cdots,n \text{ 时}, \\ 2n+2-x, & \text{当 } x=n+1,n+2,\cdots,2n \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } x\geqslant 2n+1 \text{ 时} \end{cases}$$

仿上可证，f 在 $(-\infty,1)$，$[1,2]$，$[2,3]$，$\cdots[n,n+1]$，$[n+2,n+3]$，$\cdots$，$[2n,2n+1]$，及 $[2n+1,+\infty]$ 之中没有极小周期 $2n-1$ 的周期点，在 $[n+1,n+2]$ 中有唯一一点 x_0 使 $f^{2n-1}(x_0)=$

x_0，但 x_0 是 f 的不动点。因此定理10对于任意奇数 $k=2n+1(n\geqslant 2)$ 都成立。

再讨论 $k=2^n(n\geq 0)$ 的情形。令 $f_0(x)=0$ 对任一 $x\in R$；显然 $f_0(0)=0$，即0是 f_0 的不动点；而当 $x\neq 0$ 时，$f_0(x_0)=0$，$f_0^2(x)=0$。因此 f_0 没有极小周期等于2的周期点。按下式来定义一个逐段线性的连续函数：

$f_1(x)=2$，当 $x\leq 1$ 时，

$f_1(2)=0$，

$f_1(x)=1$，当 $x\geq 2$ 时。

f_1 的图形见图29

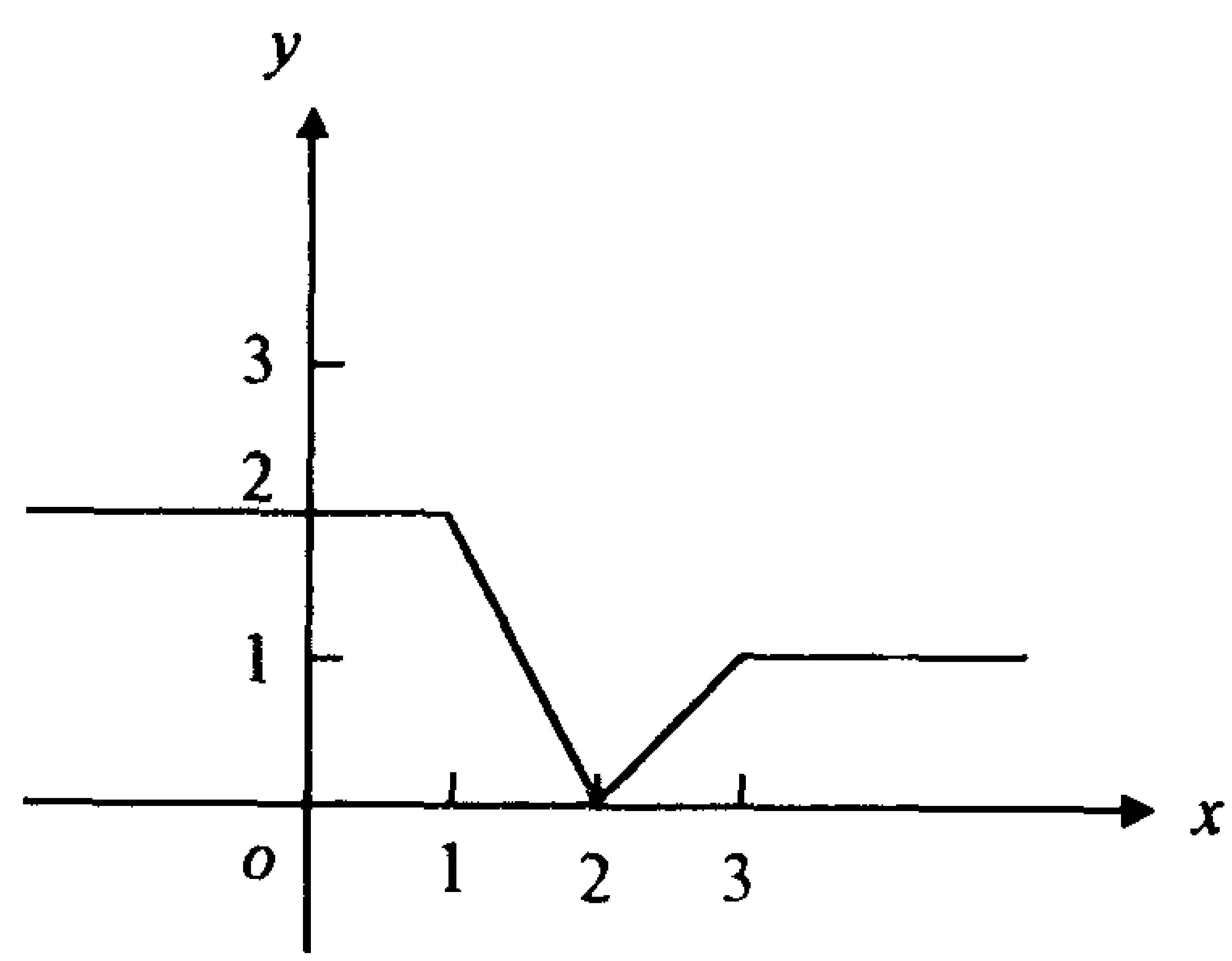


图29

易证，$\{0,2\}$ 是 f_1 的极小周期2的周期点。$\frac{4}{3}$ 是 f_1 的不动点。其余各点都是 f_1 的最终周期点而不是周期点，因此 f_1 没有极小周期 2^2 的周期点。这个构造函数的方法可以推广如下：

引理11　设 $g:R\to R$ 是连续函数，$g(x)=g(0)$，当 $x<$

0 时；而 $g(x)=g(1)$，当 $x>1$ 时。假定 g 有极小周期 2^n 的周期点，没有极小周期 2^{n+1} 的周期点，按下式来定义函数 $f:R\to R$.

$$f(x)=\begin{cases} g(0)+2, & \text{当 } x<0 \text{ 时}, \\ g(x)+2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}, \\ g(1)+4-2x & \text{当 } 1<x\leqslant 2 \text{ 时}, \\ x-2 & \text{当 } 2<x\leqslant 3 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } x>3 \end{cases} \tag{15}$$

那么 f 是连续函数，有唯一一个不动点，有极小周期 2^{n+1} 的周期点，但没有极小周期 2^{n+2} 的周期点。

证明 显然 $f([0,1])=[2,3]$，而 $f([2,3])=[0,1]$。易证，如果 $x_0\in[0,1]$ 是 g 的极小周期 p 的周期点，那么 x_0 是 f 的极小周期 $2p$ 的周期点，而且反过来也对，因此 f 在 $[0,1]$ 有极小周期 2^{n+1} 的周期点，没有极小周期 2^{n+2} 的周期点，由此更推出，f 在 $[2,3]$ 有极小周期 2^{n+1} 的周期点，没有极小周期 2^{n+2} 的周期点。

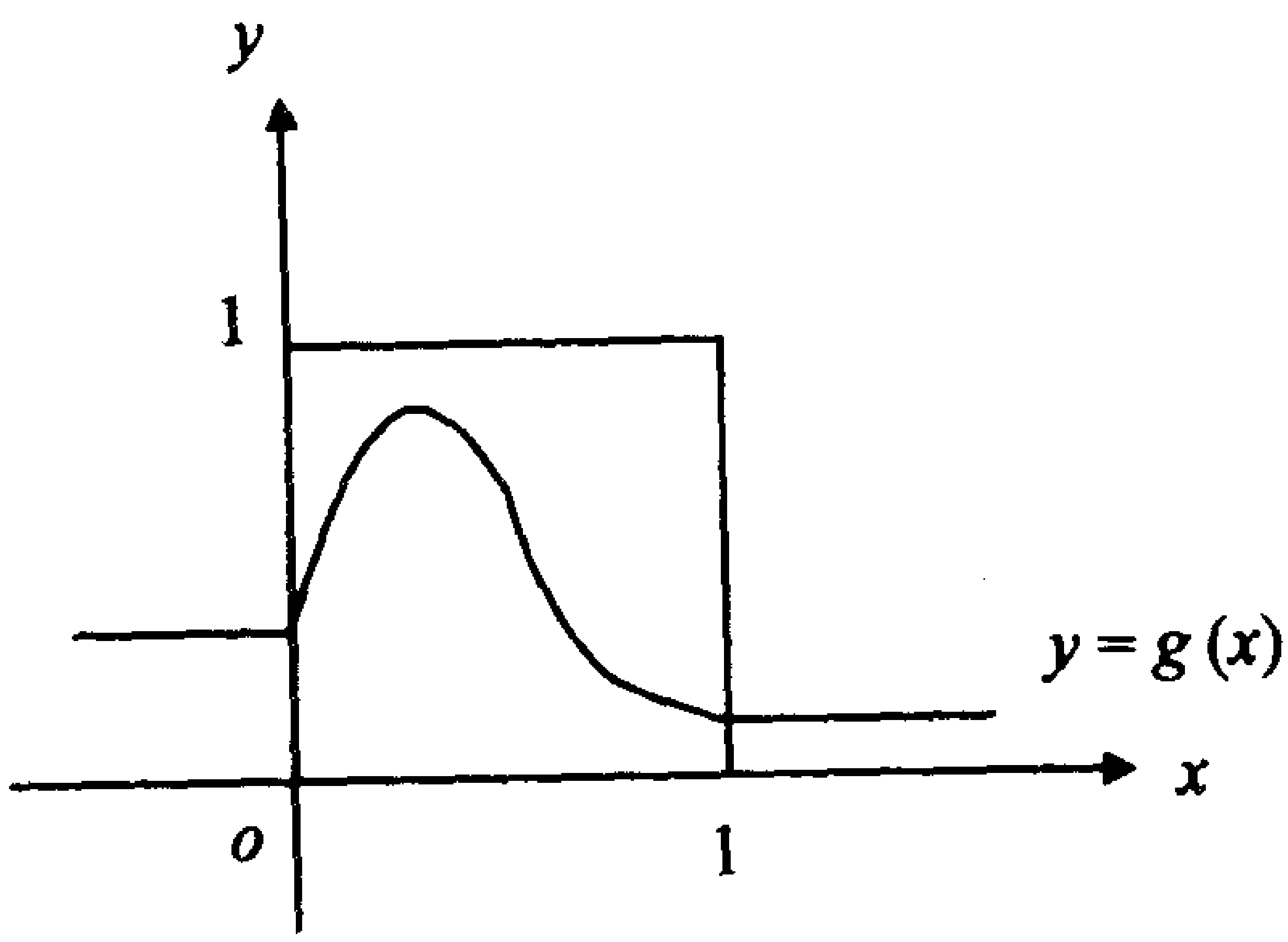
再看 $[1,2]$ 中的点，显然，f 在 $[1,2]$ 中有一个不动点。因为 f 在 $[1,2]$ 中的斜率小于或等于 -2，所以如果 $x\in[1,2]$ 不是 f 的不动点，那么有正整数 n 使 $f^n(x)\in[0,1]\cup[2,3]$，因此 x 不是 f 的周期点。

$(-\infty,0)$ 和 $(3,+\infty)$ 中也没有 f 的周期点，这是很显然的。

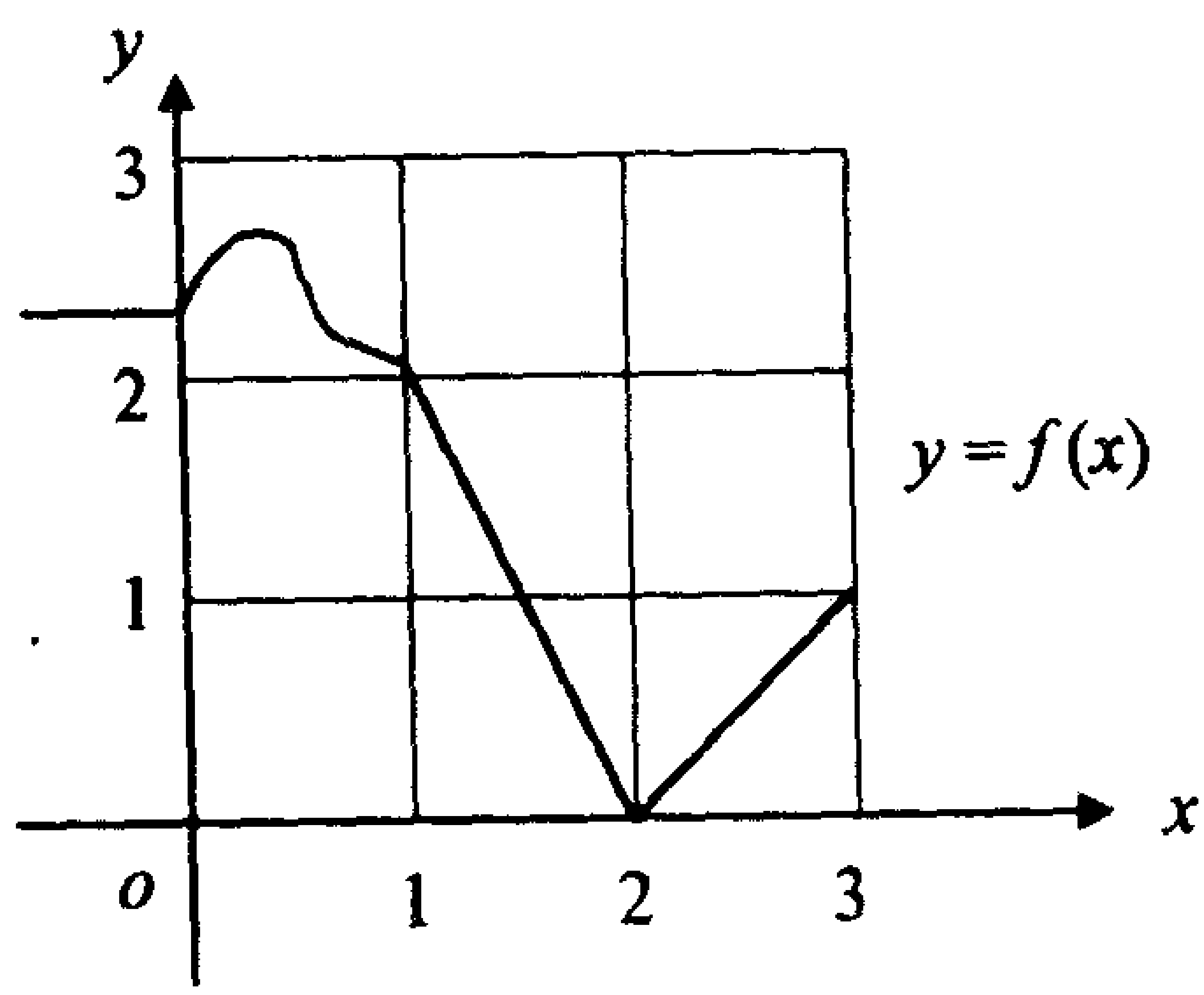
利用引理 11，用归纳法就可以对任意正整数 n 构造出连续函数来，它有极小周期 2^n 的周期点，没有极小周期 2^{n+1} 的周期点。

