

УДК: 519.63

## Численное моделирование нестационарных задач переноса нейтронов в $SP_3$ приближении

Александр В. Аввакумов<sup>1,a</sup>, Петр О. Вабищевич<sup>2,b</sup>,  
Александр О. Васильев<sup>3,c</sup>, Валерий О. Стрижов<sup>2,d</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,  
Россия, 123182, г. Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1

<sup>2</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,  
Россия, 115191, г. Москва, ул. Большая Тульская, д. 52

<sup>3</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
Россия, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58

E-mail: <sup>a</sup> avvakumov2009@rambler.ru, <sup>b</sup> vabishchevich@gmail.com, <sup>c</sup> haska87@gmail.com,  
<sup>d</sup> vfs@ibrae.ac.ru

Для анализа активной зоны реактора, транспортное  $SP_3$  приближение уравнения переноса нейтронов позволяет повысить точность стационарного и нестационарного расчетов по сравнению с диффузионным приближением. Кроме того, вычислительные затраты  $SP_3$  расчетов намного меньше, чем у других транспортных методов более высокого порядка ( $S_N$  или  $P_N$ ). Еще одним преимуществом  $SP_3$  приближения является аналогичная структура уравнений, которая используется в диффузионном приближении. Следовательно, не составит труда реализовать вариант решения с использованием  $SP_3$  приближения для многогрупповых диффузионных кодов, которые преимущественно применяются для практических расчетов. В данной работе рассматривается применение  $SP_3$  методологии, основанной на решении  $\lambda$ -спектральной задачи. Динамические процессы протестированы на примере бенчмарка реактора TWIGL-2D. Для достижения геометрической общности применяется метод конечных элементов. Результаты рассчитанные диффузионным и  $SP_3$  методами сравниваются с результатами эталонных расчетов.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов,  $\lambda$ -спектральная задача, диффузионное приближение,  $SP_3$  приближение

Работа выполнена при поддержке гранта Российского Научного Фонда #19-71-00008

© 2021 Александр Владимирович Аввакумов, Петр Николаевич Вабищевич, Александр Олегович Васильев,  
Валерий Федорович Стрижов

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. Чтобы получить текст лицензии, посетите вебсайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/> или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.63

## Numerical modeling of non-stationary problems of neutron transport in the $SP_3$ approximation

A. V. Avvakumov<sup>1,a</sup>, P. N. Vabishchevich<sup>2,b</sup>, A. O. Vasilev<sup>3,c</sup>,  
V. F. Strizhov<sup>2,d</sup>

<sup>1</sup>National Research Center «Kurchatov Institute»,  
1, Akademika Kurchatova pl., Moscow, 123182, Russia  
<sup>2</sup>Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Science,  
52, Bolshaya Tuskaya Street, Moscow, 115191, Russia  
<sup>3</sup>North-Eastern Federal University,  
58, Belinskogo Street, Yakutsk, 677000, Russia

E-mail: <sup>a</sup> avvakumov2009@rambler.ru, <sup>b</sup> vabishchevich@gmail.com, <sup>c</sup> haska87@gmail.com,  
<sup>d</sup> vfs@ibrae.ac.ru

The  $SP_3$  approximation of the neutron transport equation allows improving the accuracy for both static and transient simulations for reactor core analysis compared with the diffusion approximation. Besides, the  $SP_3$  calculation costs are much less than higher order transport methods ( $S_N$  or  $P_N$ ). Another advantage of the  $SP_3$  approximation is a similar structure of equations that is used in the diffusion method. Therefore, there is no difficulty to implement the  $SP_3$  solution option to the multi-group neutron diffusion codes, which are mainly used for practical calculations. In this work, the application of the  $SP_3$  methodology based on solution of the  $\lambda$ -spectral problem. Dynamic processes has been tested for the TWIGL-2D reactor benchmark test. The FEM is chosen to achieve the geometrical generality. The results calculated with the diffusion and  $SP_3$  methods are compared with the reference calculation results.

Keywords: neutron transport equation,  $\lambda$ -spectral problem, diffusion approximation,  $SP_3$  approximation

Citation: Computer Research and Modeling, 2021, vol. , no. , pp. 1–17 (Russian).

This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation #19-71-00008

## Введение

Диффузионное приближение уравнения переноса нейтронов широко используется в анализе ядерных реакторов, что позволяет проводить расчеты всей активной зоны с приемлемой точностью. Основная особенность уравнения диффузии нейтронов заключается в следующем: предполагается, что нейтронный ток пропорционален градиенту нейтронного потока (закон Фика) [Stacey, 2007]. Для обеспечения обоснованности диффузионной теории в современных диффузионных кодах, как правило, используется грубосеточная покассетная схема расчета с эффективными усредненными сечениями, подготовленные с использованием более точных транспортных приближений. Для улучшения ограничений диффузионного кода, связанных с ограничениям на шаг сетки, используются различные подходы, включая нодальные методы и методы конечных элементов [Lawrence, 1986]. Для многих ситуаций, представляющих интерес (например, для потвэлных расчетов с учетом сильно поглощающих управляющих стержней), применимость теории диффузии нейтронов ограничена. Следовательно, необходимо более строгое приближение для уравнения переноса нейтронов.

Решение уравнения переноса нейтронов [Lewis, Miller, 1984] является очень сложной задачей из-за семи независимых переменных: пять для пространственно-углового описания, одна для энергии и одна для времени. Для упрощения задачи переноса используются различные подходы, например, приближение сферических гармоник ( $P_N$ ) [Azmy, Sartori, 2010]). Уравнение переноса нейтронов в  $P_N$  приближении получается путем разложения угловой зависимости потока нейтронов по  $N$  сферическим гармоникам. В последнее время широкое распространение получила простейшая версия метода  $P_N$ , а именно упрощенное  $P_N$  приближение ( $SP_N$ ) [McClarren, 2010].

