



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

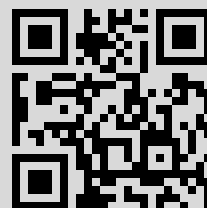
А. В. Аввакумов, П. Н. Вабищевич, А. О. Васильев, В. Ф. Стрижов, Численное моделирование нестационарных задач диффузии нейтронов, *Матем. моделирование*, 2017, том 29, номер 7, 44–62

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 104.238.63.68

22 ноября 2019 г., 06:52:22



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

© 2017 г. *А.В. Аввакумов<sup>1</sup>, П.Н. Вабищевич<sup>2</sup>, А.О. Васильев<sup>3</sup>, В.Ф. Стрижов<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва

<sup>2</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва

<sup>3</sup>Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск

avvakumov2009@rambler.ru, vabishchevich@gmail.com, vfs@ibrae.ac.ru  
haska87@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-01215).

Моделирование динамических процессов в ядерных реакторах проводится чаще всего на основе описания нейтронного потока в многогрупповом диффузионном приближении. Базовая модель включает многомерную систему связанных уравнений параболического типа. По аналогии с обычными тепловыми процессами можно выделить регулярный режим работы ядерного реактора, который связан с самоподобным развитием нейтронного поля при больших временах. Основной характеристикой динамических процессов выступает главное собственное значение соответствующей спектральной задачи. Для приближенного решения нестационарных задач используется чисто неявная схема первого порядка аппроксимации и симметричная схема второго порядка. Отдельно выделена явно-неявная схема, которая максимально упрощает переход на новый шаг по времени. Аппроксимация по пространству базируется на использовании стандартных конечных элементов с полиномами различного порядка. Проведено численное моделирование регулярного режима в рамках двухгруппового приближения численного теста для реактора на тепловых нейтронах ВВЭР-1000.

Ключевые слова: уравнение диффузии нейтронов, многогрупповое приближение, спектральная задача, регулярный режим, неявная схема, явно-неявная схема.

## NUMERICAL MODELING OF NEUTRON DIFFUSION NON-STATIONARY PROBLEMS

*A.V. Avvakumov<sup>1</sup>, P.N. Vabishchevich<sup>2</sup>, A.O. Vasilev<sup>3</sup>, V.F. Strizhov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow

<sup>2</sup>Nuclear Safety Institute Russian Academy of Science, Moscow

<sup>3</sup>North-Eastern Federal University, Yakutsk

As a rule, mathematical modeling of transient processes in nuclear reactors is considered in the multigroup diffusion approximation. In this approach, the basic model involves a multidimensional system of coupled equations of the parabolic type. Similarly to common thermal phenomena, it is possible here to separate a regular mode of nuclear reactor operation that is associated with a selfsimilar behaviour of a neutron flux at large times. In this case, the main feature of dynamic processes is a fundamental eigenvalue of the corresponding spectral

problem. To solve approximately time-dependent problems, we employ the fully implicit scheme of the first-order approximation and symmetric second-order scheme. Separately, we investigate the explicit-implicit scheme that greatly simplifies the transition to a new time level. An approximation in space is constructed using standard finite elements with polynomials of various degree. Numerical simulation of the regular mode was performed for the reactor VVER-1000 test problem in the two-group approximation.

Key words: neutron flux equation, multigroup diffusion approximation, spectral problem, regular mode, implicit scheme, explicit-implicit scheme.

## 1. Введение

Физические процессы, происходящие в ядерном реакторе [1], зависят от распределения нейтронного потока, математическое описание которого основывается на уравнении переноса нейтронов [2,3]. В общем виде это уравнение имеет интегро-дифференциальную форму, а искомое распределение потока нейтронов зависит от времени, энергии, пространственных и угловых переменных. Для практических расчетов ядерных реакторов, как правило, используют упрощенные формы уравнения переноса нейтронов. Наибольшее распространение для анализа реакторов получило групповое диффузионное приближение [4-7], которое используется в большинстве инженерных расчетных кодов.

Обычно в инженерных диффузионных кодах используются конечно-разностные аппроксимации по пространству. Решением уравнения диффузии нейтронов является распределение плотности потока нейтронов по энергии и пространству, для расчета стационарного режима вводится эффективный коэффициент размножения. Нейтронно-физические расчетные параметры активной зоны являются, по сути, функционалами плотности нейтронного потока.

Для повышения точности расчета нейтронного потока широкое применение нашли нодальные методы (см., например, [8,9]), которые позволяют проводить расчеты на достаточно грубой сетке (несколько точек на тепловыделяющую сборку в плане и два-три десятка слоев по высоте). В основе нодальных методов лежит представление нейтронного потока в пределах расчетного элемента в виде полинома малой степени или набора функций по одной из координат (или на плоскости). Нодальные методы в ряде случаев можно связать со специальными вариантами конечно-элементной аппроксимации [10]. Следует отметить, что более уместно использование стандартных процедур повышения точности конечно-элементного приближения при численном решении краевых задач, связанное со сгущением расчетной сетки и использованием конечных элементов более высокой степени [11,12].

При рассмотрении нестационарных задач после дискретизации уравнений для плотности нейтронного потока формируется система линейных алгебраических уравнений, которая решается с использованием итерационных методов [13,14]. Во многих нейтронно-физических кодах используются морально устаревшие итерационные методы, которые плохо приспособлены для современных вычислительных систем параллельной архитектуры. Для получения приемлемой точности решения краевой задачи для системы уравнений диффузии необходимо использовать достаточно подробную расчетную сетку (несколько десятков точек на тепловыделяющую сборку в горизонтальной плоскости и столько же слоев по высоте), что заметно увеличивает время счета.

При моделировании динамики нейтронно-физических процессов используются стандартные методы приближенного решения нестационарных задач [3,6,7]. Среди них – двухслойные схемы с весами ( $\theta$ -метод) [15-17], схемы Рунге-Кутты, схемы Розенброка [18,19]. Отметим также методы пространственно-временной факторизации и квазистатический метод [20-23], в которых приближенное решение ищется в виде произведения двух функций: одна из которых зависит от времени и связывается с амплитудой, а вторая описывает пространственное распределение.

Для характеристики динамической природы реактора используется спектральный параметр  $\alpha$ . Он определяется как главное собственное значение ( $\alpha$ -eigenvalue) спектральной задачи, которая связывается с нестационарными уравнениями диффузии нейтронов [24-26]. По аналогии с обычными задачами теплопроводности (см., например, [27,28]) мы можем выделить регулярный режим реактора. При больших временах поведение нейтронного поля носит асимптотический характер, когда можно говорить о пространственно-временной факторизации решения, амплитуда которого есть  $\exp(\alpha t)$ , а форм-функция – собственная функция спектральной задачи.

В проведенном исследовании выход на регулярный режим нейтронного потока исследуется для тестовой задачи, моделирующей реактор на тепловых нейтронах ВВЭР-1000 в двухгрупповом приближении. Используются две стандартные схемы: чисто неявная схема и симметричная схема (схема Кранка-Николсон). Выделена также явно-неявная схема, в которой используется явная аппроксимация для слагаемых, связанных с генерацией нейтронов. В этом случае вычислительная реализация является наиболее простой: на каждом слое по времени решаются отдельные задачи для каждой группы нейтронов. Регулярный режим контролируется с помощью оценки близости решения нестационарной задачи и главной собственной функции, которая определяется численно из решения спектральной задачи. Отдельно рассматривается динамика процессов с учетом и без учета запаздывающих нейтронов.

## 2. Постановка задачи

Моделируется нестационарный перенос нейтронов в ядерном реакторе в групповом диффузионном приближении. Задача решается в ограниченной двумерной или трехмерной области  $\Omega$  ( $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\} \in \Omega$ ,  $d = 2, 3$ ) с выпуклой границей  $\partial\Omega$ . Перенос нейтронов описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg} \phi_g - \sum_{g' \neq g=1}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \\ = (1-\beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + \tilde{\chi}_g \sum_{m=1}^M \lambda_m c_m, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\phi_g(\mathbf{x}, t)$  – поток нейтронов группы  $g$  в точке  $\mathbf{x}$  на момент времени  $t$ ,  $G$  – число групп,  $c_m(\mathbf{x}, t)$  – плотность источников запаздывающих нейтронов  $m$  типа,  $M$  – число типов запаздывающих нейтронов,  $\nabla$  – оператор градиента. Групповые коэффициенты уравнения (1) зависят от  $\mathbf{x}$  и  $t$ :  $v_g$  – эффективная скорость,  $D_g$  – коэффициент диффузии,

$\Sigma_{rg}$  – сечение увода,  $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$  – сечение рассеяния нейтронов из группы  $g'$  в группу  $g$ ,  $v\Sigma_{fg}$  – сечение генерации,  $\chi_g, \tilde{\chi}_g$  – спектры мгновенных и запаздывающих нейтронов. Параметры запаздывающих нейтронов также зависят от  $x$  и  $t$ :  $\beta$  – эффективная доля запаздывающих нейтронов,  $\lambda_m$  – постоянная распада источников запаздывающих нейтронов  $m$  типа.