最后讨论 k 是偶数但不是 2 的幂的情形。引理 11 的证明实际上证明了下面的引理。

引理 12 设 $g:R\to R$ 是连续函数，$g(x)=g(0)$，当 $x<0$ 时；而 $g(x)=g(1)$，当 $x>1$ 时。按(15) 来定义函数 $f:R\to$



$y=g(x)$的图形



$y=f(x)$的图形

图 30

R，那么 f 是连续函数，有唯一一个不动点，而 f 其它周期点的极小周期是 g 的周期点的极小周期的两倍。

利用引理 12，即可证明定理 10 当 k 是偶数但不是 2 的幂的情形。例如，从一个有极小周期 5 的周期点而没有极小周期 3 的

周期点的连续函数出发，利用引理12就可以得到有极小周期10的周期点而没有极小周期6的周期点的连续函数来。

注1　在定理10的证明中用到了这样一个事实。设$g: R \to R$是连续函数，$g(x)=g(0)$，当$x<0$时；而$g(x)=g(3)$，当$x>3$时。定义

$$f(\frac{1}{3}x)=\begin{cases}\frac{1}{3}g(0)\text{，当 } x<0 \text{ 时，}\\ \frac{1}{3}g(x)\text{，当 } 0\leqslant x\leqslant 3 \text{ 时}\\ \frac{1}{3}g(3)\text{，当 } x>3 \text{ 时.}\end{cases}$$

那么映射

$$x \to \frac{1}{3}x$$

是从g的周期点到f的周期点的双射，而且对应的周期点有相同的极小周期。

注2　定理10对于闭区间，开区间，半开半闭的区间，以及半直线也成立。

参考文献

[1] R. L. Devaney. Introduction to chaotic Dynamic Systems. 2nd ed. Addison ～ Wesley, 1989.

[2] X. C. Huang. From intermediate value theorem to chaos. Mathematics Magazine, April 1992: 91 ～ 102.

[3] T. Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. American Mathematical Monthly, 1975, 82: 985 ～ 992.

[4] A. N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a contin－uous map of a line into itself. Ukraine Math. Z. 1964, 16: 61 ～ 71.

第二节　周期 3 蕴含混沌

本节的《周期 3 蕴含混沌》一文 1975 年发表于美国数学月刊(The American Mathematical Monthly),从此引起数学界乃至科学界的震动。

2.1　引言

常常用微分方程或差分方程来描述随时间而改变或演化的过程或现象。当某一现象可以由单个数字描述时,这就是最简单的一种数学表示,例如,在一学年开始时,易受感染某种疾病的儿童数目可以单纯用上一学年感染数的一个函数来作估计。也就是说,在第 $n+1$ 年(一年为时间周期)年初的感染数 x_{n+1} 可以写成

$$x_{n+1}=F(x_n) \tag{1}$$

这里 F 将一区间 J 映射到自身。用这样一个模型来研究疾病按年变化的过程,自然是过份简单化了,它只包含了非常复杂的现象的一点点影子,这模型可能对于其他的现象更精确些。这方程已经成功地模拟了油井钻探时在旋转钻头上冲击力点的分布(如文献[8,11]中所述),了解这样的分布对于预测钻头不均匀的磨损是有帮助的。另一个例子是,如果一种昆虫种群有不连续的增长(繁殖),则第 $n+1$ 代的种群规模将是第 n 代的一个函数。于是一个合理的模型应该是广义的 logistic 方程

$$x_{n+1}=rx_n\left[1-\frac{x^n}{k}\right] \tag{2}$$

Utida 在[10]中讨论了与昆虫种群有关的模型。另外还可参看

Oster 等人的文章[14,15]。

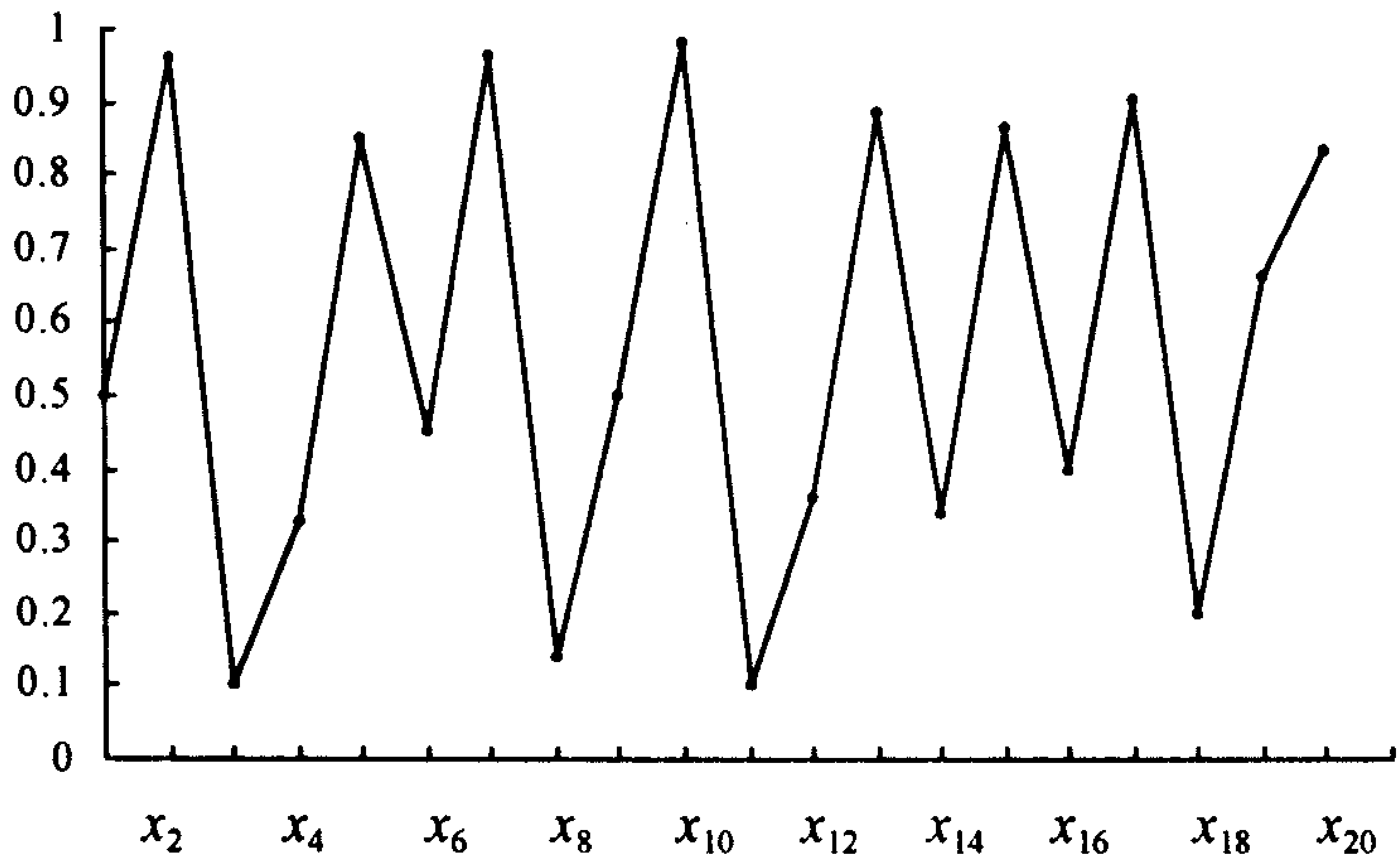


图 31　本图是取 $k=1$, $r=3.9$ 及 $x=0.5$,对方程(2)作 19 次迭代后得到的。图中迭代 20 个数值。没有一个数值重复出现二次。$x_2=0.975$ 和 $x_{10}=0.973$ 很接近,但整个曲线并不是以 8 为周期的,因为 $x_{18}=0.222$。

这些模型是非常简单的了,但即使看起来这样简单的方程(2)也可能具有使人惊奇的复杂动力学行为。见图 31. 我们用这样的观点来研究这些方程,即有时可以借助于这种简单模型来理解复杂现象的不规则性和浑沌振荡,虽然这样的模型对于提供准确的数值预报是不够精确的。Lorenz 在研究扰动现象的一系列的有趣的论文[1-4]中采用了这一观点。他指出某种复杂的流体流可用一个序列 $x, F(x), F^2(x), \cdots$ 来模型化,这一模型保留了原来的流的某些浑沌性质。见图 32。在本节中,我们分析了

序列$\{F^n(x)\}$出现非周期的，或可以称之为"浑沌的"那些情况。定理1指出，数目为x的种群，经过二代或更多代的增长，在达到不能承受的数量时，种群数目猛然下降，退到水平x或x以下，在这种情况下，(1) 产生浑沌性态。

在第3小节，我们给出一个众所周知的简单条件来保证一个周期点是稳定的；在第4小节，我们给出当F象图32中那样时的一个有用的结果。这就是说，有一个区间$J_\infty \subset J$，使得对几乎每一个$x \in J$，序列$\{F^n(x)\}$的根限点集合是J_∞。

还有些问题仍然不能回答。例如，周期点集的闭包是否是一个区间或至少是有限个区间的并？下面还会提出另一些问题。

注 May 最近在独立地研究性态随着一个参数变化而改变时[1]，发现了这些映射的另一些很强的性质。

2.2 主要定理

设$F:J \to J$。对于$x \in J$，$F^0(x)$记为x，$F^{n+1}(x)$记为$F(F^n(x))$，对$n = 0,1,\cdots$成立。如果$p \in J$，$p = F^n(p)$且当$1 \leqslant k < n$时$p \neq F^k(p)$，则我们称p是一个周期n的周期点。如果对某$n \geqslant 1$，p是周期的，则我们便称p是周期的或周期点。如果对某一整数m，$p = F^m(q)$是周期的，则我们称q是最终周期的。因为F不必是一对一的，因而可能有一些点是最终周期的，但并不是周期的。我们的目的是来理解一个点的迭代出现非常不规则的情况。我们主要结果的一个特殊情况指出，若有一个周期3的周期点，则对每个整数$n = 1,2,3,\cdots$存在一个周期n的周期点。而且，在J中有点x的不可数的子集，这些点甚至于不是"渐近周期的"。

定理1 设J为一区间，$F:J \to J$，是连续的。假定有一点$a \in J$使得$b = F(a)$，$c = F^2(a)$，$d = F^3(a)$，且满足

$$d \leqslant a < b < c (或 d \geqslant a > b > c$$

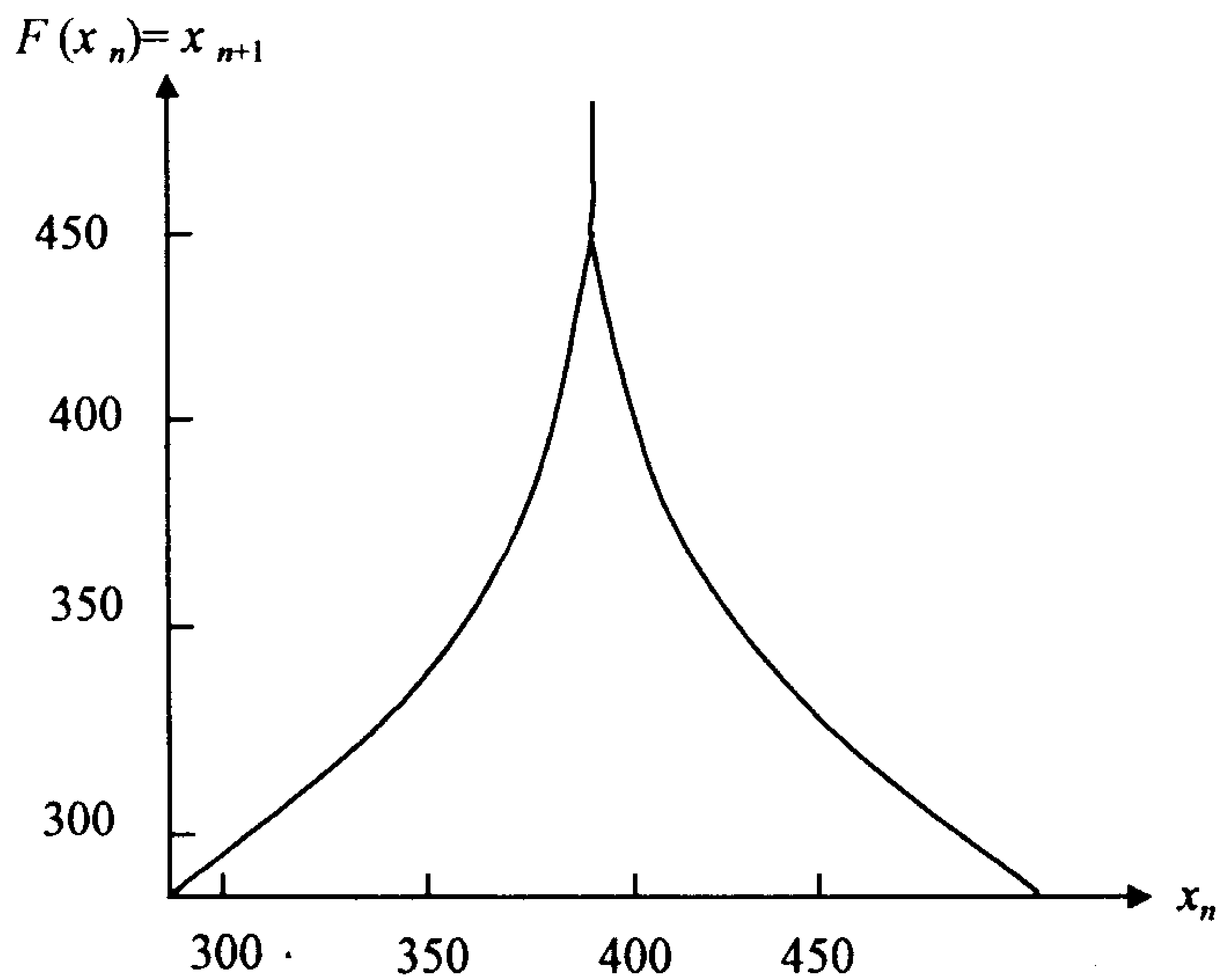


图 32　Lorenz[1] 研究了充满水的容器的旋转方程，这容器相对于其垂直轴为圆对称的。在接近容器的边缘部位加热，而在接近中心部位冷却。当容器的形状为环形，并且旋转速率很高时，产生波浪，同时它们的形状不规则地改变。对一组简化方程作数值解，*Lorenz* 设 x_n 实质上为逐次波的最大动能，根据 x_n 来标出 x_{n+1}，再将点连接起来即得上图。

