Численное моделирование нестационарных задач диффузии нейтронов

А.В. Аввакумов [1] П.Н. Вабищевич [2]
А.О. Васильев [2,3] В.Ф. Стрижов [2]

[1]Научно-исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва
[2]Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва
[3]Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск

СКТеММ-2016, 27 июня – 1 июля 2016, Москва

Введение

- Уравнение переноса нейтронов
- Многогрупповое диффузионное приближение
- Нодальные методы, МКЭ
- Спектральные характеристики
- Регулярный режим

Многогрупповое диффузионное приближение

Динамика нейтронного потока рассматривается в ограниченной выпуклой 2D или 3D области Ω с границей $\partial\Omega$. Перенос нейтронов описывается системой уравнений:

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg}\phi_g - \sum_{g \neq g'=1}^{G} \Sigma_{s,g'\to g}\phi_{g'} =$$

$$= (1-\beta)\chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu\Sigma_{fg'}\phi_{g'} + \widetilde{\chi}_g \sum_{m=1}^{M} \lambda_m c_m, \quad g = 1, 2, ..., G.$$

Здесь ϕ_g – поток нейтронов, v_g – эффективная скорость, D_g – коэффициент диффузии, Σ_{rg} – сечение увода, $\Sigma_{s,g'\to g}$ – сечение рассеяния, $\nu\Sigma_{fg}$ – сечение генерации, β – эффективная доля запаздывающих нейтронов (ЗН), χ_g, $\widetilde{\chi}_g$ – спектры МН и ЗН, c_m – плотность источников ЗН, λ_m – постоянная распада источников ЗН.

Запаздывающие нейтроны

Плотность источников запаздывающих нейтронов описывается уравнениями:

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \lambda_m c_m = \beta_m \sum_{g=1}^{G} \nu \Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, ..., M,$$

где β_m — доля запаздывающих нейтронов m типа, причем:

$$\beta = \sum_{m=1}^{M} \beta_m.$$

Без учета запаздывающих нейтронов

Без учета запаздывающих нейтронов можно ограничиться задачей для нейтронного потока:

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg}\phi_g - \sum_{g \neq g'=1}^{G} \Sigma_{s,g' \to g}\phi_{g'} =$$

$$= ((1-\beta)\chi_g + \beta\widetilde{\chi}_g) \sum_{g'=1}^{G} \nu\Sigma_{fg'}\phi_{g'}, \quad g = 1, 2, ..., G.$$

Начальные и граничные условия

На границе области $\partial\Omega$ ставятся условия альбедного типа:

$$D_g \frac{\partial \phi_g}{\partial n} + \gamma_g \phi_g = 0, \qquad g = 1, 2, ..., G,$$

где n – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, γ_g – групповой альбедный параметр.

Рассматривается краевая задача с граничными условиями альбедного типа, и начальными условиями:

$$\phi_g(\mathbf{x}, 0) = \phi_g^0(\mathbf{x}), \quad g = 1, 2, ..., G, \quad c_m(\mathbf{x}, 0) = c_m^0(\mathbf{x}), \quad m = 1, 2, ..., M.$$

Операторная формулировка

Обозначения

$$
\begin{aligned}
\phi &= \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_G\}, \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, ..., c_M\} \\
V &= (v_{gg'}), \quad v_{gg'} = \delta_{gg'} v_g^{-1}, \\
D &= (d_{gg'}), \quad d_{gg'} = -\delta_{gg'} \nabla \cdot D_g \nabla, \\
S &= (s_{gg'}), \quad s_{gg'} = \delta_{gg'} \Sigma_{rg} - \Sigma_{s,g' \to g}, \\
R &= (r_{gg'}), \quad r_{gg'} = (1-\beta)\chi_g \nu \Sigma_{fg'}, \\
\widetilde{R} &= (\widetilde{r}_{gg'}), \quad \widetilde{r}_{gg'} = ((1-\beta)\chi_g + \beta \widetilde{\chi}_g)\nu \Sigma_{fg'}, \\
B &= (b_{gm}), \quad b_{gm} = \widetilde{\chi}_g \lambda_m, \\
\Lambda &= (\lambda_{mm'}), \quad \lambda_{mm'} = \lambda_m \delta_{mm'}, \\
Q &= (q_{mg}), \quad q_{mg} = \beta_m \nu \Sigma_{fg}, \\
g, g' &= 1, 2, ..., G, \quad m, m' = 1, 2, ..., M,
\end{aligned}
$$