Плотность источников запаздывающих нейтронов описывается уравнениями

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \lambda_m c_m = \beta_m \sum_{g=1}^G v\Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где  $\beta_m(x, t)$  – доля запаздывающих нейтронов  $m$  типа, причем  $\beta = \sum_{m=1}^M \beta_m$ .

На границе области  $\partial\Omega$  ставятся условия альбедного типа:

$$D_g \frac{\partial \phi_g}{\partial n} + \gamma_g \phi_g = 0, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (3)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$ ,  $\gamma_g$  – групповой альбедный параметр. Рассматривается задача для системы уравнений (1), (2) с краевыми условиями (3) и начальными условиями

$$\phi_g(x, 0) = \phi_g^0(x), \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad c_m(x, 0) = c_m^0(x), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

Для задачи без учета запаздывающих нейтронов предположим, что пространственное распределение мгновенных и запаздывающих нейтронов идентично (различаются только спектры рождения). Тогда вместо (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg} \phi_g - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} = \\ = \left[ (1-\beta) \chi_g + \beta \tilde{\chi}_g \right] \sum_{g'=1}^G v\Sigma_{fg'} \phi_{g'}, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматривается задача для уравнения (5) с краевыми условиями (3) и начальными условиями (4) для  $\phi_g$ ,  $g = 1, 2, \dots, G$ .

Запишем краевую задачу (1)–(4) в операторной форме. Определим векторы  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G\}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$  и матрицы:

$$\begin{aligned} V = (v_{gg'}), \quad v_{gg'} &= \delta_{gg'} v_g^{-1}, & D &= (d_{gg'}), \quad d_{gg'} = -\delta_{gg'} \nabla \cdot D_g \nabla, \\ S &= (s_{gg'}), \quad s_{gg'} = \delta_{gg'} \Sigma_{rg} - \Sigma_{s,g' \rightarrow g}, & R &= (r_{gg'}), \quad r_{gg'} = (1-\beta) \chi_g v\Sigma_{fg'}, \\ B &= (b_{gm}), \quad b_{gm} = \tilde{\chi}_g \lambda_m, & \Lambda &= (\lambda_{mm'}), \quad \lambda_{mm'} = \lambda_m \delta_{mm'}, \\ Q &= (q_{mg}), \quad q_{mg} = \beta_m v\Sigma_{fg}, & & g, g' = 1, 2, \dots, G, \quad m, m' = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где  $\delta_{gg'}$  есть символ Кронекера. Будем работать на множестве векторов  $\phi$ , компоненты которого удовлетворяют граничным условиям (3). С учетом введенных обозначений система уравнений (1), (2) записывается в следующем виде:

$$V \frac{d\phi}{dt} + (D + S)\phi = R\phi + Bc, \quad \frac{dc}{dt} + \Lambda c = Q\phi. \quad (6)$$

Для уравнения (5) имеем

$$V \frac{d\phi}{dt} + (D + S)\phi = \tilde{R}\phi, \quad (7)$$

где

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_{gg'}), \quad \tilde{r}_{gg'} = [(1 - \beta)\chi_g + \beta\tilde{\chi}_g]v\Sigma_{fg'}, \quad g, g' = 1, 2, \dots, G.$$

Для (6) и (7) рассматривается задача Коши, когда

$$\phi(0) = \phi^0, \quad c(0) = c^0, \quad (8)$$

где  $\phi^0 = \{\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_G^0\}$  и  $c^0 = \{c_1^0, c_2^0, \dots, c_M^0\}$ .

Определим равномерную сетку по времени  $\omega = \{t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau N = T\}$  и используем обозначения:  $\phi^n = \phi(x, t^n)$ ,  $c^n = c(x, t^n)$ . При построении аппроксимаций по времени уравнений (2) используется численно-аналитический метод. Запишем уравнение (2) в эквивалентном виде

$$\frac{\partial e^{\lambda_m t} c_m}{\partial t} = \beta_m e^{\lambda_m t} \sum_{g=1}^G v\Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Интегрирование от  $t^n$  до  $t^{n+1}$  дает

$$c_m^{n+1} = e^{-\lambda_m \tau} c_m^n + \beta_m \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\lambda_m(t-t^{n+1})} \sum_{g=1}^G v\Sigma_{fg} \phi_g dt, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

Для аппроксимации по времени рассмотрим, как основные, две стандартные двухслойные схемы [29]: чисто неявную схему первого порядка аппроксимации и симметричную схему второго порядка (схему Кранка-Николсон). Операторные матрицы  $V$ ,  $D$  – диагональные, а  $S$  – нижняя треугольная. Существенное связывание уравнений обусловлено только оператором генерации нейтронов  $R$ . В силу этого, построение решения может проводиться на основе явно-неявных аппроксимаций, когда с нижнего слоя по времени берется слагаемое с оператором генерации нейтронов  $R$ .

Для численного решения можно строить различные классы устойчивых разностных схем. Актуальной является проблема выбора среди устойчивых разностных схем такой схемы, которая является оптимальной по тем или иным дополнительным критериям.

В теории разностных схем выделен класс асимптотически устойчивых разностных схем, которые [28,30] обеспечивают правильное поведение приближенного решения при больших временах. В теории численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [18,31] введено понятие  $L$ -устойчивых методов, в которых с несколько других позиций также отслеживается асимптотическое поведение приближенного решения при больших временах. Чисто неявная схема имеет лучшие асимптотические свойства, чем симметричная схема, что важно при исследовании регулярного режима ядерного реактора.

При использовании чисто неявной схемы мы возьмем подынтегральное выражение в правой части (9) при  $t = t^{n+1}$ . Для системы уравнений (6) неявная схема записывается в виде

$$V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} = R\phi^{n+1} + B\mathbf{c}^{n+1},$$

$$\mathbf{c}^{n+1} = \tilde{L}\mathbf{c}^n + \tau \tilde{Q}\phi^{n+1}, \quad (10)$$

где

$$\tilde{L} = (\tilde{\lambda}_{mm'}), \quad \tilde{\lambda}_{mm'} = \delta_{mm'} e^{-\lambda_m \tau}, \quad m, m' = 1, 2, \dots, M.$$

Для уравнения (7) (без учета запаздывающих нейтронов) имеем

$$V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} = \tilde{R}\phi^{n+1}. \quad (11)$$

При использовании явно-неявной аппроксимации по времени приближенное решение на новом слое по времени определяется из уравнений

$$V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} = R\phi^n + B\mathbf{c}^{n+1},$$

$$\mathbf{c}^{n+1} = \tilde{L}\mathbf{c}^n + \tau \tilde{Q}\phi^n, \quad (12)$$

где

$$\tilde{Q} = (\tilde{q}_{mg}), \quad \tilde{q}_{mg} = e^{-\lambda_m \tau} \beta_m \nu \Sigma_{fg}, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Для уравнения (7) имеем

$$V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} = \tilde{R}\phi^n. \quad (13)$$

Аналогично записывается симметричная схема. Например, для уравнения (7) схема Кранка-Николсон имеет вид

$$V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S) \frac{\phi^{n+1} + \phi^n}{2} = \tilde{R} \frac{\phi^{n+1} + \phi^n}{2}. \quad (14)$$

Для аппроксимации по пространству будем использовать метод конечных элементов [11,12]. Рассмотрим, например, аппроксимацию по пространству для чисто неявной схемы с учетом запаздывающих нейтронов (12). Пусть  $H^1(\Omega)$  – пространство Соболева, состоящее из скалярных функций  $v$  таких, что  $v^2$  и  $|\nabla v|^2$  имеют конечный интеграл в  $\Omega$ . Для векторных функций  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  определим аналогично  $V^d = [H^1(\Omega)]^d$ . Для тестовых функций используем обозначения  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_G\}$ ,  $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M\}$ . В вариационной форме задача (12) имеет вид: найти  $\phi \in V^D$ ,  $\mathbf{c} \in V^M$ , для которых имеет место

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + S \phi^{n+1} \right) \xi dx + \int_{\Omega} \sum_{g=1}^G D_G \nabla \phi_g^{n+1} \nabla \xi_g dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} \sum_{g=1}^G \gamma_g \phi_g^{n+1} \xi_g dx = \int_{\Omega} R \phi^{n+1} \xi dx + \int_{\Omega} B \mathbf{c}^{n+1} \xi dx, \\ & \int_{\Omega} \mathbf{c}^{n+1} \zeta dx = \int_{\Omega} \tilde{A} \mathbf{c}^n \zeta dx + \int_{\Omega} \tau Q \phi^{n+1} \zeta dx, \end{aligned} \quad (15)$$

при всех  $\xi \in V^D$ ,  $\zeta \in V^M$ .

