

Übung zur Vorlesung Materialwissenschaften

Prof. Peter Müller-Buschbaum, Lea Westphal, Ziyang Zhang, Doan Duy Ky Le

Übungsblatt 3

Lösung: Anhang

1. Modellannahmen

Jedes Kelvin-Voigt-Element erfüllt:

$$\sigma = E_i \varepsilon_i + \eta_i \dot{\varepsilon}_i \quad (\text{I}) \quad (1)$$

Für die serielle Anordnung gilt:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \quad (4)$$

2. Umformung und Einsetzen

Aus Gleichung (I) ergibt sich für jedes Element:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma - \eta_1 \dot{\varepsilon}_1}{E_1}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma - \eta_2 \dot{\varepsilon}_2}{E_2} \quad (6)$$

Einsetzen in die Gesamtdehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (7)$$

$$= \frac{\sigma - \eta_1 \dot{\varepsilon}_1}{E_1} + \frac{\sigma - \eta_2 \dot{\varepsilon}_2}{E_2} \quad (8)$$

Multiplikation mit $E_1 E_2$:

$$(E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon + E_2 \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + E_1 \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (9)$$

Verwende:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1 \quad (10)$$

Einsetzen ergibt:

$$(E_1 + E_2)\sigma = E_1 E_2 \varepsilon + E_2 \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + E_1 \eta_2 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1) \quad (11)$$

$$= E_1 E_2 \varepsilon + (E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2) \dot{\varepsilon}_1 + E_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} \quad (12)$$

Umstellen nach $\dot{\varepsilon}_1$:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{(E_1 + E_2)\sigma - E_1 E_2 \varepsilon - E_1 \eta_2 \dot{\varepsilon}}{E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2} \quad (13)$$

3. Zeitableitung der Gleichung

Leite Gleichung (10) nach der Zeit ab:

$$(E_1 + E_2)\dot{\sigma} = E_1 E_2 \dot{\varepsilon} + (E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2) \dot{\varepsilon}_1 + E_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} \quad (14)$$

Ableitung von $\dot{\varepsilon}_1$:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \frac{(E_1 + E_2)\dot{\sigma} - E_1 E_2 \dot{\varepsilon} - E_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon}}{E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2} \quad (15)$$

Einsetzen in Gleichung (13):

$$(E_1 + E_2)\dot{\sigma} = E_1 E_2 \dot{\varepsilon} + (E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2) \cdot \left(\frac{(E_1 + E_2)\dot{\sigma} - E_1 E_2 \dot{\varepsilon} - E_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon}}{E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2} \right) + E_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} \quad (16)$$

$$= (E_1 + E_2)\dot{\sigma} \quad (\text{vereinfachen}) \quad (17)$$

Daraus folgt: die Differenz hebt sich auf – die Gleichung stimmt.

4. Endform der Differentialgleichung

Alternative Darstellung durch Substitution:

$$(E_1 + E_2)\sigma + (\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} = E_1 E_2 \varepsilon + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \dot{\varepsilon} + \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} \quad (18)$$

5. Definition der Koeffizienten

$$p_0 = E_1 + E_2$$

$$p_1 = \eta_1 + \eta_2$$

$$q_0 = E_1 E_2$$

$$q_1 = E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1$$

$$q_2 = \eta_1 \eta_2$$

