

Северо-Восточный федеральный
университет имени М.К. Аммосова

III Всероссийская научная конференция
студентов, аспирантов,
молодых ученых и специалистов
**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗВИТИЯ СЕВЕРНЫХ ТЕРРИТОРИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Тезисы докладов

21 – 26 мая 2012 г.

Якутск, 2012

III Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации»: Тез. докл. / *Под редакцией В.И. Васильева*. – Якутск: Изд-во “Сфера”, 2012 г. – 156 с.

Ответственный за выпуск
Павлова Н.В.

В сборник включены тезисы докладов, представленных на III Всероссийскую научную конференцию студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации».

Материалы докладов участников конференции посвящены актуальным вопросам математического моделирования, учитывающих специфику северных территорий. Представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

Пленарные доклады

ФОРМИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПРЕДВЕСТНИКОВ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ¹

Байдулов В. Г.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Рассматриваются течения неоднородной по плотности изотермической жидкости, когда изменения плотности определяются только концентрацией стратифицирующей примеси $\rho = \rho(P, S)$. Простейшим видом конвективных задач стратифицированной жидкости являются задачи формирования течений, индуцированных диффузией. Условие непроницаемости границы тела для соли (условие равенства нулю нормальной производной полной солености) для возмущения солености приводит к возникновению возмущений при любом отклонении границы тела от вертикали

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}$$

В этом случае линии равной солености искажаются в окрестности границы тела, что приводит к нарушению гидростатического равновесия и возникновению течения.

Поскольку в природных системах плотность жидкости слабо отклоняется от плотности однородной жидкости, уравнение состояния может быть разложено в ряд Тейлора. Разделяя давле-

¹Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы», Госконтракт № 16.518.11.7059).

ние и концентрацию примеси на гидростатическую (стратифицирующую) и динамическую составляющие и пренебрегая членами, описывающими акустико-гравитационные волны, уравнение состояния можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{\Lambda} + \beta S + \beta_T P' \right)$$

где β_T и β — коэффициенты изотермического и солёностного сжатия, Λ — масштаб стратификации. (Далее коэффициент солёностного сжатия предполагается включённым в определение солёности).

В работе исследуется влияние эффектов сжимаемости на структуру течений, индуцируемых диффузией на наклонной плоскости. Ранее описание таких течений строилось с использованием условия бездивергентности. Однако уравнения баланса энтропии и диффузии примеси позволяют свести скорость изменения концентрации примеси к дивергенциям потоков, так что в силу закона сохранения массы в пренебрежении вкладом давления в уравнение состояния дивергенция скорости будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{V} \approx -\kappa \Delta S$$

и величина дивергенции скорости определяется значением вторых производных концентрации, величина которых имеет большое значение в задачах пограничного слоя и конвекции в неоднородных средах. Поэтому, несмотря на малые значения кинетических коэффициентов, величина дивергенции скорости в несжимаемой среде для указанных типов задач может быть существенно отлична от нуля.

Рассматривается задача формирования течения, когда в начальный момент времени в покоящейся жидкости возникает бесконечная наклонная плоскость непроницаемая для соли. В результате условие гидростатического равновесия нарушается и формируется течение.

В приближении Буссинеска такая задача оказывается инвариантной относительно сдвигов плоскости вдоль самой себя

(вдоль оси ξ), однако условие ненулевой дивергенции приводит к тому, что течение оказывается двумерным $\mathbf{V} = U(\eta, t)\mathbf{e}_\xi + V(\eta, t)\mathbf{e}_\eta$. Поскольку набегающий поток отсутствует, представляется естественным в качестве параметров обезразмеривания выбрать комбинации внутренних масштабов среды (частоту плаваемости N и коэффициента диффузии κ , угол наклона плоскости к горизонту α):

$$\eta_0 = \sqrt{\kappa/N \sin \alpha},$$

$$t_0 = 1/N \sin \alpha,$$

$$S_0 = \frac{\cos \alpha}{\Lambda} \sqrt{\kappa/N \sin \alpha},$$

$$V_0 = \sqrt{\kappa N \sin \alpha} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$P_0 = \rho_0 \kappa N \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha.$$

В обезразмеренных переменных система уравнений движения, начальные и граничные условия запишутся в виде

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - S,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - S \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{dS}{dt} - (V \operatorname{ctg} \alpha + U) + A_P \frac{dP}{dt} = -A_V \frac{\partial V}{\partial \eta} - S,$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + (V \operatorname{ctg} \alpha + U),$$

$$U, V, S|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 1, \quad P, U, V, S|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$A_V = g/\sqrt{\kappa N_3 \sin \alpha}, \quad A_P = \rho \beta_T g \sqrt{\frac{\kappa \sin \alpha}{N}} \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad a^2 = \frac{4}{3} + \frac{\xi}{v}, \quad \varepsilon = \sqrt{\kappa/v}$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)$ — полная производная, ρ_0 — плотность чистой воды, κ , ν и ξ — коэффициенты диффузии, первой и второй кинематической вязкости.

Решение задачи может быть построено в виде временных рядов, по той же схеме по которой строится решение одномерной задачи с соленоидальным полем скорости.

Предполагая среду несжимаемой, т.е. пренебрегая изменением плотности за счет изменений давления, из уравнения неразрывности можно получить выражение для ди-вергенции скорости, которая в случае плоской границы имеет вид

$$A_V V_\eta = -S_\eta \delta, \quad A_V = g / \sqrt{\kappa N_3 \sin \alpha}.$$

Несмотря на малое значение величины нормальной компоненты скорости, ее значение возрастает с расстоянием от пластины (при этом предельное значение от времени не зависит), в то время как остальные функции задачи убывают. В результате пограничное течение теряет локальный характер. Объяснение такого поведения решения можно найти из анализа предельного перехода от моделей, учитывающих вклад давления в уравнение состояния, к моделям несжимаемой жидкости ($A_P \rightarrow 0$). В этом случае уравнение неразрывности при решении задачи формирования течения необходимо решать относительно давления. При этом на любом конечном интервале времени решение затухает на бесконечности, однако предельный переход ($A_P \rightarrow 0$) оказывается сингулярным, так как зависимость давления имеет вид $P \sim A_P^{-1/2}$, и, несмотря на малое значение сжимаемости жидкости, ее вклад в распределение давления оказывается значительным.

ПОТОКОВЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вабищевич П. Н.