Метод  $SP_N$  был впервые получен Гелбардом [Gelbard, 1961] в начале 1960-х годов. Детальный анализ метода  $SP_N$  усложняется тем фактом, что в научной литературе представлены, по крайней мере, четыре различных метода вывода. Две из этих формулировок - «традиционная» и «каноническая» — основаны на наблюдении о связи между плоской геометрией и общей трехмерной геометрией. Эти первые два подхода включают методы, которые сводят перенос нейтронов к угловому приближению низкого порядка. А третий вывод  $SP_N$  начинается с уравнения интегрального баланса и развивает точную связь между нейтронным скалярным потоком и расходимостью нейтронного тока, а не приближенное соотношение, которое является законом Фика. Каждый из различных подходов к  $SP_N$  приближению дает алгебраически эквивалентную систему уравнений, однако, это приближение ограничено относительно низкими порядками, такими как  $SP_2$  или  $SP_3$ . В результате метод  $SP_N$  ограничен теми же ограничениями, но несколько ослабленными, как и теория нодальной диффузии; то есть скалярный поток должен медленно меняться в пространстве, и модель не должна включать в себя сильно поглощающие области. В частности было показано, что результаты для  $SP_N$  ухудшаются в регионах, где преобладает поток нейтронов. Получающиеся уравнения  $SP_N$  являются эллиптическими, например, уравнения  $SP_3$  состоят из двух уравнений диффузионного типа с двумя неизвестными потоками: скалярным потоком и вторым моментом углового потока. Более строгие теоретические основы методологии  $SP_3$  были получены Брантли и Ларсеном [Brantley, Larsen, 2000] на основе вариационных методов.

Метод  $SP_3$ , как и ожидалось, может обеспечить повышение точности по сравнению с широко используемым методом диффузии. Кроме того, реализация уравнений  $SP_3$  приближения в диффузионном коде является несложной задачей из-за схожей структуры  $SP_3$  и уравнений диффузии. По этой причине метод  $SP_3$  был принят в различных кодах расчета ядра, таких как DYN3D [Beckert, Grundmann, 2008], PARCS [Downar et al, 2009] и

других. В работе [Brewster, 2018] показано сравнение диффузионного и  $SP_3$  методов для расчета реактивности регулирующего стержня в легководном реакторе. По сравнению с эталонным расчетом Монте-Карло метод  $SP_3$  дает вдвое более точный результат по сравнению с методом диффузии. Согласно [Tada et al, 2008], применение теории  $SP_3$  к потвэлным расчетам для геометрии BWR привело к значительному повышению точности вычислений по сравнению с методом диффузии. Кроме того, как выяснилось, время вычислений с использованием метода  $SP_3$  всего в 1.5 раза больше, чем с использованием метода диффузии. Таким образом, метод  $SP_3$  можно рассматривать как улучшенное приближение уравнения переноса нейтронов по сравнению с методом диффузии. В связи с этим, будет очень полезно сравнить результаты рассчитанные как диффузионным, так и  $SP_3$  методами.

Для характеристики стационарных условий и динамического поведения реактора рассматривают некоторые спектральные задачи. Стационарное состояние реактора обычно описывается решением  $\lambda$ -спектральной задачи, где фундаментальное собственное значение (наибольшее собственное значение) называется "эффективным коэффициентом размножения" для активной зоны реактора [Bell, Glasstone, 1970]. Динамическое поведение реактора естественно описать на основе приближенного решения  $\alpha$ -спектральной задачи [Verdu et al, 2010; Carreno et al, 2017]. А на больших временах можно говорить об асимптотическом поведении нейтронного потока, амплитуда которого равна  $\exp(\alpha t)$  [Аввакумов и др, 2017]. Ранее, комплексные собственные значения и собственные функции находились в спектральных задачах для некоторых численных тестов [Avvakumov et al, 2017; Avvakumov et al, 2018].

В данной работе рассматривается  $SP_3$  приближение для нестационарной задачи многогруппового переноса нейтронов. Исследуются и сравниваются численные результаты полученные транспортным  $SP_3$  и диффузионными расчетами. Для решения спектральных задач с несимметричными матрицами используются хорошо разработанные алгоритмы и соответствующее бесплатное программное обеспечение, включая библиотеку SLEPC (<http://slepc.upv.es/>). Программное обеспечение написано с использованием вычислительной платформы FEniCS [Logg et al, 2012] для решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, методом конечных элементов.

## Постановка задачи

Моделируется нестационарный процесс в ядерном реакторе в транспортном  $SP_3$  приближении. Динамика нейтронного потока рассматривается в ограниченной выпуклой двумерной или трехмерной области  $\Omega$  ( $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\} \in \Omega$ ,  $d = 2, 3$ ) с границей  $\partial\Omega$ . Перенос нейтронов описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_{0,g}}{\partial t} - \frac{2}{v_g} \frac{\partial \phi_{2,g}}{\partial t} - \nabla \cdot D_{0,g} \nabla \phi_{0,g} + \Sigma_{r,g} \phi_{0,g} - 2\Sigma_{r,g} \phi_{2,g} = \\ = (1 - \beta) \chi_{n,g} S_{n,g} + S_{s,g} + \chi_{d,g} S_d, \\ \frac{9}{v_g} \frac{\partial \phi_{2,g}}{\partial t} - \frac{2}{v_g} \frac{\partial \phi_{0,g}}{\partial t} - \nabla \cdot D_{2,g} \nabla \phi_{2,g} + (5\Sigma_{t,g} + 4\Sigma_{r,g}) \phi_{2,g} - 2\Sigma_{r,g} \phi_{0,g} = \\ = -2(1 - \beta) \chi_{n,g} S_{n,g} - 2S_{s,g} - 2\chi_{d,g} S_d, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} S_{n,g} = \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}, \quad S_{s,g} = \sum_{g \neq g'=1}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'}, \quad S_d = \sum_{m=1}^M \lambda_m c_m, \\ \phi_{0,g} = \phi_g + 2\phi_{2,g}, \quad D_{0,g} = \frac{1}{3\Sigma_{tr,g}}, \quad D_{2,g} = \frac{9}{7\Sigma_{t,g}}, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned}$$

Здесь  $G$  — число групп,  $\phi_g(\mathbf{x})$  — скалярный поток нейтронов,  $\phi_{0,g}(\mathbf{x})$  — псевдо 0-й момент углового потока,  $\phi_{2,g}(\mathbf{x})$  — второй момент углового потока,  $\Sigma_{t,g}$  — полное сечение,  $\Sigma_{tr,g}$  — транспортное сечение,  $\Sigma_{r,g}(\mathbf{x})$  — сечение увода,  $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{x})$  — сечение рассеяния из группы  $g'$  в группу  $g$ ,  $\chi_g$  — спектр нейтронов,  $\nu\Sigma_{f,g}(\mathbf{x})$  — сечение генерации,  $c_m$  — плотность источников запаздывающих нейтронов,  $\lambda_m$  — постоянная распада источников запаздывающих нейтронов,  $M$  — число типов запаздывающих нейтронов.