则

T_1：对每一个 $k=1,2,\cdots J$ 中有周期 k 的周期点。

而且

T_2：存在一个不可数子集 $S\subset J$（A 不包含周期点），这 S 满足下列的条件：

(A) 对每对 $p,q \in S$ 且 $p \neq q$,有:

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0,$$

和

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0。\tag{4}$$

(B) 对每一个 $p \in S$ 和周期点 $q \in J$,有

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

注 如果有一个周期 3 的周期点,则定理的假设成立。

满足定理假设的函数的一个例子是如同(2) 的 $F(x)$:当 $r \in (3.84,4]$ 和 $J = [0,k]$ 时,$F(x) = rx[1 - \frac{x}{k}]$;当 $r > 4$ 和 $J = [0,k]$ 时,$F(x) = \max[0,rx[1 - \frac{x}{k}]]$。当 $r \in [0,4)$ 时这函数迭代的详细描述参看[2],对 $r = 4$ 时的讨论参看[6,7,12]。

周期 3 的周期点存在则蕴含了周期 5 的周期点存在,反之则不成立(见附录 1)。

如果有一周期点 p 使得

$$F^n(x) - F^n(p) \to 0,\text{当 } n \to \infty,\tag{5}$$

则我们说 $x \in J$ 是渐近周期的。由(B) 可知,集合 S 不包含渐近周期点。注意:目前还不知道使方程(2) 具有不为渐近周期点的 r 的下确界是何值。

定理 1 的证明 T_1 的证明同时代表 T_1 和 T_2 两者证明的主要思想。现在我们给出 T_1 的证明和必要的引理,把冗长的 T_2 的证明放到附录 2 中。

引理 0 设 $G: I \to R$ 是连续的,I 为一区间。对任何紧致区间 $I_1 \subset G(I)$,存在紧致区间 $Q \subset I$,使得 $G(Q) = I_1$。

证明 设 $I_1 = [G(p),G(q)]$,这里 $p,q \in I$。在 $p < q$,设 r 是$[p,q]$ 中最后一个使 $G(r) = G(p)$ 的点,并设 s 是在 r 后第一个使 $G(s) = G(q)$ 的点,则 $G([r,s]) = I_1$。同理可证 $p > q$ 的

情况。

引理 1　设 $F:J\to J$ 是连续的，并设 $[I_n]_{n=0}^{\infty}$ 为一紧致区间序列，对所有 n，有 $I_n\subset J$ 和 $I_{n+1}\subset F(I_n)$。则存在一紧致区间序列 Q_n，使得对 $n\geqslant 0$，有 $Q_{n+1}\subset Q_n\subset I_0$ 和 $F^n(Q_n)=I_n$。对任意 $x\in Q=\bigcap Q_n$ 和对所有的 n，有 $F^n(x)\in I_n$。

证明　定义 $Q_0=I_0$，则 $F^0(Q_0)=I_0$。若 Q_{n-1} 已定义为 $F^{n-1}(Q_{n-1})=I_{n-1}$，则 $I_n\subset F(I_{n-1})=F^n(Q_{n-1})$。由引理 0，把 $G=F^n$ 作用到 Q_{n-1} 上，则有一个紧致区间 $Q_n\subset Q_{n-1}$ 使得 $F^n(Q_n)=I_n$。于是完成归纳证明。

研究某一集合序列怎样相互映入或映到的技巧常常在动力系统的研究中使用。例如，*Smale* 在他著名的"马蹄的例子"("horseshoe example") 中应用这一方法，证明在平面上的一个同胚可能有无限多的周期点[13]。

引理 2　设 $G:J\to R$ 是连续的，设 $I\subset J$ 为一紧致区间，假设 $I\subset G(I)$。则有一点 $p\in I$ 使得 $G(p)=p$。

证明　设 $I=[\beta_0,\beta_1]$，选取 I 中的点 $\alpha_i(i=0,1)$ 使得 $G(\alpha_i)=\beta_i$，这就得到 $\alpha_0-G(\alpha_0)\geqslant 0$ 和 $\alpha_1-G(\alpha_1)\leqslant 0$，并由连续性知对 I 中的某 β，必有 $G(\beta)-\beta=0$。

和定理 1 一样假定 $d\leqslant a<b<c$。对于 $d\geqslant a>b>c$ 的情况的证明是相似的。因此这里略去。记 $K=[a,b]$ 和 $L=[b,c]$。

T_1 的证明。设 k 是一正整数，对 $k>1$，设 $\{I_n\}$ 为一区间序列，当 $n=0,\cdots,k-2$ 时 $I_n=L$，且 $I_{k-1}=K$，规定 I_n 是周期的，对于 $n=0,1,2,\cdots$，有 $I_{n+k}=I_n$。若 $k=1$，对所有 n 设 $I_n=L$。

设 Q_n 是引理 1 证明中的集合，于是 $Q_k\subset Q_0$ 且 $F^k(Q_k)=Q_0$，因此由引理 2，$G=F^k$ 在 Q_k 中有不动点 p_k。显然，p_k 对于 F 不可能有小于 k 的周期；否则，我们应该要求有 $F^{k-1}(p_k)=b$，这与 $F^{k+1}(p_k)\in L$ 相矛盾。因此点 p_k 是 F 的周期 k 的周期点。

2.3. 接近周期点的性态

对于某些函数 F，一个点的迭代的渐近性态可以借助于研究周期点来了解。对于

$$F(x) = ax(1-x) \tag{6}$$

当 $a \in [0,4]$ 时周期 1 和周期 2 的点的详细讨论见[1]，我们这里对这些结果作摘要的介绍。设 $a \in [0,4]$，$F:[0,1] \to [0,1]$.

对 $a \in [0,1]$，$x = 0$ 是唯一的周期为 1 的周期点；事实上，对 $x \in [0,1]$，当 $n \to \infty$ 时，$F^n(x) \to 0$。

对 $a \in [1,3]$，有二个周期 1 的点，即 0 和 $1 - a^{-1}$，对于 $x \in (0,1)$，当 $n \to \infty$ 时，$F^n(x) \to 1 - a^{-1}$。

对于 $a > 3$，也有二个周期 2 的点，记为 p 和 q，当然 $F(p) = q$，$F(q) = p$。对于 $a \in (3, 1+\sqrt{6} \approx 3.449)$ 和 $x \in (0,1)$ 时 $F^{2n}(x)$ 收敛到 p 或 q 之一，而 $F^{2n+1}(x)$ 收敛到 p 或 q 的另一点，除了那些 x，即对于这些 x，存在一个 n，使得 $F^n(x)$ 等于周期 1 的点 $1 - a^{-1}$。这样的点只有可数个，因此那些 $\{F^n(x)\}$ 的性态可由研究周期点来得到。

对于 $a > 1 + \sqrt{6}$，有 4 个周期 4 的点；对于 a 稍大于 $1 + \sqrt{6}$，除了某些 n 以外，$F^{4n}(x)$ 趋于这四个点之一，$F^n(x)$ 等于周期 1 或 2 的点之一。因而我们可以总结说，$[0,1]$ 中的每一点是渐近周期的。

对于使每个点是渐近周期的那些 a 值，只要研究周期点以及它们的"稳定性"就足够了。对任一函数 F，如果对某区间 $I = (y-\delta, y+\delta)$，有

$$|F^k(x) - y| < |x - y|，对所有 x \in I 成立。$$

则我们说具有周期 k 的点 $y \in J$ 是渐近稳定的。如果 F 在点 y，$F(y), \cdots, F^{k-1}(y)$ 处是可微的，这个简单条件

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(x)\right| < 1$$

将保证这渐近稳定的性态。由链锁规则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(F^{k-1}(y)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{k-1}(y) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(F^{k-1}(y)) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(F^{k-2}(y)) \times \cdots \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y) \\ &= \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y_n) \qquad (7)\end{aligned}$$

这里 y_n 是第 n 次迭代，即 $F^n(y)$。因此，如果

$$\left|\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y_i)\right| < 1,\text{这里 } y_i = F^i(y),$$

则 y 是渐近稳定的。这一条件决不保证不从"接近"周期点和它的迭代点开始迭代的点的极限性态。由 *Lorenz* 研究的图 32 中的函数具有相反的性质，也就是在导数存在处有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\right| > 1$$

对于这样的函数，每一个周期点都是"不稳定的"，因为当 x 靠近周期 k 的周期点 y 时，第 k 次迭代点 $F^k(x)$ 离开 y 比 x 离开 y 还要远。为了看清这一点，对 $F^k(x)$ 作近似：

$$F^k(y) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(y)[y - x] = y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(y)[y - x]$$

这样，当 x 接近 y 时，$|F^k(x) - y|$ 近似于 $|x - y|\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)F^k(y)\right|$。由于 $\left|\left(\frac{d}{dx}\right)F^k(y)\right|$ 是大于 1 的，因此，$F^k(x)$ 离开 y 比 x 离开 y 要远。

我们不知道 a 取什么值时，(6) 中的 F 开始出现不是渐近周期的点。当 $a = 3.627$ 时，F 有周期 6(x 近似为 0.498) 的周期点(是渐近稳定的)。于是这 x 是 F^2 的周期 3 的点，因而可将定理 1 用于 F^2。因为 F^2 是有非渐近周期点，因此对 F 亦然。

为了将本节的结果与下一节讨论的其他可能情况作对照，我们定义点 x 的极限集。如果存在收敛到 y 的子序列 $\{x_n\}$，则称点 y 是序列 $\{x_n\}\subset J$ 的一个极限点。这**极限集** $L(x)$ 定义为 $\{F^n(x)\}$ 的极限点的集合。如果 x 是渐近周期的，则 $L(x)$ 是周期为 k 的某一个周期点 y 的集合 $\{y,F(y),\cdots F^{k-1}(y)\}$。

2.4 $\{F^n(x)\}$ 的统计性质

定理 1 给出点迭代性态的不规则性。我们还需要研究当 F 是逐段可微(如图 32 中 Lorenz 研究的函数)以及满足

$$\inf_{x\in J_1}\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|>1,\text{这里 } J_1=\{x:\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\text{ 存在}\} \tag{8}$$

时，序列 $\{F^n(x)\}$ 的有规则性态。

研究这种函数的渐近性质的第一种方法是研究 $L(x)$，如果可能的话。第二种方法，其实也与第一种方法有关，是考虑 $\{F^n(x)\}$ 的平均性态。x 的迭代点 $\{x,\cdots F^{N-1}(x)\}$ 落在 $[a_1,a_2]$ 中的百分率将以 $\varnothing(x,N,[a_1,a_2])$ 来标记。当极限存在时，极限百分率记为

$$\varnothing(x,[a_1,a_2])=\lim_{N\to\infty}\varnothing(x,N[a_1,a_2])$$

由研究一般空间上变换的遍历理论出发，导出下面的定义。如果极限百分率满足

$$\varnothing(x,[a_1,a_2])=\int_{a1}^{a2}g(x)dx,$$

$$\text{对所有 } a_1,a_2\in J;a_1<a_2,$$

则我们说 g 是 x 关于 F 的密度。

研究密度要用到测度和泛函分析中的非初等方法，因此我们这里只概括叙述其结论。但是极为重要的事实是，对某些 F，对几乎所有的 $x\in J$ 有同样的密度。直到目前，除了对最简单的函数，这样一种密度的存在性没有被证明。下面的结果是最近证

得的。

定理 2[5]　设 $F:J \to J$，满足下列条件：

1)F 是连续的。

2) 除了一点 $t \in J$，F 是二次连续可微的。

3)F 满足(8)。

则存在一函数 $g:J \to [0,\infty)$，使得对几乎所有的 $x \in J$，g 是 x 的密度。另外，对于几乎所有的 $x \in J$，$L(x) = \{y:g(y) > 0\}$ 是一个区间。而且，集合 $J_\infty = \{y:g(y) > 0\}$ 是一个区间，并且 $L(x) = J_\infty$，对几乎所有 x 成立。

这证明用到了[8] 中的结果。在[9] 中解决了密度的计算问题。

(6) 的详细讨论可见[16]，文中讨论了当(6) 中的参数 a 在 3.0 到 4.0 之间变化时 $L(x)$ 随参数 a 的变化。

留下来解决的一个主要问题是(对某些性态好的一类函数 F) 一个稳定的周期点的存在性是否意味着几乎每一个点都是渐近周期的。

附录 1　周期 5 并不蕴含周期 3

在这附录中，我们给出一个例子，它有周期 5 的不动点，但是没有周期 3 的不动点。

设 $F:[1,5] \to [1,5]$ 是这样定义的：$F(1) = 3$，$F(2) = 5$，$F(3) = 4$，$F(4) = 2$，$F(5) = 1$，并且在每一区间$[n,n+1]$上，$1 \leqslant n \leqslant 4$，假定 F 是线性的。则有

$$F^3([1,2]) = F^2([3,5]) = F([1,4]) = [2,5]$$

因此，F^3 在[1,2] 中无不动点。类似地 $F^3([2,3]) = [3,5]$，$F^3([4,5]) = [1,4]$，因此，这些区间也不包含 F^3 的不动点。另一方面

$$F^3([3,4]) = F^2([2,4]) = F([2,5]) = [1,5] \supset [3,4]$$

因此，F^3 在$[3,4]$中一定有一个不动点。我们现证明 F^3 的不动点是唯一的，且也是 F 的不动点。

设 $p \in [3,4]$ 为 F^3 为一个不动点。则 $F(p) \in [2,4]$。若 $F(p) \in [2,3]$，则 $F^3(p)$ 应该是在$[1,2]$中，而这是不可能的，因为 p 不可能是一个不动点。因而 $F(p) \in [3,4]$，$F^2(p) \in [2,4]$。若 $F^2(p) \in [2,3]$，应该有 $F^3(p) \in [4,5]$，这是不可能的。因此，p，$F(p)$，$F^2(p)$ 全在$[3,4]$中。F 是线性的，因此 $F(x) = 10 - 2x$。这一函数有一个不动点$\frac{10}{3}$，且容易看出，F^3 有唯一的不动点，它一定是$\frac{10}{3}$。因而不会有周期 3 的点。