*Институт проблем безопасного развития атомной
энергетики РАН, Москва*

При численном решении краевых задач для параболических уравнений со смешанными производными построение разностных схем заданного качества часто бывает затруднительно. В частности, проблемы возникают при получении монотонных разностных схем и конструировании безусловно устойчивых схем расщепления по пространственным переменным (локально-одномерные схемы). В параболических задачах определенные возможности предоставляет переформулировка задачи, когда в качестве искоемых величин выступают потоки (производные по направлениям). Исходная задача переписывается в виде краевой задачи для системы уравнений в потоковых переменных. Исследуются схемы с весами для параболических уравнений в потоковых координатах. Построены безусловно устойчивые потоковые локально-одномерные схемы первого и второго порядка аппроксимации по времени для параболических уравнений без смешанных производных. Особенностью системы уравнений в потоковых переменных для уравнений со смешанными производными является то, что завязаны друг с другом члены с производными по времени.

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВОК ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА¹

Гусев Е. Л.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

В течение многих десятилетий значительное внимание уделяется исследованию волновых процессов в неоднородных структурах. При исследовании волновых процессов в неоднородных структурах центральной проблемой является проблема направленного конструирования слоисто-неоднородной композиции с заранее заданными энергетическими характеристиками. Данная проблема заключается в таком направленном выборе физико-механической и геометрической структуры композиционной конструкции, при котором ее энергетические характеристики будут предельно близки к требуемым зависимостям. От решения этой проблемы зависят не только эффективность применяемых слоисто-неоднородных композиционных структур, но и расширение возможностей их эффективного использования в новых областях физики и техники.

Анализ существующих методов оптимизации и синтеза слоисто-неоднородных композиционных структур при волновых воздействиях показывает, что большинство из них малоэффективно или малоприспособлено для решения исследуемых задач в рассматриваемой постановке. Многоэкстремальность волновых задач синтеза существенно затрудняет исследование предельных

¹Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований-гранты №№10-08-01301-а, 09-08-98501-а, 12-01-98503-а.

возможностей и характеристик слоисто-неоднородных композиционных структур. Дискретность варьируемых переменных приводит к невозможности построения вариаций, малых в равномерной метрике. Это приводит к неэффективности большинства известных методов. Разрывность решений краевых задач вызывает дополнительные трудности при поиске оптимального решения. Отмеченные трудности приводят к необходимости разработки новых методов исследования предельных возможностей. Это позволит повысить эффективность применения слоисто-неоднородных композиционных структур в различных областях физики, техники, приборостроения.

В вариационной постановке данная проблема связана с разработкой эффективных методов нелокального оптимального синтеза, позволяющих осуществлять построение глобально-оптимальных решений или в определенной мере близких к ним. Одним из наиболее эффективных подходов к решению данной проблемы является разрабатываемый подход, основанный на установленном свойстве внутренней симметрии в структуре оптимальных решений и теории многозначных отображений [1-7]. Показано, что данный подход позволяет исследовать предельные возможности слоисто-неоднородных композиционных структур по достижению требуемого комплекса свойств при волновых воздействиях различной физической природы.

Для определенного круга волновых задач синтеза показано, что во взаимосвязи параметров в слоисто-неоднородных композициях, реализующих предельные возможности, существует внутренняя симметрия, что позволяет существенно уменьшить размерность задачи [1-4]. В таких задачах, которые мы в дальнейшем будем называть опорными, совокупность всех вариантов многослойных структур, реализующих предельные возможности по управлению параметрами волнового поля, оказывается принадлежащей узкому компактному множеству Q . Разработана методика аналитического описания границ выделяемого компактного множества Q . Для опорных задач оптимального синтеза может быть эффективно выделена совокупность всех вариантов

слоистых структур, параметры которых доставляют глобальный минимум функционалу качества, характеризующему близость функциональных характеристик к требуемым.

Разработанная методика исследования предельных возможностей, основанная на теории многозначных отображений и методах продолжения по параметру, позволяет осуществлять эффективное конструирование слоисто-неоднородных структур со сложными характеристиками при волновых воздействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 262 с.
2. Гусев Е.Л., Бакулин В.Н., Марков В.Г. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. М.: Наука-Физматлит, 2008. 277 с.
3. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН, 1996, т.346, № 3, с. 324-326
4. Гусев Е.Л. Об априорном сужении допустимого набора материалов в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН, 1996, т. 349, №3, с. 329-331
5. Gusev E.L. Mathematical methods of investigation limit possibilities of interference coatings for the reaching of the given complex of properties // Optical Interference Coatings, vol.9, OSA, Technical Digest Series (Optical Society of America), 1998, p.286-287.
6. Гусев Е.Л. Свойство внутренней симметрии во взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур при волновых воздействиях // Труды Международной конференции "Симметрия в естествознании", Красноярск, 1998, с.47-48. 7. Gusev E.L. Optimal synthesis methodology of nonhomogeneous structures under the influence of electromagnetic waves // Int. J. Of Applied Electromagnetics and Mechanics, 1999, N 10, p. 405-416.

КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ ОТ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ¹

Гусев Е. Л.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Исследуется проблема оптимального проектирования структурно-неоднородных конструкций с требуемым комплексом свойств при волновых воздействиях различной физической природы. Современные конструкции должны удовлетворять широкому комплексу требований, связанных с ограничениями на вес, стоимость, прочность, надежность, стойкость к воздействию дестабилизирующих факторов различной физической природы и др. Поэтому проблеме оптимального проектирования конструкций с требуемым комплексом свойств в настоящее время уделяется значительное внимание [1-4]. Применение оболочечных конструкций со слоистой структурой обеспечивает сочетание высокой несущей способности с малой массой [4]. Слоисто-неоднородная структура конструкций способствует также достижению необходимых тепло-, звуко-, виброизоляционных и других важных свойств. Это особенно актуально для конструкций авиационной, космической, судостроительной и многих других отраслей современной техники. Применение композиционных материалов, обладающих высокими удельными характеристиками (прочностью, жесткостью) и многими другими необходимыми для ответственных изделий свойствами такими как коррозионная стойкость и др., а также возможностью регулирования

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00634), (№ 09-08-98501), (№ 10-08-01301-а)

физических и механических характеристик в широких пределах, позволяет создавать многофункциональные высокоэффективные слоисто-неоднородные конструкции с заданными параметрами.

Широкое распространение композиционных систем, общность их математического описания приводят к необходимости создания единого подхода к задачам оптимального синтеза композиционных систем. Для широкого круга задач оптимального проектирования композиционных систем с требуемым комплексом свойств при волновых воздействиях ряд параметров, определяющих структуру конструкций могут быть относительно малыми. В этом случае структуру исследуемых задач оптимального синтеза можно значительно упростить на основе асимптотического разложения структуры композиционной системы по степеням определяющих параметров и применения соответствующих асимптотических методов.

На основе полученных асимптотических представлений функции Гамильтона проведен конструктивный анализ оптимальной структуры слоисто-неоднородных композиционных систем при достаточно малой толщине конструкции. Установлены качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальной слоисто-неоднородной структуре. Получены аналитические соотношения на верхнюю границу для общей толщины слоисто-неоднородной композиционной системы при выполнении которых полученные асимптотические представления являются достаточно точными.