Плотность источников запаздывающих нейтронов описывается уравнениями

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \lambda_m c_m = \beta_m \sum_{g=1}^G \nu\Sigma_{f,g} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где  $\beta_m$  — доля запаздывающих нейтронов  $m$  типа, причем

$$\beta = \sum_{m=1}^M \beta_m.$$

На границе области  $\partial\Omega$  ставятся граничные условия Маршака:

$$\begin{bmatrix} J_{0,g}(\mathbf{x}) \\ J_{2,g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{21}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0,g}(\mathbf{x}) \\ \phi_{2,g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad J_{i,g}(\mathbf{x}) = -D_{i,g} \nabla \phi_{i,g}(\mathbf{x}), \quad i = 0, 2. \quad (3)$$

Рассматривается задача для системы уравнений (1), (2) с краевыми условиями (3), и начальными условиями:

$$\phi_g(\mathbf{x}, 0) = \phi_g^0(\mathbf{x}), \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad c_m(\mathbf{x}, 0) = c_m^0(\mathbf{x}), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Операторная формулировка

Запишем краевую задачу (1)–(4) в операторной форме. Определим векторы решений  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_G\}$ ,  $\mathbf{u}_g = \{\phi_{0,g}, \phi_{2,g}\}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$  и матрицы

$$\begin{aligned} V = (v_{gg'}), \quad v_{gg'} &= \delta_{gg'} \begin{bmatrix} \frac{1}{v_g} & -\frac{2}{v_g} \\ \frac{v_g}{2} & \frac{v_g}{9} \\ -\frac{v_g}{8} & \frac{v_g}{8} \end{bmatrix}, \quad D = (d_{gg'}), \quad d_{gg'} = \delta_{gg'} \begin{bmatrix} D_{0,g} & 0 \\ 0 & D_{2,g} \end{bmatrix}, \\ A = (a_{gg'}), \quad a_{gg'} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{r,g} & -2\Sigma_{r,g} \\ -2\Sigma_{r,g} & 5\Sigma_{t,g} + 4\Sigma_{r,g} \end{bmatrix}, \quad a_{gg'} = \begin{bmatrix} -\Sigma_{s,g' \rightarrow g} & 2\Sigma_{s,g' \rightarrow g} \\ 2\Sigma_{s,g' \rightarrow g} & -4\Sigma_{s,g' \rightarrow g} \end{bmatrix}, \\ F = (f_{gg'}), \quad f_{gg'} &= \begin{bmatrix} \chi_{n,g} \nu\Sigma_{f,g'} & -2\chi_{n,g} \nu\Sigma_{f,g'} \\ -2\chi_{n,g} \nu\Sigma_{f,g'} & 4\chi_{n,g} \nu\Sigma_{f,g'} \end{bmatrix}, \quad B = (b_{gm}), \quad b_{gm} = \begin{bmatrix} \chi_{d,g} \lambda_m \\ -2\chi_{d,g} \lambda_m \end{bmatrix}, \\ \Lambda = (\lambda_{mm'}), \quad \lambda_{mm'} &= \delta_{mm'} \lambda_m, \quad Q = (q_{mg}) \quad q_{mg} = \beta_m \begin{bmatrix} \nu\Sigma_{f,g} \\ -2\nu\Sigma_{f,g} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\delta_{gg'} = \begin{cases} 1, & g = g', \\ 0, & g \neq g', \end{cases}$$

есть символ Кронекера. Будем работать на множестве векторов  $\mathbf{u}$ , компоненты которого удовлетворяют граничным условиям (3). С учетом введенных обозначений система уравнений (1), (2) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot D \nabla \mathbf{u} + A \mathbf{u} &= (1 - \beta) F \mathbf{u} + B \mathbf{c}, \\ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \Lambda \mathbf{c} &= Q \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Без учета запаздывающих нейтронов имеем

$$V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot D \nabla \mathbf{u} + A \mathbf{u} = F \mathbf{u}. \quad (6)$$

Для (5) и (6) рассматривается задача Коши, когда

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}^0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, u_2^0, \dots, u_G^0\}$  и  $\mathbf{c}^0 = \{c_1^0, c_2^0, \dots, c_M^0\}$ .

$\lambda$ -спектральная задача

Для характеристики динамических процессов в ядерном реакторе, которые описываются задачей Коши (5)-(7), применяются решения некоторых спектральных задач. Обычно рассматривается спектральная задача, которая известна как  $\lambda$ -спектральная задача. Для системы уравнений (6), (7) без учета запаздывающих нейтронов, имеем

$$-\nabla \cdot D \nabla \varphi + A \varphi = \lambda^{(k)} F \varphi. \quad (8)$$

Для характеристики нейтронного поля привлекается минимальное собственное значение, так что

$$k = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}$$

есть эффективный коэффициент размножения. Значение  $k = \lambda_1^{(k)} = 1$  связано с критическим состоянием реактора, а соответствующая собственная функция  $\varphi^{(1)}(\mathbf{x})$  есть стационарное решение уравнения (5), (6). При  $k > 1$  говорят о надкритическом состоянии реактора, при  $k < 1$  — о подкритическом состоянии.

В силу несамосопряженности операторов нейтронного переноса будем иметь комплексные собственные значения. Свойство действительности и положительности для системы уравнений нейтроники доказывается на основе принципа максимума при некоторых ограничениях на коэффициенты операторов переноса нейтронов [Habetler, Martino, 1961]. Это касается также и несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка [Evans, 1990].

## Дискретизация

### Аппроксимация по времени

Определим равномерную сетку по времени

$$\omega = \{t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau N = T\}$$

и будем использовать следующие обозначения  $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t^n)$ . При построении аппроксимаций по времени уравнений (2) используется численно-аналитический метод. Запишем уравнение (2) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial e^{\lambda_m t} c_m}{\partial t} = \beta_m e^{\lambda_m t} \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Интегрирование от  $t^n$  до  $t^{n+1}$  дает

$$c_m^{n+1} = e^{-\lambda_m \tau} c_m^n + \beta_m \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\lambda_m(t-t^{n+1})} \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g dt, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

Для аппроксимации по времени рассмотрим чисто неявную схемы первого порядка аппроксимации. При использовании чисто неявной схемы возьмем подынтегральное выражение в правой части (9) при  $t = t^{n+1}$ . Для системы уравнений (5) неявная схема будет выглядеть следующим образом

$$V \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} - \nabla \cdot D \nabla \mathbf{u}^{n+1} + A \mathbf{u}^{n+1} = (1 - \beta) F \mathbf{u}^{n+1} + B \mathbf{c}^{n+1}, \quad (10)$$

$$\mathbf{c}^{n+1} = \tilde{\Lambda} \mathbf{c}^n + \tau Q \mathbf{u}^{n+1},$$

где

$$\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_{mm'}), \quad \tilde{\lambda}_{mm'} = \delta_{mm'} e^{-\lambda_m \tau}, \quad m, m' = 1, 2, \dots, M.$$