附录 2　定理 1 中 $T2$ 的证明

设 μ 为区间序列 $M = \{M_n\}_n^\infty = 1$ 的集合，其中

$(A.1)$　$M_n = K$ 或 $M_n \subset L$，且 $F(M_n) \supset M_{n+1}$。如果 $M_n = K$ 则

$(A.2)$　n 是一个整数的平方数，且 M_{n+1}、$M_{n+2} \subset L$。

这里 $K = [a,b]$ 和 $L = [b,c]$。当然，如果 n 是整数平方数时，则 $n+1$ 和 $n+2$ 就不会是平方数，因此$(A.2)$的最后一个要求是多余的。对 $M \in \mu$，设 $P(M,n)$ 表示$\{1,\cdots,n\}$中满足 $M_i = k$ 的下标 i 的数，对每一个 $r \in (\frac{3}{4},1)$，选取 $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^\infty$ 为 μ 中中的一个序列，使得

$(A.3)$　$\lim\limits_{n\to\infty} P(M^r,n^2)/n = r$。

设 $M_0 = \{M^r : r \in (\frac{3}{4},1)\} \subset M$。则 μ_0 是不可数的，因为对 $r_1 \neq r_2$，$M^{r_2} \neq M^{r_1}$。对每一个 $M^r \in \mu_0$，由引理 1，存在点 x，使对所有

n，有 $F_n(x_r) \in M_n^r$. 设 $S = \{x_r : r \in (\frac{3}{4}, 1)\}$。则 S 也是不可数的。对 $x \in S$，设 $P(x,n)$ 表示 $\{1,\cdots,n\}$ 中有 $F^i(x) \in K$ 的上标 i 的数。我们决不会有 $F^k(x_r) = b$，否则 x_r 最终会有周期 3，而这同 $(A.2)$ 矛盾。因而 $P(x_r,n) = P(M^r,n)$ 对所有的 n 成立，于是对所有 r，有

$$\rho(x_r) = \lim_{n\to\infty} P(x_r, n^2) = r。$$

我们要求

$(A.4)$　对 $p,q \in s, p \neq q$，存在无限多个 n，使得 $F^{(n)}(p) \in K$，且 $F^n(q) \in L$，或反之亦然。

我们可以假定 $\rho(p) > \rho(q)$，则 $P(p,n) - P(q,n) \to \infty$，于是一定有无限多个 n，使 $F^n(p) \in K$ 且 $F^n(q) \in L$。

因为 $F^2(b) = d \leqslant a$ 和 F^2 是连续的，则存在 $\delta > 0$，使得 $F^2(x) < \frac{(b+d)}{2}$ 对所有 $x \in [b-\delta, b] \subset K$ 成立。若 $p \in S$ 且 $F^n(p) \in K$，则$(A.2)$ 蕴含 $F^{n+1}(p) \in L$ 且 $F^{n+2}(p) \in L$。因此 $F^n(p) < b - \delta$。如果 $F^n(q) \geqslant b$，于是

$$|F^n(p) - F^n(q)| > \delta$$

由$(A.4)$，对任意 $p,q \in S, p \neq q$，有

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| \geqslant \delta > 0$$

(3) 得证。可用类似的方法来证明(B)。

(4) 的证明　因为 $F(b) = c, F(c) = d \leqslant a$，我们可以选取区间 $[b^n, c^n], n = 0,1,2,\cdots$，使得

(a)　$[b,c] = [b^0,c^0] \supset [b^1,c^1] \supset \cdots \supset [b^n,c^n] \supset \cdots$,

(b)　$F(x) \in (b^n,c^n)$，对所有 $x \in (b^{n+1},c^{n+1})$ 成立，

(c)　$F(b^{n+1}) = c^n, F(c^{n+1}) = b^n$.

设 $A = \bigcap_{n=0}^{\infty}[b^n,c^n], b^* = \inf A, c^* = \sup A$，则由$(c)$ 得 $F(b^*) = c^*$ 和 $F(c^*) = b^*$。

为了证明(4),我们要对序列M^r作具体选择,除了前面关于$M\in\mu$的要求,我们将假定,若对$k=n^2$和$(n+1)^2$有$M_k=K$,则当$k=n^2+(2j-1)$时有$M_k=[b^{2n-(2j-1)},b^*]$,而当$k=n^2+2j$时有$M_k=[c^*,c^{2n-2j}]$,这里$j=1,\cdots,n$。对于剩下的不足整数平方数的k,我们设$M_k=L$。

容易证明,这些要求同(A.1)和(A.2)是相容的,我们仍然可以选取M^r,使其满足(A.3),注意到$\rho(x)$可以看成是$F^{n^2}(x)\in K$的那些n的百分率的极限,因而对任意$r^*,r\in(\frac{3}{4},1)$,存在无限多个n,使得当$k=n^2$和$(n+1)^2$时$M_k^r=M_k^{r^*}=K$。为了证明(4),设$x_r,*\in S$。因为当$n\to\infty$时$b^n\to b^*$和$c^n\to c^*$,对任意的$\varepsilon>0$,存在N,对所有$n>N$,有$|b^n-b^*|<\frac{\varepsilon}{2}$和$|c^n-c^*|<\frac{\varepsilon}{2}$。于是,对任意的$n>N$的$n$和当$k=n^2,(n+1)^2$时$M_k^r=M_k^{r^*}=K$,我们有

$$F^{n^2+1}(x_r)\in M_k^r=[b^{2n-1},b^*],$$

这里$k=n^2+1$,且$F^{n^2+1}(x_r)$和$F^{n^2+1}(x_{r^*})$同时属于$[b^{2n-1},b^*]$因而,$|F^{n^2+1}(x_r)-F^{n^2+1}(x_{r^*})|<\varepsilon$。因为具有这性质的$n$有无限多个,于是

$$\liminf_{n\to\infty}|F^n(x_r)-F^n(x_{r^*})|=0$$

注 这定理可推广到假定$F:J\to R$,而不假定$F(J)\subset J$。我们将这一证明留给读者。当然,$F(J)\cap J$应该非空,因为在b,c和d定义后,它应包含点a,b和c。

参考文献

[1]E. N. Lorenz. The problem of deducing the climate from the governing equations. Tellus, 16 (1964) 1 ~ 11.

[2]E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flows. J. Atmospheric Sci., 20 (1963) 130 ~ 141.

[3]E. N. Lorenz. The mechanics of vacillation. J. Atmospheric Sci., 20(1963):448 — 464.

[4]E. N. Lorenz. The predictability of hydrodynamic flow. Tran. N. Y. Acad. Sci., Ⅱ, 25 (1963) 409 ~ 432.

[5]T. Y. Li and J. A. Yorke. Ergodic transformations from an interval into itself. (submitted for publication).

[6]P. R. Stein and S. M. Ulam. Nonlinear transformation studies on electronic computers. Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, New Mexico, 1963.

[7]S. M. Ulam. A Collection of Mathematical Problems, Interscience. New York, 1960. 150.

[8]A. Lasota and J. A. Yorke. On the existence of invarian measures for piecewise monotonic transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 186(1973)481 ~ 488.

[9]T. Y. Li. Finite approximation for the Frobenius — Perrs operator — A Solution to Ulan's conjecture. (submitted for publication).

[10]Syunro Uteda. Population fluctuation, an experimenta -l and theoretical approach. Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, 22(1957): 139 — 151.

[11]A. Lasota and P. Rusek. Problems of the stability of

the motion in the process of rotary drilling with cogged bits. Archium Gornictua, 15 (1970):205 ~ 216 (Polish with Russian and German Summary).

[12]N. Nerropolis, M. L. Stein and P. R. Stein. On isfinite limit sets for transformations on the unit interval. J. Combinatorial Theory Ser. A 15, (1973):25 ~ 44.

[13]S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull A. M. S., 73(1967):747 ~ 817(see § 1.5).

[14]G. Oster and Y. Takahashi. Models for age specific interactions in a periodic environment. Ecolog, in press.

[15]D. Auslander, G. Oster and C. Huffaker. Dynamics of interacting populations. apprepint.

[16]T. Y. Li and James A. Yorke. The "simplest" dynamics system(to apear).

[17]R. M. May. Biological Populations obeying difference equations, stable cycles, and chaos. J. Theor. Biol. (to appear).

附录　关于 Li — Yorke 混沌的故事

在科学界，关于浑沌(chaos)现象和奇异吸引子(strang Attractor)的研究领域里，名气最大的奇异吸引子大概就是所谓的 Lorenz 吸引子吧。在 Lorenz 吸引子成名的过程中，有一个关键性的教授 Aller Feller 的名字却很少有人知道。

我在美国马里兰大学(University of Maryland)做研究生时，我的博士论文的指导教授是 J. A. Yorke 先生，他所属的研究所是“流体动力学与应用数学所”(Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics)(现在的名称已改成“物理科学与技术研究所”)(Institute for Physical Sciences and Techenology)。那个研究所研究的领域非常之广。比如说，固态物理、等离子体物理、化学工程、应用数学、…… 等等。其中有一个相当奇怪的项目，叫做气象研究。A. Feller 是这个项目的教授。

大约在 1972 年时，Feller 教授将 E. N. Lorenz 所写关于“气象预测”模式的 4 篇文章交给 Yorke 教授。当时 Feller 教授觉得 Lorenz 的文章过于理论化、数学化，他们不太感兴趣。也许我们搞数学的会比较感兴趣。那 4 篇文章都是在气象的期刊上发表的。若不是 Feller 教授，我们不太可能有机会接触到它。那段时间，我们读了那几篇 Lorenz 写的文章，觉得很有意思。

在 1973 年 4 月中的一天下午，我到 Yorke 教授的办公室。当时他对我说：“我给你一个好的思想！”(I have a good idea for you!) 那时我在做微分方程方面的研究。我以为他所谓的“好思想”是关于微分方程方面的高深思想，但是我却开玩笑地说：

“你的那个思想足够‘数学月刊’的水平吧!”(Is your idea good enough for Monthly?)“数学月刊”是一个相当普及性的刊物。它就好象日本的“数学セミメ一”一样,是一般学生都能看得懂的浅近杂志,它并不刊载非常高深的思想(这种学生向老师开玩笑的事,在美国非常普遍。但是在国内好象并不多见。)Yorke 教授听了我的话之后,只是笑了一下。当时他告诉我的思想就是后来出了名的 Li − Yorke 定理。对于一个从 R^1 到 R^1 上的函数 f,我们用 $f^n(x)$ 来代表 $f \cdot f^{n-1}$。如果对一点 $a \in R^1$,我们有 $f^k(a) = a$,而且 $f^j(a) \neq a$. 此处 $0 \leqslant j < k$,则我们称 a 是周期 k 的点。

定理 假设 f 是从实数空间 R 到实数空间 R 的连续函数,同时假设 f 有一个周期 3 的点。则

(a) 对任一个正整数 n,都存在一个周期 n 的点 x_n。

(b) 1. 存在一个不可数的子集合 S,对其中的任何两点 x,y,我们有

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

以及

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0。$$

2. 对任一个周期点 $P \in R^1$ 以及 S 里的点 x,我们有

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(x)| \neq 0.$$

这个思想的原始出发点在 Lorenz 那些文章之中。我听了这个思想之后,马上感概地说:“这太适合‘数学月刊了’!”(It will be a perfect work for Monthly!)的确是如此,因为它根本不牵涉高深的语言,一般学生都应看得懂,不是吗?

大约两星期后,我就完全证明了这个定理,证明过程中所用到的只是初等微积分里的“中值定理”,实在不是太“高深”。我们将它写好之后,就真的投到“数学月刊”去了。那时那篇文章引的参考文献只有 Lorenz 的那 4 篇文章。

没想到，没过多久那篇文章就被“数学月刊”退回。他们说，我们这篇文章过于偏向“研究性”，并不适合该期刊的读者。因此他们建议我们将原稿转寄其它的杂志；若是我们一定要投“数学月刊”，他们建议我们把它改写到一般学生都能看懂的地步。

文章退回以后，Yorke 教授还是坚持要寄回“数学月刊”。因为它比较一般化，它的读者群相当之大。(其实，我真恨不得他能同意我转寄别的期刊)。当初我们研究这个问题，以及写这篇文章，只是着迷它本身的趣味，和我博士论文的内容根本无关。因此我并没有花功夫去改它，事实上，我也不知道该怎么改。于是乎，这篇文章就在我桌上躺了将近一年。

1974 年是马里兰大学数学系的生物数学“特别年”。在这一年里，每星期都要请“生物数学”这个领域里最杰出的学者来校演讲，在 5 月的第一星期，他们所请的学者是赫赫有名的 Robert May 教授。他是当时普林斯顿大学生物系的教授。R. May 教授在那一星期中，每天都作一次演讲。最后一天演讲的内容是函数 $f_r(x) = rx(1-x), x \in [0,1], 0 < r < 4$ 的迭代。这个函数在他们生物界的研究领域里是一个非常重要的模型。通常被称为逻辑斯蒂模型(Logistic Model)。

关于这个函数的迭代，现在已是举世皆知。但是 R·May 教授当时只是述说了前面一部分较规则的动态。也就是说，当 r 较小时我们做 $x_{n+1} = rx_n(10x_n)$ 这样的迭代，对于“随意”取的 x_0，$\{x_n\}$ 这个数列最后都趋近于一个点。但是当 r 慢慢变大而超过 3 时，$\{x_n\}$ 这个数列却趋向一对周期 2 的点。当 r 再变大而超过某一个数值时，$\{x_n\}$ 最后趋向一组周期 4 的点。然后，随 r 的逐渐变大，$\{x_n\}$ 最后会趋近一组周期 2^m 的点。但是当 r 大于某个极值后，却会出现一些“奇怪现象”。比方说，对某些 r 来说 $\{x_n\}$ 最后走向一组周期 5 的点；对某些 r 来说，$\{x_n\}$ 最后趋近一组周期 6 的点；对某些 r 来说 $\{x_n\}$ 在两个区间之间跑来跑去。尤其当 $r =$

4 时，$\{x_n\}$ 这个数列在整个[0,1]区间跑来跑去，当时，R. May 教授无法解释这个现象。想象中也许只是计算上的误差所致吧。

在微分方程的理论中，有一个著名的Poincaré — Bendikson 理论。它大概的意思是说，在 R^2 上的微分方程 $\dot{x}=f(x)$，若 f 是很光滑而能保证这个微分方程的解的“存在性”以及“唯一性”时，则从任何一点 x 出发的解在有限区间里它的轨迹最后都趋近于一个周期解。这个 2 维空间的理论虽然在 3 维以上的空间里无法证明，但是大家多多少少都相信，即使对于 3 维以上空间里的微分方程，从任何初始值 x_0 出发的解它的轨迹最后的变化还是相当“规则”的。比如说，解的轨迹最后趋向几乎周期(almost Periodic)，拟周期(quasi-periodic)的解等等。若是在计算时，微分方程的解的轨道上出现非常不规则而混乱的现象，常常被认为是计算方式上的问题或是计算上的误差所致。因此而时常埋没了一些开创性的工作(这种事，不幸在日本发生，下面会谈到)。

现在再回头来看，“逻辑斯蒡模型”的迭代

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

r 比较小时，数列$\{x_n\}$ 最后趋向一组周期点，这是非常规则的变化。但是当 r 大于某一个数值时，数列$\{x_n\}$ 出现非常不规则的变化。若是用 Li — Yorke 定理来解释，这种不规则的混乱现象并不一定是计算方式的问题，或是计算上的误差所导致的结果。事实上，这些混乱现象在于函数本身的特性。

York 教授听完R. May 教授的演讲后，在送May 上飞机时，把在我桌上躺了将近一年的那篇关于 Li — Yorke 定理的文章给他看。他看了文章的结果后，大为吃惊。他认为这个定理在很大程序上解释了他的疑问。Yorke 教授从飞机场回来后，立刻跑来找我说：“我们应该马上改写这篇文章，登在 1975 年 12 月份

的那期上.