Полученные асимптотические соотношения могут быть применены для эффективного проектирования оптимальных конструкций в случае, когда их общая толщина является относительно небольшой, а также при решении задач продолжения оптимальных решений по параметру, которым является общая толщина конструкции. В этом случае, построив множество глобально-оптимальных решений для случая малой толщины конструкции $U^*(1)$ по разработанной методике, применяя методы продолжения по параметру, можно эффективно постро-

ить множество глобально-оптимальных решений для конструкций, толщина которых не является достаточно малой. Разработанные асимптотические представления могут быть применены для решения задач экранирования сейсмических волн слоисто-неоднородными композиционными сейсмозащитными экранами [5-7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука. 1993. 262 с.
2. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН. 1996. Т.346. № 3. С. 324-326.
3. Гусев Е.Л. Качественные закономерности структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза многослойных конструкций при воздействии упругих волн// Доклады РАН. 1998. Т. 368. № 1. С.53-56.
4. Гусев Е.Л., Бакулин В.Н., Марков В.Г. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Наука-Физматлит, 2008.-256 с.
5. Гусев Е.Л. Применение слоисто-неоднородных композиционных систем для экранирования сейсмических волн//Сб. трудов VIII Российской национальной конференции по сейсмической безопасности сооружений и городов и сейсмическому районированию (с международным участием) (РНКСС'2009), Сочи. 2009. с. 128-129.
6. Гусев Е.Л. Качественные закономерности структуры слоисто-неоднородных экранов, обеспечивающих предельное гашение сейсмических волн// Сб. трудов VIII Российской национальной конференции по сейсмической безопасности сооружений и городов и сейсмическому районированию (с международным участием) (РНКСС'2009), Сочи. 2009, с. 130-132.

7. Гусев Е.Л. Некоторые вопросы решения задач экранирования сейсмических волн слоисто-неоднородными структурами// Вопросы инженерной сейсмологии (Межд. журнал Института Физики Земли РАН им.О.Ю. Шмидта), 2010, т. 37, № 2, с. 48-73.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ ИГР В ФОРМЕ ЗАДАЧ КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Данилов Н. Н.

Кемеровский государственный университет, Кемерово

Доклад посвящен моделированию нового класса задач конфликтного управления – динамических матричных игр на дискретном временном отрезке $[0, T]$. Динамика игры описывается соотношениями:

$$x(t+1) = f(x(t), u_1^t, u_2^t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

$$x(0) = x^0,$$

$$u_1^t \in U_1^t, u_2^t \in U_2^t \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

где $x(t) \in R^k$ — фазовое состояние системы, $U_1^t \subset R^{l_1}$, $U_2^t \subset R^{l_2}$ — конечные множества значений управляющих параметров первого и второго игроков соответственно.

В каждой точке множества достижимости системы (1)-(3) определена матрица выигрышей $h(x(t)) = a \|a_{ij}(x(t))\|_{max}$ первого игрока. Цель первого игрока – возможная максимизация значения функции

$$F(x(\cdot), I, J) = \sum_{t=1}^T a_{ij}(x(t)),$$

где $I = \{i_t, t = 1, \dots, T\}$, $J = \{j_t, t = 1, \dots, T\}$ — последовательности чистых стратегий игроков, выбираемых ими в матричных играх $h(x(t))$, $t = 1, \dots, T$, $x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_1, u_2) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\}$ — траектория системы (1)–(2), соответствующая допустимым управлениям

$$u_1 = \{u_1^0, \dots, u_1^{T-1}\},$$

$$u_2 = \{u_2^0, \dots, u_2^{T-1}\}.$$

Целью второго игрока является возможная минимизация значения функции (4).

Чистой комбинированной стратегией первого (второго) игрока называется любое отображение $\phi_1(\cdot)(\phi_2(\cdot))$, которое каждому состоянию $x(t)$ ставит в соответствие некоторый номер $i_t(j_t)$ строки (столбца) матрицы $h(x(t))$ и некоторое допустимое на t -м шаге управление $u_1^t \in U_1^t$ ($u_2^t \in U_2^t$), $t = 0, \dots, T-1$.

Множества всех таких стратегий игроков обозначаются символами Φ_1, Φ_2 .

Совокупность

$$\Gamma(x^0, T) = \langle (1) - (2); \Phi_1, \Phi_2; F \rangle$$

называется динамической матричной игрой.

В докладе обсуждаются вопросы существования оптимальных (в смысле принципа максимина) чистых и смешанных комбинированных стратегий в игре $\Gamma(x^0, T)$, а также возможности аналогичной формализации динамических биматричных игр и динамических игр с природой.

Введенные здесь классы динамических игр существенно расширяют практическое применение матричных, биматричных игр и игр с природой.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ¹

Попов С. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Рассматриваются $2n$ -параболические уравнения с меняющимся направлением времени с общими условиями склеивания. Для таких задач гладкость начальных и граничных данных не обеспечивают принадлежность решения гильбертовским пространствам [1]. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи, указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Применение единого подхода при общих условиях склеивания (сопряжения) для таких уравнений дает показать, что нецелый показатель $p - [p]$ гильбертовского пространства $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

В работах [2,3] явно представлены условия $[p]$ -разрешимости для краевых задач для $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для доказательства $[p]$ -разрешимости при $n = 2$ и $n = 3$ были рассмотрены общие диагональные условия склеивания, более того, были найдены зависимости показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания, а при $n \geq 4$ были рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая $2n - 1$ -ую производную.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609)

Пространственно нелокальные краевые задачи для параболических уравнений, а также для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [4,5].

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы корректности пространственно нелокальных краевых задач для $2n$ -параболических уравнений и систем с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
2. Попов С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
3. Попов С.В., Поталова С.В. Гельдеровские классы решений $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2009. Т.424, №5. С.594–596.
4. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественная серия, 2008, №3(62). С. 165–174.
5. Туласынов М.С. Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени с нелокальными граничными условиями Самарского // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А.И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. С. 279-292.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ВОД И МОРСКОГО ЛЬДА СЕВЕРНОГО ЛЕДОВИТОГО ОКЕАНА

Яковлев Н. Г.

Институт вычислительной математики РАН, Москва

Современные численные модели [1] (АОМIP-Arctic Ocean Model Intercomparison Project, Международный проект по сравнению моделей Северного Ледовитого океана, см. информацию на сайте <http://www.whoi.edu/page.do?pid=29836>) достигли замечательных успехов в воспроизведении состояния Северного Ледовитого океана (СЛО). Дается описание современных формулировок моделей океана и морского льда, используемых в климатических исследованиях. В качестве иллюстрации приводятся некоторые результаты автора по воспроизведению состояния СЛО в период 1948-2011гг [2].

