Übung zur Vorlesung Materialwissenschaften

Prof. Peter Müller-Buschbaum, Lea Westphal, Ziyan Zhang, Doan Duy Ky Le

Übungsblatt 4

Lösung

Aufgabe 1 – Elastizität, plastische Verformung und Einschnürung

- Elastizitätsmodul: $E = 70\,\text{GPa}$
- Streckgrenze: $R_{p0,2} = 220\,\text{MPa}$
- Ausgangslänge: $L_0 = 100\,\text{mm}$
- Durchmesser: $d = 10\,\text{mm}$
- Spannung 1: $\sigma_1 = 140\,\text{MPa} \Rightarrow$ keine bleibende Verformung
- Spannung 2: $\sigma_2 = 220\,\text{MPa} \Rightarrow \Delta L_{\text{plastisch}} = 0{,}8\,\text{mm}$

a) Beschreibung des Verhaltens

Elastisch: Bei 140 MPa bleibt der Stab im elastischen Bereich. Die Atome werden geringfügig aus ihrer Gleichgewichtslage verdrängt, kehren aber bei Entlastung vollständig zurück.
Plastisch: Bei 220 MPa beginnt plastisches Fließen. Versetzungen bewegen sich dauerhaft durch das Kristallgitter, was zu bleibender Deformation führt. Die Entlastung hinterlässt eine bleibende Verlängerung.

b) Elastische Dehnung und Verlängerung bei $\sigma = 140\,\text{MPa}$

$$\varepsilon_{\text{elastisch}} = \frac{\sigma}{E} = \frac{140 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 2 \times 10^{-3} = 0{,}2\,\%$$
$$\Delta L_{\text{elastisch}} = \varepsilon \cdot L_0 = 0.002 \cdot 100\,\text{mm} = 0{,}2\,\text{mm}$$

c) Dehnungen bei $\sigma = 220\,\text{MPa}$

Elastisch:

$$\Delta L_{\text{elastisch}} = \frac{\sigma}{E} \cdot L_0 = \frac{220 \times 10^6}{70 \times 10^9} \cdot 100 = 0{,}314\,\text{mm}$$

Gesamtlänge unter Last:

$$\Delta L_{\text{gesamt}} = \Delta L_{\text{plastisch}} + \Delta L_{\text{elastisch}} = 0.8 + 0.314 = 1{,}114\,\text{mm}$$
$$\varepsilon_{\text{gesamt}} = \frac{\Delta L_{\text{gesamt}}}{L_0} = \frac{1.114}{100} = 1{,}114\,\%$$

d) Technische vs. wahre Spannung/Dehnung

Technische Spannung: $\sigma_{\text{techn}} = 220\,\text{MPa}$
Technische Dehnung: $\varepsilon_{\text{techn}} = 1{,}114\,\%$

Wahre Dehnung:

$$\varepsilon_{\text{wahr}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{techn}}) = \ln(1.01114) = 1{,}108\,\%$$

Wahre Spannung:

$$\sigma_{\text{wahr}} = \sigma_{\text{techn}} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{techn}}) = 220 \cdot 1.01114 = 222{,}5\,\text{MPa}$$

Erklärung: Die technische Spannung bezieht sich auf die Anfangsfläche, während die wahre Spannung die momentane Fläche berücksichtigt. Der Unterschied wird bei großen plastischen Dehnungen signifikant.

e) Einschnürung

Die Einschnürung ist eine lokale Querschnittsverringerung im plastisch deformierten Bereich.
Einfluss:

- Nach dem Spannungshöchstwert in der technischen Spannungs-Dehnungskurve sinkt die Spannung (Nennspannung), obwohl die wahre Spannung weiter steigt.
- Sie kennzeichnet den Übergang von homogener zu lokaler Verformung.

Bedeutung: Nur bis zur Einschnürung beschreibt die Spannungs-Dehnungskurve das Materialverhalten eindeutig. Danach überlagern sich geometrische Effekte.