R. May 是举世闻名的教授。那年暑假时他被邀请到欧洲各处演讲。Li — Yorke 定理 —— 周期 3 则浑沌，因此大为出名。Lorenz 吸引子也跟着大为出名。特别值得一提的是R. May 教授在来马里兰大学之前并不知道所谓的 Lorenz 吸引子。

所谓"奇异吸引子"，事实上是指一个动力系统的轨迹最后被一个奇异(造成混乱)的吸引子(Attractor)吸去了。也就是说，我们若追踪轨迹的路线，最后会趋近于一个混乱的状态，毫无规则可寻。上面提过，在 2 维空间里的微分方程(一般称微分方程为微分动力系统)，Poincaré — Bendikson 理论保证这种"奇异"的吸引子不会出现。在 Li — Yorke 定理出现以前，大家多半相信即在 3 维以上的空间里，不受"噪音"(noise)影响的微分动力系统，它的解的轨迹的长期路径多多少少追随一些规律。但是当 Li — Yorke 定理出现以后，大家不再迷信这个假定。首先的一个例子，就是 Lorenz 吸引子(它是 3 维空间里的微分动力系统)。后来大家发现"奇异吸引子"到处都是，各个领域都有。这个混乱的现象，不是人为计算上的错误或误差所造成的，是"神的旨意"。

我来日本以后才知道，其实在 1960 年初期，京都大学工学院电机系的教授上田皖亮先生(当时他还是研究生)就已经在研究 Duffing 方程

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos t$$

时，发现这种混乱现象。这个微分方程在许多数学部门的发展史上占有相当的地位。数学家对它的研究总有七八十年的历史了吧，当时，上田皖亮发现，对某些参数 k，B 而言(比如说，$k = 0.05$，$B = 7.5$)，这个微分方程的解的轨迹，当 t 很大时会乱七八糟的乱走一通，毫无规律可寻。这是以前从没有发现的事。因

此，那时不管是数学家或是工学院的教授，没有人相信他所得到的结果。大家都认为这只是他自己计算上出了错。他当时连文章该往何处投都不知道，因为没有人会慎重考虑他的结果。但是，自从一般人慢慢都能接受“奇异吸引子”的概念以后，大家才开始相信上田皖亮教授关于 Duffing 方程的研究结果。1978 年暑假，法国的名教授 D. Ruelle 来日本访问，那时他才知道上田先生的结果。Ruelle 后来到世界各地张扬，所谓上田吸引子(Ueda Attractor)，日本吸引子(Japenese Attractor)才闻名于世。遗憾的是，头彩已被 E. N. Lorenz 抢去了。

我也是来到日本以后才知道研究所谓“应用数学”的专家在日本数学界的“社会地位”非常之低。这在世界上其它国家里是少有的现象。在世界各地研究“浑沌现象”和“奇异吸引子”的学者大多数是应用数学界的人士。这个领域现在非常热门，研究的人非常之多。但是在日本，这方面的研究都不是“数学界”的人士在做。日本数学界的人士很少知道什么是“日本吸引子”。这在我看来是非常奇怪的事。

我觉得所谓的“应用数学”，应该是：首先设法了解自然界中的一些现象和问题。好比说，想想为什么苹果会从树上掉到牛顿的头上。然后找出这些现象在数学上的正确描述，以及解决这些问题的方法。然后把这些现象的描述以及解决这些问题的方法理论化，希望同时能解决一些类似的问题。理论化之后，若是遇到这个理论不能解决的问题，则要更进一步设法推广原有的理论。这比躲在象牙塔里做些莫名其妙的抽象工作要有意思多了，我想。

其实，即使在 20 世纪初期，一般来说，数学还只是物理学的一部分。后来英国的数学家 Hardy 大力鼓吹他的论点：“数学”应该从物理学里独立出来，而本身成为一种“艺术”(*Art*)。通常的所谓的“艺术”，它所追求的是一种“美感”。但是，大家都有大

家对“美感”的不同的标准。比如说，我实在不想花钱买毕加索(Picaso)的画(它在世界市场上，通常是上百万美元的价格)，因为我真不懂它“美”在哪里。再比如说，我们在我们东方的古画里，其中所有的女士们，大多是小眼睛、细鼻梁。西方人刚来到东方时，我们都觉得他们是“妖怪”—— 大眼睛、高鼻子。可见过去东方人对审美的观点与西方人有很大的差异。但是今天我再也看不到东方国家选去参加“世界小姐”竞选的小姐们是“小眼睛，细鼻梁”了。我认为这是一种“文化侵略”，我们东方人输惨了。不幸的是，把“数学”当成“艺术”来看之后，大多数的东方的数学家还是把西方人当做“评审员”。追求他们的标准中所谓的“美感”。

“应用数学”的“评审员”是这个自然世界。去描述自然界的现象，去解决自然界的问题，这好象不须要去看西方人的脸色了，不是吗？

第四章　积分的计算

本章讨论积分的计算问题。一些典型而重要的求积分值的例子，通常都是应用复变函数方法解决的。这里我们用初等微积分求其值。本章最后，介绍定积分的一个基本性质，应用该性质，可将数学分析或高等数学中一类积分计算公式的冗繁推导化为简单证明。

第一节　三角函数积分的特殊技巧

本节的九个典型求积分值的例子，通常都是应用复变函数方法解决的。这里我们介绍一种非常初等的方法 — 将其转化成三角函数的积分，随后，应用三角函数的性质来求其值。

首先需要定积分的两个基本性质。

性质 1　若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上黎曼可积，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)\mathrm{d}x$$

特别

(*A*)　若 $f(x) = f(a-x)$，即 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的几何图形关于直线 $x = \dfrac{a}{2}$ 对称，

则有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

(B)　若 $f(x) = -f(a-x)$，即 $f(x)$ 在$[0,a]$上的几何图形关于点$(0,\frac{a}{2})$对称，

则有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

性质 2　若 $f(x)$ 在$[0,a]$上黎曼可积，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$$

现在应用性质 1 和性质 2 计算下列积分值。

例 1　计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解　**方法 1**　令 $x = \mathrm{tg}\theta$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\mathrm{tg}\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

既然

$$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

由性质 2 得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

即 $I = 0$。

方法 2　令　$u = \frac{1}{x}$，则

$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u = -I$$

即　$I = 0$

例 2　计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\mathrm{tg}\theta$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\mathrm{tg}\theta))\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\mathrm{tg}\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta)\ln(\mathrm{tg}\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$

由例 1 可知，右边第一项积分为零；对第二项应用分部积分，得

$$I=\frac{1}{4}\left[(\sin 2\theta)\ln(\mathrm{tg}\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\frac{2}{\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta\right]=-\frac{\pi}{4}$$

其中，右边第一项用到了洛必达法则。

例 3　计算　$I=\int_0^{\pi}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

解　**方法 1**　由性质 1(A) 得到

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

应用性质 2，有

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

即

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin\theta)+\ln(\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln 2]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$=\frac{1}{2}I-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

从而 $I=-\pi\ln 2$.

方法 2　由 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，得

$$I=\int_0^{\pi}\ln 2\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\ln(\sin\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\ln(\cos\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi\ln 2+2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)\mathrm{d}t]$$

$$=\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\ln 2+2I$$

即 $I=-\pi\ln 2$，并且

$$I=\int_0^{\pi}\ln(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta=-\pi\ln 2$$

例 4 计算 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$

解 **方法 1** 令 $x=\mathrm{tg}\theta$，则

$$I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\mathrm{tg}^\alpha\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^\alpha\theta}{\cos^\alpha\theta+\sin^\alpha\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha\theta}{\sin^\alpha\theta+\cos^\alpha\theta}\mathrm{d}\theta$$

即

$$2I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{4}(\text{与}\ \alpha\ \text{无关})。$$

方法 2 设 $t>1$，考虑积分

$$F(t)=\int_{t^{-1}}^{t}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{t^{-1}}^{t}\frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\mathrm{d}u\qquad(u=\frac{1}{x})$$

即

$$F(t)=\frac{1}{2}\int_{t^{-1}}^{t}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t-\mathrm{arctg}t^{-1})$$

令 $t\to+\infty$，即得

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{4}(\text{与}\ \alpha\ \text{无关})。$$

另外，还可以应用广义积分的性质而通过作变量代换 $u=\frac{1}{x}$ 直接求出原积分的值。

例 5 计算 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(A+B\cos\theta)d\theta$

其中，$A\geqslant B>0$

解 当 $A=B$ 时，例 3 已经得到其值

$$I=2\pi\ln A+2\int_{0}^{\pi}\ln(1+\cos\theta)d\theta=-2\pi\ln 2+2\pi\ln A.$$

下面考虑 $A>B>0$。

方法 1 令 $x=\pi-\theta$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(A+B\cos\theta)d\theta\\&=2\int_{0}^{\pi}\ln(A+B\cos\theta)d\theta\\&=2\int_{0}^{\pi}\ln(A-B\cos x)dx\end{aligned}$$

即 I 与 B 的符号无关。这样，得到

$$\begin{aligned}I&=\int_{0}^{\pi}\ln(A^2-B^2\cos^2\theta)d\theta\\&=\int_{0}^{\pi}\ln\left(A^2-\frac{1}{2}B^2-\frac{1}{2}B^2\cos 2\theta\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\ln\left(A^2-\frac{1}{2}B^2-\frac{1}{2}B^2\cos t\right)dt\qquad(t=2\theta)\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(A^2-\frac{1}{2}B^2-\frac{1}{2}B^2\cos t\right)dt\qquad(\text{周期性})\end{aligned}$$

令

$$B=2C,\alpha=\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{B}$$

即

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln C^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^2+a^{-2}-2\cos t)\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\ln C+\frac{1}{4}[\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^2+a^{-2}-2\cos t)\mathrm{d}t$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^2+a^{-2}+2\cos t)\mathrm{d}t]$$
$$=2\pi\ln C+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^4+a^{-4}-2\cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\ln C+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^4+a^{-4}-2\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\ln C+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^4+a^{-4}-2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
$(\theta=2t$,周期性)

依次类推，得

$$I=2\pi\ln C+\frac{1}{2^k}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^k+a^{-k}-2\cos\theta)d\theta,k=1,2,\cdots\cdots$$

由含参变量积分的性质以及

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a^x+a^{-x}-2\cos\theta)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a-a^{-x}\ln a}{a^x+a^{-x}-2\cos\theta}$$
$$=\ln a\quad(a>1)$$

得到

$$I=2\pi\ln C+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(a^k+a^{-k}-2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\ln C+\int_{-\pi}^{\pi}\ln a\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\ln Ca=2\pi\ln\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}$$

特别，当 $A=B$ 时，该式仍成立；当 $A=1+r^2,B=-2r$ 时，有

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & |r|\leqslant 1,\\ 4\pi\ln r, & |r|>1\end{cases}$$

方法 2　应用幂级数

$$\ln(1+r\cos\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n\cos^n\theta}{n},r\in(0,1)$$

得

$$f(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1+r\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_{0}^{\pi}\ln(1+r\cos\theta)d\theta$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\int_{0}^{\pi}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

应用瓦里兹公式，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2},n\text{ 为偶数}\\0,\qquad n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

于是

$$f(r)=2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m}}{2m}\cdot\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}$$

再应用$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$的幂级数展开式，当$r\in(0,1)$时，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m}r^{2m}$$

因此，有

$$f'(r)=\frac{2\pi}{r}(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-1)$$

结合

$$f(1)=2\int_{0}^{\pi}\ln(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta=-2\pi\ln2$$

得

$$f(r)=-[\int_{r}^{1}f'(s)\mathrm{d}s-f(1)]$$
$$=-2\pi\ln2-2\pi[\int_{r}^{1}\frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s-\int_{r}^{1}\frac{1}{s}\mathrm{d}s]$$
$$=2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{2}$$

方法 3　应用含参变量积分的性质。令

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(x+\cos\theta)\mathrm{d}\theta, x\geqslant 1$$

则

$$f'(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{x+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

(作变量代换 $t=\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$)

而

$$f(1)=-2\pi\ln 2$$

进而,得到

$$f(x)=2\pi\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}$$

例 6 计算 $f(a)=\int_0^1\frac{\ln(x^2-2x\cos a+1)}{x}\mathrm{d}x$。其中,$a\in[0,2\pi]$。

解 转化成函数方程问题。

应用恒等式

$$(x^2-2x\cos a+1)(x^2+2x\cos a+1)$$
$$=x^4-2x^2\cos a+1$$

得

$$f(\frac{a}{2})+f(\pi-\frac{a}{2})$$
$$=\int_0^1\frac{1}{x}[\ln(x^2-2x\cos\frac{a}{2}+1)(x^2+2x\cos\frac{a}{2}+1)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{1}{x}\ln(x^4-2x^2\cos a+1)\mathrm{d}x$$

令

$$x=\sqrt{t}$$

则得到函数方程

$$f(\frac{a}{2})+f(\pi-\frac{a}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{t}\ln(t^2-2t\cos a+1)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} f(a) \tag{1}$$

应用含参变量积分的性质可知，$f(a)$ 在$[0,2\pi]$ 上二次连续可微。对(1) 式两边关于 a 求二次导，得到

$$f''(\frac{a}{2}) + f''(\pi - \frac{a}{2}) = 2f''(a) \tag{2}$$

记

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]} f''(x), m = \min_{x\in[0,2\pi]} f''(x)$$

则存在 $a_0 \in [0,2\pi]$，使得

$$f''(\frac{a_0}{2}) + f''(\pi - \frac{a_0}{2}) = 2f''(a_0) = 2M$$

由 M 的定义立即得到

$$f''(\frac{a_0}{2}) = M$$

进而，在(2) 式中，取 $a = \frac{a_0}{2}$，得

$$f''(\frac{a_0}{2^2}) + f''(\pi - \frac{a_0}{2^2}) = 2M$$

同样，有

$$f''(\frac{a_0}{2^2}) = M$$

依次类推，得

$$f''(\frac{a_0}{2^n}) = M, n = 0,1,2,\cdots$$

由连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} f''(\frac{a_0}{2^n}) = f''(0) = M$$

将 M 换 m 成，重复上述过程可得

$$f''(0) = m$$

即 $f''(a)$ 在$[0,2\pi]$ 上恒为常数。

由此可设

$$f(a)=\frac{1}{2}Aa^2+Ba+C$$

并代入(1)，结合

$$f'(a)=2\int_0^1\frac{\sin a}{x^2-2x\cos a+1}\mathrm{d}x$$

$$f'(\frac{\pi}{2})=2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

得

$$A=-1,B=\pi,C=-\frac{\pi^2}{3}$$

即

$$f(a)=-\frac{1}{2}(a-\pi)^2+\frac{\pi^2}{6}$$

特别，有

$$\frac{1}{2}f(0)=\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{2}f(\pi)=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{12},$$

$$\frac{1}{2}f(\frac{\pi}{2})=\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{24}.$$

与上述积分有关的几个典型例题，我们仅列举三个．

例 7　$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=k.$

例 8　$I=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}+k.$

例 9　$I=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}+k.$

其中，$k=\frac{1}{2}\ln^2(\sqrt{2}+1)$.

