

Materialwissenschaften

Prof. Peter Müller-Buschbaum, TUM School of Natural Sciences

Kapitel 5: Elastisches Verhalten

5.1 Einleitung

5.2 Elastische Verformung von Festkörpern

5.3 Atomare Grundlagen

5.3.1 Dehnung idealer Kristalle

5.3.2 Dehnung von Elastomeren

5.4 Zusammenfassung

J. P. Mercier, G. Zambelli, W. Kurz: Introduction to Material Science.
Elsevier, 2002. Kapitel 6.

W. D. Callister, D.G. Rethwisch: Materialwissenschaften und Werkstofftechnik.
Wiley-VCH. Kapitel 6.

5.1 Einleitung

Zusammenhang zwischen den **Kräften**, die auf einen Festkörper wirken, und der resultierenden **Verformung** → **Elastizitätsmodul E**

bei höheren Verformungen:

- Viskoelastizität
- Stabilitätsgrenzen → Bruch

in diesem Kapitel wird betrachtet:

- elastisches Verhalten bei Verformungen $< 0,1 \%$
- atomare Grundlage für das elastische Verhalten, insbesondere in Metallen und in Elastomeren

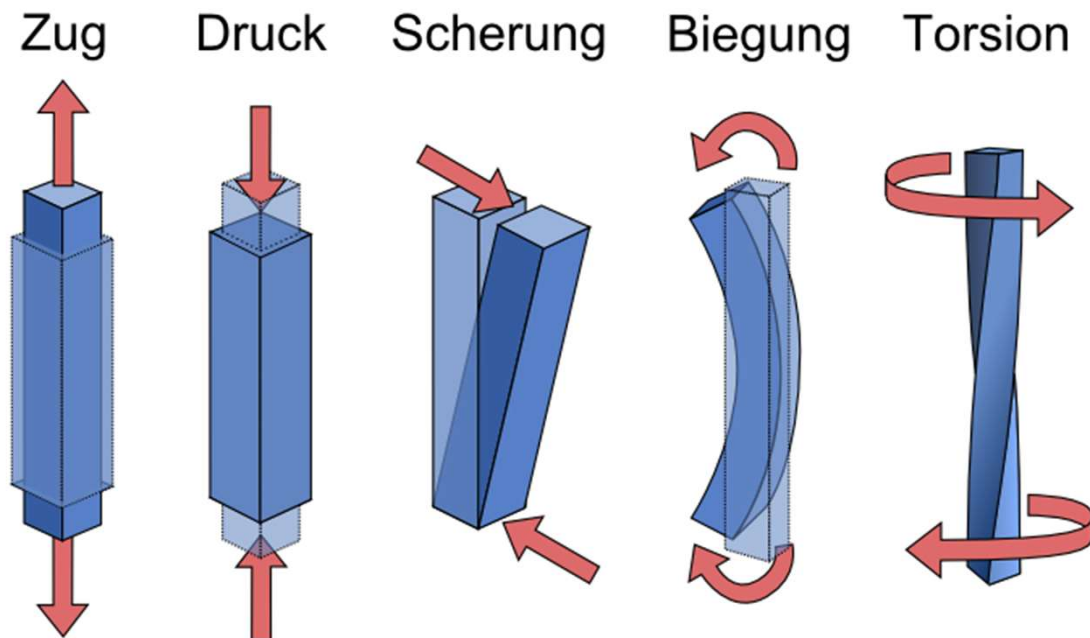
5.2 Elastische Verformung von Festkörpern

Elastizitätstheorie:

- Zusammenhang zwischen Kräften und Verformung für einfache Verformungen
- Bestimmung der entsprechenden elastischen Konstanten

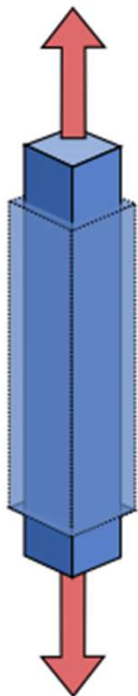
einfache Verformungen:

- Material
- Prüfkörper



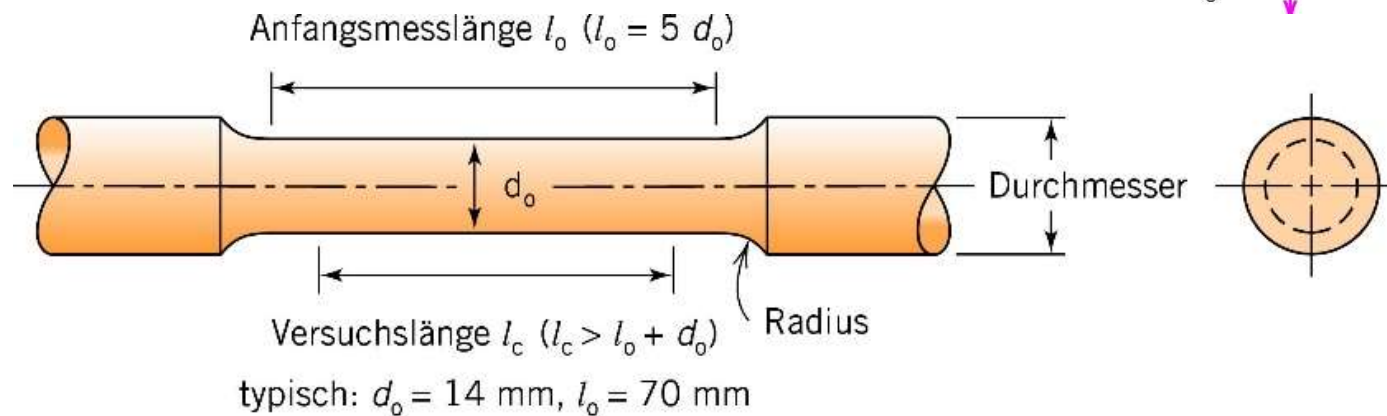
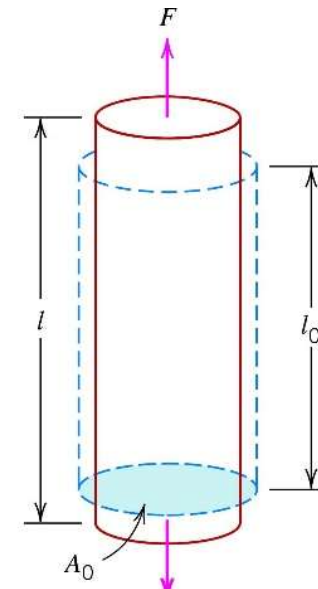
Zugversuch

Zug

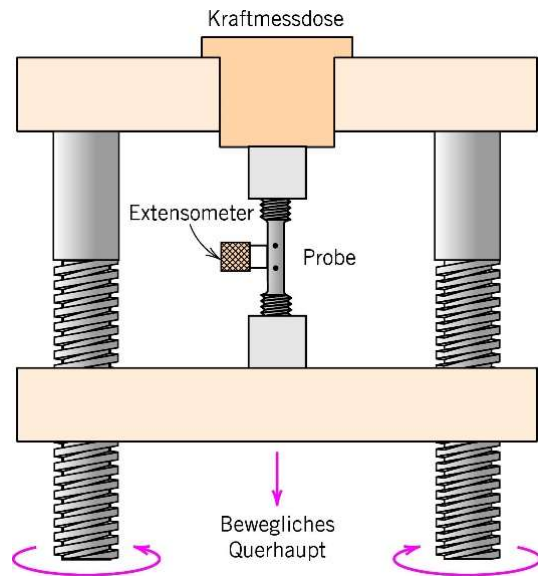


uniaxiale Dehnung eines elastischen Stabs:

- unterbrochene Linien: vor der Belastung
- ursprüngliche Querschnittsfläche $A_0 = \pi d_0^2$
- ursprüngliche Länge l_0
- Einspannen an Enden
- Messung der Längenänderung während Krafteinwirkung F



Zugversuch



- technische Spannung: $\sigma = \frac{F}{A_0}$
- technische Dehnung: $\varepsilon = \frac{l_i - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$
 l_i : momentane Länge

Zugprüfmaschinen von 5 bis
2.500 kN zur Bestimmung der
Zugfestigkeit eines Werkstoffs

zwickroell.com

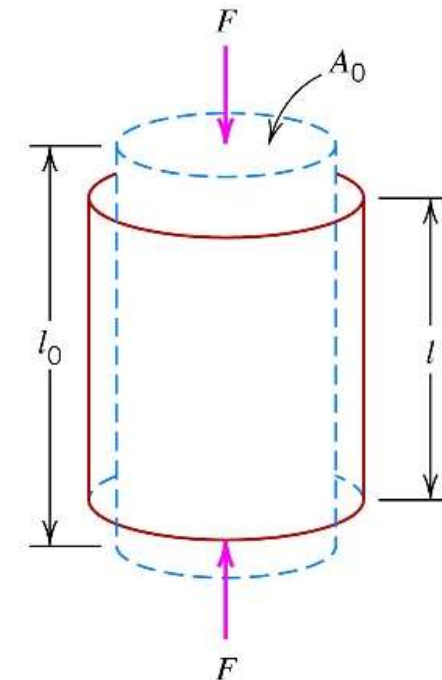


Druckversuch

Druck



- **Stauchen** des Probenkörpers
- ungehinderte seitliche Ausdehnung
- Verwendung derselben Messgrößen wie beim Zugversuch:
$$\sigma = -\frac{F}{A_0} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$
- Kraft wird mit negativem Vorzeichen angegeben

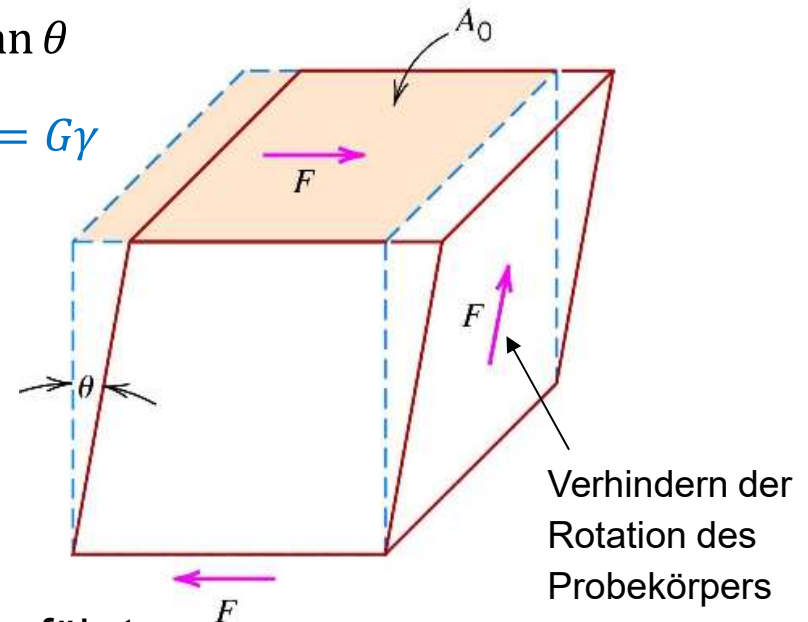
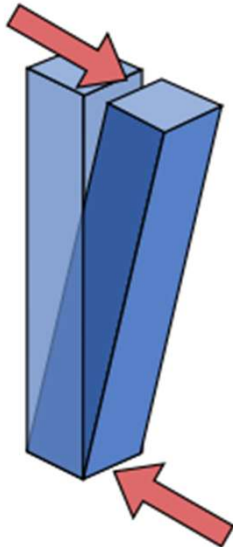


wird typisch auch mit Zugprüfmaschinen ausgeführt

Scherversuch

Scherung

- Scheren der Probekörpers, d.h. Kraft greift parallel zur Fläche A_0 an
- Scherspannung: $\tau = \frac{F}{A_0}$
- Scherdehnung: $\gamma = \tan \theta$
- für kleine Amplituden: $\tau = G\gamma$
 G : Schubmodul



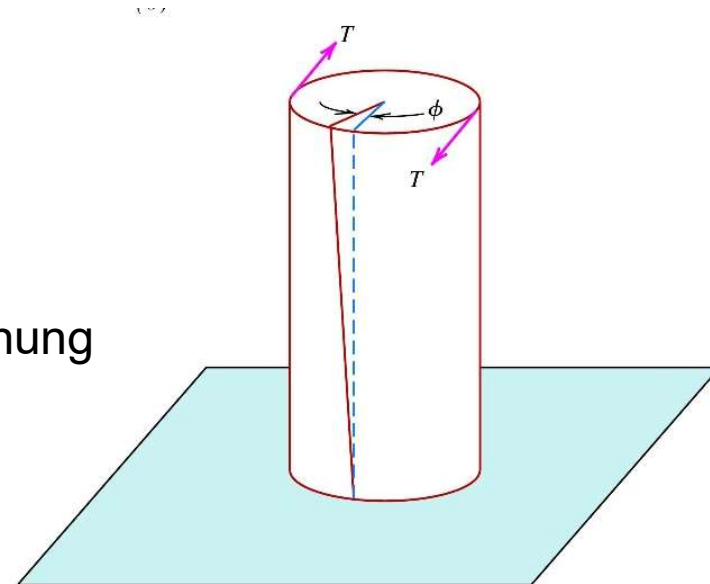
wird typisch auch mit Zugprüfmaschinen ausgeführt