Иногда создается впечатление, что дальнейший прогресс в решении задачи связан исключительно с совершенствованием вычислительных технологий. Между тем Северный Ледовитый океан имеет ряд физических особенностей, создающих принципиальные трудности при его моделировании.

Так, важными физическими особенностями СЛО являются маленький бароклинный радиус деформации Россби (порядка 3-5км), маленький масштаб Райнса (также порядка 3-5км на материковом склоне), и сочетание в одном регионе как очень сильно устойчивой стратификации в летний сезон (в связи с формированием теплого и пресного верхнего слоя), так и неустойчивой стратификации с зонами глубокой конвекции, проникающей до дна (в Норвежско-Гренландском море). Показывается, что в силу физических особенностей СЛО в настоящее время оптимальным является разрешение порядка 15-20км. При этом желательно рассматривать СЛО как часть Мирового океана в глобаль-

ной модели, чтобы исключить влияние граничных условий на «открытых» границах.

Далее, увеличение пространственного разрешения приводит уже сейчас к ситуации, когда шаг сетки модели становится сравнимым с размером отдельной льдины. В этой ситуации возникает вопрос о применимости предположений о реологии морского льда, описывающей силы, возникающие в ледовом покрове вследствие взаимодействия отдельных льдин между собой. Напомним, что базовая идея, на которой построены современные модели динамики льда, состоит в том, что дрейфующий морской лед можно рассматривать как гранулированную (или сыпучую) среду с большим количеством гранул на масштабе пространственного осреднения. В этом случае удастся применить достижения механики сыпучих сред и описать дрейфующий и деформирующийся лед как течение жидкости с вязко-пластичной реологией [3] (часто используется вычислительный прием, преобразующий систему уравнений для компонент тензора скоростей деформации к эволюционному виду, который трактуется как упруго-вязко-пластичная реология [4,5]). Современные исследования показывают, что увеличение пространственного разрешения вплоть до 2км способствует улучшению воспроизведения состояния ледового покрова [6] в рамках различных вариантов вязко-пластичной реологии. Однако можно ли использовать описание ледового покрова как сплошной среды при более высоком пространственном разрешении? По-видимому, нет. Дальнейшее увеличение пространственного разрешения моделей должно сопровождаться переходом к принципиально новым физическим концепциям.

Необходимо также отметить проблему описания пограничного слоя «океан-лед». Увеличение вертикального разрешения наталкивается на проблему построения численной модели – как выбирать вертикальную сетку, если глубина подводной части торосов достигает 10м и более? Неудивительно, что в этом случае относительно грубое пространственное разрешение может оказаться более предпочтительным, чем формально более точное

разрешение по вертикали, для которого не существует адекватного описания по существу трехмерного пограничного слоя.

В заключении дается краткий обзор использования новых вычислительных технологий для моделирования СЛО, таких, как:

- Реализация существующих моделей, основанных на структурированных сетках, на массивно-параллельных компьютерах с числом процессоров порядка сотен тысяч.
- Развитие техники сопряженных уравнений для оценки критических параметров модели и внешнего воздействия.
- Новые математические методы и вычислительные технологии оценки качества моделей, основанные на последних достижениях математической теории климата.
- Разработка принципиально новых численных моделей, основанных на других физических приближениях. Отказ от приближений гидростатики, Буссинеска, несжимаемости. Отказ от приближения тонкого сферического слоя. Разработка глобальных моделей на неструктурированных и адаптивных сетках, способных давать решения высокой точности в интересующих районах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Proshutinsky A., Steele M. and others Multinational effort studies differences among Arctic Ocean models // EOS. 2001. V. 82. No 51. P. 637-644.
2. Яковлев Н.Г. К вопросу о воспроизведении полей температуры и солености Северного Ледовитого океана. Известия РАН. ФАО, 2012, том 48, № 1, с. 1–17.
3. Hibler W.D. A dynamic-thermodynamic sea ice model // J. Phys. Oceanogr. 1979. V.9. N 4. P. 815-846.
4. Hunke E.C and Dukowicz J.K. An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics // J. Phys. Oceanogr. 1997. V. 27. No 9. P. 1849-1867.
5. Hunke E.C. Viscous-plastic sea ice dynamics in the EVP model: Linearization issues // J. Comput. Phys. 2001. V. 170. No 1. P. 18-38.
6. Wang K. and Wang C. Modeling linear kinematic features in pack ice // J. Geophys. Res. 2009. V. 114. C12011, doi:10.1029/2008JC005217.

Секция I. Математическое моделирование прикладных проблем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ИЗОЛЯЦИИ ПОЛИМЕРНОГО ТРУБОПРОВОДА ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Акимов М. П.¹, Мордовской С. Д.¹, Старостин Н. П.²

¹ Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

² Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Для эффективного решения проблем энергосбережения и повышения ресурса трубопроводов в настоящее время в России широко внедряются в практику строительства тепловых сетей трубопроводы с пенополиуретановой (ППУ) изоляцией в полиэтиленовой оболочке типа «труба в трубе». Преимущества такого способа укладки труб из полимерных материалов в заводской теплоизоляции очевидны: они не подвержены коррозии, теплоизоляция не разрушается вследствие увлажнения грунтовыми водами, что позволяет использовать их как бесканальные подземные. Гибкость таких труб позволяет поставлять их на объекты длинномерными отрезками необходимой длины, проходить повороты трассы без применения фасонных деталей. Кроме того, такие трубы не требуют компенсаторов. Благодаря малому весу труб монтажные работы осуществляются без применения грузоподъемной техники. Из опыта эксплуатации в Европе известно, что срок службы таких труб составляет не менее 30 лет.

Использование таких перспективных трубопроводов в регионах с вечномерзлыми грунтами весьма ограничено. Такое положение связано, прежде всего, с недостаточными данными по прогнозированию состояния вечномерзлых грунтов при воздействии подземных теплопроводов в различных климатических условиях

На основе решения двумерной задачи Стефана в полярных координатах исследуется процесс оттаивания-промерзания грунта вокруг подземного трубопровода теплоснабжения из сшитого полиэтилена с тепловой изоляцией из пенополиуретана в полиэтиленовой оболочке, эксплуатируемой в условиях Якутии. Приводятся результаты прогнозирования теплового режима грунта в зависимости от толщины теплоизоляции. Предлагается определять минимальную толщину теплоизоляции трубопровода, необходимую для обеспечения устойчивости теплосети, из условия сохранения глубины деятельного слоя до начала отопительного сезона, в августе. Расчетами определена минимальная толщина теплоизоляции, обеспечивающая стабильную глубину оттаивания грунта около действующего трубопровода теплоснабжения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ИСТЕЧЕНИЯ НЕФТИ ИЗ АВАРИЙНОГО ТРУБОПРОВОДА

Аммосова О. А.¹, Корнилова З. Г.²

¹*Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск*

²*Институт физико-технических проблем Севера СО РАН
им. В.П. Ларионова, Якутск*

Как показывают исследования возможности технических систем внутритрубной диагностики, а также систем обнаружения утечек (СОУ) размеры обнаруживаемых коррозионных повреждений сравнительно большие, а чувствительность СОУ низка для регистрации минимального уровня утечки и определения ее координат. Кроме того, по нормативным требованиям периодичность внутритрубной диагностики принято проводить через каждые три года один раз, в исключительных случаях предусматривается ежегодная ее периодичность. Исходя из этого, нами выполнен расчет объема истечения нефти через малое отверстие (свищ).