先解例 7。事实上，作变量代换

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})$$

(注意到，当 $x \geq 1$ 时，该函数具有反函数)

则

$$I = \int_0^1 \frac{(t-1)\ln t}{(t+1)(t^2+6t+1)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}[2\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\ln t}{t+a}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\ln t}{t+b}\mathrm{d}t]$$

这里，$a = 3 + 2\sqrt{2} > 1, b = a^{-1} = 3 - 2\sqrt{2} \in (0,1)$.

对右边第二项再作变量代换 $u = bt$，得

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t+a}\mathrm{d}t = \int_0^b \frac{\ln u - \ln b}{u+1}\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^b \frac{\ln u}{u+1}\mathrm{d}u - \ln b\ln(b+1)$$

同样，对第三项，有

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t+b}\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{\ln u - \ln a}{u+1}\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^a \frac{\ln u}{u+1}\mathrm{d}u - \ln a\ln a(a+1)$$

进而，得

$$4I = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t - \ln a\ln(b+1) - \ln b\ln(a+1)$$

$$- \int_0^a \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^b \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \ln a\ln\frac{a+1}{b+1} - \int_1^a \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t + \int_b^1 \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \ln^2 a - \int_1^a \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^a \frac{\ln s}{s(s+1)}\mathrm{d}s \quad (s = t^{-1})$$

$$= \ln^2 a - \int_1^a \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2 a$$

对例 8，令

$$F(\alpha)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}}\frac{\mathrm{arctg}\alpha x}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x,\alpha\in[0,1)$$

则由含参变量积分的性质可知

$$F'(\alpha)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}}\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{arctg}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

再令

$$t^2=1-x^{-2}$$

并应用基本事实

$$\arcsin\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

得

$$\begin{aligned}F'(\alpha)&=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha^2-t^2}\mathrm{d}t+\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\\&=\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\ln\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+t}{\sqrt{1-\alpha^2}-t}\Big|_0^{\alpha}\\&=\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{\ln(\sqrt{1+\alpha^2})+\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2}}\end{aligned}$$

即

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}(\arcsin\alpha)+\frac{1}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})+C$$

由 $F(0)=0$,并令 $\alpha\to1^-$,即和结果。

最后,解例 9。

应用基本事实

$$\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x^{-1}$$

得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\mathrm{arcsin}x\,|_0^1 - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arcctg}s}{s\sqrt{s^2-1}}\,|\mathrm{d}s$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}s}{s\sqrt{s^2-1}}\mathrm{d}s$$

上式用到了 $s = x^{-1}$。由例 8 即得结果。

当然，例 7— 例 9 也有其它几种解法，在此略去。

参考文献

[1]Arora A K,Goel K. Rodriguez D M. Pecial integrtion techniques for trigonometric integrals. Amer. Math. Monthly, 1988,95:126 ～ 130.

[2]Klosinski L F. Alexanderson G L. Larson L. C. The willian Lowell Putnam mathematics competition. Amer. Math. Monthly,1986. 93:620 ～ 626.

[3]Bernau S J. The eveluation of a Putnam integral. Amer. Math. Monthly,1988. 95:935.

[4]Choe B R. An elementary proof of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Amer. Math. Monthly,1987,94:662 ～ 663.

[5]Young R M. On Jensen's formula and $\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta$. Amer. Math. Monthly, 1986,93:44 ～ 45.

[6] 其它的可参看 Amer. Math. Monthly(Problems and silutions),1996,103:512 － 513;1988,95:57 ～ 59.

第二节　关于 Fresnel 积分的计算

本节我们应用含参变量积分的性质，计算 Fresnel 积分

$$F_0 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x, G_0 = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x,$$

这两个积分通常都是应用复变函数方法解决的。

下面分三步来求其值。

（Ⅰ）$G_0 > 0$；

（Ⅱ）$F_0^2 = G_0^2$；

（Ⅲ）$2F_0G_0 = \dfrac{\pi}{4}$

（Ⅰ）是基本的，而对（Ⅱ）与（Ⅲ），我们亦将用两种方法予以证明。

由（Ⅰ）与（Ⅱ）可知，$F_0 > 0$；再结合（Ⅲ），得到

$$F_0 = G_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

（Ⅰ）**的证明　方法一**　令 $t = x^2$，则

$$G_0 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \tag{1}$$

因而，由广义积分判别法可知，G_0 存在；同样可知，F_0 亦存在；并且对任意的 $n = 1,2,\cdots$

$$-\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_{2n\pi}^{2n+1\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta+\pi}}\mathrm{d}\theta$$

$$< \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta \qquad (\theta = x - \pi)$$

也就是说，在(1) 中，第一项与第二项之和大于零；第三项与第

四项之和大于零；依次类推，得到(Ⅰ) 成立。

方法二　既然 $G_0=\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin^2\mathrm{d}x$，

令

$$x=\sqrt{t+\pi},t>0$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\sqrt{t+\pi}}\in(0,1)$$

进而，有

$$\begin{aligned}-\int_{\sqrt{(2n+1)\pi}}^{\sqrt{(2n+2)\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x&=-\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}}\frac{\sin(t^2+\pi)}{2\sqrt{t+\pi}}\mathrm{d}t\\&=\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}}\frac{\sin t^2}{2\sqrt{t+\pi}}\mathrm{d}t\\&<\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}}\sin t^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

余下的同方法一，略去。

再证(Ⅱ) 与(Ⅲ).

方法一　考虑

$$F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x,G(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin x^2\mathrm{d}x$$

应用广义含参变量积分的阿贝尔判别法则可知，上述积分关于 $t\in[0,\infty)$ 一致收敛，从而 F、G 在 $[0,\infty)$ 连续。因此，当 $t>0$ 时，成立

$$\begin{aligned}F^2(t)-G^2(t)&=\int_0^{\infty}e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\cos y^2\mathrm{d}y\\&\quad-\int_0^{\infty}e^{-tx^2}\cos x^2\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\cos y^2\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\substack{x\geq0\\y\geq0}}e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} r e^{-tr^2} \cos r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ts} \cos s \mathrm{d}s = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{t}{1+t^2}$$

上述积分用到了广义积分的分部积分法。类似地，当 $t > 0$ 时，成立

$$2F(t)G(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

令 $t \to 0^+$，即得(Ⅱ)与(Ⅲ)。

通过解上述二次方程组，可附带得到

$$F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{1+t^2}}, G(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}}$$

方法二 应用"常义"含参变量积分的性质。为说明其思想方法，先求 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ 的值。

考虑

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

容易知道，f 在 $(-\infty, \infty)$ 连续可微，且

$$f(0) = \frac{\pi}{4},$$

$$0 < f(x) = e^{-x} \int_0^1 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t < e^{-x} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} e^{-x}$$

上式应用了基本事实

$$e^{-tx^2} < 1, \forall\, t \in (0,1], x \neq 0$$

这样，即得

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = f(+\infty)$$

另外，当 $x > 0$ 时，有

$$f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t = -e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad (u = t\sqrt{x}) \tag{2}$$

再令

$$g(s) = \int_0^s e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

则

$$g'(s) = e^{-s^2}$$

现在，对(2) 两边从 0 到 $+\infty$ 积分，得

$$\begin{aligned} f(\infty) - f(0) &= -\int_0^{\infty} \frac{g(\sqrt{x})e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= -2\int_0^{\infty} g(s)e^{-s^2}\mathrm{d}s \\ &= -2\int_0^{\infty} g(s)g'(s)\mathrm{d}s \\ &= -g^2(s)\Big|_0^{+\infty} = -\left[\int_0^{\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s\right] \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{f(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

现在应用该方法求 G_0 与 F_0。

令

$$\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\cos xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \beta(x) = \int_0^1 \frac{\sin xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

则 α、β 在$(-\infty,\infty)$ 连续可微，并且

$\alpha(0) = \frac{\pi}{4}, \beta(0) = 0, \alpha(+\infty) = \beta(+\infty) = 0$(本节末将予以证明)

$$\alpha'(x) = -\int_0^1 \frac{t^2\sin xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sin xt^2\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\sin xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\beta'(x) = \int_0^1 \frac{t^2\cos xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos xt^2\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\cos xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

即

$$\begin{cases}\alpha'(x) - \beta(x) = -q(x) \\ \beta'(x) + \alpha(x) = p(x)\end{cases} \tag{3}$$

其中，$q(x) = \int_0^1 \sin xt^2\mathrm{d}t$，$p(x) = \int_0^1 \cos xt^2\mathrm{d}t$

当 $x > 0$ 时，有

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \sin\theta^2\mathrm{d}\theta,$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \cos\theta^2\mathrm{d}\theta \quad (\theta = \sqrt{x}\,t)$$

再令

$$u(s) = \int_0^{\sqrt{s}} \sin\theta^2\mathrm{d}\theta,\quad v(s) = \int_0^{\sqrt{s}} \cos\theta^2\mathrm{d}\theta$$

给(3)的两式分别乘以 $-\cos x$、$\sin x$，并将两式相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\beta(x)\sin x - \alpha(x)\cos x] = p(x)\sin x + q(x)\cos x \tag{4}$$

再给(3)的两式分别乘以 $\sin x$、$\cos x$，并将两式相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\beta(x)\cos x + \alpha(x)\sin x] = p(x)\cos x - q(x)\sin x \tag{5}$$

并对(4)、(5)两边从 0 到 $+\infty$ 进行广义积分，并应用初值，得

$$\int_0^{\infty}(p(x)\cos x - q(x)\sin x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^{\infty}(p(x)\sin x + q(x)\cos x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

将 $u(x)$、$v(x)$ 代入，并令 $s = \sqrt{x}$，得

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}(u(\sqrt{x})\cos x + v(\sqrt{x})\sin x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\infty}(u(s)\cos s^2 + v(s)\sin s^2)\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^{\infty}(u(s)v'(s) + u'(s)v(s))\mathrm{d}s \\
&= 2u(s)v(s)\big|_0^{+\infty} = 2\int_0^{\infty}\sin\theta^2\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\cos\theta^2\mathrm{d}\theta \\
&= 2F_0G_0
\end{aligned}$$

同理可得

$$F_0^2 - G_0^2 = 0$$

剩下的问题是证明 $\alpha(+\infty) = \beta(+\infty) = 0$。只需证 $\beta(+\infty) = 0$。

取 $x > \pi, y = xt^2$，得

$$\beta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{x}\frac{\sin y}{(1+\frac{y}{x})\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

同(Ⅰ)的证明一样，将 $[0,x]$ 分成

$$[0,\pi],[\pi,2\pi],[2\pi,3],\cdots,[n\pi,x]$$

其中，n 为满足 $n\pi \leq x$ 的最大的自然数。

既然

$$0 < \beta(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{(1+\frac{y}{x})\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

令 $x \to +\infty$，即得结论（注意到，0 为函数$\frac{\sin y}{\sqrt{y}}$的可取奇点）。

同理可得，$\alpha(+\infty) = 0$。

参考文献

[1]Flanders H. On the Fresnel integrals. Amer. Math. Monthly, 1982, 89: 264 ~ 266.

[2]Weinstock R. Elementory evaluations of $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$、$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$、$\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$. Amer. Math. Monthly, 1990, 97: 39 ~ 42.

[3] 张南岳. Euler − Maclaurin 公式与渐近估计. 数学的实践与认识, 1985, 4: 52 ~ 56.

第三节　积分学中一类公式的证明

本节我们介绍朱匀华的这篇文章（发表在《数学通报》1995 年第 3 期）。

本节利用定积分的一个性质，将数学分析中一类积分计算公式的冗繁推导化为简单证明。

3.1　一个引理

定积分有一个不为人注意的性质：

引理 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中 $\xi_i,\theta_i \in [x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots n),x_0=a,x_n=b,\triangle x_i = x_i - x_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\triangle x_i\}$。

在数学分析教科书中，这个性质通常只作为习题来安排[1-2]. 由于涉及的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\triangle x_i$ 并不是函数 $f(x)g(x)$ 的黎曼和数，因而它的证明思想是采用把和式改写为一个黎曼和数与一个尾项的形式：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\triangle x_i + \sum_{i=1}^{n}\eta_i\triangle x_i\eta_i$$

这里，$\eta_i = f(\xi_i)g(\theta_i) - f(\xi_i)g(\xi_i)(i=1,2,\cdots,n)$.

随后利用定积分存在的充要条件证明尾项 $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\triangle x_i$ 当 $\lambda\to 0$ 时以 0 为极限，从而导出(1) 式.