Далее мы должны перейти от непрерывной вариационной задачи (15) к дискретной задаче. Введем конечномерные пространства конечных элементов  $V_h^D \subset V^D$ ,  $V_h^M \subset V^M$ . Дискретная вариационная задача формулируется следующим образом: найти  $\phi^{n+1} \in V_h^D$ ,  $\mathbf{c}^{n+1} \in V_h^M$  такие, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + S \phi^{n+1} \right) \xi_h dx + \int_{\Omega} \sum_{g=1}^G D_G \nabla \phi_g^{n+1} \nabla \xi_{g,h} dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} \sum_{g=1}^G \gamma_g \phi_g^{n+1} \xi_{g,h} dx = \int_{\Omega} R \phi^{n+1} \xi_h dx + \int_{\Omega} B \mathbf{c}^{n+1} \xi_h dx, \\ & \int_{\Omega} \mathbf{c}^{n+1} \zeta_h dx = \int_{\Omega} \tilde{A} \mathbf{c}^n \zeta_h dx + \int_{\Omega} \tau Q \phi^{n+1} \zeta_h dx \end{aligned} \quad (16)$$

для всех  $\xi_h \in V_h^D$ ,  $\zeta_h \in V_h^M$  ( $\xi_h = \{\xi_{1,h}, \xi_{2,h}, \dots, \xi_{G,h}\}$ ,  $\zeta_h = \{\zeta_{1,h}, \zeta_{2,h}, \dots, \zeta_{M,h}\}$ ). Скалярные функции (компоненты векторных функций) аппроксимируются на треугольной сетке с использованием лагранжевых конечных элементов с полиномами степени 1, 2 и 3 (см. рис.1).

Прикладное программное обеспечение написано с использованием библиотеки инженерных и научных вычислений FEniCS [32]. Для численного решения спектральных задач привлекается библиотека SLEPc [33].



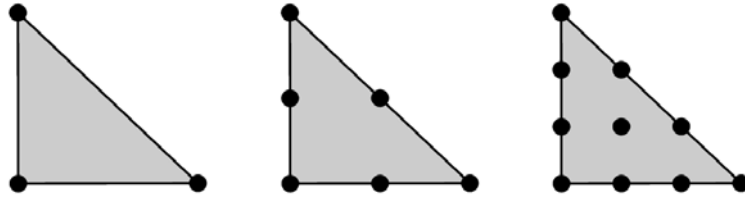


Рис.1. Конечные элементы 1-й, 2-й, 3-й степени соответственно.

### 3. Модельная задача

Рассматривается тестовая задача для реактора ВВЭР-1000 без отражателя [34] в двумерном приближении ( $\Omega$  – сечение активной зоны реактора). Геометрическая модель активной зоны ВВЭР-1000 состоит из набора кассет шестиугольной формы (размер «под ключ» 23.6 см) и представлена на рис.2, где цифрами показаны кассеты различных типов. Диффузионные двухгрупповые нейтронно-физические константы в общепринятых единицах приведены в табл.1. Скорости нейтронов:  $v_1 = 1.25 \cdot 10^7$  см/с и  $v_2 = 2.5 \cdot 10^5$  см/с. Спектры мгновенных и запаздывающих нейтронов:  $\chi_1 = \tilde{\chi}_1 = 1$ ,  $\chi_2 = \tilde{\chi}_2 = 0$ . Граничные условия (3):  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ . Используется одна группа запаздывающих нейтронов (эффективная доля  $\beta_1 = 6.5 \cdot 10^{-3}$ ; постоянная распада  $\lambda_1 = 0.08$  с $^{-1}$ ).

Таблица 1. Диффузионные константы для тестовой задачи.

Материал	1	2	3	4	5
$D_1$	1.38320e-0	1.38299e-0	1.39522e-0	1.39446e-0	1.39506e-0
$D_2$	3.86277e-1	3.89403e-1	3.86225e-1	3.87723e-1	3.84492e-1
$\Sigma_{r1}$	2.48836e-2	2.62865e-2	2.45662e-2	2.60117e-2	2.46141e-2
$\Sigma_{r2}$	6.73049e-2	8.10328e-2	8.44801e-1	9.89671e-2	8.93878e-2
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	1.64977e-2	1.47315e-2	1.56219e-2	1.40185e-2	1.54981e-2
$\nu \Sigma_{f1}$	4.81619e-3	4.66953e-3	6.04889e-3	5.91507e-3	6.40256e-3
$\nu \Sigma_{f2}$	8.46154e-2	8.52264e-2	1.19428e-1	1.20497e-1	1.29281e-1

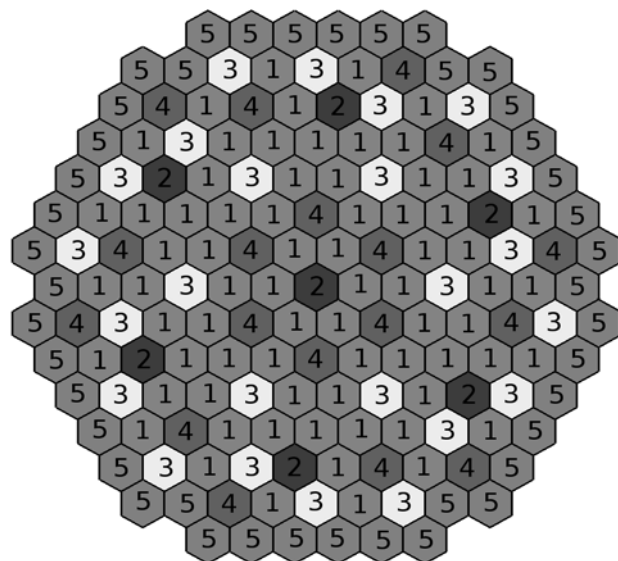
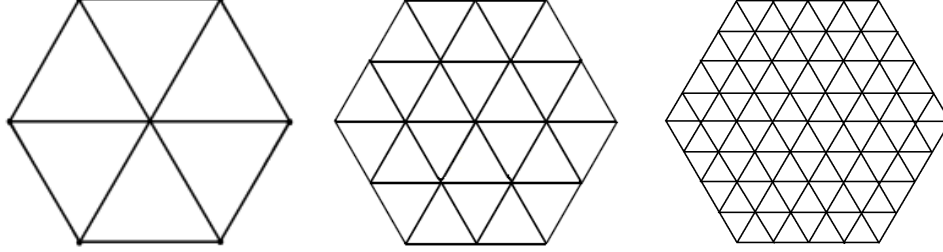


Рис.2. Геометрическая модель тестовой задачи.

Для приближенного решения задачи используются регулярные треугольные сетки. Число треугольных элементов на одну кассету варьируется от 6 до 96 (рис.3).