При рассмотрении процессов без учета запаздывающих нейтронов (6)) имеем

$$V \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} - \nabla \cdot D \nabla \mathbf{u}^{n+1} + A \mathbf{u}^{n+1} = F \mathbf{u}^{n+1}. \quad (11)$$

Аппроксимация по пространству

Для аппроксимации по пространству будем использовать метод конечных элементов [Quarteroni, Valli, 2008]. Рассмотрим, например, аппроксимацию по пространству для чисто неявной схемы с учетом запаздывающих нейтронов (10). Пусть  $H^1(\Omega)$  — пространство Соболева, состоящее из скалярных функций  $v$  таких, что  $v^2$  и  $|\nabla v|^2$  имеют конечный интеграл в  $\Omega$ . Для векторных функций  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  определим аналогично  $V^d = [H^1(\Omega)]^d$ , где  $d = 1, 2, \dots, D$  ( $D = G + M$ ). Для тестовых функций используем обозначения  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_G\}$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M\}$ . В вариационной форме задача (10) имеет вид: найти  $\mathbf{u} \in V^G$ ,  $\mathbf{c} \in V^M$ , для которых имеет место

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( V \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + A \mathbf{u}^{n+1} \right) \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \cdot D \nabla \mathbf{u}^{n+1} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \\ = \int_{\Omega} (1 - \beta) F \mathbf{u}^{n+1} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} B \mathbf{c}^{n+1} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \quad (12) \\ \int_{\Omega} \mathbf{c}^{n+1} \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \tilde{\Lambda} \mathbf{c}^n \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tau Q \phi^{n+1} \boldsymbol{\zeta} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

при всех  $\boldsymbol{\xi} \in V^D$ ,  $\boldsymbol{\zeta} \in V^M$ . Заменяем вторые производные с помощью интегрирования по частям и используем формулу Гаусса-Остроградского для перехода к поверхностному интегралу.

Далее, необходимо перейти от непрерывной вариационной задачи (12) к дискретной задаче. Вводим конечномерные пространства конечных элементов  $V_h^D \subset V^D$  и определяем в них дискретную вариационную задачу.

## Численные примеры

Проводится численное моделирование нестационарного двухгруппового теста реактора TWIGL-2D. Исследуются и сравниваются численные результаты полученные транспортным  $SP_3$  и диффузионными расчетами. В качестве начального условия задачи берется решения  $\lambda$ -спектральной задачи. Рассматривается три сценария динамического процесса.

Программное обеспечение написано с использованием вычислительной платформы FEniCS. Для решения спектральных задач с несимметричными матрицами применяется библиотека SLEPc. В расчетах варьируются следующие параметры:

- $n$  — число расчетных ячеек (конечных элементов) на ноду  $8 \times 8$  см;
- $p$  — порядок конечных элементов;
- $\tau$  — шаг по времени.

Для диффузионной модели на внешней границе активной зоны рассматривается два вида условий границы с вакуумом: альбедный параметр  $\gamma = 0.5$  и  $\gamma = 100$ .

Описание теста

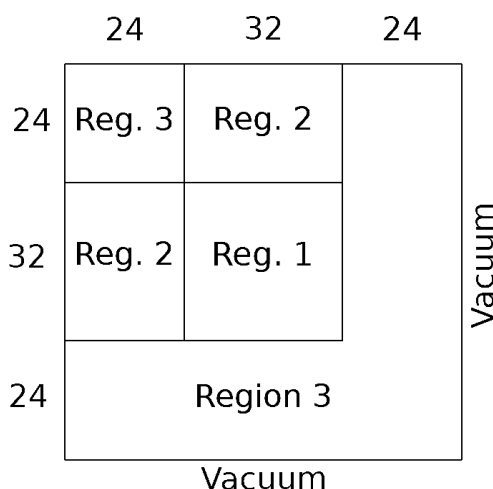


Рис. 1. Геометрическая модель 1/4 активной зоны теста TWIGL-2D.

Рассматривается двумерный транспортный тест [Hageman, Yasinsky, 1969]. Моделируется 1/4 часть активной зоны реактора, размеры которой составляют  $160 \times 160$  см. На рисунке 1 показана геометрическая модель активной зоны, где цифрами показаны материалы различных сортов. На внешней границе активной зоны реактора задается условие границы с вакуумом.

Нейтронно-физические константы теста в общепринятых единицах представлены в таблице 1. Среднегрупповые скорости нейтронов в тесте одинаковы для всей среды и составляют  $v_1 = 10^7$  см/с и  $v_2 = 2 \cdot 10^5$  см/с. Спектр деления для мгновенных и запаздывающих нейтронов также одинаков для всей среды и равен  $\chi_1 = 1$  и  $\chi_2 = 0$ . В тесте представлена одна эффективная группа запаздывающих нейтронов. Эффективная доля запаздывающих нейтронов составляет  $\beta = 0.0075$ , а постоянная распада предшественников запаздывающих нейтронов  $\lambda = 0.08$  с $^{-1}$ .

Сценарий динамического процесса выглядит следующий образом:



Таблица 1. Диффузионные константы для теста TWIGL-2D.

Материал	1	2	3
$\Sigma_{t,1}$	0.2481	0.2481	0.2644
$\Sigma_{t,2}$	0.9833	0.9833	0.7167
$\Sigma_{a,1}$	0.01	0.01	0.008
$\Sigma_{a,2}$	0.15	0.15	0.05
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	0.01	0.01	0.01
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 1}$	0.2281	0.2281	0.2464
$\Sigma_{s,2 \rightarrow 2}$	0.8333	0.8333	0.6667
$\nu_1 \Sigma_{f,1}$	0.007	0.007	0.003
$\nu_2 \Sigma_{f,2}$	0.2	0.2	0.06

- В начале решается  $\lambda$ -спектральная задача, решение которой принимается в качестве начального условия нестационарной задачи;
- Расчет нестационарной задачи происходит в течении 0.5 секунд;
- В каждый момент времени рассчитывается интегральная мощность

$$P(t) = a \int_{\Omega} (\Sigma_{f,1} \phi_1 + \Sigma_{f,2} \phi_1) d\mathbf{x}, \quad (13)$$

где  $a$  — нормировочный коэффициент, соответствующий заданному значению интегральной мощности.