在积分学中，许多计算公式的证明都采用这种处理方法，而这种处理方法在具体公式的证明中比较冗繁。我们发现这类计算公式所涉及的和式一般都能转化为 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\triangle x_i$ 的形式，从而直接根据引理就能导出公式。

3.2 旋转曲面面积计算公式

定理 1 设平面曲线 l 的方程为

$$y=f(x)(a\le x\le b),$$

其中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且有连续导数，则由曲线 l 绕 x 轴旋转一周所得的曲面面积为[1],[3]

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

证明　设T为$[a,b]$上的任一分割：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

因为l的内接折线绕x轴旋转所得的旋转面面积（当每一折线段长都趋于0时）的极限就是曲面面积S，所以由圆台侧面积公式和拉格郎日中值定理，有

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\cdot$$
$$\sqrt{\triangle x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \tag{2}$$
$$\sqrt{1 + (f'(\xi_i)]^2}\triangle x_i$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1},x_i)(i = 1,2,\cdots,n)$。又因 $f(x)$ 和 $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ 在$[a,b]$上都连续，故根据引理同时有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\triangle x_i$$
$$= \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\triangle x_i$$
$$= \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

从而由(2)即得

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x。$$

3.3　第一型曲线积分计算公式

定理2　设平面光滑曲线l的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t)(\alpha \le t \le \beta)。$$

函数 $f(x,y)$ 在 l 上有定义且连续，则有[1-2]

$$\int_l f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

证明　设 T 为 $[\alpha,\beta]$ 上的分割：

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

根据弧长计算公式和积分中值定理，l 上对应于 $[t_{i-1},t_i]$ 一段的弧长为

$$\triangle s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)^2]+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{[x'(\theta_i)]^2+[y'(\theta_i)]^2}\triangle t_i \qquad (3)$$

其中 $\theta_i \in [t_{i-1},t_i]$，$\triangle t_i = t_i - t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。现记

$$\lambda = \max_{1\leq i\leq n}\{\triangle t_i\}, \mu = \max_{1\leq i\leq n}\{\triangle s_i\}$$

设 $\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$，$x_i = x(\xi_i)$，$y_i = y(\xi_i)$。因为当 $\mu \to 0$ 时必有 $\lambda \to 0$，故由第一型曲线积分定义和(3)式可得

$$\int_l f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\triangle s_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i),y(\xi_i))\sqrt{[x'(\theta_i)]^2+[y'(\theta_i)]^2}\triangle t_i,$$

又因 $f(x(t),y(t))$ 和 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，所以根据引理，即得

$$\int_l f(x,y)\mathrm{d} = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

定理证毕。类似地可以证明空间情形的第一型曲线积分计算公式。

3.4　Riemann－Stieltjes 积分计算公式

定理 3　设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(x)$ 和 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定积分存在，则 Riemann－Stieltjes 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$

存在，且[5-6]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 T 为 $[a,b]$ 上的任一分割：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

根据拉格朗日中值定理，存在 $\theta_i \in (x_{i-1}, x_i)$，使

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\theta_i)\triangle x_i (i = 1,2,\cdots,n).$$

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，因 $f(x)$ 和 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定积分存在，故由引理即得

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\theta_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

从而按定义[4] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $g(x)$ 的 Riemann－Stieltjes 积分存在，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

3.5 结束语

除以上三个计算公式外，根据引理可类似地证明第二型曲线积分计算公式，并且可把引理推广到二重积分的情形，得出类似于(1)式的结果：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)g(\alpha_i,\beta_i)\triangle\sigma_i$$

$$= \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因而又可运用它证明曲面积分计算公式。因此，在数学分析的教科书中，若把引理作为教材内容来安排，并采用本节的证明方法，能大为简化积分学中许多计算公式的证明，从而删繁就简，

有利于贯彻少而精的原则。

参考文献

[1] 陈传璋,金福临,朱学炎,欧阳光中. 数学分析(第二版)上、下册. 北京:高等教育出版社,1983。

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(第二版)上、下册. 北京:高等教育出版社,1991。

[3][苏]Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 北京大学高等数学教研室译,微积分学教程,第二卷第一分册. 北京:人民教育出版社,1956。

[4][苏]*Г. М.* 菲赫金哥尔茨著,微积分学教程. 路见可译. 第三卷第一分册. 北京:人民教育出版社,1957。

[5][加]Rabriel Klambauer 著. 数学分析. 孙本旺译. 长沙:湖南人民出版社,1981。

[6][美]R. 约翰逊鲍等著. 现代数学分析基础. 邓永录译. 广州:中山大学出版社,1988。

第五章　不等式

不等式是一个极其宽广的领域，实际问题、理论研究中比等式用得更多，许多不等式的证明是建立在等式的基础上的；反过来，对等式的研究起着非常重要的作用。本章综合运用微积分的一些基本理论和方法，讨论几类重要的不等式。

第一节　Hölder 不等式与 Minkowski 不等式

著名的Hölder 不等式与Minkowski 不等式，在现代数学中有许多重要的应用。一般的实变函数教材都有证明、推广和应用。本节介绍 Maligranda[1] 的一种新的初等证明方法。为此，需要下列基本引理。

引理　设 $p \geq 1$，则对任意的正数 a 和 b，成立

$$(\mathrm{I})\ \inf_{t>0}\left[\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+\left(1-\frac{1}{p}\right)t^{\frac{1}{p}}b\right]=a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}};$$

$$(\mathrm{II})\ \inf_{0<t<1}\left[t^{1-p}a^{p}+(1-t)^{1-p}b^{p}\right]=(a+b)^{p}.$$

当 $p=1$ 时，结论显然成立。因此，只需考虑 $p>1$。下面用两种方法证明引理。

方法一　应用极值方法。

先证(Ⅰ)　设 $t>0$，令

$$f(t)=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+(1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}}b$$

则

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1)at^{\frac{1}{p}-2}+\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})bt^{\frac{1}{p}-1}\\ &=\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1)t^{\frac{1}{p}-2}(a-bt)\end{aligned}$$

从而，$f'(t)$ 在$(0,\infty)$ 内只有唯一的零点$\frac{a}{b}$，并且

$$f'(t)<0,\forall\, t\in(0,\frac{a}{b}),f'(t)>0,\forall\, t>\frac{a}{b}$$

因此 $f(t)$ 在$\frac{a}{b}$ 达到其在$(0,\infty)$ 内的最小值，并且 $f(\frac{a}{b})=a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}$。

再证(Ⅱ)　设$t\in(0,1)$，令

$$g(t)=t^{1-p}a^p+(1+t)^{1-p}b^p$$

则

$$g'(t)=(1-p)t^{-p}a^p-(1-p)(1-t)^{-p}b^p$$

从而，$g'(t)$ 在$(0,1)$ 内只有唯一的零点$\frac{a}{a+b}$，并且

$$g''(t)=p(p-1)t^{-p-1}a^p+p(p-1)(1-t)^{-p-1}b^p>0,$$
$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty.$$

因此，$\frac{a}{a+b}$是$g(t)$ 在$(0,1)$ 内的最小值点，并且$g(\frac{a}{a+b})=(a+b)^p$.

方法二　应用凸性方法.

先证(Ⅰ)　既然 e^u 在$(-\infty,\infty)$ 内为下凸函数，那么对任意的$t>0$，有

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}=[at^{\frac{1}{p}-1}]^{\frac{1}{p}}[bt^{\frac{1}{p}}]^{1-\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}\ln at^{\frac{1}{p}-1}+(1-\frac{1}{p})\ln bt^{\frac{1}{p}}}$$
$$\leqslant\frac{1}{p}e^{\ln at^{\frac{1}{p}-1}}+(1-\frac{1}{p})e^{\ln bt^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}a+(1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}}b$$

当 $t=\frac{a}{b}$ 时，等号成立。

再证(Ⅱ)由 $u^p(p>1)$ 在 $[0,\infty)$ 的下凸性，对任意的 $t\in(0,1)$，有

$$(a+b)^p=[t\cdot\frac{a}{t}+(1-t)\cdot\frac{b}{1-t}]$$
$$\leqslant t(\frac{a}{t})^p+(1-t)(\frac{b}{1-t})^p$$
$$=t^{1-p}a^p+(1-t)^{1-p}b^p$$

当 $t=\frac{a}{a+b}$ 时，等号成立。

注 1 当 $p\in(0,1)$ 时，在不等式(Ⅰ)与(Ⅱ)中将下确界 inf 改为上确界 Sup，引理亦成立。

注 2 由(Ⅰ)可知，当 $t=1$ 时，成立

$$a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{p}a+(1-\frac{1}{p})b$$

这就是加权的算术几何均值不等式。特别，当 $p=2$ 时，即为算术一几何均值不等式；而以 $a^p,b^{\frac{p}{p-1}}$ 替代 a 和 b，得到

$$ab<\frac{1}{p}a^p+(1-\frac{1}{p})b^{\frac{p}{p-1}}$$

这就是著名 Yong 的不等式。

现在应用引理证明 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式。

设 $p>1,q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$；$|f(x)|^p,|g(x)|^q$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则经典的 Hölder 不等式为

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x]^{\frac{1}{p}}\cdot[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x]^{\frac{1}{q}}$$

证明 在引理(Ⅰ)中，取 $a=|f(x)|^p,b=|g(x)|^q,x\in[a,$

$b]$，则对任意的 $t>0$，有

$$|f(x)|\cdot|g(x)|\leqslant\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}\cdot|f(x)|^p+(1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}}\cdot|g(x)|^q$$

两边关于 x 在 $[a,b]$ 上积分，得

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x]+(1-\frac{1}{p})t^{\frac{1}{p}}[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x]$$

在不等式的右端，对所有的 $t>0$ 取下确界，并再次应用引理，即得结论。

注 3 上述的 Hölder 不等式可推广到 L^p 空间。

最后，考虑 Minkowski 不等式。经典的 Minkowski 不等式为

设 $p>0$，$|f(x)|^p$、$|g(x)|^p$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则

$$[\int_a^b|f(x)|+|g(x)|\mathrm{d}x]^p\leqslant[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x]^{\frac{1}{p}}+[\int_a^b|g(x)|^p\mathrm{d}x]^{\frac{1}{p}}$$

证明 在引理(Ⅰ)中，取 $a=|f(x)|$，$b=|g(x)|$，则对任意的 $t\in(0,1)$，有

$$(|f(x)|+|g(x)|)^p\leqslant t^{1-p}|f(x)|^p+(1-t)^{1-p}|g(x)|^p$$

两边关于 x 在 $[a,b]$ 上积分，得

$$[\int_a^b|f(x)|+|g(x)|\mathrm{d}x]^p$$

$$\leqslant t^{1-p}\left[\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right] + (1-t)^{1-p}\left[\int_a^b |g(x)|^p \mathrm{d}x\right]$$

在不等式的右端，对所有的 $t \in (0,1)$ 取下确界，并再次应用引理，即可获得结论。

注 4 上述的 Minkowski 不等式可推广到 L^p 空间。

第二节 均值不等式

最简单的均值不等式是

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (1)$$

从左向右依次为调和、几何、对数、算术、平方和平均的均值平均值。

下面我们用两种初等方法证(1)

方法一　由于函数 $f(x) = e^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内为下凸函数(如图所示)

应用面积比较法：曲边梯形的面积介于两个梯形的面积之间，即有

$$(\ln b - \ln a)e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x dx < (\ln b - \ln a)\,\frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2}$$

或者

$$\sqrt{ab}(\ln b - \ln a) < b - a < \frac{a+b}{2}(\ln b - \ln a),$$

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

而

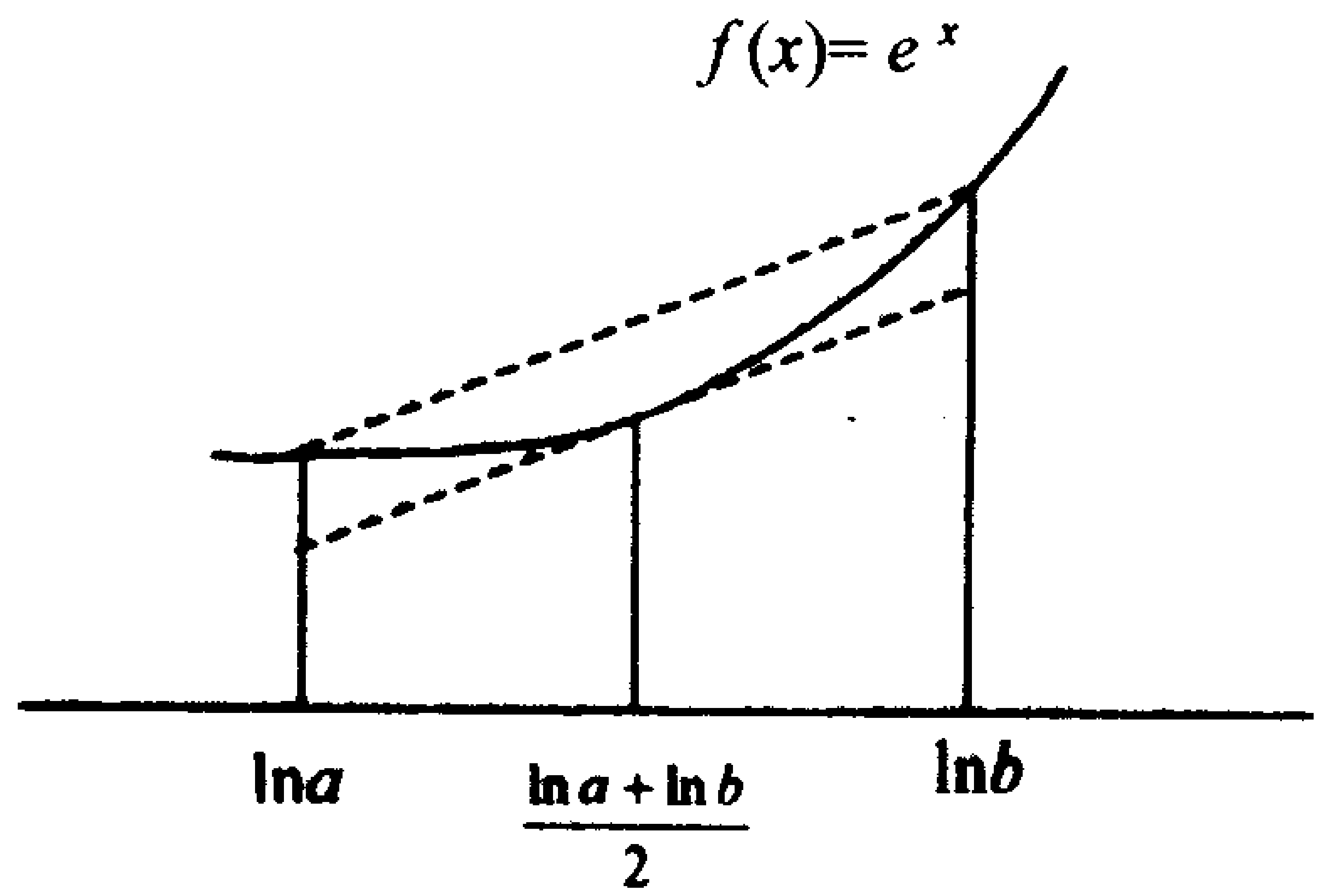


图 33

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

则容易证明，故(1)获证。

方法二　应用双曲函数的性质，我们知道

双曲正弦函数　$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数　$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数　$\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

现在对任意的 $x>0$，应用泰勒级数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

得

$$e^x+e^{-x}=2(1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots)$$

$$e^x-e^{-x}=2(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots)$$

$$< 2x(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots)$$

进而,有

$$\text{th}x < x < \text{sh}x < \frac{1}{2}\text{sh}2x$$

另外,应用基本事实

$$e^x + e^{-x} > 2, \forall\ x \neq 0$$

得

$$\text{ch}^2 x < \text{ch}2x$$

即

$$\text{ch}x < \sqrt{\text{ch}2x}, \frac{\text{sh}x}{\sqrt{\text{ch}2x}} < \text{th}x$$

总之,我们得到了

$$\frac{\text{sh}x}{\sqrt{\text{ch}2x}} < \text{th}x < x < \text{sh}x < \frac{1}{2}\text{sh}2x$$

在上式中,取 $x = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}$,并同除以$\frac{2}{b-a}$,即得(1)。

第三节　关于正弦函数的一个不等式

我们在第二章第三节中,曾应用牛顿—莱布尼兹公式得到了一个常用不等式

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x, \forall\ x \geqslant 0 \tag{1}$$

本节给出比(1)的下界更为精细的两个不等式:对任意的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,成立

(Ⅰ) $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{12\pi}x(\pi^2 - 4x^2)$;

(Ⅱ) $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi^3}x(\pi^2 - 4x^2)$.