**Рис.3.** Разбиение кассеты на 6, 24 и 96 конечных элементов.

Сформулируем задачи без учета запаздывающих нейтронов. Для начального условия (8) рассматриваемых задач положим:  $\phi_1^0 = 1$ ,  $\phi_2^0 = 0.25$ . Для чисто неявной схемы (11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau v_1} \phi_1^{n+1} - \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^{n+1} + \Sigma_{r1} \phi_1^{n+1} - (v \Sigma_{f1} \phi_1^{n+1} + v \Sigma_{f2} \phi_2^{n+1}) &= \frac{1}{\tau v_1} \phi_1^n, \\ \frac{1}{\tau v_2} \phi_2^{n+1} - \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^{n+1} + \Sigma_{r2} \phi_2^{n+1} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1^{n+1} &= \frac{1}{\tau v_2} \phi_2^n. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае явно-неявной схемы (13) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau v_1} \phi_1^{n+1} - \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^{n+1} + \Sigma_{r1} \phi_1^{n+1} &= \frac{1}{\tau v_1} \phi_1^n + (v \Sigma_{f1} \phi_1^n + v \Sigma_{f2} \phi_2^n), \\ \frac{1}{\tau v_2} \phi_2^{n+1} - \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^{n+1} + \Sigma_{r2} \phi_2^{n+1} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1^{n+1} &= \frac{1}{\tau v_2} \phi_2^n. \end{aligned} \quad (18)$$

Для схемы Кранка-Николсон (14) получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau v_1} \phi_1^{n+1} - \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^{n+1} + \Sigma_{r1} \phi_1^{n+1} - (v \Sigma_{f1} \phi_1^{n+1} + v \Sigma_{f2} \phi_2^{n+1}) &= \\ = \frac{2}{\tau v_1} \phi_1^n + \nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1^n - \Sigma_{r1} \phi_1^n + (v \Sigma_{f1} \phi_1^n + v \Sigma_{f2} \phi_2^n), \\ \frac{2}{\tau v_2} \phi_2^{n+1} - \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^{n+1} + \Sigma_{r2} \phi_2^{n+1} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1^{n+1} &= \\ = \frac{2}{\tau v_2} \phi_2^n + \nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2^n - \Sigma_{r2} \phi_2^n + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1^n. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично формулируются задачи с учетом запаздывающих нейтронов для чисто неявной схемы, явно-неявной схемы и схемы Кранка-Николсон.

Для характеристики динамических процессов в ядерном реакторе, которые описываются задачей Коши (6)–(8), привлекаются решения некоторых спектральных задач [2,3,24]. Обычно рассматривается спектральная задача, которая связывается со стационарным состоянием ядерного реактора и формулируется в виде

$$(D + S)\varphi = \mu \tilde{R}\varphi. \quad (20)$$

Задача (20) известна как  $\lambda$ -спектральная задача. Для характеристики нейтронного поля привлекается минимальное собственное значение, так что  $k = 1/\mu^{(1)}$  есть эффективный коэффициент размножения. Значение  $k = 1$  связывается с критическим состоянием реактора, соответствующая собственная функция  $\varphi^{(1)}(x)$  есть стационарное решение уравнения (5). При  $k > 1$  говорят о надкритическом состоянии реактора, при  $k < 1$  – о подкритическом состоянии.

Спектральную задачу (20) нельзя напрямую связать с динамическими процессами в ядерном реакторе. В лучшем случае мы можем выделить только предельный случай – стационарное критическое состояние. Более приемлемая спектральная характеристика для нестационарного уравнения (5) связана с  $\alpha$ -спектральной задачей, которая с учетом запаздывающих нейтронов имеет вид

$$\begin{aligned} (D + S - R)\varphi - Bs &= \mu V\varphi, \\ \Lambda s - Q\varphi &= \mu s. \end{aligned} \quad (21)$$

Без учета запаздывающих нейтронов имеем

$$(D + S - \tilde{R})\varphi = \mu V\varphi. \quad (22)$$

Главное собственное значение  $\alpha = \mu^{(1)}$  называется  $\alpha$ -собственным значением или собственным значением периода ядерного реактора [24]. С собственным значением  $\alpha$  можно связать асимптотическое поведение решения задачи Коши (6) – (8) при больших временах. На развитой стадии процесса при достаточно больших временах реализуется так называемый регулярный режим [27,28]. В этом случае в силу быстрого возрастания собственных чисел  $\mu^{(i)}$  с номером гармоники  $i$  влияние высших гармоник практически не проявляется. В этом регулярном режиме поведение реактора описывается функцией  $e^{-\alpha t}\varphi^{(1)}(x)$ , то есть поведение решения определяется только первой гармоникой. На данной стадии процесса влияние начальных условий играет второстепенную роль.

#### 4. Результаты расчетов

Приведем результаты численного решения спектральной задачи (22) без учета запаздывающих нейтронов. В рамках используемого двухгруппового приближения имеем

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1 + \Sigma_{r1}\varphi_1 - (v\Sigma_{f1}\varphi_1 + v\Sigma_{f2}\varphi_2) &= \mu \frac{1}{v_1} \varphi_1, \\ -\nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2 + \Sigma_{r2}\varphi_2 - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}\varphi_1 &= \mu \frac{1}{v_2} \varphi_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Ищется главное собственное значение  $\alpha = \mu^{(1)}$  при

$$\operatorname{Re} \mu^{(1)} \leq \operatorname{Re} \mu^{(2)} \leq \dots$$

Результаты решения спектральной задачи (23) для первых пяти собственных значений  $\alpha_i = \mu^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, 5$ ,  $\operatorname{Re} \mu^{(1)} \leq \operatorname{Re} \mu^{(2)} \leq \dots$  на разных расчетных сетках при использовании различных конечно-элементных аппроксимаций показаны в табл.2 ( $\kappa$  – число треугольных элементов на кассету,  $p$  – порядок конечных элементов). Парные собственные значения  $\alpha_2, \alpha_3$ ,  $\alpha_4, \alpha_5$ ,  $\alpha_9, \alpha_{10}$  являются комплексными с малыми мнимыми частями, а собственные значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_6$ ,  $\alpha_7$ ,  $\alpha_8$  – действительные.

**Таблица 2.** Собственные значения задачи (23)  $\alpha_i = \mu^{(i)}$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$ .

$\kappa$	$p$	$\alpha_1$	$\alpha_2, \alpha_3$	$\alpha_4, \alpha_5$
6	1	-105.032	$159.802 \pm 0.025510i$	$659.109 \pm 0.034667i$
	2	-139.090	$115.793 \pm 0.029186i$	$591.782 \pm 0.034667i$
	3	-140.223	$114.035 \pm 0.033814i$	$588.762 \pm 0.069025i$
24	1	-130.422	$126.984 \pm 0.034409i$	$608.734 \pm 0.070724i$
	2	-140.187	$114.089 \pm 0.033512i$	$588.849 \pm 0.068555i$
	3	-140.281	$113.887 \pm 0.033604i$	$588.415 \pm 0.068695i$
96	1	-137.704	$117.345 \pm 0.033823i$	$593.818 \pm 0.069254i$
	2	-140.284	$113.886 \pm 0.033599i$	$588.419 \pm 0.068687i$
	3	-140.308	$113.842 \pm 0.033603i$	$588.336 \pm 0.068690i$

Сами собственные значения  $\operatorname{Re} \mu^{(1)} \leq \operatorname{Re} \mu^{(2)} \leq \dots$  хорошо отделены друг от друга. В нашем примере главное собственное значение отрицательно и поэтому главная гармоника будет нарастать, а все другие будут затухать. Тем самым выражен регулярный режим работы реактора. Сама величина  $\alpha = \mu^{(1)}$  определяет амплитуду развития нейтронного поля и непосредственно связывается с периодом реактора в регулярном режиме.

Собственные функции для главного собственного значения спектральной задачи (23) показаны на рис.4. Реальная часть собственных функций  $\varphi_1^{(i)}$ ,  $i=2, 3, 4, 5$ , приведена на рис.5.

Приведем результаты численного решения спектральной задачи (21) – с учетом запаздывающих нейтронов. В рамках используемого двухгруппового приближения имеем

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1 + \Sigma_1 \varphi_1 - (1 - \beta_1)(\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) - \lambda_1 s_1 &= \mu \frac{1}{v_1} \varphi_1, \\
 -\nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2 + \Sigma_2 \varphi_2 - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 &= \mu \frac{1}{v_2} \varphi_2, \\
 \lambda_1 s_1 - \beta_1(\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) &= \mu s_1.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ищется главное собственное значение  $\alpha = \mu^{(1)}$ , причем  $\operatorname{Re} \mu^{(1)} \leq \operatorname{Re} \mu^{(2)} \leq \dots$ .

Результаты решения спектральной задачи (24) для первых пяти собственных значений  $\alpha_i = \mu^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , на разных расчетных сетках при использовании различных конечно-элементных аппроксимаций показаны в табл.3. Как и в задаче без учета запаздывающих нейтронов, собственные значения  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{10}$  для спектральной задачи (27) являются комплексными с малыми мнимыми частями, собственные значения  $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$  – действительные.