Характер и частота аварийных повреждений трубопроводных систем существенно зависит от многих факторов, в том числе от вида транспортируемой среды.

Для магистральных нефтепроводов характерными повреждениями являются микротрещины, свищи, трещины с различной степенью раскрытия и полный прорыв трубопровода (гильотинный разрыв). Эти повреждения можно условно разделить на три группы: свищи, прорывы средних размеров и гильотинный разрыв. Численные значения вероятности появления того или иного типоразмера повреждения принимаются на основании обобщения статистических данных уже происшедших аварий. Чем больше банк таких данных, тем точнее полученные значения вероятности появления определенного размера повреждения.

Суммарное ожидаемое количество аварийного разлива нефти определяем по формуле [1, 2]:

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

где V_1 — объем нефти, вытекший в напорном режиме при работающих насосах, т.е. с момента повреждения до остановки перекачки; V_2 — объем нефти при самотечном опорожнении с момента остановки перекачки до закрытия задвижек; V_3 — объем нефти при самотечном опорожнении отсеченного линейными задвижками аварийного участка.

Такое разделение на стадии с точки зрения протекающих физических процессов достаточно условно, поскольку движение нефти в самом общем случае описывается на всех стадиях одними и теми же физическими законами, которые не зависят, например, от степени закрытия запорной арматуры.

Рассмотрим расчет объема нефти V_1 . Напорный режим характеризуется тем, что появление отверстия в теле трубы (при аварии) не сопровождается мгновенным отключением насосной станции (НПС) и в течение некоторого времени нефти через повреждение будет истекать при работающих насосах, как часто и бывает на практике. При чем это время обосновывается в каждом конкретном случае.

В случае малых отверстий (свищей) расход нефти через повреждение настолько мал по сравнению с расходом в нефтепроводе, что напорная его характеристика практически не изменится. При этом нефть через свищ будет истекать при установившемся режиме [3].

Расчеты выполнены для свищей площадью: 6,28; 12,56; 17,84 и 25,12 мм² с учетом вероятности ($f_1 = 0,85$) появления дефекта в виде свища. Транспортировка продукта в нефтепроводе с производительностью перекачки 15 и 30 млн.т/год, разница высот 50 и 100 м.

Как и ожидалось, объемы утечки нефти в течении года с увеличением объема транспортируемой нефти увеличиваются, а также увеличиваются с увеличением размера свища.

Таким образом, одной из серьезных проблем обеспечения экологической безопасности ППМН через р. Лена является предотвращение "капельного" просачивания нефти через малые дефекты (свищи).

ЛИТЕРАТУРА

1. РД 03-418-01. Методические указания по проведению анализа риска опасных производственных объектов.
2. Методическое руководство по оценке степени риска аварий на магистральных нефтепроводах. Серия 27. – М.: ГУП «НТЦ «Промышленная безопасность». – 2002. – Вып. 1. – 118 с.
3. Антипьев В.Н., Налобина Е.В., Налобин И.Н. Аварийное истечение нефти из трубопровода при напорном режиме // Безопасность труда в промышленности. – 2005. – С. 37–41.

РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МУФТОВОЙ СВАРКИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Аммосова О. А.¹, Сивцева В. В.², Старостин Н. П.¹

¹Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

²Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Согласно нормативным документам строительство газопроводов из полимерных труб при помощи соединительных деталей с закладными нагревателями может производиться при температуре окружающего воздуха от минус 15 °С до плюс 45 °С. При более широком интервале температур сварочные работы рекомендуется выполнять в помещениях (укрытиях), обеспечивающих соблюдение заданного температурного интервала. Однако такая сварка связана с большими энергетическими непроизводительными затратами и длительными подготовительными работами, что недопустимо в аварийных ситуациях. В зимнее время прекращение газоснабжения в течение 2–6 часов может привести к чрезвычайным ситуациям.

На основе теоретического исследования теплового режима сварки в условиях низких температур воздуха внесены изменения в существующий технологический режим. Расчетным путем определены мощность источника тепла, продолжительности предварительного прогрева с помощью закладного нагревателя и продолжительность технологической паузы при различных температурах воздуха ниже нормативных, обеспечивающие в зоне термического влияния допустимую температуру (20 °С). Определена также толщина теплоизоляции, обеспечивающая протекание процесса охлаждения, соответствующего допустимым температурам воздуха. Приводится последовательность технологических операций, необходимых для осуществления сварки при низких температурах. Сваркой полимерных труб при температурах воздуха ниже нормативных и проведением исследований сварного соединения установлена эффективность предлагаемого технологического режима сварки.

Поскольку в процессе сварки происходит оплавление и отверждение материала в сварном соединении, то для определения динамики температурного поля в системе «соединительная деталь - труба» необходимо решать многомерную задачу Стефана в цилиндрических координатах, учитывающую скрытую теплоту фазового перехода в интервале температур.

Разработан численный алгоритм решения двумерной задачи

Стефана, описывающего нестационарное температурное поле в сварном соединении. Алгоритм программно реализован в среде “Delphi”. Программа позволяет оперативно изменять входные данные и получать результаты расчета в удобном для использования виде.

Разработанная математическая модель, алгоритм и программа расчета температурного поля могут быть рекомендованы для определения технологических режимов сварки полимерных труб с помощью муфт с закладными нагревателями при температурах окружающего воздуха ниже нормативных.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА СТЫКОВОЙ СВАРКИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ ПОДОГРЕВОМ

Аммосова О. А., Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

В настоящее время сварку полиэтиленовых труб (ПЭ) рекомендуется проводить при температуре окружающего воздуха (ОВ) от минус 15 до плюс 45 °С [1]. При температурах ниже нормативных сварочные работы рекомендуется выполнять в помещениях (укрытиях), обеспечивающих соблюдение заданного температурного интервала. Однако такая сварка связана с большими энергетическими, непроизводительными затратами и длительной подготовкой, что недопустимо в аварийных ситуациях. Актуальной проблемой является разработка методов и средств оперативной сварки полиэтиленовых труб в зимних условиях в регионах с холодным климатом, где температуры ОВ достигают значений ниже минус 15 °С.