Aufgabe 2 – Härteprüfung

a) **Berechnung der Brinell-Härte:**
Gegeben:

- Prüfkraft: $F = 3000\,\mathrm{N}$
- Kugeldurchmesser: $D = 10\,\mathrm{mm}$
- Eindruckdurchmesser: $d = 3{,}2\,\mathrm{mm}$

Formel:

$$HB = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

Einsetzen:

$$HB \approx \frac{2 \cdot 3000}{\pi \cdot 10(10 - \sqrt{10^2 - 3.2^2})} \approx 363$$

b) **Zugfestigkeit abschätzen:**
Näherung: $R_m \approx HB \cdot 3{,}45$

$$R_m = 363 \cdot 3{,}45 \approx 1253\,\mathrm{MPa}$$

c) **Härte und Duktilität:**
Härte ist ein Maß für den Widerstand gegen plastische Verformung. Harte Werkstoffe zeigen meist geringe Duktilität, sind also spröder. Duktilere Werkstoffe sind weicher, lassen sich leichter plastisch verformen und absorbieren mehr Energie vor dem Bruch.

Aufgabe 3 – Mechanische Eigenschaften von Polymeren

a) **Mechanisches Verhalten:**
PE-HD hat einen niedrigen Elastizitätsmodul, erreicht bei 20 MPa die Streckgrenze, fließt bis zur Zugfestigkeit von 30 MPa und versagt bei 600 % Dehnung.
Temperaturabhängigkeit: Mit steigender Temperatur sinken Modul und Festigkeit, die Dehnbarkeit steigt.

b) **Elastische Dehnung und Verlängerung:**

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{15}{1000} = 0{,}015 = 1{,}5\,\%$$
$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0 = 0{,}015 \cdot 80 = 1{,}2\,\mathrm{mm}$$

c) **Teilweise Rückkehr:**
Wird die Streckgrenze überschritten, tritt plastische Verformung auf. Beim Entlasten wird nur der elastische Anteil (z.B. 1,2 mm) zurückgebildet. Die Molekülketten sind dauerhaft gegeneinander verschoben.

d) **Temperaturabhängigkeit:**
Die Glasübergangstemperatur von PE-HD liegt bei $T_g = -80\,°\mathrm{C}$.
Bei $-100\,°\mathrm{C}$ (unterhalb T_g) befindet sich das Polymer im glasartigen Zustand.
Die molekulare Beweglichkeit ist stark eingeschränkt $\rightarrow$ das Material ist hart und spröde.
Es tritt keine plastische Verformung auf; der Bruch erfolgt spröde.
Bei $60\,°\mathrm{C}$ (deutlich über T_g) ist das Material weich und duktil.
Die molekulare Beweglichkeit nimmt zu, die Steifigkeit ab, die Dehnungsfähigkeit steigt.

e) **Vergleich von PE-HD und PE-LD:**
PE-HD und PE-LD bestehen beide aus der gleichen chemischen Einheit $(-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-)_n$, unterscheiden sich aber strukturell.
PE-HD besitzt lineare Ketten $\rightarrow$ dichte Packung $\rightarrow$ höhere Kristallinität.
PE-LD ist verzweigt $\rightarrow$ geringere Packungsdichte $\rightarrow$ geringere Kristallinität.
PE-HD hat dadurch einen höheren Elastizitätsmodul und eine höhere Festigkeit als PE-LD.

f) **Spannungs-Dehnungs-Kurven:**
Leicht vernetztes Polyisopren: Elastomerverhalten mit s-förmiger Kurve, großer reversibler Dehnung (>100%).
Stark vernetztes Polyisopren: Duroplastisch, fast lineares, sprödes Verhalten mit Bruch bei geringer Dehnung.
Lineares Polyethylen: Ähnlich PE-HD, aber geringere Zugfestigkeit; hohe Duktilität, Spannungs-Dehnungs-Kurve liegt unterhalb der von PE-HD.

Aufgabe 4 – Polymerketten

a) **Polymerisationsgrad und gestreckte Länge:**

$$DP = \frac{M}{M_0} = \frac{150000}{192} \approx 781$$

Zwei C–C-Bindungen pro Wiederholeinheit:

$$l = 2 \cdot DP \cdot 0{,}154 = 2 \cdot 781 \cdot 0{,}154 \approx 240\,\mathrm{nm}$$

b) **End-zu-End-Abstand:**

$$n = 10 \cdot DP = 7810 \quad \text{und} \quad d = 0{,}154\,\mathrm{nm}$$

$$r = d \cdot \sqrt{n} = 0{,}154 \cdot \sqrt{7810} \approx 13{,}6\,\mathrm{nm}$$