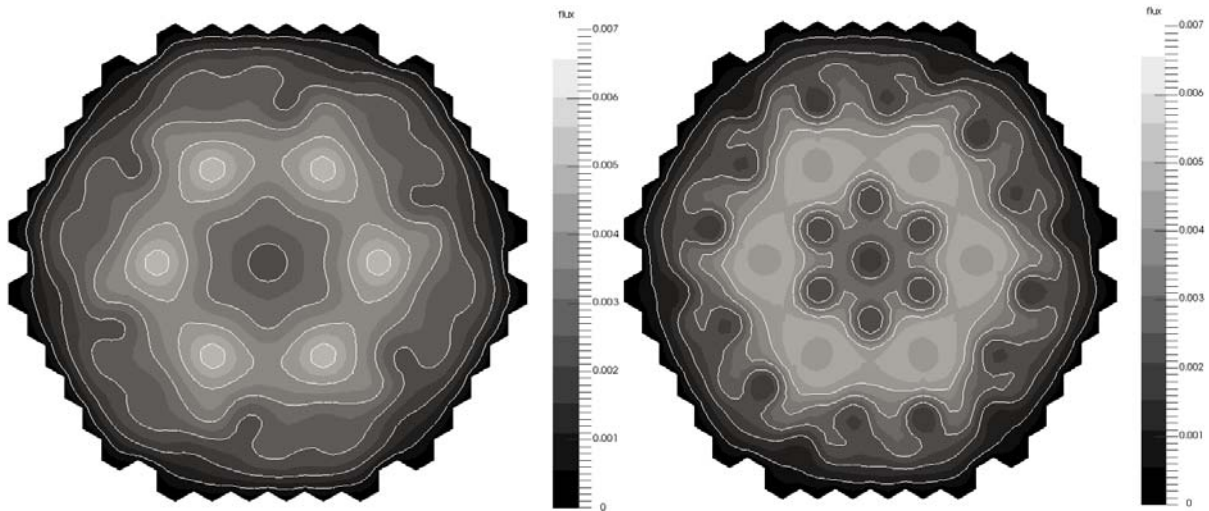


Рис.4. Собственные функции  $\varphi_1^{(1)}$  (слева) и  $\varphi_2^{(1)}$  (справа).

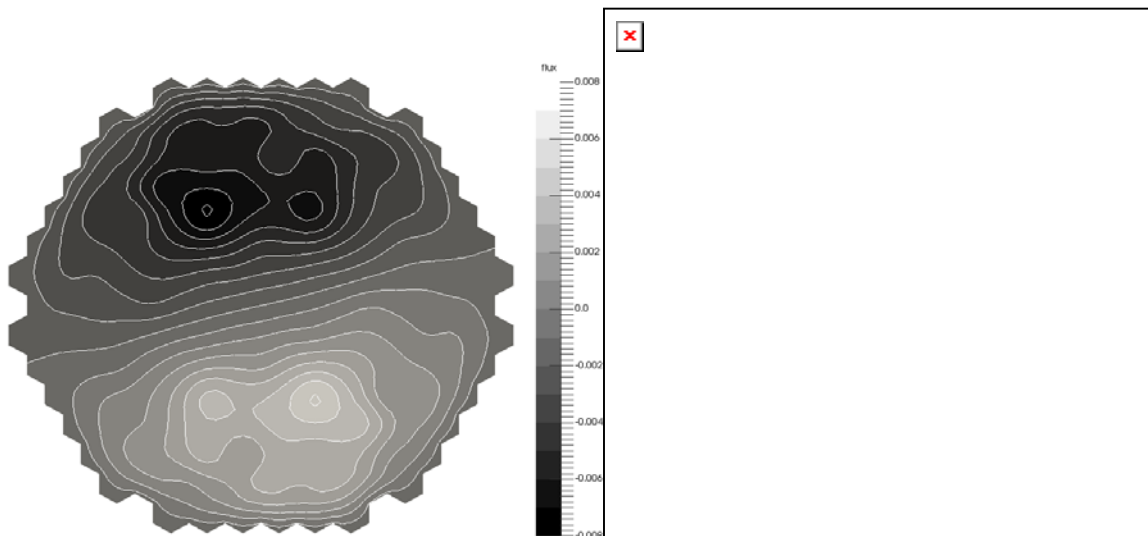


Рис.5. Реальная часть собственных функций  $\varphi_1^{(2)}$ ,  $\varphi_1^{(3)}$  (слева) и  $\varphi_1^{(4)}$ ,  $\varphi_1^{(5)}$  (справа).

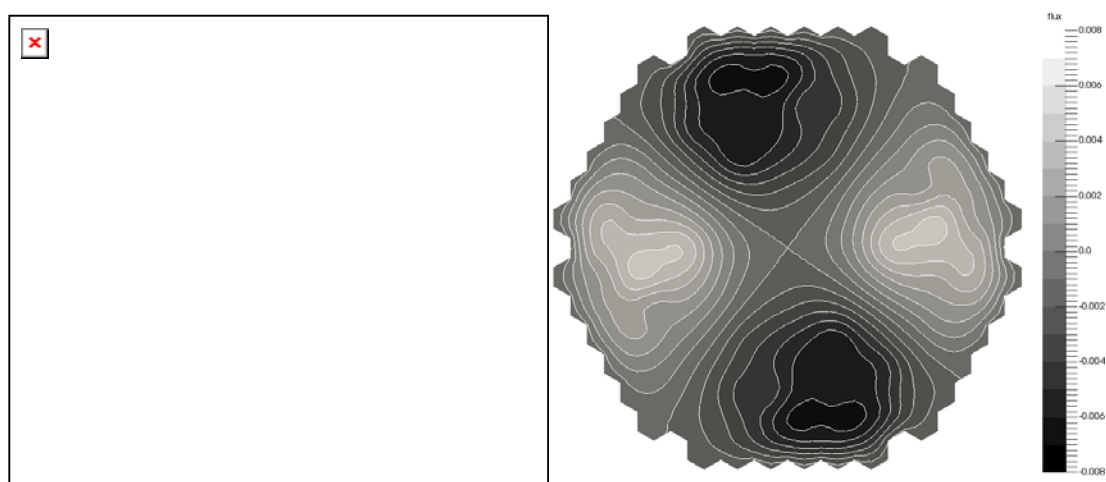
Собственные функции для главного собственного значения ( $i=1$ ) спектральной задачи (24) показаны рис.6. Реальная часть собственных функций  $\varphi_1^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ , приведена на рис.7. Снова главное собственное значение отрицательно и поэтому главная гармоника будет нарастать, а все другие будут затухать. Тем самым мы можем наблюдать регулярный режим работы реактора.

Таблица 3. Собственные значения задачи (24)  $\alpha_i = \mu^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

$\kappa$	$p$	$\alpha_1$	$\alpha_2, \alpha_3$	$\alpha_4, \alpha_5$
6	1	-0.22557	$0.04241 \pm 3.08808e-06i$	$0.06588 \pm 4.80448e-07i$
	2	-2.10154	$0.03592 \pm 4.96474e-06i$	$0.06452 \pm 1.21320e-06i$
	3	-2.47975	$0.03561 \pm 5.83719e-06i$	$0.06445 \pm 1.41869e-06i$
24	1	-0.82680	$0.03777 \pm 5.37884e-06i$	$0.06489 \pm 1.37315e-06i$
	2	-2.46601	$0.03562 \pm 5.78277e-06i$	$0.06445 \pm 1.40897e-06i$
	3	-2.50294	$0.03559 \pm 5.80783e-06i$	$0.06444 \pm 1.41341e-06i$
96	1	-1.74998	$0.03619 \pm 5.69002e-06i$	$0.06456 \pm 1.40299e-06i$
	2	-2.50375	$0.03559 \pm 5.80693e-06i$	$0.06444 \pm 1.41324e-06i$
	3	-2.51280	$0.03558 \pm 5.80954e-06i$	$0.06444 \pm 1.41362e-06i$

✖

✖

Рис.6. Собственные функции  $\varphi_1^{(1)}$  (слева) и  $\varphi_2^{(1)}$  (справа).Рис.7. Реальная часть собственных функций  $\varphi_1^{(2)}$ ,  $\varphi_1^{(3)}$  (слева) и  $\varphi_1^{(4)}$ ,  $\varphi_1^{(5)}$  (справа).