Возможности существующей технологии контактной тепловой сварки ПЭ труб используются недостаточно полно. При сварке в условиях низких температур не используется теплота,

сохранившаяся при воздействии нагревательным инструментом. В ИПНГ СО РАН проводятся исследования возможности стыковой сварки ПЭ труб при температурах окружающего воздуха ниже нормативных на основе существующей технологии.

Предлагается сварку при низких температурах проводить как без предварительного подогрева, так и с предварительным подогревом [2, 3]. Стыковая сварка без предварительного подогрева подробно изложена в работах [2]. Основная идея этого подхода заключается в увеличении продолжительности воздействия нагревательным инструментом для обеспечения необходимого объема расплава и использовании теплоизоляционной камеры при охлаждении. Продолжительность нагрева определяется на основе расчета нестационарного температурного поля в свариваемых трубах из условия соответствия границы проплавления значению, рекомендуемому для сварки труб при допустимой температуре ОВ. Размер теплоизоляционной камеры определяется расчетным путем из условия обеспечения такого же темпа охлаждения, что и при допустимых температурах окружающего воздуха. Многочисленные механические испытания показывают, что кратковременная прочность такого соединения не уступает прочности соединения, полученного в условиях нормативных температур. При ускоренных испытаниях в поверхностно-активной среде образцов, полученных при сварке при температурах ниже нормативных без предварительного подогрева и охлаждении в теплоизоляционной камере, наблюдались случаи преждевременного разрушения по зоне сплавления. Предполагается, что причиной такого разрушения являются повышенные значения температурных напряжений, вследствие неравномерного нагрева.

При сварке без предварительного подогрева в условиях низких температур при увеличении продолжительности воздействия нагревательным инструментом и получении необходимого объема расплава свариваемые трубы подогреваются на небольшое расстояние от стыка. Неоднородность распределения температуры по длине трубы способствует повышению напряжений в

зоне сплавления, которые не могут релаксировать и могут привести к зарождению и распространению в этой зоне трещин. В связи с этим можно предположить, что для получения прочного сварного соединения при температурах воздуха ниже нормативных следует подогреть до допустимой температуры трубу на некоторое расстояние от торца, обеспечить однородность распределения температуры для снижения напряжений и провести нагрев торцов по регламентированному технологическому режиму, а при охлаждении использовать теплоизоляционную камеру.

Сварка ПЭ труб с предварительным подогревом заключается в доведение температуры в зоне термического влияния свариваемых участков трубы до значения регламентированного интервала температур ОВ при проведении сварочных работ. Предварительный подогрев производится нагретым инструментом непосредственно перед сваркой путем ввода на глубину равную пятикратной толщине стенки трубы. Продолжительность подогрева выбирается таким образом, что распределение температуры стенки трубы неоднородно по радиальной переменной. Такой прием позволяет сделать технологическую паузу необходимой для обеспечения более однородного распределения температуры в допустимом для сварки диапазоне температур.

Математическое моделирование теплового процесса сварки ПЭ труб проводилось с учетом теплового воздействия грата, формоизменения труб и теплоты фазового перехода. Для учета теплоты фазового перехода обычно используют классическую постановку задачи Стефана. В этой постановке предполагается, что фазовый переход происходит мгновенно и есть четко выраженная граница фазового перехода [4]. В полиэтилене не существует такой четко выраженной границы, фазовый переход происходит в интервале температур. В данной работе математическое моделирование теплового процесса при сварке ПЭ труб производится с учетом фазового перехода в интервале температур на основе решения задачи Стефана в неклассической постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. СП 42-103-2003. Проектирование и строительство газопроводов из полиэтиленовых труб и реконструкция изношенных газопроводов, М.: Полимергаз, ФГУП ЦПП, 2004. – 86 с.
2. Старостин Н.П., Аммосова О.А. Регулирование теплового процесса при сварке полиэтиленовых труб для газопроводов при низких климатических температурах // Автоматизация и современные технологии. – 2009. – № 5. – С. 21 – 27.
3. Пат. РФ № 2343331 RU F16L 13/00, 47/00. Способ сварки полимерных труб / Старостин Н.П., Герасимов А.И., Аммосова О.А.; патентообладатель Ин-т проблем нефти и газа СО РАН. – № 2006144681/06; заявл. 14.12.2006; опубл. 10.01.2009, Бюл. № 1.
4. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987.- 164 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА ПРИВАРКИ ГИЛЬЗЫ В ПОЛИМЕРНЫХ АРМИРОВАННЫХ ТРУБАХ

Андреев Б. И., Аммосова О. А., Старостин Н. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В настоящее время одной из актуальных задач нефтегазовой отрасли является всестороннее изучение возможности использования армированных полимерных труб (АПТ) в газораспределительных сетях давлением до 1,2 МПа и выше. Для обоснования эффективности и изменения нормативной базы по применению АПТ, отстающей от требований производства, наряду с исследованием механического поведения трубопроводов в различных условиях эксплуатации разрабатываются способы соединения армированных труб.

АПТ состоит из трех слоев: внутреннего и внешнего из полиэтилена и промежуточного – армирующего, полученного намоткой арамидными нитями. Наличие армирующих нитей определяет требование, чтобы обрезанный торец трубы был защищен от окружающей и транспортируемой среды. В данной работе рассматривается способ защиты армирующих нитей, заключающийся в соединении на концы АПТ специальных сварочных гильз с закладными нагревателями.

Согласно нормативным документам сварку полиэтиленовых труб для газопроводов можно проводить при температурах окружающего воздуха (ОВ) от -15°C до 45°C . Для разработки методов и средств оперативной сварки АПТ в регионах с холодным климатом, где температуры ОВ достигают значений ниже минус 15°C , одним из основных этапов является математическое моделирование теплового процесса приварки гильзы в армированную трубу. Рассматривается осесимметричная задача теплопроводности с разрывными коэффициентами в трубе с источником тепла, распределенным по длине гильзы. Задача решается методом конечных разностей с использованием однородной разностной схемы. Приводятся результаты решения модельной задачи по приварке гильзы в полиэтиленовую армированную трубу при различных температурах окружающего воздуха.

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТОВ В ГАЗОВЫХ СКВАЖИНАХ

Аргунова К. К., Бондарев Э. А., Рожин И. И.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Технологические режимы добычи газа в северных регионах в значительной степени определяются такими природными факторами как низкие климатические температуры и наличие мощной

толщи многолетней мерзлоты. Их следствием являются осложнения, обусловленные возможностью образования гидратов природных газов как в призабойной зоне, так и в стволе скважин. Образование гидратов в призабойной зоне приводит к снижению продуктивности скважин, тогда как их образование в стволе может привести к полному прекращению подачи газа.

Для описания образования и отложения гидратов в скважинах и газопроводах в работе [1] была предложена квазистационарная математическая модель, в которой движение реального газа в трубах описывается в рамках трубной гидравлики, а динамика образования гидрата – в рамках обобщенной задачи Стефана, в которой температура фазового перехода «газ - гидрат» существенно зависит от давления в потоке газа. В настоящей работе эта модель была модифицирована на случай зависимости коэффициента конвективного теплообмена от изменяющейся во времени площади проходного сечения трубы.

