

# Übung zur Vorlesung Materialwissenschaften

Prof. Peter Müller-Buschbaum, Lea Westphal, Ziyang Zhang, Doan Duy Ky Le

## Übungsblatt 3 Lösung

### Aufgabe 1: Zugversuch

#### 1.1 Berechnung der technischen Spannung und Dehnung

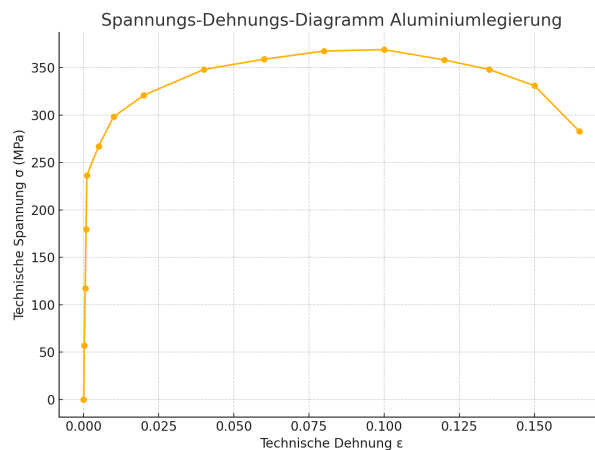


Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Al-Legierung

Zunächst wurde die Querschnittsfläche der zylindrischen Probe berechnet. Der Durchmesser beträgt  $d = 12,8 \text{ mm}$ , woraus sich die Anfangsfläche ergibt zu:

$$A_0 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot (6,4 \text{ mm})^2 \approx 128,68 \text{ mm}^2$$

Für jede Messung wurde die **technische Dehnung** berechnet als:

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Dabei ist  $l_0 = 50,800 \text{ mm}$  die Ausgangslänge der Probe. Die **technische Spannung** ergibt sich über:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Beispielhaft für den zweiten Messpunkt mit  $F = 7330 \text{ N}$  und  $l = 50,813 \text{ mm}$ :

$$\epsilon = \frac{50,813 - 50,800}{50,800} \approx 0,000256, \quad \sigma = \frac{7330}{128,68} \approx 56,96 \text{ MPa}$$

## 1.2 Bedeutung der 0,2 %-Dehngrenze

Da viele Metalle keine klar erkennbare Streckgrenze zeigen, wird stattdessen die sogenannte **0,2 %-Dehngrenze** verwendet. Dabei verschiebt man die lineare Anfangsgerade der Spannungs-Dehnungs-Kurve um  $\varepsilon = 0,002$  nach rechts. Der Schnittpunkt dieser **Offsetlinie** mit der Kurve definiert die Streckgrenze. Dieses Verfahren ist genormt und ergibt verlässliche Vergleichswerte für den Beginn der plastischen Verformung.

## 1.3 Werkstoffkennwerte aus dem Diagramm

- **Elastizitätsmodul  $E$**  :

$$E \approx 219,03 \text{ GPa}$$

- **Streckgrenze (0,2 %-Dehngrenze):**

$$\sigma_{0,2} \approx 267,33 \text{ MPa} \quad \text{bei} \quad \varepsilon \approx 0,005$$

- **Zugfestigkeit (maximale Spannung):**

$$R_m \approx 369,13 \text{ MPa} \quad \text{bei} \quad \varepsilon \approx 0,10$$

- **Bruchdehnung (letzter Messpunkt):**

$$\varepsilon_{\text{Bruch}} \approx 0,165 \quad (\text{entspricht } 16,5 \%)$$

## 1.4 Volumenänderung und Schubmodul

Unter der Annahme isotropen Verhaltens und einer Poisson-Zahl  $\nu = 0,33$  ergibt sich die relative Volumenänderung im elastischen Bereich zu:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2\nu) \cdot \varepsilon \approx (1 - 2 \cdot 0,33) \cdot 0,165 \approx 0,0561 \text{ (5,61 \%)}$$

Der **Schubmodul** ergibt sich über:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{219,03 \text{ GPa}}{2(1 + 0,33)} \approx 82,34 \text{ GPa}$$