Нестационарные задачи численно решаются при следующих параметрах:  $\kappa=24$  и  $p=2$ . Выход на регулярный режим будем контролировать с помощью оценки близости отнормированного решения нестационарной задачи и главной собственной функции  $\varphi = \varphi^{(1)}$ . Для первой группы ( $g = 1$ ) положим

$$\eta(t) = \bar{\phi}_1(\mathbf{x}, t) - \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}, t), \quad \bar{\phi}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi_1(\mathbf{x}, t)}{\phi_1(\mathbf{x}, t)}, \quad \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\varphi_1^{(1)}(\mathbf{x}, t)}{\varphi_1^{(1)}(\mathbf{x}, t)}.$$

Установление темпа динамического развития оценивается величиной

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \left( \frac{1}{\phi_1(\mathbf{x}, t)} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \alpha^2 + \frac{1}{\phi_2(\mathbf{x}, t)} \frac{\partial \phi_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \alpha^2 \right)^{1/2}.$$

При численном решении нестационарной задачи без учета запаздывающих нейтронов возьмем  $T = 5 \cdot 10^{-3}$  с. Будем варьировать шаг по времени: положим  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$  с в случае чисто неявной схемы (17) и схемы Кранка-Николсон (19) и  $\tau = 1.25 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-4}$  с в случае явно-неявной схемы (18). Реперным решением (ref) для всех случаев будет приближенное решение при использовании чисто неявной схемы при  $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$  с.

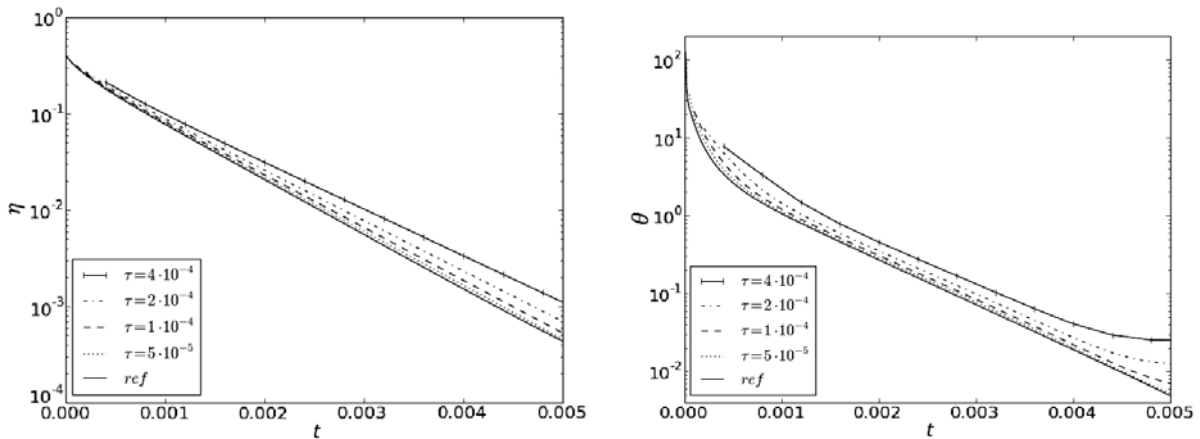


Рис.8. Чисто неявная схема без учета запаздывающих нейтронов.

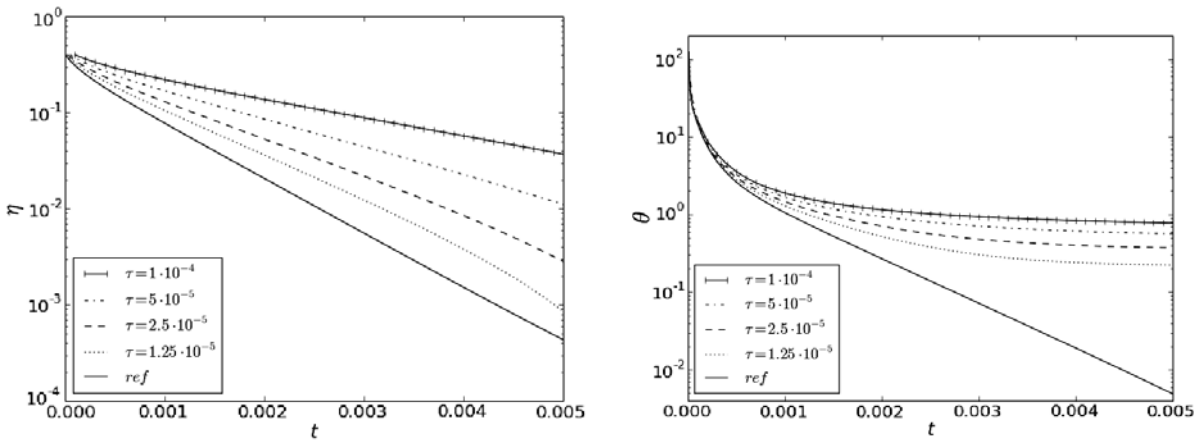


Рис.9. Явно-неявная схема без учета запаздывающих нейтронов.

Зависимости  $\eta(t)$  и  $\theta(t)$  от используемого шага по времени приведены на рис.8 для чисто неявной схемы и на рис.9 для явно-неявной схемы. На рис.10 показаны зависимости  $\eta(t)$  и  $\theta(t)$  для схемы Кранка-Николсон. Чисто неявная схема (11) имеет су-



щественно более высокую точность, чем явно-неявная схема (13). Как и ожидалось, схема Кранка-Николсон практически непригодна для моделирования регулярного режима в силу того, что она имеет плохие свойства асимптотической устойчивости.

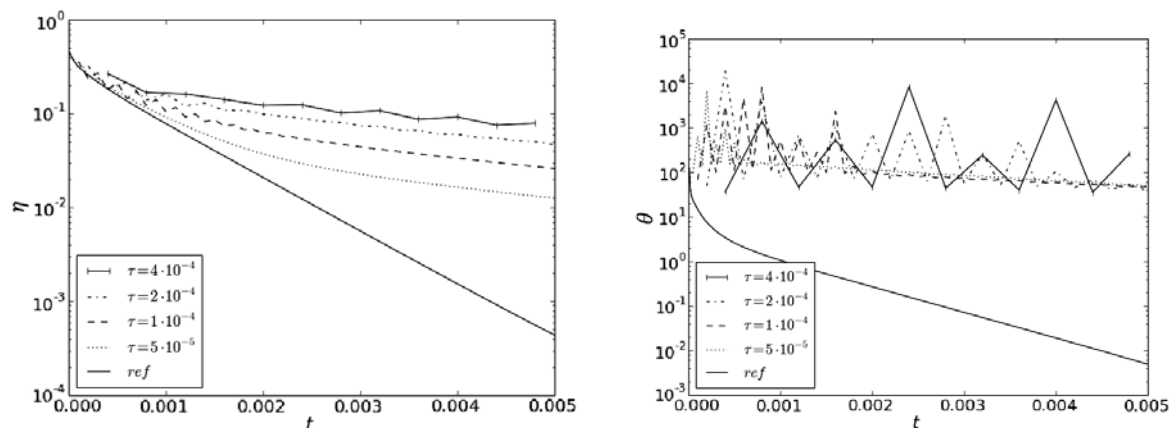


Рис.10. Схема Кранка-Николсон без учета запаздывающих нейтронов.

Далее на рис.11 показано отнормированное реперное решение  $\bar{\phi}_1$  на моменты времени  $t=0.0001, 0.0004, 0.0016$  и  $0.005$  с, иллюстрирующее выход на регулярный режим.