где

$$
\delta_{gg'} = \begin{cases} 1, & g = g', \\ 0, & g \neq g'. \end{cases}
$$

Операторная формулировка

С учетом введенных обозначений система уравнений с учетом запаздывающих нейтронов записывается в следующем виде:

$$V\frac{d\phi}{dt} + (D+S)\phi = R\phi + B\boldsymbol{c},$$
$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} + \Lambda\boldsymbol{c} = Q\phi.$$

Без учета запаздывающих нейтронов:

$$V\frac{d\phi}{dt} + (D+S)\phi = \widetilde{R}\phi.$$

Рассматривается задача Коши при следующих начальных и граничных условиях:

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{c}^0, \qquad D\frac{d\phi}{dn} + L\phi = 0,$$

где $L = (l_{gg'}), \quad l_{gg'} = \delta_{gg'}\gamma_g.$

Спектральные задачи

С учетом запаздывающих нейтронов она формулируется в виде:

$$(D+S)\varphi = \mu(R\varphi + B\boldsymbol{s}),$$
$$\Lambda\boldsymbol{s} = \mu Q\varphi.$$

Аналогично, без учета запаздывающих нейтронов:

$$(D+S)\varphi = \mu\widetilde{R}\varphi.$$

Минимальное собственное значение:

$$k = \frac{1}{\mu^{(1)}}$$

есть эффективный коэффициент размножения. Значение $k = \mu^{(1)} = 1$ связывается с критическим состоянием реактора, соответствующая собственная функция $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x})$ есть стационарное решение уравнения.

Регулярный режим

Более приемлемая спектральная характеристика связана с α-спектральной задачей. С учетом запаздывающих нейтронов она имеет вид

$$(D + S - R)\varphi - B\boldsymbol{s} = \mu V\varphi,$$
$$\Lambda\boldsymbol{s} - Q\varphi = \mu\boldsymbol{s}.$$

Без учета запаздывающих нейтронов имеем

$$(D + S - \widetilde{R})\varphi = \mu V\varphi.$$

Главное собственное значение

$$\alpha = \mu^{(1)}$$

называется α–собственным значением (период реактора).
С собственным значением α можно связать асимптотическое поведение решения задачи Коши при больших временах. В этом регулярном режиме поведение реактора описывается функцией $e^{-\alpha t}\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x})$, то есть поведение решения определяется только первой гармоникой.

Аппроксимация по времени

Определим сетку $\omega = \{t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, ..., N, \quad \tau N = T\}$ и используем обозначения $\phi^n = \phi(\boldsymbol{x}, t^n)$, $\boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, t^n)$.
Используется численно-аналитический метод:

$$\frac{\partial e^{\lambda_m t} c_m}{\partial t} = \beta_m e^{\lambda_m t} \sum_{g=1}^{G} \nu \Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, ..., M.$$

Интегрирование от t^n до t^{n+1} дает:

$$c_m^{n+1} = e^{-\lambda_m \tau} c_m^n + \beta_m \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\lambda_m (t - t^{n+1})} \sum_{g=1}^{G} \nu \Sigma_{fg} \phi_g dt, \quad m = 1, 2, ..., M.$$

Без учета запаздывающих нейтронов

Чисто неявная схема:

$$V\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\tau}+(D+S)\phi^{n+1}=\widetilde{R}\phi^{n+1}.$$

Явно-неявная схема:

$$V\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\tau}+(D+S)\phi^{n+1}=\widetilde{R}\phi^{n}.$$

Схема Кранка-Николсон:

$$V\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\tau}+(D+S)\frac{\phi^{n+1}+\phi^{n}}{2}=\widetilde{R}\frac{\phi^{n+1}+\phi^{n}}{2}.$$