## 1.5 Rückfederungsmodul

Der sogenannte **Rückfederungsmodul  $E_r$**  beschreibt das elastische Energiepotenzial nach plastischer Verformung:

$$E_r = \frac{\sigma_y^2}{2E} = \frac{(267,33 \text{ MPa})^2}{2 \cdot 219,03 \cdot 10^3 \text{ MPa}} \approx 0,163 \text{ MPa}$$

## Aufgabe 2: Elastizität eines Gummistreifens

Ein elastischer Gummistreifen mit einer Ausgangslänge von  $L_0 = 12 \text{ cm}$  und einer Querschnittsfläche von  $A = 1 \text{ cm}^2$  wird bei Raumtemperatur durch eine Zugspannung von  $\sigma = 2 \text{ MPa}$  auf  $L = 30 \text{ cm}$  gedehnt.

### 2.1 Berechnung des Elastizitätsmoduls $E$ und der Vernetzungsdichte $n$

Zunächst wird die Dehnung berechnet:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{30}{12} = 2,5$$

Da es sich um ein Elastomer handelt, kann die Spannung über das entropisch elastische Verhalten nach dem Modell für ideal vernetzte Ketten beschrieben werden:

$$\sigma = nRT(\lambda - \lambda^{-2})$$

Dabei sind:

- $\sigma = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
- $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
- $T = 293 \text{ K}$

Einsetzen ergibt:

$$2 \cdot 10^6 = n \cdot 8,314 \cdot 293 \cdot (2,5 - 0,16) \Rightarrow n \approx \frac{2 \cdot 10^6}{2437 \cdot 2,34} \approx 351,2 \text{ mol/m}^3$$

Der Elastizitätsmodul ergibt sich dann durch:

$$E = 3nRT \approx 3 \cdot 351,2 \cdot 8,314 \cdot 293 \approx 2,57 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2,57 \text{ MPa}$$

### 2.2 Berechnung der Spannung bei anderen Temperaturen und Längen

a) Für  $L = 20 \text{ cm}$  bei  $T = 293 \text{ K}$ :

$$\lambda = \frac{20}{12} \approx 1,667, \quad \lambda^{-2} \approx 0,36$$

$$\sigma = \frac{E}{3}(\lambda - \lambda^{-2}) = \frac{2,57}{3}(1,667 - 0,36) \approx 1,12 \text{ MPa}$$

b) Für  $L = 30 \text{ cm}$  bei  $T = 373 \text{ K}$ :

$$E = 3nRT = 3 \cdot 0,3512 \text{ mol/cm}^3 \cdot 8,314 \text{ cm}^3 \text{ MPa}/(\text{mol K}) \cdot 373,15 \text{ K} \approx 3,26 \text{ MPa}$$

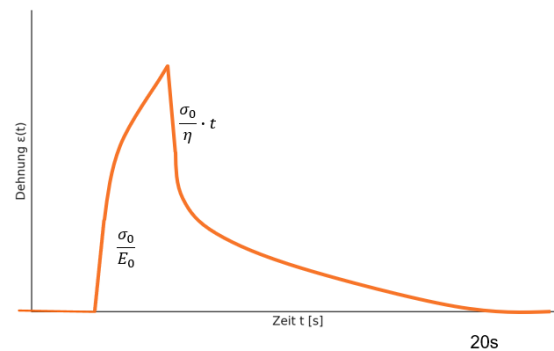
$$\lambda = 2,5, \quad \lambda^{-2} \approx 0,16$$

$$\sigma = \frac{E}{3}(\lambda - \lambda^{-2}) = \frac{3,26}{3}(2,5 - 0,16) \approx 2,55 \text{ MPa}$$

## Zusammenfassung der Ergebnisse

Fall	$\lambda$	$T$ [K]	$\sigma$ [MPa]
30 cm bei 20 °C	2,5	293	2,00
20 cm bei 20 °C	1,667	293	1,12
30 cm bei 100 °C	2,5	373	2,55