Все возмущения происходят в зоне 1 посредством изменения теплового сечения деления  $\Sigma_{a2}$ . В задаче представлены три сценария развития переходного процесса:

- Возмущение скачком TWIGL-S: инициируется уменьшением  $\Sigma_{a2}$  на  $0.0035 \text{ см}^{-1}$  в нулевой момент времени;
- Линейное возмущение TWIGL-R:  $\Sigma_{a2}$  линейно уменьшается на  $0.0035 \text{ см}^{-1}$  с момента времени 0 секунд до 0.2 секунд;
- Комбинированное возмущение TWIGL-C происходит следующим образом:  $\Sigma_{a2}$  линейно уменьшается на  $0.0035 \text{ см}^{-1}$  в течении 0.2 секунд; в момент времени 0.2 секунд происходит скачкообразное увеличение на  $0.00525 \text{ см}^{-1}$ ; линейно увеличивается на  $0.00175 \text{ см}^{-1}$  с момента времени 0.2 секунд до 0.4 секунд; скачкообразное уменьшение на  $0.0035 \text{ см}^{-1}$  в момент времени 0.4 секунд.

В комбинированном случае представлены другие параметры для запаздывающих нейтронов:  $v_1 = 10^7 \text{ см/с}$  и  $v_2 = 10^5 \text{ см/с}$ ; эффективная доля запаздывающих нейтронов составляет  $\beta = 0.0064$ ; постоянная распада предшественников запаздывающих нейтронов  $\lambda = 0.08 \text{ с}^{-1}$ .

#### Решение $\lambda$ -спектральной задачи

В качестве эталонного решения для  $\lambda$ -спектральной задачи выступает результат полученный методом Монте-Карло по коду DeCART равный 0.91605 ([Joo et al, 2004]). Полученные результаты расчета  $\lambda$ -спектральной задачи для теста TWIGL-2D приведены в таблице 2. В таблице приняты следующие обозначения:  $k_{dif}(\gamma)$  — эффективный коэффициент размножения по диффузионной модели для различных значений параметра альбеда;  $k_{sp3}$  —

Таблица 2. Результаты расчета  $\lambda$ -спектральной задачи.

$n$	$p$	$k_{dif}(\gamma = 0.5)$	$\Delta_{dif}(\gamma = 0.5)$	$k_{dif}(\gamma = 100)$	$\Delta_{dif}(\gamma = 100)$	$k_{sp3}$	$\Delta_{sp3}$
2	1	0.915519	-53.1	0.913286	-276.4	0.916144	9.4
	2	0.915519	-53.1	0.913333	-271.7	0.916190	14.0
	3	0.915419	-63.1	0.913234	-281.6	0.916094	4.4
8	1	0.915486	-56.4	0.913288	-276.2	0.916147	9.7
	2	0.915423	-62.7	0.913238	-281.2	0.916096	4.6
	3	0.915408	-64.2	0.913223	-282.7	0.916076	2.6
32	1	0.915434	-61.6	0.913245	-280.5	0.916102	5.2
	2	0.915409	-64.1	0.913223	-282.7	0.916076	2.6
	3	0.915408	-64.2	0.913222	-282.8	0.916073	2.3
ref.		0.916050	—	0.916050	—	0.916050	—

эффективный коэффициент размножения по транспортной  $SP_3$  модели;  $\Delta$  — абсолютное отклонение от эталонного решения в  $\text{pcm}$  ( $10^{-5}$ ).

Представленные данные демонстрируют сходимость приближенно вычисляемых собственных значений при сгущении вычислительной сетки  $n$  и при увеличении степени полиномов конечных элементов  $p$ . На рисунках 2, 3 показаны расчеты нормированных мощностей (13) по нодам  $8 \times 8$  см для всех трех случаев на мелкой сетке  $n = 32$  и  $p = 3$ . Как и ожидалось, точность результатов полученных транспортным  $SP_3$  методом по сравнению с диффузионным является более точным.

1.2211	1.2558	1.2084	2.3122	2.1287	1.9349	1.6823	0.6592	0.455	0.1888
1.2558	1.2835	1.224	2.3201	2.1154	1.911	1.6551	0.647	0.4461	0.185
1.2084	1.224	1.1651	2.2958	2.079	1.8562	1.5963	0.6215	0.4275	0.177
2.3122	2.3201	2.2958	2.1381	1.9973	1.7574	1.4984	0.5804	0.3982	0.1647
2.1287	2.1154	2.079	1.9973	1.8431	1.6004	1.3536	0.522	0.3574	0.1476
1.9349	1.911	1.8562	1.7574	1.6004	1.3768	1.1581	0.4458	0.3052	0.1261
1.6823	1.6551	1.5963	1.4984	1.3536	1.1581	0.9677	0.3587	0.2439	0.101
0.6592	0.647	0.6215	0.5804	0.522	0.4458	0.3587	0.2785	0.178	0.0739
0.455	0.4461	0.4275	0.3982	0.3574	0.3052	0.2439	0.178	0.1119	0.0467
0.1888	0.185	0.177	0.1647	0.1476	0.1261	0.101	0.0739	0.0467	0.0196

1.2592	1.2939	1.2433	2.3738	2.1771	1.9672	1.6909	0.6469	0.4221	0.1388
1.2939	1.3215	1.2585	2.3803	2.1622	1.9417	1.6626	0.6346	0.4136	0.1359
1.2433	1.2585	1.1964	2.3522	2.1221	1.8835	1.6015	0.6088	0.3959	0.1299
2.3738	2.3803	2.3522	2.1854	2.0341	1.7793	1.4999	0.5673	0.368	0.1206
2.1771	2.1622	2.1221	2.0341	1.8701	1.6143	1.3499	0.5083	0.329	0.1077
1.9672	1.9417	1.8835	1.7793	1.6143	1.3804	1.1477	0.4313	0.279	0.0914
1.6909	1.6626	1.6015	1.4999	1.3499	1.1477	0.9476	0.3429	0.2201	0.0722
0.6469	0.6346	0.6088	0.5673	0.5083	0.4313	0.3429	0.26	0.1565	0.0514
0.4221	0.4136	0.3959	0.368	0.329	0.279	0.2201	0.1565	0.0925	0.0305
0.1388	0.1359	0.1299	0.1206	0.1077	0.0914	0.0722	0.0514	0.0305	0.0101

Рис. 2. Нормированная мощность диффузионных расчетов при  $\gamma = 0.5$  (справа) и  $\gamma = 100$  (слева) на мелкой сетке.