С учетом запаздывающих нейтронов

Чисто неявная схема:

$$V\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\tau}+(D+S)\phi^{n+1}=R\phi^{n+1}+B\boldsymbol{c}^{n+1},$$
$$\boldsymbol{c}^{n+1}=\widetilde{\Lambda}\boldsymbol{c}^{n}+\tau Q\phi^{n+1},$$

где

$$\widetilde{\Lambda}=(\widetilde{\lambda}_{mm'}),\quad \widetilde{\lambda}_{mm'}=\delta_{mm'}e^{-\lambda_m\tau},\quad m,m'=1,2,....,M.$$

Явно-неявная схема:

$$V\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\tau}+(D+S)\phi^{n+1}=R\phi^{n}+B\boldsymbol{c}^{n+1},$$
$$\boldsymbol{c}^{n+1}=\widetilde{\Lambda}\boldsymbol{c}^{n}+\tau\widetilde{Q}\phi^{n},$$

где

$$\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{mg}),\quad \widetilde{q}_{mg}=e^{-\lambda_m\tau}\beta_m\nu\Sigma_{fg},\quad g=1,2,...,G,\quad m=1,2,....,M.$$

Метод конечных элементов

Пусть $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева, $v \in H^1$ таких, что v^2 и $|\nabla v|^2$ имеют конечный интеграл в Ω. Для $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, ..., v_d\}$ определим аналогично $V^d = [H^1(\Omega)]^d$. Обозначения для тестовых функций $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_G\}$, $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_M\}$.
Вариационная постановка: найти $\phi \in V^D$, $\boldsymbol{c} \in V^M$, для которых имеет место:

$$\int_\Omega \left(V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + S\phi^{n+1} \right) \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \sum_{g=1}^{G} D_G \nabla \phi_g^{n+1} \nabla \xi_g d\boldsymbol{x} +$$

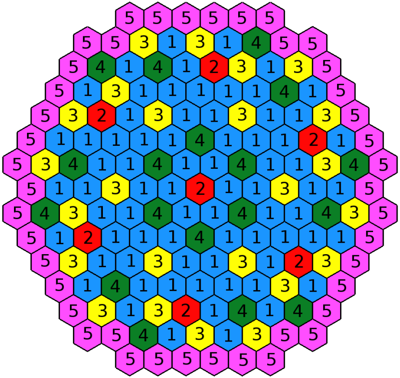
$$+ \int_{\partial\Omega} \sum_{g=1}^{G} \gamma_g \phi_g^{n+1} \xi_g d\boldsymbol{x} = \int_\Omega R\phi^{n+1} \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega B\boldsymbol{c}^{n+1} \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x},$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{c}^{n+1} \zeta d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \widetilde{\Lambda} \boldsymbol{c}^n \zeta d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \tau Q \phi^{n+1} \zeta d\boldsymbol{x}$$

при всех $\boldsymbol{\xi} \in V^D$, $\zeta \in V^M$.

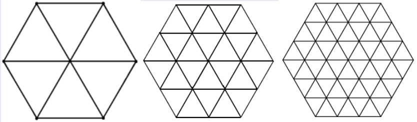
ВВЭР-1000 без отражателя

Геометрия

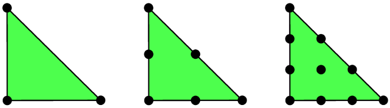


Параметры

Число треугольников на кассету κ варьируется от 6 до 96:



Используются Лагранжевые КЭ порядка $p = 1, 2, 3$:



Программное обеспечение

Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations SLEPc

FEniCS project

Результаты решения α-спектральной задачи (без учета запаздывающих нейтронов)