## Aufgabe 3: Theorie der Viskoelastizität



Ein viskoelastisches Material wird einem plötzlichen Spannungssprung von

$$\sigma_0 = 1000 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kPa}$$

ausgesetzt. Die Relaxationszeit beträgt:

$$\tau = 20 \text{ s}$$

### 3.1 Qualitativer Verlauf der Dehnung $\varepsilon(t)$

Das Verhalten eines viskoelastischen Materials nach einem plötzlichen Spannungssprung kann mit dem **Maxwell-Modell** beschrieben werden. Dieses besteht aus einer Feder (elastisches Element) und einem Dämpfer (viskoses Element) in Serienschaltung.

Nach dem Spannungssprung auf  $\sigma_0$  reagiert das Material sofort mit einer elastischen Dehnung:

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}$$

Im Anschluss fließt das Material weiter aufgrund des viskosen Anteils. Die Dehnung nimmt daher kontinuierlich und linear mit der Zeit zu:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t$$

#### Hinweis zur Relaxationszeit $\tau$ :

Die Relaxationszeit ist im Maxwell-Modell definiert als:

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

Obwohl in dieser Aufgabe ein Spannungssprung (Kriechexperiment) betrachtet wird, taucht  $\tau$  nicht direkt in der Formel für  $\varepsilon(t)$  auf. Sie beschreibt jedoch, wie schnell das Material bei einem Dehnungssprung entspannen würde (Relaxationsexperiment) und kann verwendet werden, um  $\eta$  oder  $E$  zu bestimmen, falls einer der beiden Werte bekannt ist.

### 3.2 Vergleich mit ideal elastischem und ideal viskosem Material

#### **Ideal elastisch:**

Die Dehnung  $\varepsilon$  stellt sich sofort nach dem Anlegen der Spannung ein und bleibt anschließend konstant:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}$$

#### **Rein viskos:**

Die Dehnung wächst linear mit der Zeit:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t$$

#### **Viskoelastisch (Maxwell):**

Die Dehnung besteht aus einem sofortigen Sprung und einem linearen Anstieg:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t$$

## Aufgabe 4: Modellierung von zeitabhängiger Verformung eines viskoelastischen

### a) Herleitung der Differentialgleichung

**Gegeben:** Zwei Kelvin-Voigt-Elemente in Serie mit Parametern:

$$E_1 = 5 \text{ MPa}, \quad \eta_1 = 1.2 \times 10^5 \text{ Pa s}$$

$$E_2 = 20 \text{ MPa}, \quad \eta_2 = 5 \times 10^5 \text{ Pa s}.$$

Die Reihenschaltung zweier Kelvin-Voigt-Körper bedeutet, dass sich die Dehnungen addieren:

$$\varepsilon = \varepsilon_{KV1} + \varepsilon_{KV2}$$

In beiden Teilkörpern ist die Spannung gleich:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_{KV1} + \eta_1 \dot{\varepsilon}_{KV1} = E_2 \varepsilon_{KV2} + \eta_2 \dot{\varepsilon}_{KV2}$$

Setzt man

$$\varepsilon_{KV2} = \varepsilon - \varepsilon_{KV1}, \quad \dot{\varepsilon}_{KV2} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{KV1}$$

und

$$\dot{\varepsilon}_{KV1} = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon_{KV1}}{\eta_1}$$

in das Stoffgesetz von KV2 ein, ergibt sich:

$$\sigma = E_2(\varepsilon - \varepsilon_{KV1}) + \eta_2 \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\sigma - E_1 \varepsilon_{KV1}}{\eta_1} \right)$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_{KV1} = \frac{1}{E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2} (E_2 \eta_1 \varepsilon + \eta_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} - (\eta_1 + \eta_2) \sigma)$$

und durch Ableiten:

$$\dot{\varepsilon}_{KV1} = \frac{1}{E_2 \eta_1 - E_1 \eta_2} (E_2 \eta_1 \dot{\varepsilon} + \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} - (\eta_1 + \eta_2) \dot{\sigma})$$