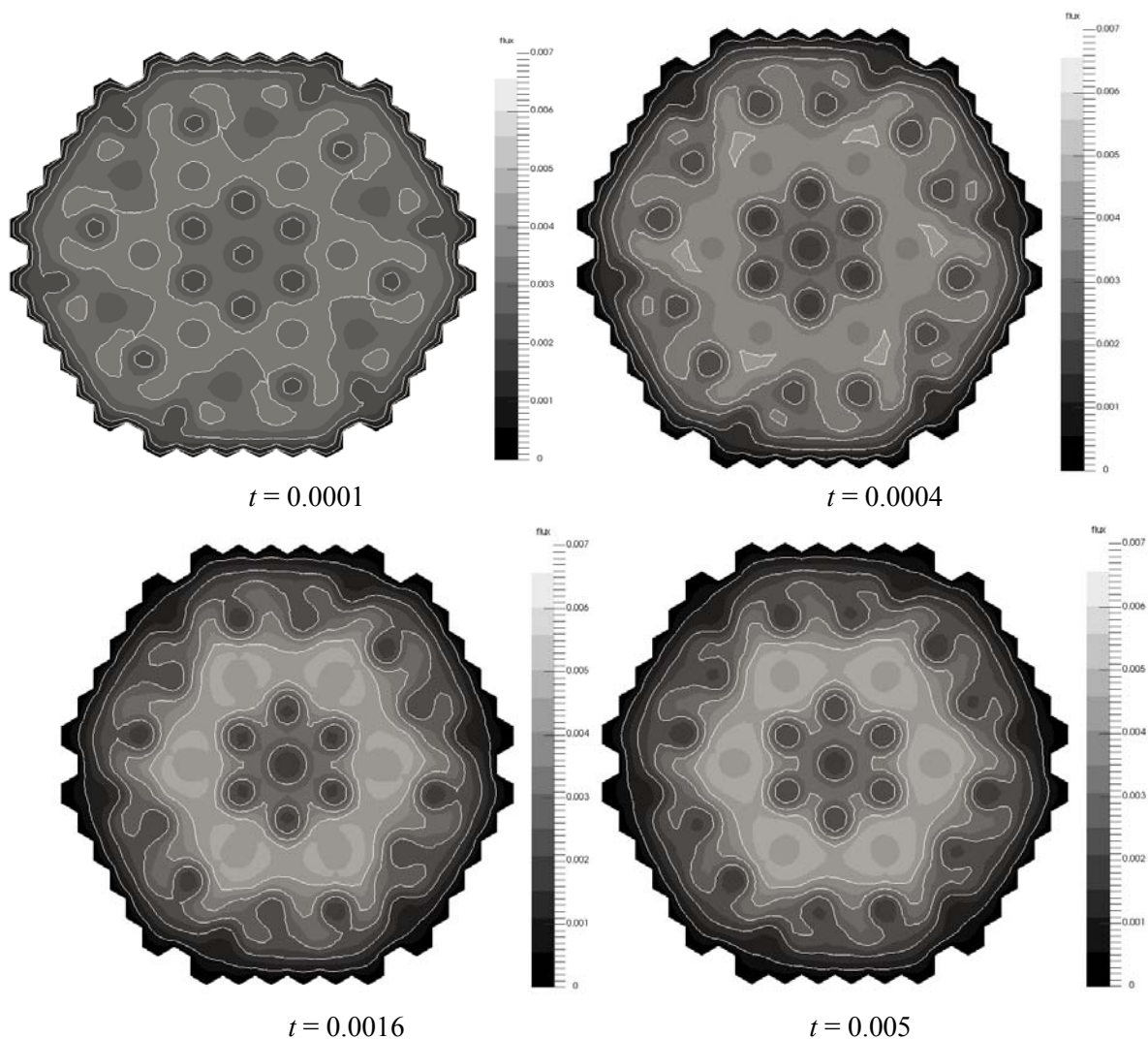


Рис.11. Эволюция  $\phi_2(t)$ .



Приведем аналогичные расчетные данные по динамической задаче с учетом запаздывающих нейтронов, когда  $T=0.01$  с. Будем использовать шаги по времени  $\tau = 1 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$ ,  $8 \cdot 10^{-4}$  с в случае чисто неявной схемы и  $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$ ,  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $2 \cdot 10^{-5}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$  с в случае явно-неявной схемы. Реперным решением (ref) в этой задаче будет решение при чисто неявной аппроксимации по времени с шагом  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$  с.

Зависимости  $\eta(t)$  и  $\theta(t)$  от используемого шага по времени приведена на рис.12 для чисто неявной схемы и на рис.13 – для явно-неявной схемы. Чисто неявная схема снова имеет существенно более высокую точность, чем явно-неявная схема. На рис.14 приведено также отнормированное решение  $\bar{\phi}_2$  на моменты времени  $t = 0.0001$ ,  $0.0004$ ,  $0.0016$  и  $0.0064$  с.

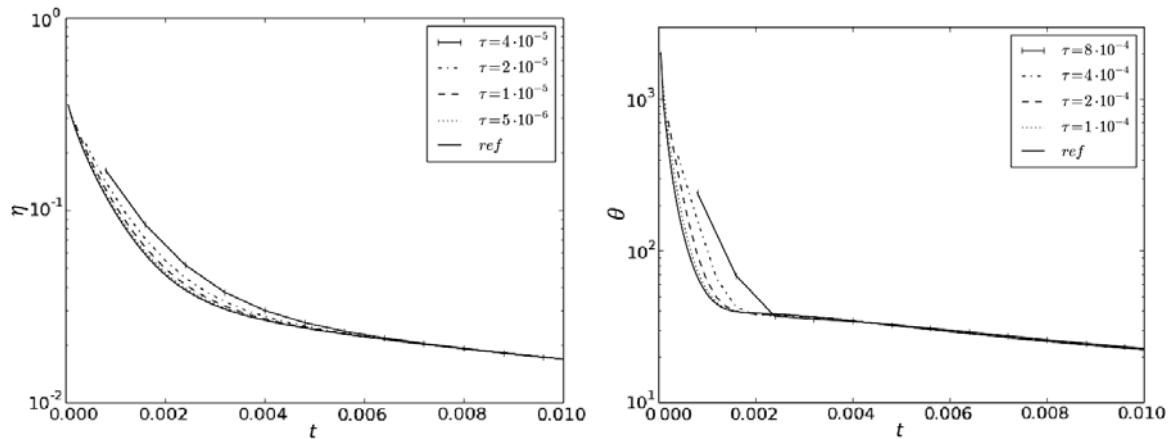


Рис.12. Чисто неявная схема с учетом запаздывающих нейтронов.

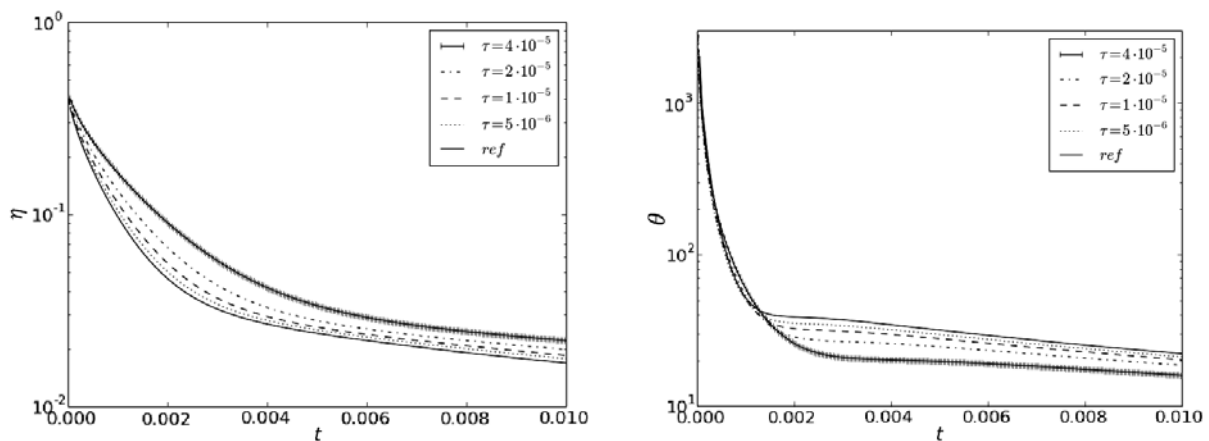


Рис.13. Явно-неявная схема с учетом запаздывающих нейтронов.

## 5. Выводы

Рассмотрена нестационарная задача переноса нейтронов в ядерном реакторе при использовании многогруппового диффузионного приближения. Выделена  $\alpha$ -спектральная задача, которая характеризует динамическое нейтронное поле на асимптотической стадии при больших временах – регулярный режим.

Вычислительный алгоритм приближенного решения спектральных задач базируется на стандартной конечно-элементной аппроксимации по пространству при исполь-

зовании лагранжевых конечных элементов степени  $p=1,2,3$ . Матричная спектральная задача решается с использованием свободной библиотеки SLEPc. Контроль точности приближенного решения проводится на последовательности сгущающихся сеток с использованием конечных элементов различной степени.

Для приближенного решения нестационарной задачи использовались стандартная чисто неявная схема первого порядка аппроксимации и симметричная схема (схема Кранка-Николсон) второго порядка. Рассмотрена также явно-неявная схема, когда члены уравнения, описывающие генерацию нейтронов, берутся с нижнего временного слоя. Такая схема более удобна в плане вычислительной реализации, чем стандартные схемы с весами.