Torsionsversuch

Torsion



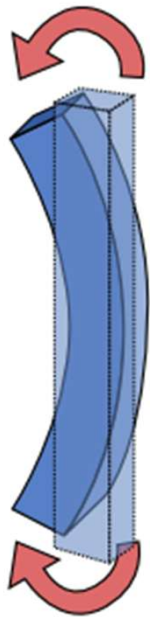
- Verdrehen des Probekörpers
- Torsionskräfte greifen an einem Ende der Probe an
→ **Torsionsmoment T** entlang der longitudinalen Stabachse
- Drehwinkel ϕ → Scherdehnung



wird typisch auch mit Zugprüfmaschinen ausgeführt

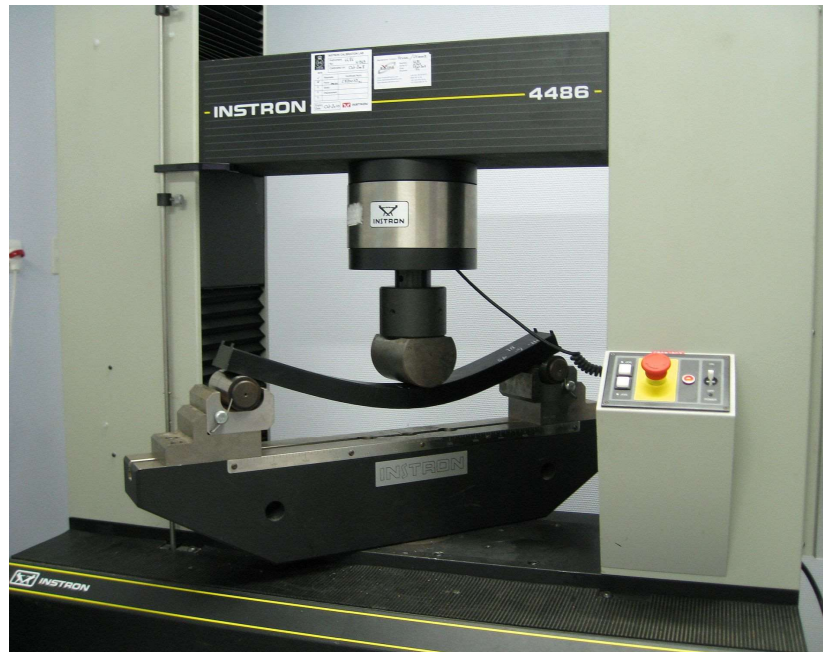
Biegeversuch

Biegung



- **Biegen** des Probekörpers – viele Geometrien

z. B.: Dreipunktbiegeversuch



$$E = \frac{l^3(X_L - X_H)}{4D_L b a^3}$$

E : Biegemodul in kN/mm²
 l_v : Stützweite in mm
 X_H : Ende der Biegemodulermittlung in kN
 X_L : Beginn der Biegemodulermittlung in kN
 D_L : Durchbiegung in mm zwischen X_H und X_L
 b : Probenbreite in mm
 a : Probendicke in mm

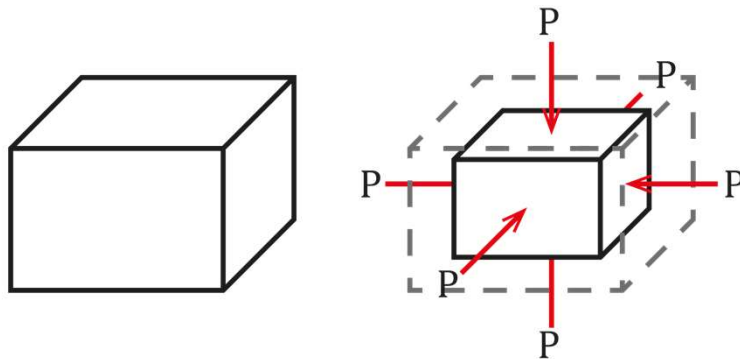
Biegeversuch

Zur Ausführung von Biegeversuchen existieren **etablierte Prüfnormen**, welche Ausführungsart und Prüfparameter für verschiedene Werkstoffe und Bauteile vorschreiben. Herausgegeben werden die Normen von Organisationen wie **ASTM, DIN, CEN, ISO**

Zum Beispiel:

- ASTM D143:2022 *Prüfung von astfreiem Holz an Kleinproben*
- DIN 52186:1978-06 *Prüfung von Holz; Biegeversuch*
- DIN EN 2831:1993-04 *Luft- und Raumfahrt; Wasserstoffversprödung von Stählen; Langsamer Biegeversuch* (EN 2831:1993)
- DIN EN ISO 178:2019-08 *Kunststoffe – Bestimmung der Biegeeigenschaften* (ISO 178:2019)

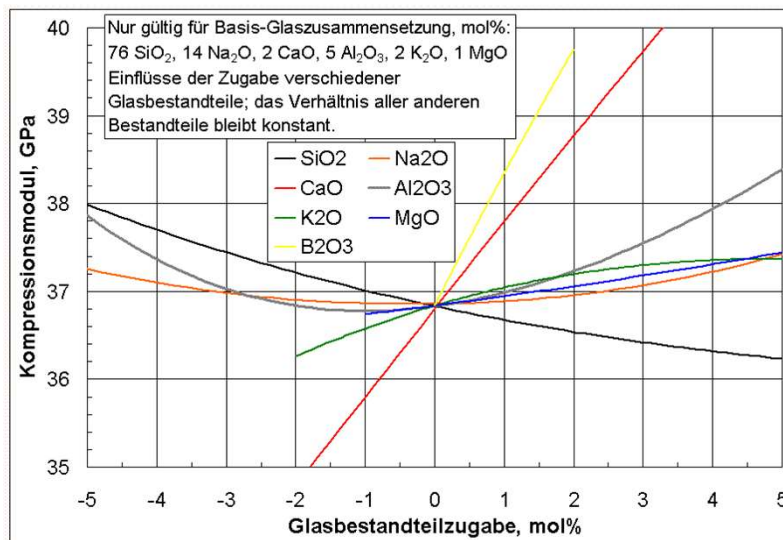
Hydrostatische Kompression



Beziehung zwischen dem hydrostatischen Druck p und der relativen Volumenänderung $\Delta V/V$:

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

K : Kompressionsmodul



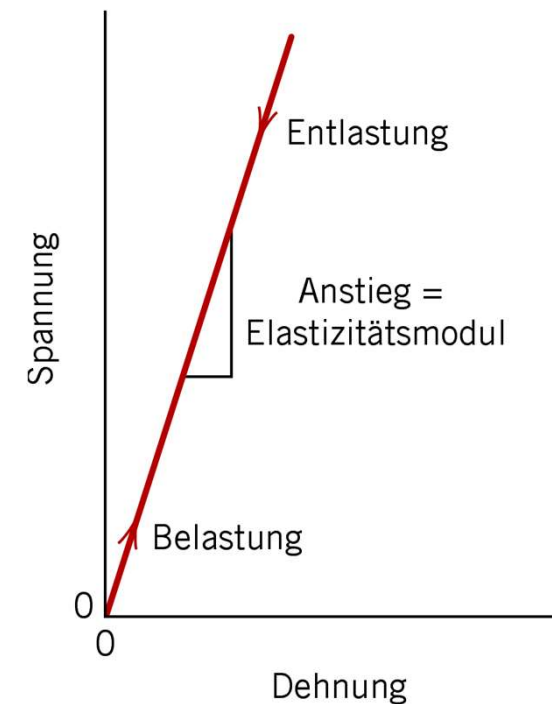
Beispiel: Einflüsse der Zugabe ausgewählter Glasbestandteile auf den Kompressionsmodul eines speziellen Basisglases

Spannungs-Dehnungs-Verhalten

- für Metalle bei relativ **geringer Zugbelastung**:
linearer Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnung ε

Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E\varepsilon$

- E : Elastizitätsmodul**, in GPa,
Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve
- Je größer der Elastizitätsmodul E ,
desto steifer ist das Material,
d.h. desto geringer ist die Verformung.
- Elastische Deformationen sind **reversibel**.