## Решение нестационарной задачи

Здесь показаны результаты решений нестационарной задачи для всех трех сценариев. Проводится сравнение результатов диффузионного и транспортного расчетов. Представлены исследования различных шагов по времени для всех трех сценариев. В качестве тестовой сетки по пространству выбран средний вариант вычислительной сетки при  $n = 8$ ,  $p =$

1.2091	1.2427	1.2016	2.3113	2.1343	1.9404	1.6839	0.6576	0.4524	0.1883
1.2427	1.2696	1.2168	2.3188	2.121	1.9165	1.6568	0.6455	0.4436	0.1845
1.2016	1.2168	1.1632	2.295	2.0846	1.8617	1.5981	0.6201	0.4251	0.1766
2.3113	2.3188	2.295	2.1438	2.0026	1.7629	1.5002	0.5792	0.396	0.1643
2.1343	2.121	2.0846	2.0026	1.8482	1.6058	1.3556	0.521	0.3555	0.1473
1.9404	1.9165	1.8617	1.7629	1.6058	1.3821	1.1604	0.4452	0.3037	0.1259
1.6839	1.6568	1.5981	1.5002	1.3556	1.1604	0.9678	0.3584	0.2429	0.1009
0.6576	0.6455	0.6201	0.5792	0.521	0.4452	0.3584	0.2775	0.1776	0.074
0.4524	0.4436	0.4251	0.396	0.3555	0.3037	0.2429	0.1776	0.112	0.0469
0.1883	0.1845	0.1766	0.1643	0.1473	0.1259	0.1009	0.074	0.0469	0.0198

Рис. 3. Нормированная мощность транспортного  $SP_3$  расчета на мелкой сетке.

= 2. Эталонным диффузионным/транспортным решением выступает результат полученный по диффузионной/транспортной модели на мелкой сетке (при  $n = 32$ ,  $p = 3$ ,  $\tau = 1$  мс). Погрешность оценивается как  $\varepsilon_P(t) = |P_{ref} - P|$ , где  $P_{ref}$  — эталонное диффузионное/транспортное решение.

### Сценарий №1

В таблице 3 представлены результаты эталонных диффузионных и транспортного расчетов TWIGL-S в различные моменты времени. На рисунке 4 показаны эталонное транспортное решение TWIGL-S и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных эталонных решений относительно транспортного эталонного решения.

На рисунке 5 представлена погрешность диффузионных расчетов на тестовой сетке при различных шагах по времени, а на рисунке 6 — для транспортного расчета. Полученные результаты демонстрируют сходимость решения при уменьшении шага по времени.

Таблица 3. Результаты расчетов TWIGL-S на мелкой сетке в различные моменты времени.

$t$	dif ( $\gamma = 0.5$ )	dif ( $\gamma = 100$ )	$SP_3$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	2.0783	2.0613	2.0898
0.2	2.0961	2.0786	2.1079
0.3	2.1139	2.0959	2.1260
0.4	2.1319	2.1135	2.1442
0.5	2.1500	2.1311	2.1626
calc. time	1880	1880	6000

### Сценарий №2

В таблице 4 представлены результаты эталонных диффузионных и транспортного расчетов TWIGL-R в различные моменты времени. На рисунке 7 показаны эталонное транс-

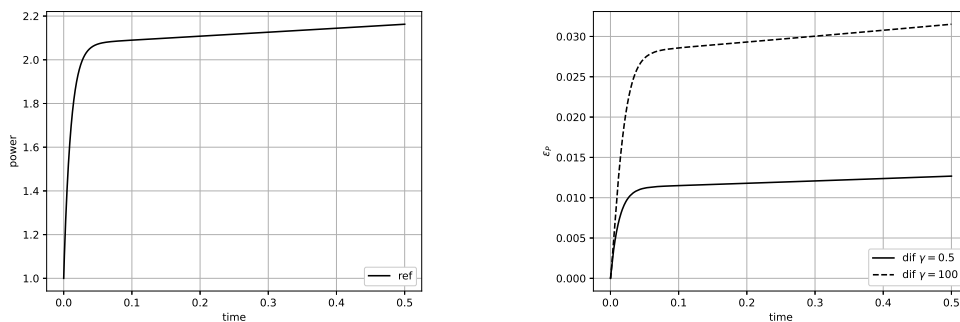


Рис. 4. Эталонное решение TWIGL-S (слева) и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных расчетов на мелкой сетке (справа).

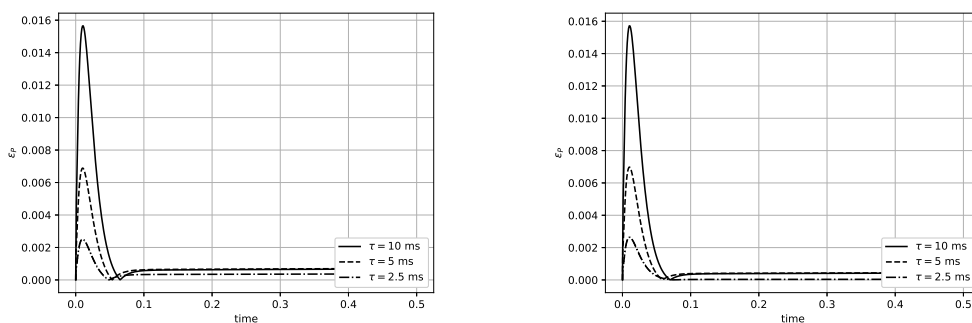


Рис. 5. Погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионного расчета для тестовой сетки при  $\gamma = 0.5$  (справа) и  $\gamma = 100$  (слева) для TWIGL-S.

портное решение TWIGL-S и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных эталонных решений относительно транспортного эталонного решения.

На рисунке 8 представлена погрешность диффузионных расчетов на тестовой сетке при различных шагах по времени, а на рисунке 9 — для транспортного расчета. Полученные результаты демонстрируют сходимость решения при уменьшении шага по времени.

Таблица 4. Результаты расчетов TWIGL-R на мелкой сетке в различные моменты времени.