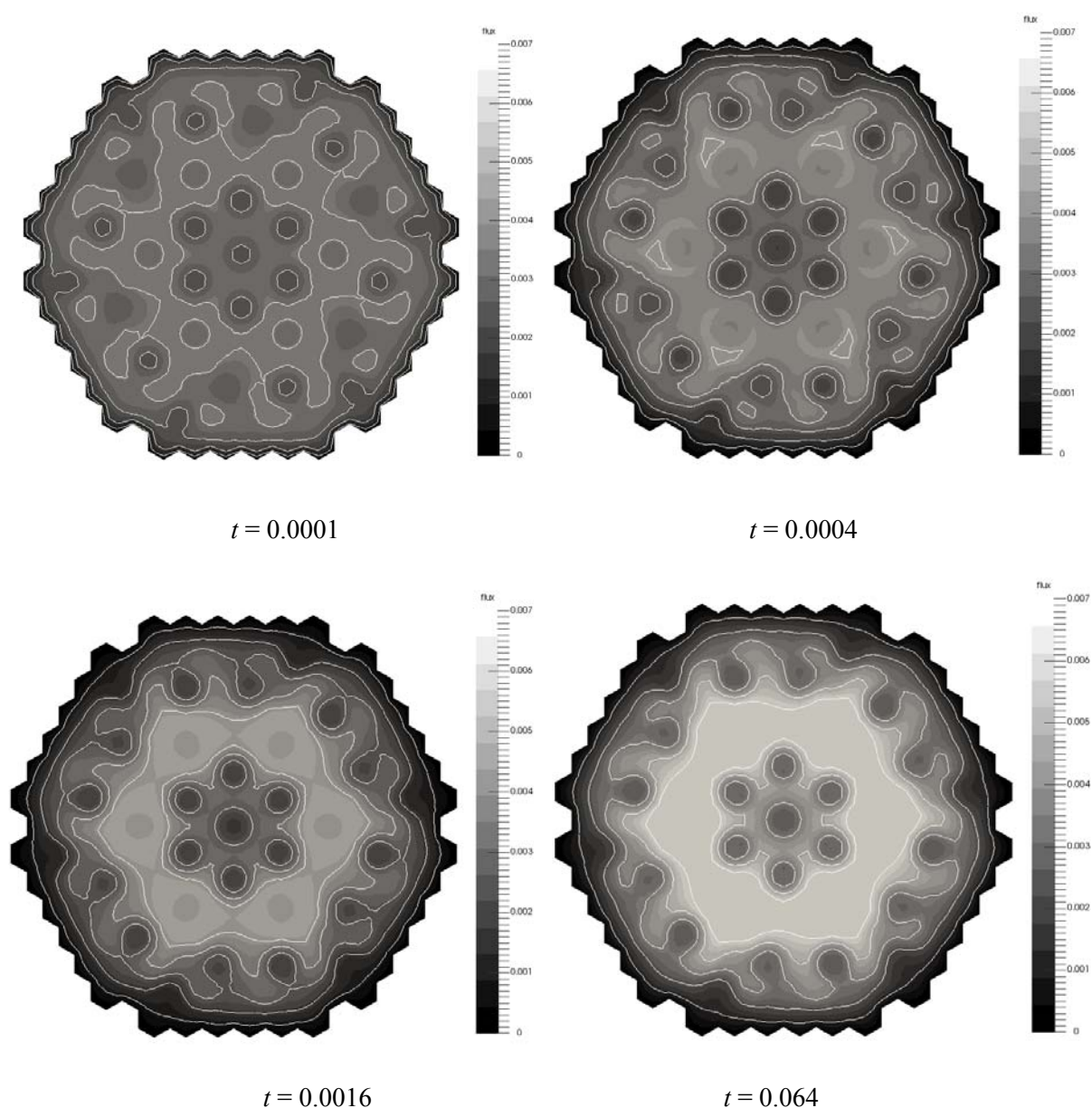


Рис.14. Эволюция  $\bar{\phi}_2(t)$ .

Рассмотрена нестационарная задача переноса нейтронов с выходом на регулярный режим в двух случаях: с учетом и без учета запаздывающих нейтронов. Тестовые расче-

ты выполнены в двумерном приближении для тестовой модели реактора ВВЭР-1000 в двухгрупповом приближении. Установлена хорошая отделимость собственных значений в  $\alpha$ -спектральной задаче с учетом и без учета запаздывающих нейтронов. Наблюдается хорошая сходимость нестационарной задачи при уменьшении шага по времени для чисто неявной схемы. Явно-неявная схема сходится намного хуже, чем чисто неявная схема. Схема Кранка-Николсон, хоть и имеет второй порядок аппроксимации, практически непригодна для моделирования регулярного режима ядерного реактора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton.* Nuclear Reactor Analysis. – Wiley, 1976.
2. *D.L. Hetrick.* Dynamics of Nuclear Reactors. – University of Chicago Press, 1971.
3. *W.M. Stacey.* Nuclear Reactor Physics. – Wiley, 2007.
4. *G.I. Marchuk, V.I. Lebedev.* Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport. – Harwood Academic Pub., 1986.
5. *E.E. Lewis, W.F. Miller.* Computational Methods of Neutron Transport. American Nuclear Society, 1993.
6. *T.M. Sutton, B.N. Aviles.* Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations // Progress in Nuclear Energy, 1996, v.30, №2, p.119-182.
7. *N.Z. Cho.* Fundamentals and recent developments of reactor physics methods // Nuclear Engineering and Technology, 2005, v.37, №1, p.25-78.
8. *K.S. Smith.* An analytic nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equations: Ph. D. thesis // Massachusetts Institute of Technology, 1979.
9. *R.D. Lawrence.* Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations // Progress in Nuclear Energy, 1986, v.17, №3, p.271-301.
10. *L.M. Grossman, J.-P. Hennart.* Nodal diffusion methods for space-time neutron kinetics // Progress in Nuclear Energy, 2007, v.49, №3, p.181-216.
11. *S.C. Brenner, R. Scott.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. – Springer, 2008.
12. *A. Quarteroni, A. Valli.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. – Springer, 2008.
13. *L.A. Hageman, D.M. Young.* Applied Iterative Methods. – New York: Academic Press, 1981.
14. *Y. Saad.* Iterative methods for sparse linear systems // Society for Industrial Mathematics, 2003.
15. *U.M. Ascher.* Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations // Society for Industrial Mathematics, 2008.
16. *R.J. LeVeque.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems // Society for Industrial Mathematics, 2007.
17. *W.H. Hundsdorfer, J.G. Verwer.* Numerical Solution of Time-dependent Advection-diffusion-reaction Equations. – Springer Verlag, 2003.
18. *J.C. Butcher.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. – Wiley, 2008.
19. *E. Hairer, G. Wanner.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. – Springer Verlag, 2010.
20. *H.P. Chou, J.R. Lu, M.B. Chang.* A three-dimensional space-time model and its use in pressurized water reactor rod ejection analyses // Nuclear Technology, 1990, v.90, №2, p.142-154.
21. *M. Dahmani, A.M. Baudron, J.J. Lautard, L. Erradi.* A 3D nodal mixed dual method for nuclear reactor kinetics with improved quasistatic model and a semi-implicit scheme to solve the precursor equations // Annals of Nuclear Energy, 2001, v.28, №8, p.805-824.
22. *H.L. Dodds.* Accuracy of the quasistatic method for two-dimensional thermal reactor transients with feedback // Nuclear Science and Engineering, 1976, v.59, №3, p.271-276.

23. *S. Goluoglu, H.L. Dodds*. A time-dependent, three-dimensional neutron transport methodology // Nuclear Science and Engineering, 2001, v.139, №3 p.248-261.
24. *G.I. Bell, S. Glasstone*. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
25. *R.S. Modak, A. Gupta*. A scheme for the evaluation of dominant time-eigenvalues of a nuclear reactor // Annals of Nuclear Energy, 2007, v.34, №3, p.213-221.
26. *G. Verdu, D. Ginestar, J. Roman, V. Vidal*. 3D alpha modes of a nuclear power reactor // Journal of Nuclear Science and Technology, 2010, v.47, №5, p.501-514.
27. *A. Luikov*. Analytical Heat Diffusion Theory. – Academic Press, 1968.
28. *A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich*. Computational Heat Transfer. – Wiley, 1996.
29. *A. Samarskii*. The Theory of Difference Schemes. – New York: Marcel Dekker, 2001.
30. *A.A. Самарский, А.В. Гулин*. Устойчивость разностных схем. – Москва: Наука, 1973.  
*A.A. Samarskii, A.V. Gulin*. Ustoichivost raznostnykh skhem. – Moskva: Nauka, 1973.
31. *C.W. Gear*. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. – NJ: Prentice Hall, 1971.
32. *A. Logg, K.A. Mardal, G. Wells*. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. – Springer, 2012.
33. *C. Campos, J. Roman, E. Romero, A. Tomas*. SLEPc Users Manual, 2013.
34. *Y.A. Chao, Y.A. Shatilla*. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-II: Implementation in the ANC-H Code // Nuclear Science and Engineering, 1995, v.121, p.210-225.

Поступила в редакцию 23.05.16