Typische Werte für Elastizitätsmodule

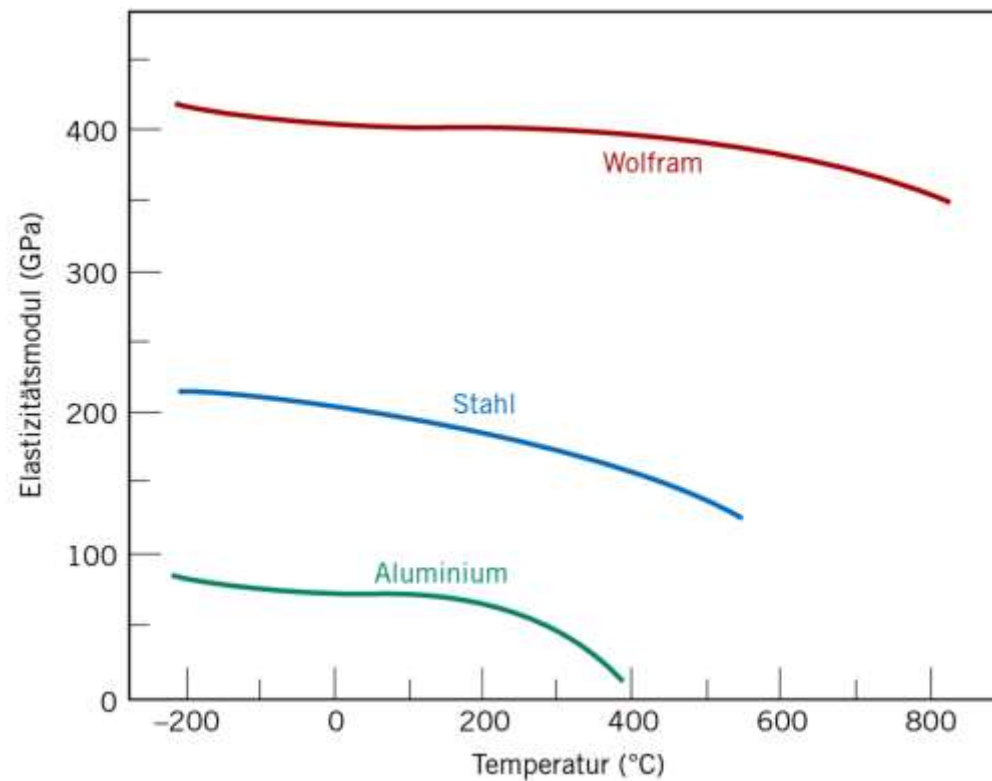
Material	E [GPa]	Material	E [GPa]
Diamond	1000	Window glass	70
Silicon carbide (SiC)	450	Aluminium	70
Tungsten	400	Concrete	50
Alumina (Al ₂ O ₃)	400	Magnesium	40 - 45
Carbon fibre	300	Wood agglomerate	7
Magnesia (MgO)	250	Epoxy resins (cross-linked)	2.8 - 4.2
Steel	210	Polystyrene	2
Copper	125	Polyamide 6-6	2
Brass, bronze	110	Polypropylene	1.5
Glassy silica (SiO ₂)	95	Medium density polyethylene	0.7
Gold	80	Rubbers	~0.001

alle Werte bei Zimmertemperatur

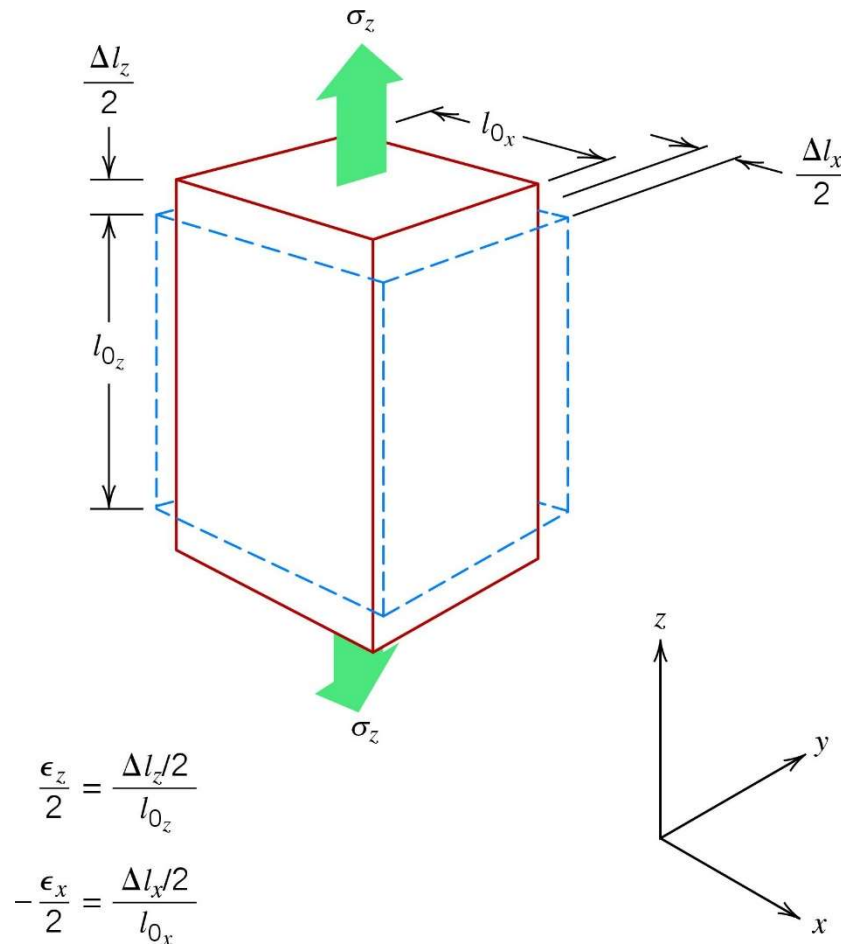
- Werte für keramische Materialien ähnlich wie die von Metallen
- für **Polymere** geringer

Temperaturabhängigkeit

Abnahme des Elastizitätsmoduls mit steigender Temperatur



Laterale Kontraktion



Anlegen einer Zugspannung

- Verlängerung in z-Richtung
- Verringerung des Querschnitts in x- und y-Richtung
- für isotrope Werkstoffe sind die Druckdeformationen gleich:

$$\epsilon_x = \epsilon_y$$

Verhältnis Quer-/Axialdehnung:

Poisson-Zahl

$$\nu = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_z}$$

Poisson-Zahl

für isotrope Materialien $0 \leq \nu \leq 0.5$

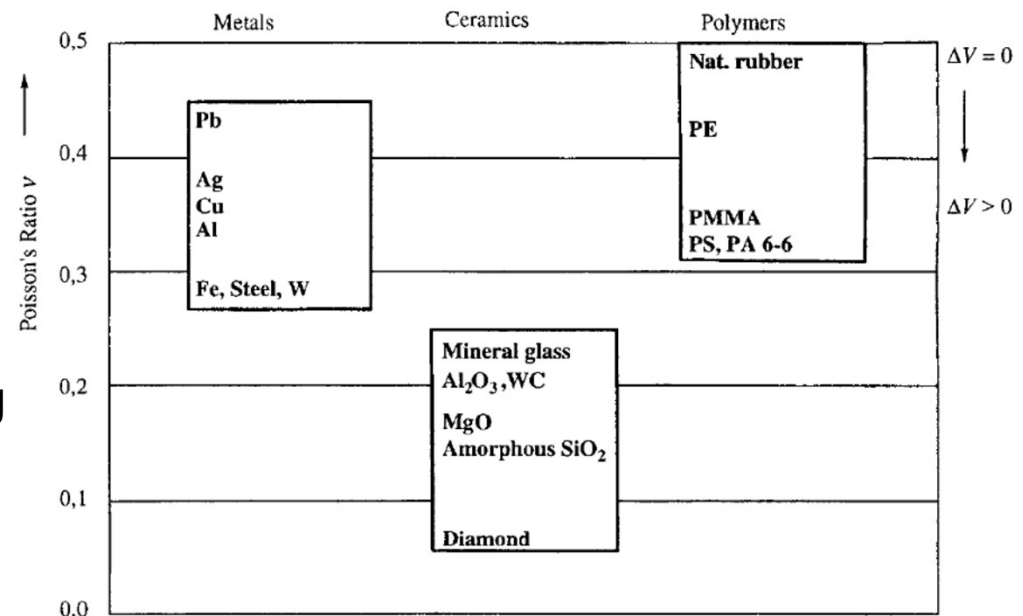
keine Volumenänderung unter Belastung $\nu = \frac{1}{2}$ (wie z.B. Flüssigkeit)

in Festkörpern wirken die elastischen Eigenschaften der Querdehnung entgegen

$$\nu < \frac{1}{2}:$$

Volumenvergrößerung unter Zug
und

Volumenverkleinerung unter
Druck



$\nu < 0$: anisotrope Materialien (Kristalle z.B. Quarz) in einer speziellen Richtung

Zusammenhang zwischen E und G

- für isotrope Materialien: $E = 2G(1 + \nu)$,
 G : Schubmodul
- für viele Metalle: $G \approx 0,4 E$, da $\nu \approx 1/4$
- d.h. wenn G oder E bekannt sind,
kann der andere Wert abgeschätzt werden

Volumenvergrößerung von Metallen unter Zug

Poisson-Zahl ist gegeben durch

die elastischen Konstanten s_{11} und s_{12} : $\nu = -\frac{s_{12}}{s_{11}}$

Diese sind abhängig von c_{11} und c_{12} ,
d.h. den Komponenten des elastischen Tensors,
die die Dehnung und die Scherung beschreiben.

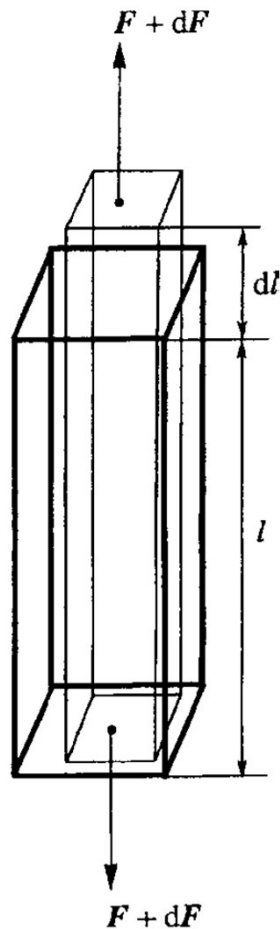
Zusammenhang zwischen Dehnung ε und Spannung τ : $\varepsilon = (s_{11} + 2s_{12})\tau$

Kubische Kristalle sind nicht elastisch isotrop:

Spannung bei Verformung entlang der kubischen Achse ist verschieden
von der Spannung bei Verformung entlang einer Flächendiagonalen

→ Volumenveränderung bei Zug

5.3 Atomare Grundlagen



Thermodynamischer Ansatz:

Stab wird durch Kraft \vec{F}
auf der Länge $l > l_0$ gehalten
und dann um dl verlängert
durch eine Erhöhung der Kraft um $d\vec{F}$

→ Änderung der inneren Energie: $dU = dQ - dW$

dQ : bei der Verformung vom Material
aufgenommene Wärme

dW : geleistete Arbeit

→ für reversiblen Prozess: $dQ = TdS$

Atomare Grundlagen

die vom System geleistete Arbeit setzt sich zusammen aus

- (i) der Arbeit durch das **elastische Zusammenziehen** und
- (ii) der **Arbeit des Drucks** p :

$$dW = -F_r dl + p dV,$$

wobei die Rückstellkraft $F_r = -F$ ist

$$\rightarrow dU = T dS + F_r dl - p dV$$

Rückstellkraft

Helmholtz-Energie: $A = U - TS \quad \rightarrow \quad dA = -SdT + F_r dl - pdV$

für Verformung bei konstanter Temperatur und konstantem Volumen:

$$dA = F_r dl \quad \rightarrow \quad F_r = \left(\frac{\partial A}{\partial l} \right)_{T,V} \quad \rightarrow \quad F_r = \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T,V} - T \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T,V}$$

→ die **Rückstellkraft** ist also gleich der Änderung der freien Energie pro Einheitslänge der Verlängerung des Stabs

→ elastische Rückstellkraft enthält zwei Komponenten:

(i) die innere oder **enthalpische Rückstellkraft** $F_{r,i} = \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T,V}$

(ii) die **entropische Rückstellkraft** $F_{r,e} = -T \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T,V}$

→ die zugeführte mechanische Energie kann als **innere Energie** gespeichert werden (Veränderung der atomaren Abstände oder der Bindungswinkel) oder als **Wärme an die Umgebung** abgegeben werden, wobei sich die Ordnung in der Probe erhöht

Isotherme reversible Verformung

A ist eine Zustandsfunktion, d.h. dA ist ein exaktes Differential

$$\rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_l \right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial A}{\partial l} \right)_T \right]_l$$

daraus folgt für die isotherme reversible elastische Verformung

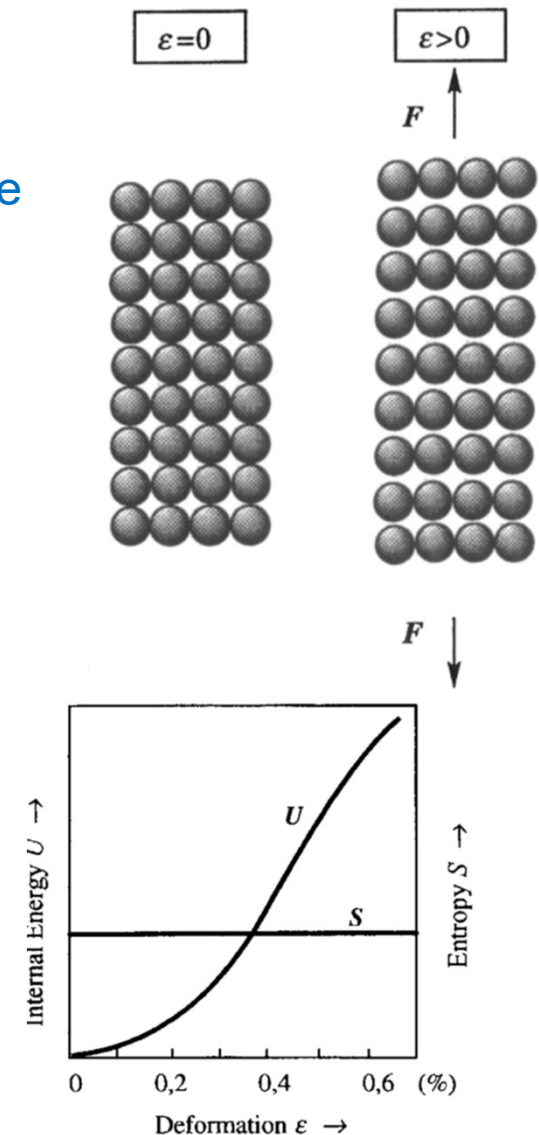
$$-\left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial F_r}{\partial T} \right)_{l,V} \rightarrow F_r = \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T,V} + T \left(\frac{\partial F_r}{\partial T} \right)_{l,V}$$

betrachte zwei Grenzfälle:

- ideale Kristalle
- Elastomere

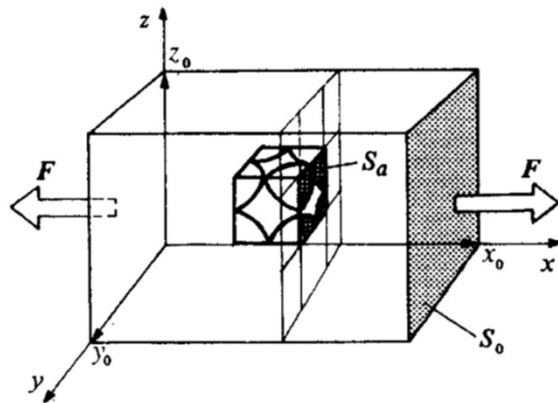
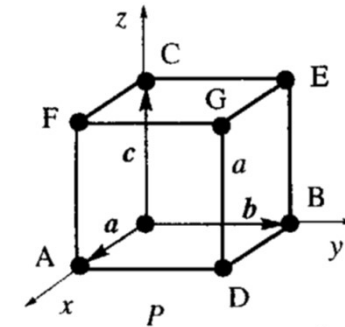
5.3.1 Dehnung idealer Kristall

- Rückstellkraft beruht auf der Verschiebung der Atome aus ihren Gleichgewichtsabständen
- hohe Kohäsionsenergie \rightarrow hohe Elastizitätsmoduln
- Rückstellkraft unabhängig von der Temperatur \rightarrow bestimmt durch Änderungen der inneren Energie bzw. der Enthalpie
- große Änderung der inneren Energie, Entropie hingegen nahezu unverändert
- linearer elastischer Bereich nur für $\varepsilon < 0,1 \%$



Dehnung des idealen Kristalls

betrachte Kristall mit einfach kubischer Einheitszelle P
aus kugelförmigen Atomen mit Durchmesser r_0 ,
jedes Atom belegt ein kubisches Volumen von $\sim r_0^3$



- betrachte **Streckung eines prismatischen Kristalls**
- Annahme: Dehnung und transversale Verformung auf makroskopischer und atomarer Skala gleich, „**affine Deformation**“

→ Dehnung: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta r_x}{r_0}$

→ transversale Deformation: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta r_y}{r_0} = \frac{\Delta r_z}{r_0}$

Dehnung des idealen Kristalls

- Rückstellkraft beruht auf der **Verschiebung der Atome aus ihrer Gleichgewichtslage**
- für geringe Verformung:
Rückstellkraft zwischen zwei benachbarten Atomen: $f_{r,x} = C \Delta r_x$
- jedes Atom belegt eine Querschnittsfläche $S_a = r_0^2$
- makroskopische Rückstellkraft F_r ist proportional zur Anzahl Atome in der Querschnittsfläche S_0 , also zu S_0/r_0^2

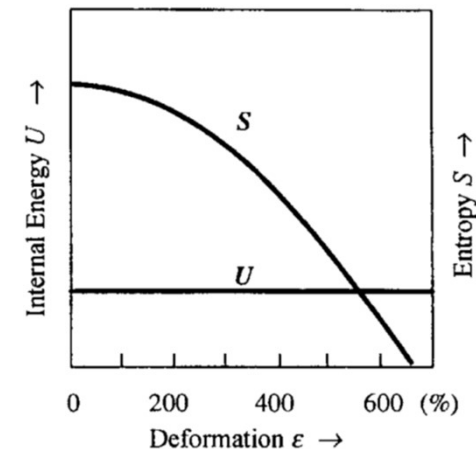
$$\rightarrow F_r = \frac{S_0}{r_0^2} f_{r,x} = \frac{S_0}{r_0^2} C \Delta r_x \rightarrow F_r = \frac{S_0 C}{r_0} \frac{\Delta x}{x_0}$$

$$\rightarrow \text{Spannung } \sigma_x = \frac{F_r}{S_0} = \frac{C}{r_0} \varepsilon_x$$

$$\rightarrow \frac{C}{r_0} \text{ ist der Elastizitätsmodul } E \text{ im Hooke'schen Gesetz: } \sigma_x = E \varepsilon_x$$

5.3.2 Dehnung von Elastomeren

- Elastomere: **schwach vernetzte Polymere**
- Rückstellkraft ist proportional zur absoluten Temperatur T
→ fast ausschließlich **entropischer Natur**
- Elastomere heizen sich bei Streckung auf und kühlen sich ab, wenn sie sich zusammenziehen
- Grund: **geringe Wechselwirkung der Ketten untereinander**,
Verformung führt zu Verringerung der Entropie
→ Abgabe von Wärme an die Umgebung
- sehr **niedrige Elastizitätsmoduln** (1-10 MPa),
steigen mit der Temperatur an



Dehnung von Elastomeren

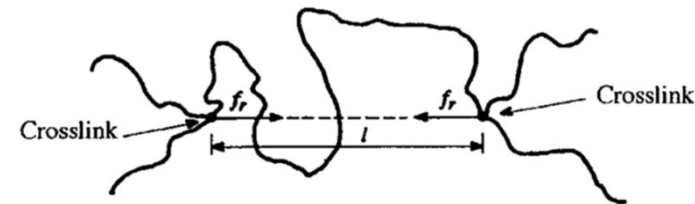
- Polymersegmente führen Brown'sche Bewegungen aus

→ Kraft, die die Kettenenden zusammenzieht,
also auch die Vernetzungspunkte

→ entropische Rückstellkraft $f_r = \frac{3kTl}{\bar{l}^2}$

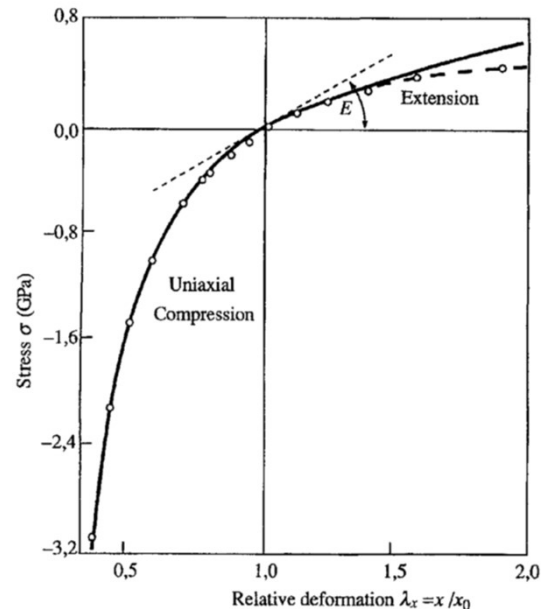
\bar{l}^2 : mittlerer quadratischer Abstand

zwischen den Kettenenden vor der Vernetzung



- bei Dehnung um Δl : $\Delta f_r = \frac{3kT}{\bar{l}^2} \Delta l$
- affine Deformation, Verschiebung der Vernetzungspunkte
- reversible elastische Verformung bis einige 100 %