Таблица: Собственные значения $\alpha_i = \mu^{(i)}, \ i = 1, 2, \dots, 5$

κ	p	α_1	α_2, α_3	α_4, α_5
6	1	-105.032	$159.802 \pm 0.025510i$	$659.109 \pm 0.034667i$
	2	-139.090	$115.793 \pm 0.029186i$	$591.782 \pm 0.034667i$
	3	-140.223	$114.035 \pm 0.033814i$	$588.762 \pm 0.069025i$
24	1	-130.422	$126.984 \pm 0.034409i$	$608.734 \pm 0.070724i$
	2	-140.187	$114.089 \pm 0.033512i$	$588.849 \pm 0.068555i$
	3	-140.281	$113.887 \pm 0.033604i$	$588.415 \pm 0.068695i$
96	1	-137.704	$117.345 \pm 0.033823i$	$593.818 \pm 0.069254i$
	2	-140.284	$113.886 \pm 0.033599i$	$588.419 \pm 0.068687i$
	3	-140.308	$113.842 \pm 0.033603i$	$588.336 \pm 0.068690i$

Результаты решения α-спектральной задачи (с учетом запаздывающих нейтронов)

Таблица: Собственные значения $\alpha_i = \mu^{(i)}, \ i = 1, 2, ..., 5$

κ	p	α_1	α_2, α_3	α_4, α_5
6	1	-0.22557	$0.04241 \pm 3.08808\text{e-}06i$	$0.06588 \pm 4.80448\text{e-}07i$
	2	-2.10154	$0.03592 \pm 4.96474\text{e-}06i$	$0.06452 \pm 1.21320\text{e-}06i$
	3	-2.47975	$0.03561 \pm 5.83719\text{e-}06i$	$0.06445 \pm 1.41869\text{e-}06i$
24	1	-0.82680	$0.03777 \pm 5.37884\text{e-}06i$	$0.06489 \pm 1.37315\text{e-}06i$
	2	-2.46601	$0.03562 \pm 5.78277\text{e-}06i$	$0.06445 \pm 1.40897\text{e-}06i$
	3	-2.50294	$0.03559 \pm 5.80783\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41341\text{e-}06i$
96	1	-1.74998	$0.03619 \pm 5.69002\text{e-}06i$	$0.06456 \pm 1.40299\text{e-}06i$
	2	-2.50375	$0.03559 \pm 5.80693\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41324\text{e-}06i$
	3	-2.51280	$0.03558 \pm 5.80954\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41362\text{e-}06i$

Выход на регулярный режим

Начальные условия для всех схем:

$$\phi_1^0 = 1.0, \quad \phi_2^0 = 0.25$$

при $k = 24$, $p = 2$. Пусть $T = 5 \times 10^{-3}$ и рассмотрим решение чисто неявной схемы при $\tau = 1 \times 10^{-5}$ как квазиточное решение.

Выход на регулярный режим будем контролировать с помощью оценки близости отнормированного решения нестационарной задачи и главной собственной функции ϕ. Для первой группы положим:

$$\eta(t) = \|\overline{\phi}_1(t) - \overline{\varphi}_1\|, \quad \overline{\phi}_1(t) = \frac{\phi_1(t)}{\|\phi_1(t)\|}, \quad \overline{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}.$$

Установление темпа динамического развития оценивается величиной:

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\|\alpha\|} \left(\left\| \frac{1}{\phi_1(t)} \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial t} - \alpha \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\phi_2(t)} \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial t} - \alpha \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Без учета ЗН, $\eta(t)$(слева) и $\theta(t)$(справа)

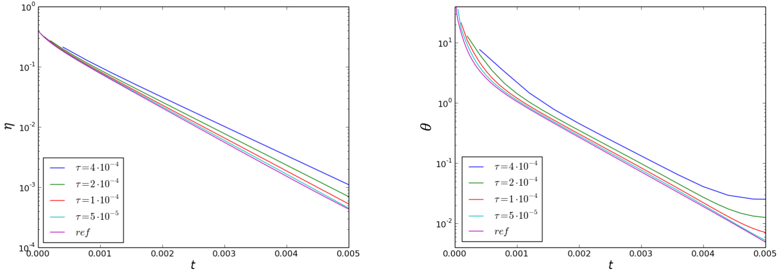
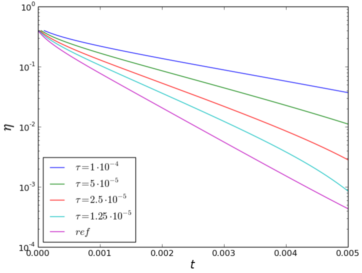