先证(Ⅰ)　对任意的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,我们找出满足

$$\sin x \geqslant ax - \frac{1}{3\pi}x^3$$

的最大的实数 a 即可。

令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3\pi}x^2, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

则

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x^2}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其中,$g(x) = x\cos x - \sin x + \frac{2}{3\pi}x^3$。

由于 $\sin x$ 在$[0, \frac{\pi}{2}]$上是上凸函数,而连接点$(0,0)$与$(\frac{\pi}{2}, 1)$的弦的方程为 $y = \frac{2}{\pi}x$,因此,对任意的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,成立

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$$

等号成立当且仅当 $x = 0$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$。

进而,对任意的 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,有

$$g'(x) = \frac{2}{\pi}x^2 - x\sin x \leqslant x(\frac{2}{\pi}x - \sin x) \leqslant 0$$

等号成立当且仅当 $x = 0$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$

这样，$g(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上严格单调递减，又由 $g(0)=0$ 可知，$f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上严格单调递减。因此，所求的 $a=\min\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} f(x)$ $=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{12}$。

再证（Ⅱ） 令

$$f(x)=\sin x-\frac{3}{\pi}x+\frac{4}{\pi^3}x^3$$

即

$$f'(x)=\cos x-\frac{3}{\pi}+\frac{12}{\pi^3}x^2;\quad f''(x)=-\sin x+\frac{24}{\pi^3}x,$$

$$f'''(x)=-\cos x+\frac{24}{\pi^3};f''''(x)=\sin x\geqslant 0$$

因此，$f'''(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上严格单调递增；而 $f''(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是下凸函数。

注意到

$$f'''(\frac{\pi}{4})=\frac{48-\pi\sqrt[3]{2}}{2\pi^3}>0\quad(\pi<3.2;\sqrt{2}<1.42)$$

因此，得到

$$f'''(x)>0,\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$$

即 $f'(x)$ 在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上是下凸函数，且

$$f'(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}-9}{4\pi}<0,f'(\frac{\pi}{2})=0。$$

再应用下凸函数的性质可知，$f'(x)\leqslant 0,\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$等号成立当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$。因此，$f(x)$ 在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上严格单调递减，又 $f(\frac{\pi}{2})=0$，这样得到

$$f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$$

等号成立当且仅当 $x = \frac{\pi}{2}$.

最后考虑 $f(x)$ 在区间$[0, \frac{\pi}{4}]$上的情形。

既然 $f''(x)$ 在$[0, \frac{\pi}{2}]$上是下凸函数，而且

$$f''(0) = 0,$$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = \frac{12 - \pi^2\sqrt{2}}{2\pi^2} < 0$$

$$(\pi^2 > 9; \sqrt{2} > 1.4)$$

因此，$f''(x) \leqslant 0, \forall\ x \in [0, \frac{\pi}{4}]$。等号成立当且仅当 $x = 0$。

即 $f(x)$ 在$[0, \frac{\pi}{4}]$上是上凸函数，且 $f(0) = 0, f(\frac{\pi}{4}) = \frac{8\sqrt{2} - 11}{16} > 0$ 这样得到：$f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [0, \frac{\pi}{4}]$。等号成立当且仅当 $x = 0$。

总之，在$[0, \frac{\pi}{2}]$上，(Ⅰ) 成立。证毕。

第四节　关于幂指函数的一个不等式

本节用多种方法证明最简单的幂指函数的两个不等式。

(Ⅰ) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时，成立 $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$；

(Ⅱ) $x^x + y^y \geqslant x^y + y^x, \quad \forall\ x \geqslant 0, y \geqslant 0$

注意到，这里我们约定：$0^0=1$，这是因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

先证（Ⅰ） **方法一** 应用凸性。当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，（Ⅰ）等价于

$$\sin x\cdot\ln\sin x < \cos x\cdot\ln\cos x$$

或

$$\mathrm{tg}x\cdot\ln\sin x < \ln\cos x \tag{1}$$

应用 $\ln x$ 在 $(0,\infty)$ 上的凸性，得到

$$\ln(\lambda a+(1-\lambda)b) > \lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$$

其中，$a>0, b>0, \lambda\in(0,1)$。

特别，取 $a=\sin x, b=\sin x+\cos x, \lambda=\mathrm{tg}x$，得到

$\mathrm{tg}x\in(0,1)$，

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)>1, \forall\, x\in(0,\frac{\pi}{4})$$

因此，$\mathrm{tg}x\cdot\ln\sin x<\ln\cos x$

方法二 应用泰勒级数。令

$$u=\sin^2 x, v=\cos^2 x$$

则当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，有

$$u+v=1, 0<u<\frac{1}{2}<v<1$$

这样，（Ⅰ）等价于

$$\sqrt{u}\ln u<\sqrt{v}\ln v \tag{2}$$

应用泰勒级数

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, x\in[-1,1)$$

得到

$$\ln u = \ln(1-v) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n},$$

$$\ln v = \ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n},$$

这样(2) 又等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{n-\frac{1}{2}}}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-\frac{1}{2}}}{n} \tag{3}$$

既然 $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$,(3) 明显成立.

方法三 应用本章第一节加权的算术 — 几何均值不等式

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} < \lambda a + (1-\lambda)b$$

其中,$a > 0, b > 0, \lambda \in (0,1)$。

特别,取 $a = \mathrm{tg}^2x, b = 1 + \mathrm{tg}^2x, \lambda = \mathrm{tg}x, x \in (0,\frac{\pi}{4})$,则有

$(1+\mathrm{tg}^2x)^{1-\mathrm{tg}x}(\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{tg}x} < (1-\mathrm{tg}x)(1+\mathrm{tg}^2x) + \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}^2x$

即

$$\frac{1}{\cos^2x}\cdot(\sin^2x)^{\mathrm{tg}x} < (1 + \mathrm{tg}^2x - \mathrm{tg}x$$

$$= 1 - \mathrm{tg}x(1-\mathrm{tg}x) < 1,$$

$$(\sin^2x)^{\frac{\sin x}{\cos x}} < \cos^2x$$

最后得到,$(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$。

方法四 令 $a = \sin x, b = \cos x, x \in (0,\frac{\pi}{4})$。下面我们只需证

$$a\ln a < b\ln b$$

再令 $f(u) = u\ln u$,则 $f(u)$ 在$[0,\infty)$ 内为下凸函数(定义 $f(0) = 0$)。容易得到

$$\min_{u\in[0,\infty)} f(u) = f(e^{-1}) = -e^{-1},$$

并且 $f(u)$ 在$[0,e^{-1}]$ 上为严格单调递减函数;而在$[e^{-1},\infty)$ 上

为严格单调递增函数。

即

$$当\ 0 < a < b \leqslant e^{-1}\ 时, f(a) > f(b), 即\ a^a > b^b;$$

$$而当\ e^{-1} \leqslant a < b\ 时, f(a) > f(b), 即\ a^a < b^b.$$

另外，由 $f(u)$ 的下凸性可知，对任意的 $b > 0$，点 $(b, f(b))$ 位于在点 $(1,0)$ 处的切线的上方，而该点的切线方程为

$$y = f'(1)(x-1) = x-1$$

即有

$$f(b) > b-1$$

进一步，当 $a \in [0, e^{-1}]$ 时，点 $(a, f(a))$ 位于连接点 $(0,0)$ 与 $(e^{-1}, -e^{-1})$ 的线段的下方，该线段的方程为 $y = -x$。从而，有：$-a > f(a)$。进一步，如果还有 $a < b$ 且 $a+b > 1$，则

$$f(b) - f(a) > b - a + 1, 即\ a^a < b^b。$$

总之，我们得到了比较一般的结果：

当 $0 < a < b, a+b > 1$ 时；或者，当 $e^{-1} \leqslant a < b$ 时，都有 $a^a < b^b$。特别，取 $a = \sin x, b = \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$，则 $0 < a < b$，$a + b > 1$，即得 $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$。

再证(Ⅰ)　不失一般性，可设 $0 < x < y$。我们只需证

$$y^y - y^x - (x^y - x^x) > 0 \tag{4}$$

下面分两种情形讨论。

第一种情形　$xy > 1$，从而，$y > \max\{1, x\}$

现在用两种方法证明。

方法一　应用牛顿—莱布尼兹公式，得到

$$y^y - y^x - (x^y - x^x) = \int_x^y (y^t \ln y - x^t \ln x) dt$$

而

$$\ln y > 0, y^t \ln y > x^t \ln y > x^t \ln x$$

因此，(4) 成立。

方法二 由于 $0 < x < y$，且 $y > 1$，因此成立

$$y^y - y^x = y^x(y^{y-x} - 1) > x^x(y^{y-x} - 1)$$
$$> x^x(x^{y-x} - 1) = (x^y - x^x)$$

（注意，因 $0 < y - x$，且 $y > 1$，从而 $y^{y-x} > 1$；而当 $0 < x < y < 1$ 时，则有 $y^{y-x} < 1$）

第二种情形 $0 < x < y < 1$。令

$$f(t) = y^y - y^t - (t^y - t^t)$$

其中，y 固定，$t \in [0,y]$。

明显地，$f(y) \equiv 0$。这样，我们只需证 $f(t)$ 在$[0,y]$上单调递减即可。由于

$$f'(t) = -y^t\ln y - yt^{y-1} + t^t(1 + \ln t)$$

再令 $g(t) = t^t\ln t - y^t\ln y, h(t) = t^t - yt^{y-1}$。

因此，如果我们能证明

$$h(t) < 0, g(t) < 0, \forall\, t \in (0,y)$$

即可。

应用

$$g(t) = -\int_t^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s^t\ln s)\mathrm{d}s = -\int_t^y s^{t-1}(1 + t\ln s)ds$$

由证(Ⅰ)的方法四可知，$\min\limits_{t\in[0,\infty)} t\ln t = -e^{-1}$。进而，当 $t \leqslant s \leqslant y < 1$ 时，有

$$1 + t\ln s \geqslant 1 + t\ln t \geqslant 1 - e^{-1} > 0$$

于是

$$g(t) < 0, \forall\, t \in (0,y)$$

再令

$$k(z) = t^t - zt^{z-1}$$

其中，t 固定，$z \in (0,\infty)$。明显地，$k(y) = h(t), k(t) \equiv 0$。

因此，剩余的问题就是证明

$$k(y)<0$$

既然 $0<t<y<1$，应用幂指函数的定义以及洛必达法则可知

$$t^{t}=e^{t\ln t}<1,\ \lim_{z\to+\infty}zt^{z-1}=0$$

即

$$k(1)=t^{t}-1<0=k(t),\ \lim_{z\to+\infty}k(z)=t^{t}>0$$

因此，如果 $k(y)\geqslant 0$，由连续函数的介值性定理可知，$k(z)$ 在 $[y,1)$ 上存在一个零点；同时，在 $(1,\infty)$ 内也存在一个零点；另外，我们已经知道，$k(t)=0\quad(t\in(0,y))$，这样，$k(z)$ 在 $(0,\infty)$ 内至少存在三个零点。从而由洛尔定理可知，$k'(z)$ 在 $(0,\infty)$ 内至少存在两个零点。然而，这是不可能的，因为 $k'(z)=-t^{z-1}(1+z\ln t)$ 在 $(0,\infty)$ 内仅有一个零点 $-\dfrac{1}{\ln t}$。矛盾。因此，$k(y)=h(t)<0$。证毕。

注 1 应用上述方法以及归纳法，不难将(Ⅰ)推广到

(Ⅱ)设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in R^n$，其中，$x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots n$，而 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 为 $\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 的任一排列，则

$$x_1^{x_1}+x_2^{x_2}+\cdots+x_n^{x_n}\geqslant x_1^{y_1}+x_2^{y_2}+\cdots+x_n^{y_n}.$$

参考文献

[1]Maligranda L. A Simple proof of the Hölder and the Minkowski inequality. Amer. Math. Monthly, 1995. 102:256 ~ 259(有中译，数学译林 1996,1:68 ~ 71).

[2]Burk F. By all means inequality. Amer. Math. Monthly, 1985, 92:50.

[3]Burk F. The geometric, logarithmic, and arithemtic means inequality. Amer. Math. Monthly, 1987, 94 527 ~ 528.

[4] 其它的可参看 Amer. Math. Monthly(problems and solutions) 1990, 65 ~ 67; 1986, 568 ~ 569, 1988, 300 - 301; 1994, 690 ~ 691.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析中的一些新思想与新方法
作者＝张志军编著
页数＝１６９
ＳＳ号＝１１１３１８７６
出版日期＝１９９８年０５月第１版

前言
目录
目　　　　录