Einsetzen in das Stoffgesetz von KV1:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_{KV1} + \eta_1 \dot{\varepsilon}_{KV1}$$

führt auf die gesuchte Differentialgleichung:

$$\left( \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) \sigma + \left( \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 E_2} \right) \dot{\sigma} = \varepsilon + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \right) \ddot{\varepsilon}$$

Die Koeffizienten sind also:

$$p_0 = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$$

$$p_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 E_2}$$

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2}$$

$$q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}$$

Einsetzen der Koeffizienten:

$$p_0 = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} = 2,5 \times 10^{-7} \text{ Pa}^{-1}$$

$$p_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 E_2} = 6,2 \times 10^{-9} \text{ s} \cdot \text{Pa}^{-1}$$

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} = 4,9 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} = 6,0 \times 10^{-4} \text{ s}^2$$

**Hinweis:** Im Anhang befindet sich eine ausführlichere

## b) Qualitativer Verlauf der Dehnung $\varepsilon(t)$

1.  $t = 0$ : Sofortiger elastischer Dehnungssprung durch die Federn.
2.  $0 < t < 0.5\text{s}$ : Zeitabhängige Zunahme der Dehnung (Kriechen) durch die Dämpfer.
3.  $t = 0.5\text{s}$ : Entlastung  $\rightarrow$  sofortige elastische Rückstellung.
4.  $t > 0.5\text{s}$ : Langsame viskose Erholung durch die Dämpfer.

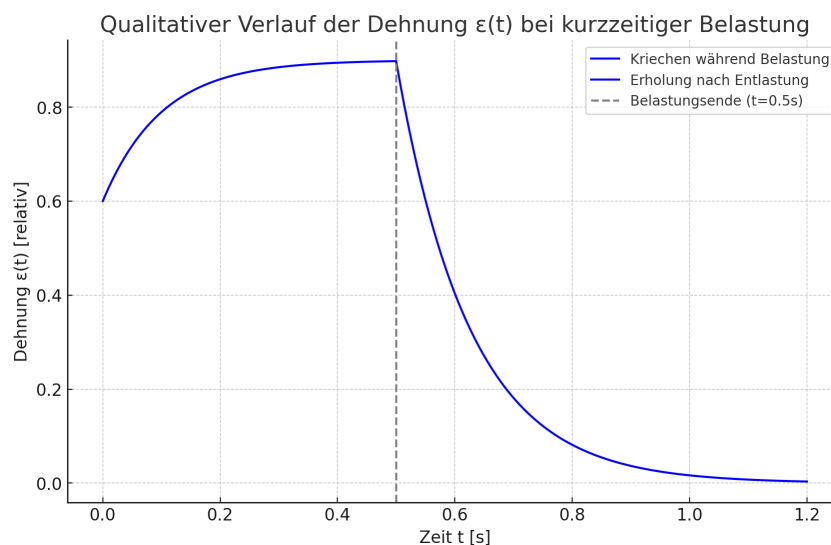


Abbildung 2: Qualitativer Verlauf der Dehnung  $\varepsilon(t)$  während und nach Belastung.

### c) Einfluss einer Erhöhung von $\eta_1$

1. **Stoßdämpfung:** Erhöhung von  $\eta_1 \rightarrow$  stärkere viskose Dämpfung  $\rightarrow$  mehr Energieabsorption  $\rightarrow$  geringere Stoßbelastung.
2. **Energierückgabe:** Erhöhung von  $\eta_1 \rightarrow$  verzögerte Rückstellung  $\rightarrow$  weniger elastische Energierückgabe  $\rightarrow$  Schuh wirkt weniger „reaktiv“.

**Fazit:** Höheres  $\eta_1$  steigert Komfort, reduziert Reaktivität – geeignet für komfortorientierte Schuhe, weniger für performanceorientierte.

#### Quelle:

Shen, Y., Golnaraghi, F., & Plumtree, A. (2001). Modelling compressive cyclic stress strain behaviour of structural foam. *International Journal of Fatigue*, **23**(6), 491–497. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(01\)00014-7](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00014-7)

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., & Werner, E. (2013). *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin, Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41134-2>