Рис.: Чисто неявная схема

Без учета ЗН, $\eta(t)$(слева) и $\theta(t)$(справа)



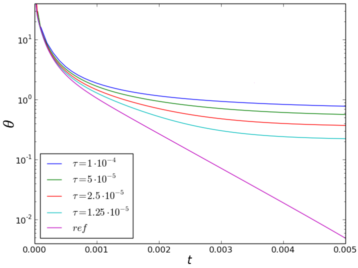


Рис.: Явно-неявная схема

Без учета ЗН, $\eta(t)$(слева) и $\theta(t)$(справа)

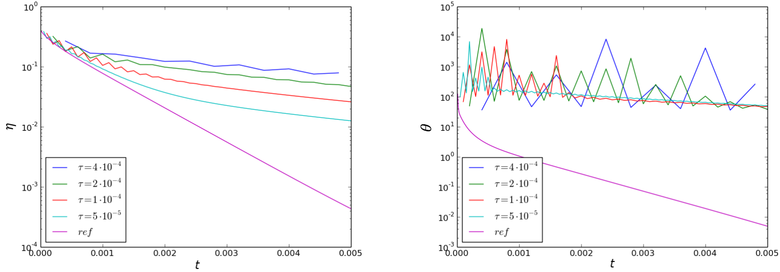


Рис.: Схема Кранка-Николсон

С учетом ЗН, $\eta(t)$(слева) и $\theta(t)$(справа)

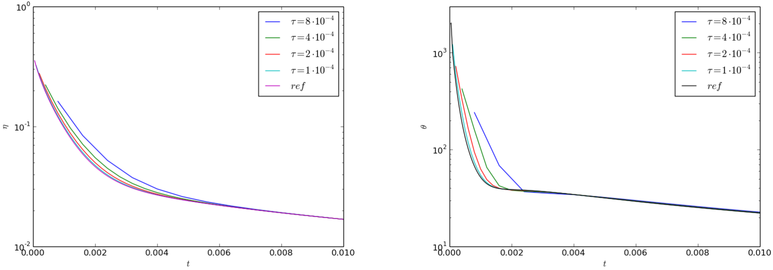


Рис.: Чисто неявная схема

С учетом ЗН, $\eta(t)$(слева) и $\theta(t)$(справа)

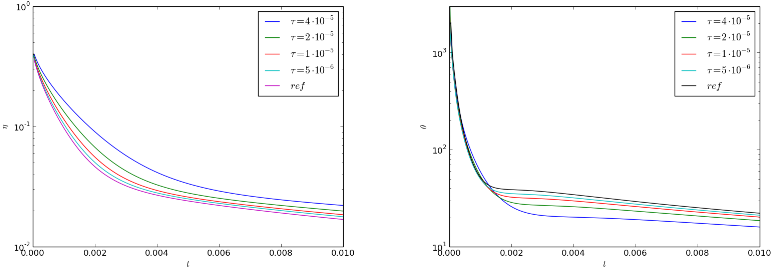
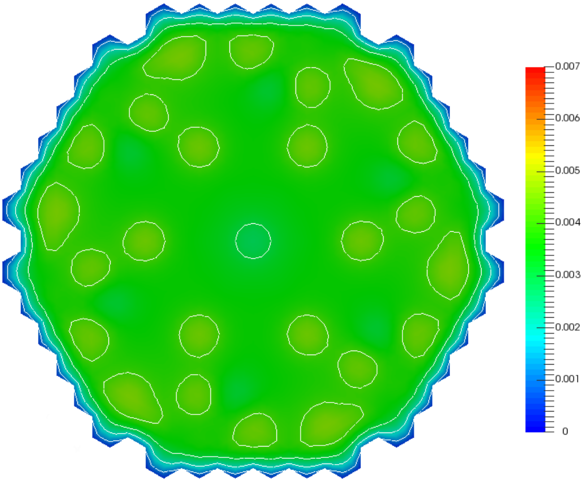
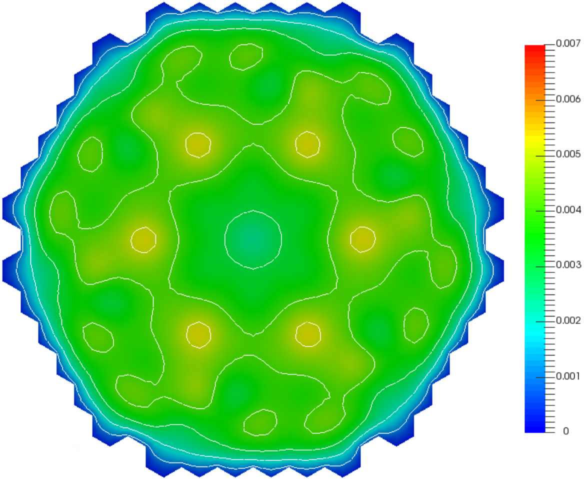