На примерах отбора газа из Средне-Вилуйского и Мессояхского месторождений показано, что основными параметрами, определяющими полную закупорку газовых скважин гидратами, являются глубина скважины, пластовые давление и температура, дебит газа и его состав, геотермические условия и состояние скважины перед пуском. Анализ результатов показал, что образование гидратов в скважинах, даже при низких пластовых температурах и мощном слое многолетней мерзлоты, занимает достаточно большой промежуток времени, позволяющий оперативно предотвратить возникновение аварийных ситуаций в системах газоснабжения.

Литература

1. Бондарев Э.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. – 272 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРОЗОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧ В УСЛОВИЯХ СЛОИСТОЙ МНОГОЛЕТНЕЙ МЕРЗЛОТЫ

Артемяева Е. С., Григорьев Ю. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе разработана и численно реализована математическая модель электрических перенапряжений в линиях передач в условиях многолетней мерзлоты, наведенных ближними разрядами молнии. Рассмотрена модель волны тока и напряжения в линии электропередачи (ЛЭП), находящегося на высоте d над многолетней мерзлотой, при разряде молнии вблизи линии передач. Грозовое облако моделируем точечным зарядом Q , помещенным в диэлектрическую среду ε_1 , отделенную от проводящей среды слоем (многолетняя мерзлота) с другой диэлектрической проницаемостью ε_2 и толщиной l (Рис.1). Будем предполагать, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

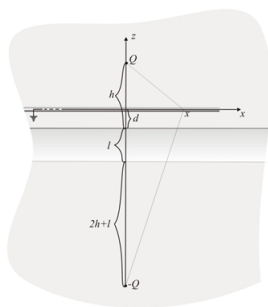


Рис. 1. Геометрия модели

Введем систему координат, где заряд находится на высоте $h - d$ от начала координат, ось x направлена вдоль бесконечной линии передач. Расстояние h является для данной задачи высотой облака до земли, d — высота ЛЭП над землей, b — расстояние от трубы до нижней границы мерзлоты, $b - h = l$ — толщина мерзлоты. Разряд молнии соответствует мгновенному исчезновению точечного заряда. Тогда, для определения силы тока и напряжения в линии передачи после разряда грозового облаков, получаем задачу Коши для системы телеграфных уравнений:

Главным отличием данной работы от предыдущих работ [1-3] является использование в модели электростатического потенциала точечного заряда в слоистой среде:

$$f(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (h-d)^2}} - \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{\sqrt{x^2 + (h-d+2a+2lk)^2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{\sqrt{r^2 + (h-d+2b+2lk)^2}} \right]$$

Это выражение выводится с использованием метода, изложенного в [4,5].

Расчет ВТН сводится к решению следующей задачи Коши для системы телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} u_x + Li_t + Ri = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ i_x + Cu_t + Gu = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ i(x, 0) = 0, \end{cases}$$

где в качестве начального потенциала берется приведенное выше выражение для $f(x)$.

В таблице 1 представлены результаты численной реализации при определенных параметрах модели.

Высота d , м	Максимальное значение волны тока i , А	Максимальное значение волны напряжения u , МВ
0	0,46227	0,76
5	1,33218	2,05
10	2,16427	3,31

Таблица 1. Максимальные значения волны тока при различных высотах d ЛЭП над землей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю.М., Орлова М.Н. Влияние ближнего разряда молнии на линию передачи // Вестник СибГАУ. – 2009. – Вып 1(22). Ч. 1. – С. 23-26.
2. Григорьев Ю.М., Орлова М.Н. Индуцированные перенапряжения в линии передач при разряде молнии между облаками // Математические заметки ЯГУ. Том 16. Выпуск 1. – Якутск, 2009 – С.128-141.
3. Григорьев Ю.М., Орлова М.Н. Математическая модель волны тока и напряжения в линии передачи // Вестник Поморского университета. Серия "Естественные науки". – 2010. – №1. – С.81-87.
4. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. - М.: Физматлит, 1963. - с. 433 с.
5. Смайт В. Электростатика и электродинамика. - М.: Иностранная литература, 1954. - 604 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Ахметова О. В., Заманова Ф. Г.

Институт прикладных исследований Академии наук
Республики Башкортостан, Стерлитамак

Классическое описание полей давления в пористой среде базируется на уравнении пьезопроводности [1]. Однако учет инерционных свойств среды показывает, что необходимо использовать телеграфное уравнение [2].

Задача о фильтрационных волновых полях в неоднородной анизотропной пористой среде на основе телеграфного уравнения может быть решена путем использования «в среднем точного» асимптотического метода, идеи которого изложены в работах [1, 3].

Рассматривается неоднородная среда, представленная тремя областями с плоскими границами раздела $z = \pm 1$, перпендикулярными вертикальной оси. Покрывающий и подстилающий пласты — слабопроницаемые в горизонтальном направлении, средняя область толщины 2 ($-1 < z < 1$) — хорошо проницаемая и в горизонтальном и в вертикальном направлениях. Для простоты течение полагается линейным (по оси x). В окружающих породах преобладает вертикальная проницаемость в сравнении с горизонтальной настолько, что можно пренебречь членом со второй производной по горизонтальной координате x в уравнении для окружающей среды. Далее положим, что свойства подстилающих и покрывающих пластов идентичны. В соответствии с этим постановку задачи можно упростить, воспользовавшись условием симметрии $\partial P / \partial z (z = 0) = 0$. Для упрощения все коэффициенты в уравнениях и граничных условиях по возможности приравнены к единице.

Функция давления P каждой из областей представляется асимптотической формулой по параметру ε

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \theta, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \theta_1.$$

Выражения для нулевого приближения имеют вид:

$$P^{(0)} = P_0 \exp(-\alpha x) \cos(\omega t - \beta x),$$

$$P_1^{(0)} = P_0 \exp(-\alpha x - \gamma_1(z - 1)) \cos(\omega t - \beta x - \delta(z - 1)),$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2} (\sqrt{\omega^2 + 1} - \omega)}$, $\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2} (\sqrt{\omega^2 + 1} + \omega)}$.