Dehnung von Elastomeren



Für relative Deformation $\lambda_x = \frac{x}{x_0}$

→ $\sigma_x = \frac{E}{3} (\lambda_x - \lambda_x^{-2})$ beschreibt experimentelle Daten

- **Elastizitätsmodul:** Tangente an die Kurve bei $\lambda_x = 1$

→ $E = 3nRT$

n : Anzahl Mol elastisch aktiver Ketten pro Einheitsvolumen

ρ : Massendichte

M_e : Molmasse der Ketten zwischen den Vernetzungspunkten

- $n = \frac{\rho}{M_e} \rightarrow E = \frac{3\rho RT}{M_e}$

- Elastizitätsmodul unabhängig von der chemischen Struktur, proportional zur absoluten Temperatur wegen entropischer Grundlage
- Dehnung → Auffaltung der Ketten, Abstand der Atome und Bindungswinkel bleiben unverändert

Elastisches Verhalten von Polymeren

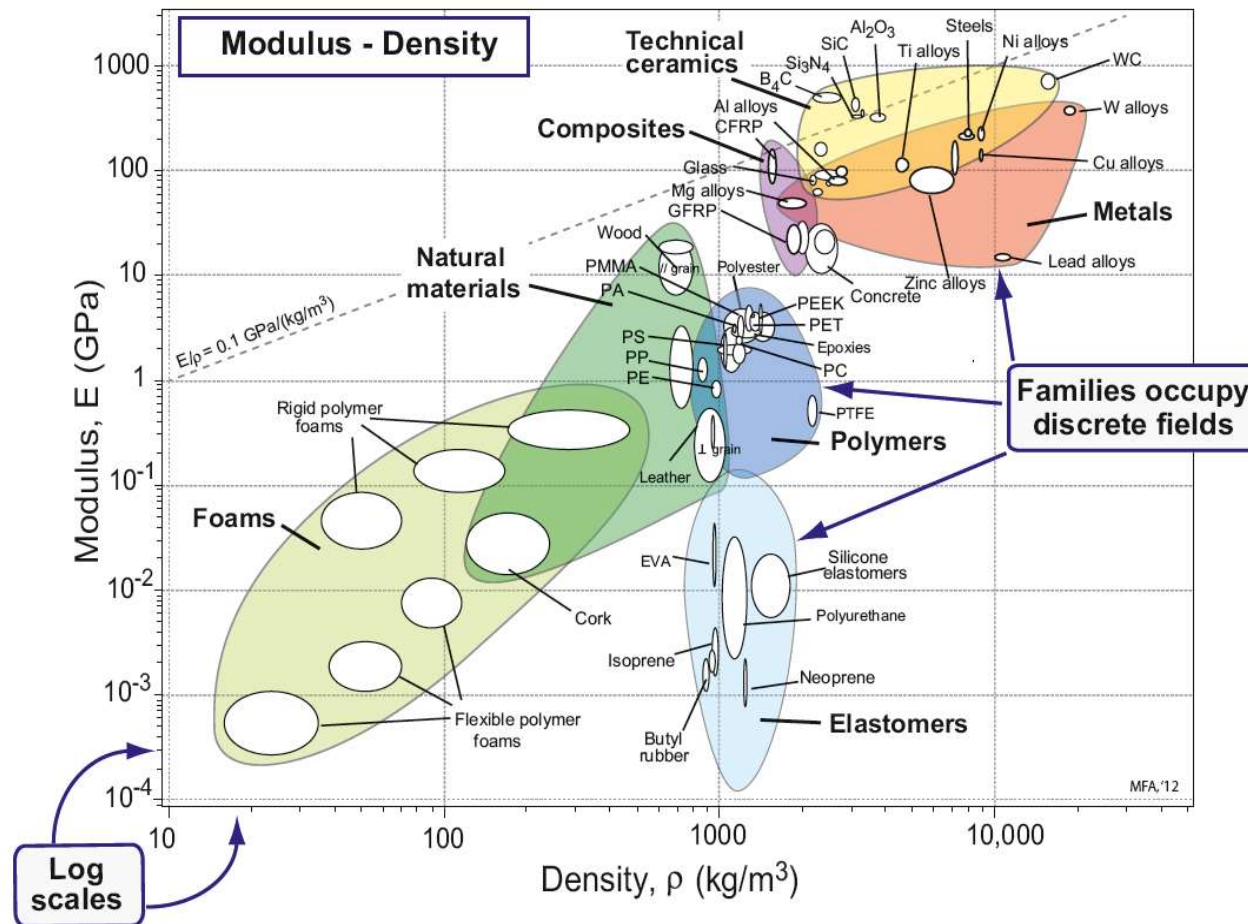
- Bindungskräfte steigen von:
van der Waals \Rightarrow Wasserstoffbrücken \Rightarrow kovalente Bindung
- Rückstellkräfte steigen von:
Rotation um Bindungswinkel \Rightarrow Änderung des Bindungswinkels \Rightarrow Strecken
(Komprimieren) der Bindungslänge.
- Je mehr Polymerketten pro Fläche, desto stärkere Rückstellkräfte
(Polymere mit Seitenarmen, d.h. mehr Platz pro Polymer, haben geringere Rückstellkräfte).

Hoher Modulus = möglichst planare „schmale“ dichtgepackte Polymere, längst ausgerichtet Wasserstoffbrückenbildung oder Vernetzung zwischen den Ketten erhöht Modulus orthogonal zur Kettenrichtung.

Andere Materialien

- die meisten Materialien sind Festkörper mit enthalpischer Elastizität
- Elastizitätsmoduln variieren stark wegen verschiedener Bindungsenergien
- amorphe Materialien haben niedrigere Elastizitätsmoduln als kristalline