Рис.: Явно-неявная схема

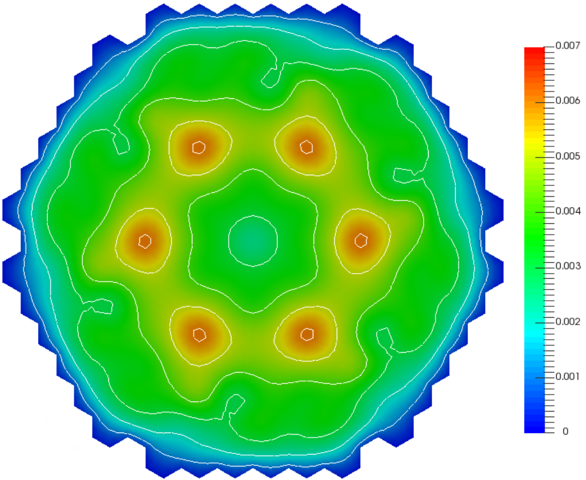
Эволюция, $t = 0.0001$



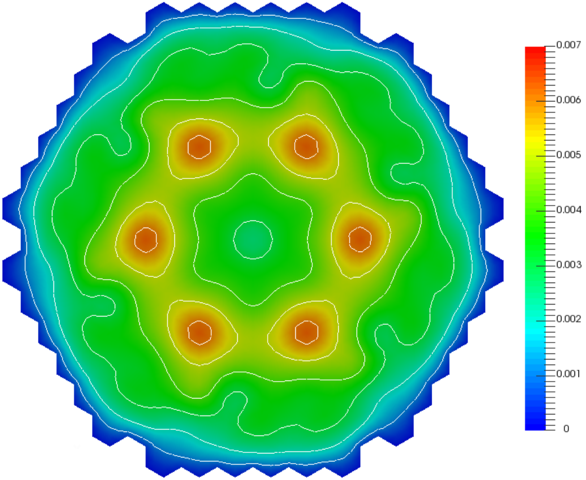
Эволюция, $t = 0.0004$



Эволюция, $t = 0.0016$



Эволюция, $t = 0.0064$



Заключение

- Рассмотрена нестационарная задача диффузии нейтронов в ядерном реакторе при использовании многогруппового приближения. Выделена α-спектральная задача, которая характеризует динамическое нейтронное поле ядерного реактора на асимптотической стадии при больших временах – регулярный режим.
- Контроль точности приближенного решения проводиться на последовательности сгущающихся сеток с использованием конечных элементов различной степени.
- Рассмотрена нестационарная задача диффузии нейтронов с выходом на регулярный режим в двух случаях: с учетом ЗН и без учета ЗН.
- Тестовые расчеты выполнены в двумерном приближении для ядерного реактора ВВВЭР-1000 без отражателя с использованием двухгруппового диффузионного приближения. Установлена хорошая отделимость собственных значений в α-спектральной задаче с учетом и без учета ЗН.
- Наблюдается хорошая сходимость нестационарной задачи при уменьшении шага по времени для чисто неявной схемы. Явно-неявная схема сходится намного хуже, чем чисто неявная схема. Схема Кранка-Николсон хоть и имеет второй порядок аппроксимации, практически непригодна для моделирования регулярного режима ядерного реактора.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-01215).

Спасибо за внимание! Вопросы?