$t$	Dif ( $\gamma = 0.5$ )	Dif ( $\gamma = 100$ )	SP <sub>3</sub>
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.3112	1.3083	1.3134
0.2	1.9729	1.9595	1.9826
0.3	2.0921	2.0747	2.1038
0.4	2.1099	2.0921	2.1219
0.5	2.1278	2.1096	2.1401
calc. time	1880	1880	6000

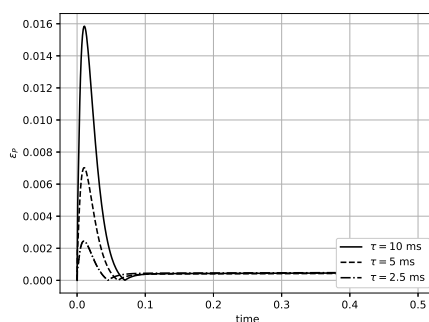


Рис. 6. Погрешность  $\varepsilon_P$  транспортного расчета для тестовой сетки для TWIGL-S.

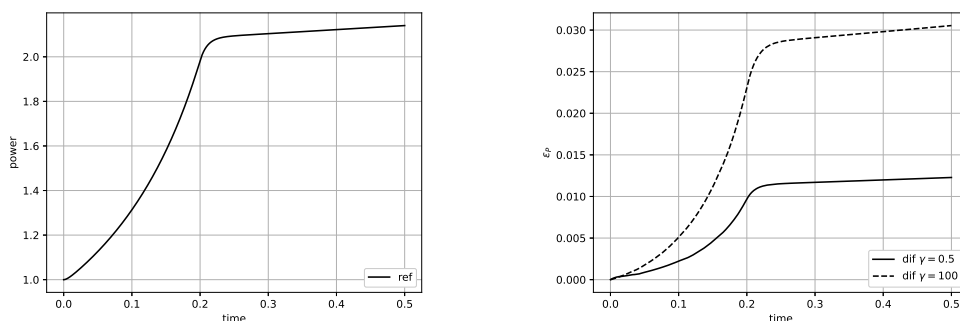


Рис. 7. Эталонное решение TWIGL-R (слева) и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных расчетов на мелкой сетке (справа)

### Сценарий №3

В таблице 5 представлены результаты эталонных диффузионных и транспортного расчетов TWIGL-C в различные моменты времени. На рисунке 10 показаны эталонное транспортное решение TWIGL-C и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных эталонных решений относительно транспортного эталонного решения.

На рисунке 11 представлена погрешность диффузионных расчетов на тестовой сетке при различных шагах по времени, а на рисунке 12 — для транспортного расчета. Полученные результаты демонстрируют сходимость решения при уменьшении шага по времени.

### Заключение

Рассмотрено численное моделирование уравнения переноса нейтронов в  $SP_3$  приближении. В качестве численного примера рассмотрен двумерный тест реактора TWIGL в трех сценариях динамического процесса. Проведено сравнение результатов диффузионного и транспортного  $SP_3$  расчетов. Представлены результаты исследования различных шагов по времени.

Вычислительный алгоритм приближенного решения базируется на стандартной конечно-элементной аппроксимации по пространству при использовании лагранжевых конечных элементов. Контроль точности решения проводился на последовательности сгуща-

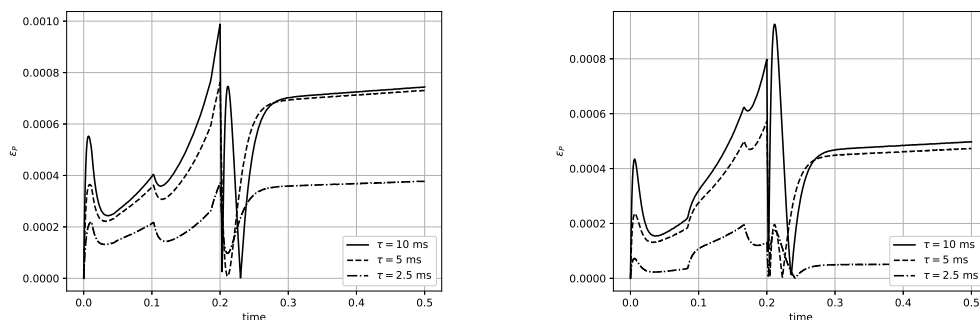


Рис. 8. Погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионного расчета для тестовой сетки при  $\gamma = 0.5$  (справа) и  $\gamma = 100$  (слева) для TWIGL-R.

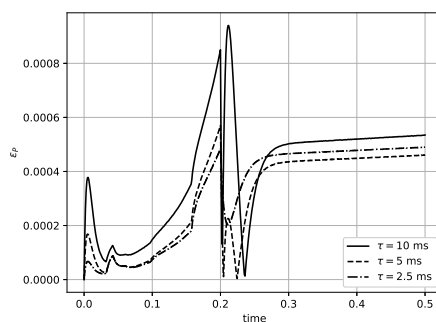


Рис. 9. Погрешность  $\varepsilon_P$  транспортного расчета для тестовой сетки для TWIGL-S.

ющихся сеток с использованием конечных элементов различной степени. Матричная спектральная задача решалась с применением свободной библиотеки SLEPc.

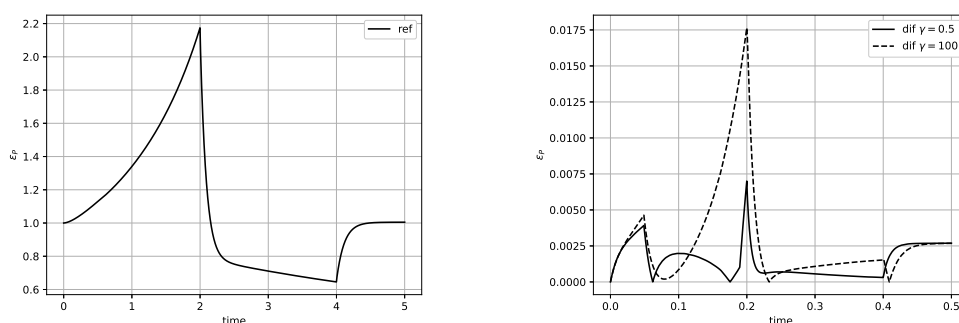
Как и ожидалось, точность стационарных и нестационарных  $SP_3$  расчетов лучше чем у диффузионных расчетов. С другой стороны, время вычислений для нестационарных  $SP_3$  расчетов в среднем в 1.3 раза больше чем у диффузионных на грубой сетке ( $n = 2$ ,  $p = 1$ ), в 2.2 раза на средней сетке ( $n = 8$ ,  $p = 2$ ) и в 3.2 раза на мелкой сетке ( $n = 32$ ,  $p = 3$ ).