Materialklassen: Elastizität und Dichte



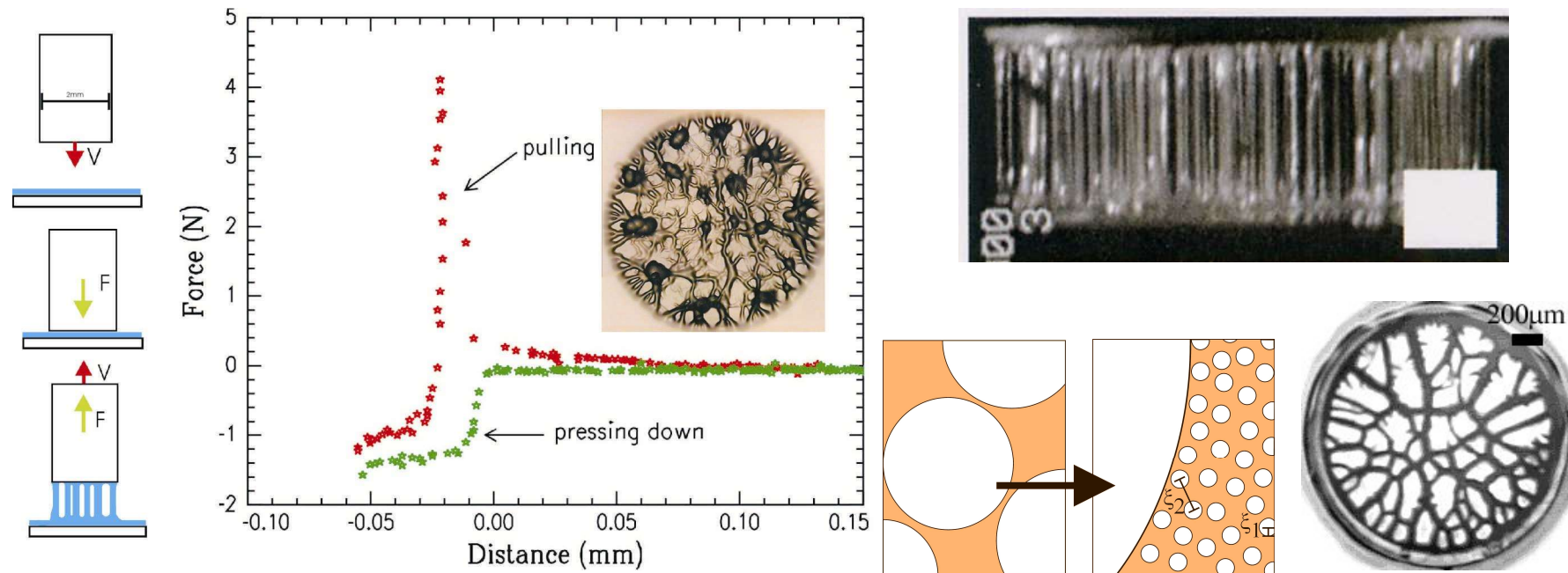
Ashby plot

Verhältnis
Elastizitätsmodul zu
Massendichte, E/ρ ,
ist wichtige Kenngröße
für die Auswahl leichter,
aber fester Materialien

M. Ashby, H. Shercliff, D. Cebon: Materials: Engineering, Science, Processing and Design.
2nd ed., 2010, Elsevier

Haftklebstoffe

reversible Klebeverbindung, die unter Krafteinwirkung geöffnet wird



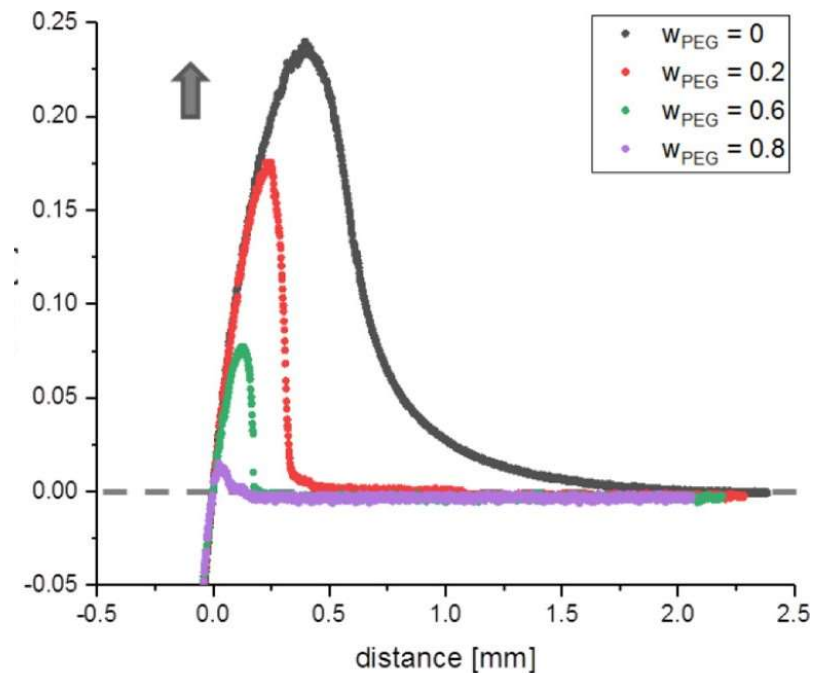
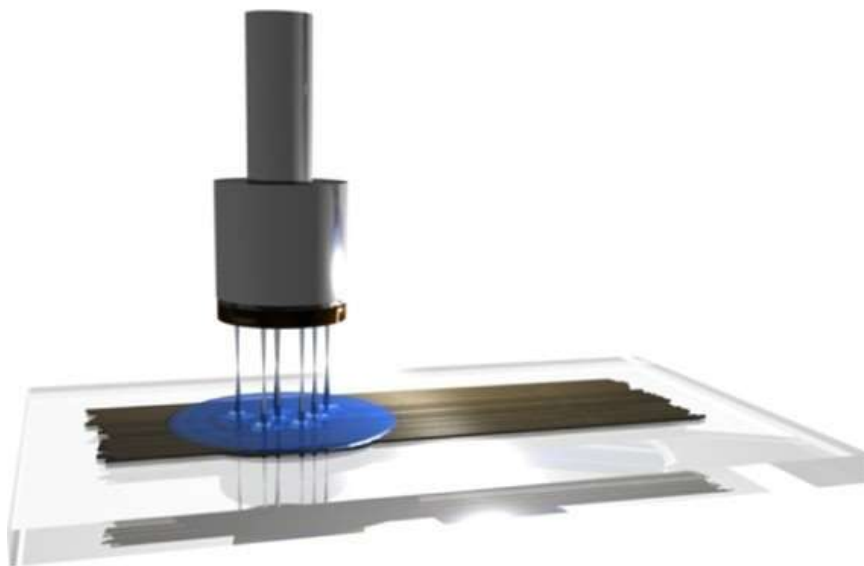
komplizierter Enthaftungsprozess

– Beginn ist elastische Deformation des Polymerfilms

PMB et al.; Europhys. Lett. **66**, 513-519 (2004)

Klebeeigenschaften von mit Haftkleber beschichteten Faserbündeln

PVP-co-PVA/PEG beschichtetes Haar



imitiert die Anwendung von Haarstylingprodukten wie Haargels und -sprays durch Messung der beschichteten (Haar-) Fasern

5.4 Zusammenfassung

Elastizitätsmodul: Zusammenhang zwischen Kräften auf Festkörper und resultierender Verformung (bei geringen Verformungen: $< 0,1 \%$)

Bestimmung des Elastizitätsmoduls E und des Schubmoduls G
in folgenden **Experimenten:** Dehnung: Zugversuch,
Stauchung: Druckversuch, Scherung, Torsion

Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E\varepsilon$

Zusammenhang E und G : $E = 2G(1 + \nu)$

Poisson-Zahl ν : Verhältnis Quer-/Axialdehnung

elastische Rückstellkraft hat enthalpische und entropische Komponenten

idealer Kristall: Verschiebung der Atome aus ihrer Gleichgewichtslage

Elastomer: Verschiebung der Vernetzungspunkte \rightarrow Auffaltung der Ketten