## Список литературы (References)

- Аввакумов А. В., Вабищевич П. Н., Васильев А. О., Стрижов В. Ф., Численное моделирование нестационарных задач диффузии нейтронов // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 7. — С. 44–62.
- Avvakumov A. V., Strizhov V. F., Vabishchevich P. N., Vasilev A. O. Numerical modeling of neutron diffusion non-stationary problems // Matematicheskoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 7. — P. 44–62.
- Avvakumov A. V., Strizhov V. F., Vabishchevich P. N., Vasilev A. O. Spectral properties of dynamic processes in a nuclear reactor // Annals of Nuclear Energy. — 2017. — Vol. 99. — P. 68–79.
- Avvakumov A. V., Strizhov V. F., Vabishchevich P. N., Vasilev A. O. State change modal method for numerical simulation of dynamic processes in a nuclear reactor // Progress in Nuclear Energy. — 2018. — Vol. 106. — P. 240–261.

Таблица 5. Результаты расчетов TWIGL-C на мелкой сетке в различные моменты времени.

$t$	Dif ( $\gamma = 0.5$ )	Dif ( $\gamma = 100$ )	SP <sub>3</sub>
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.3422	1.3393	1.3402
0.2	2.1686	2.1580	2.1757
0.3	0.7103	0.7119	0.7109
0.4	0.6452	0.6470	0.6455
0.5	1.0024	1.0024	1.0051
calc. time	1900	1900	6050

Рис. 10. Эталонное решение TWIGL-C (слева) и погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионных расчетов на мелкой сетке (справа)

- Azmy Y, Sartori E. Nuclear Computational Science: A Century in Review — Springer Science & Business Media, 2010. — 470 p.
- Beckert C., Grundmann U. Development and verification of a nodal approach for solving the multigroup SP3 equations // Annals of Nuclear Energy. — 2008. — Vol. 35, No. 1. — P. 75–86.
- Bell G. I., Glasstone S. Nuclear reactor theory — US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), 1970.
- Brewster W. J. Development and Monte Carlo validation of a finite element reactor analysis framework — Missouri University of Science and Technology, 2018.
- Brantley P. S., Larsen E. W. The simplified P3 approximation // Nuclear science and engineering. — 2000. — Vol. 134, No. 1. — P. 1–21.
- Carreno A., Vidal-Ferrandiz A., Verdu G., Ginestar D. The eigenvalue problem Alpha, lambda and gamma modes and its applications // Proceedings of 2017 international congress on advances in nuclear power plants (ICAPP2017). — P. 2573.
- Joo H. G., Cho J. Y., Kim K. S., Lee C. C., Zee S. Q. Methods and performance of a three-dimensional whole-core transport code DeCART — In: Physor, 2004.
- Downar T., Xu Y., Seker V., Hudson N. Theory manual for the PARCS kinetics core simulator module — Department of Nuclear Engineering and Radiological Sciences University of Michigan, 2009.
- Evans L. C. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations — American Mathematical Soc., 1990. — No. 74.

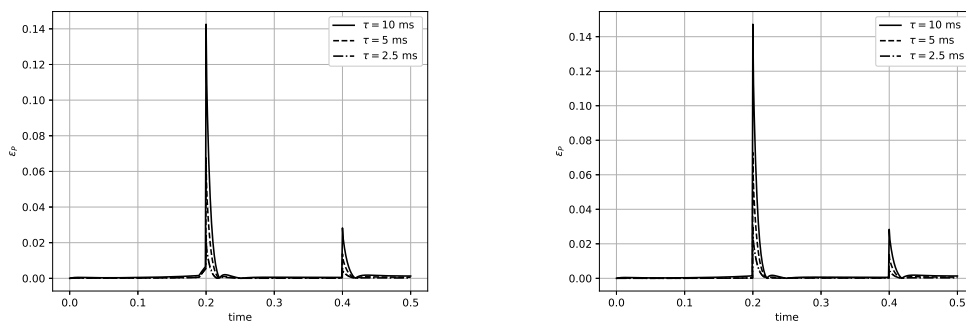


Рис. 11. Погрешность  $\varepsilon_P$  диффузионного расчета для тестовой сетки при  $\gamma = 0.5$  (справа) и  $\gamma = 100$  (слева) для TWIGL-C.

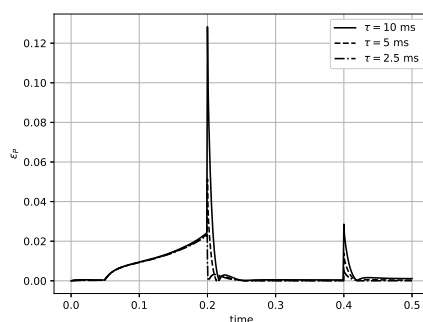


Рис. 12. Погрешность  $\varepsilon_P$  транспортного расчета для тестовой сетки для TWIGL-C.

- Gelbard E. M. Simplified spherical harmonics equations and their use in shielding problems — Westinghouse Electric Corp. Bettis Atomic Power Lab., 1961.
- Habetler G. J., Martino M. A. Existence theorems and spectral theory for the multigroup diffusion model — Proc. of the Eleventh Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, 1961. — Vol. 11.
- Hageman L. A., Yasinsky J. B. Comparison of alternating-direction time-differencing methods with other implicit methods for the solution of the neutron group-diffusion equations // Nuclear Science and Engineering. — 1969. — Vol. 38, No. 1. — P. 8–32.
- Lawrence R. D. Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations // Progress in Nuclear Energy. — 1986. — Vol. 17, No. 3. — P. 271–301.
- Lewis E. E., Miller W. F. Computational methods of neutron transport — John Wiley and Sons, 1984. — 401 p.
- Logg A., Mardal K. E., Wells G. Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 84. — 401 p.
- McClarren R. G. Theoretical aspects of the simplified Pn equations // Transport Theory and Statistical Physics. — 2010. — Vol. 39, No. 2–4. — P. 73–109.
- Quarteroni A., Valli A. Numerical approximation of partial differential equations — Weinheim: Springer Science & Business Media, 2008. — Vol. 23.
- Stacey W. B. Nuclear Reactor Physics — Weinheim: wiley-vch, 2007. — 735 p.



- Tada K., Yamamoto A., Yamane Y., Kitamuray Y. Applicability of the diffusion and simplified P3 theories for pin-by-pin geometry of BWR // Journal of nuclear science and technology. — 2008. — Vol. 45, No. 10. — P. 997–1008.
- Verdu G., Ginestar D., Roman J., Vidal V. 3D alpha modes of a nuclear power reactor // Journal of nuclear science and technology. — 2010. — Vol. 47, No. 5. — P. 501–514.