Выражения для первого коэффициента разложения

$$P^{(1)} = \frac{P_0}{6} \exp(-\alpha x) \left[\frac{x(\alpha\gamma_1 + \beta\delta + \delta\alpha - \beta\gamma_1)}{\alpha^2 + \beta^2} + 1 - 3z^2 \right] \sqrt{2\delta(\delta + \gamma_1)} \times \\ \times \cos \left[(\omega t - \beta x) - \arctg \frac{\delta - \gamma_1}{\delta + \gamma_1} \right],$$

$$P_1^{(1)} = \frac{P_0}{6} \exp(-(\alpha x + \gamma_1(z - 1))) \left[\frac{x(\alpha\gamma_1 + \beta\delta + \delta\alpha - \beta\gamma_1)}{\alpha^2 + \beta^2} - 2 \right] \cdot \\ \cdot \sqrt{2\delta(\delta + \gamma_1)} \times \cos \left[(\omega t - \beta x - \delta(z - 1)) - \arctg \frac{\delta - \gamma_1}{\delta + \gamma_1} \right],$$

определены в предположении, что осредненное по толщине пласта значение остаточного члена, равно нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметова О.В., Филиппов А.И., Филиппов И.М. Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимптотическом приближении. *Механика жидкости и газа*. – 2012, №3, - С. 89 – 100
2. Филиппов А.И., Короткова К.Н. Волновые поля давления в пласте и скважине. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2009. Т. 12. № 1
3. Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Ахметова О.В., Горюнова М.А. Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе «в среднем точного» решения // *Прикладная механика и техническая физика*, 2010, № 3, с. 84-93

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ ФОРМАЛЬНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА

Ахметова О. В., Филиппов А. И.

*Институт прикладных исследований Академии наук
Республики Башкортостан, Стерлитамак*

При практическом использовании математических методов большое значение имеют задачи по определению осредненных по области значений физических параметров, например, определение средней температуры жидкости в трубе [1], полей давления при фильтрации растворов в пористой среде [2], и т.д. Такие задачи могут быть успешно решены на основе асимптотических методов при специальном выборе формального параметра асимптотического разложения. При этом возникает необходимость построения нулевого и первого коэффициентов разложения, погранслоиных функций и оценочных выражений для остаточного члена.

Установлено, что нулевой коэффициент разложения при этом описывает усредненные по пространственным областям значения физических параметров и в частных случаях найденные решения совпадают с выражениями, полученными по схеме сосредоточенной емкости. В более сложных случаях нелинейных задач и задач с переменными коэффициентами построение нулевого коэффициента представляет оригинальную процедуру осреднения, которая, к сожалению, не может быть осуществлена на основе осреднения исходных уравнений.

Построение первого коэффициента разложения требует дополнительных условий, которые получены на основе тривиального решения осредненной задачи для остаточного члена, и в этом смысле соответствующие выражения для нулевого и первого приближения названы “в среднем точными”. Обоснование этого факта важно для концептуальной оценки близости искомого точного решения и асимптотического.

Выражение для нулевого коэффициента разложения позволяет определить “погрешность” осредненных значений физических параметров. Выражение для первого коэффициента на самом деле более детально описывают поля физических параметров в области осреднения. Кроме того, именно из этих выражений следуют стационарные решения задач, полученные при формальном устремлении времени к бесконечности. В этом смысле построение первого коэффициента разложения представляет

важнейшую задачу определения стационарных решений ряда задач теории теплопроводности.

Разработанный метод открывает перспективы решения ряда новых практически важных задач сопряжения, возникающих в теории тепло- и массообмена в нефтегазовых пластах и скважинах, содержащих нелинейные уравнения или уравнения в частных производных с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filippov A. I., Mikhailov P.N., Akhmetova O.V., Gorynova M.A.* Analysis of the temperature field of cylindrical flow based of an on-the-average exact solution. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics . – 2010. – Vol. 51, № 3. – pp. 369 – 376.
2. *Ахметова О.В., Филиппов А.И., Филиппов И.М.* Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимптотическом приближении. Механика жидкости и газа. – 2012, №3, - С. 89–100

УПРАВЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫМИ ПОТОКАМИ

Бушко Д. А.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В середине двадцатого века в городах началась экстенсификация транспортных потоков, что привело к перегрузке улично-дорожных сетей (УДС). Очевидно, что изначально увеличение числа транспортных средств приводит к интенсификации пассажирского потока, но при перенасыщении УДС транспортными средствами (ТС) наблюдается обратный эффект, при котором транспортная система города не справляется с пассажирским потоком. При этом основную роль в экстенсификации играет личный автотранспорт. Особенно это заметно в мегаполисах, на

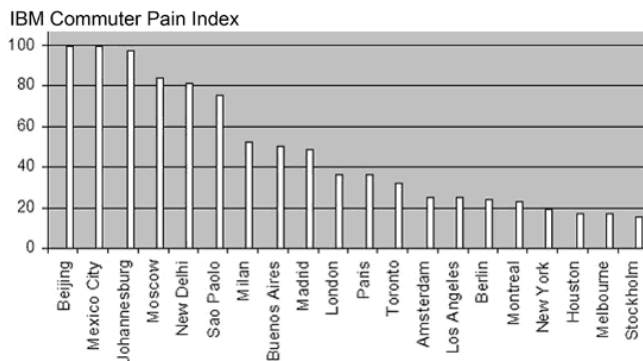


Рис. 1. Результаты исследований IBM за 2010 год

рис. 1 приведены оценки загруженности транспортных сетей, полученные компанией IBM в рамках программы Commuter Pain Survey.

Транспортные сети большинства крупных городов во всем мире подвержены одним и тем же проблемам: очень высокая плотность транспортных потоков, низкая средняя скорость движения, значительная перегруженность улично-дорожной сети, трудности движения из-за неправильных парковок, общественный транспорт не справляется с объемами пассажиропотоков и не является достойной альтернативой использованию личного транспорта.

На сегодняшний день стоит задача интенсификации транспортного потока в городах. Учитывая зарубежный и отечественный опыт, можно выделить несколько основных направлений, в которых ведутся работы для решения данной задачи:

- Реконструкция транспортной и городской инфраструктуры. Зачастую объекты городской инфраструктуры являются потокообразующими или возбудителями движения. Пе-

перераспределения потокообразующих факторов может дать больший эффект и оказаться значительно дешевле, чем реконструкция транспортной сети.

- Реорганизация движения. В некоторых случаях можно уменьшить масштабы реконструкции транспортной сети, изменив способы использования уже существующих элементов транспортной системы. Ярким примером может служить введение кольцевого движения в центральной части города Владивостока.
- Разработка и внедрение систем управления транспортными потоками. Уже в 70-х годах были разработаны автоматические и автоматизированные системы управления транспортными потоками на УДС, включающие в свой состав ЭВМ и программы управления светофорами. На текущий момент существуют системы управления дорожными знаками в виде электронных табло, связанных с центрами управления.
- Разработка новых транспортных средств. Компания Volvo разрабатывает малогабаритные городские автомобили, которые, благодаря своему компактному размеру, уменьшают нагрузку на дорожную сеть и позволяют эффективнее использовать парковочные места. Компания Google занимается разработкой беспилотных автомобилей, которые позволят исключить человеческий фактор из управления ТС.

Для управления транспортным потоком на УДС используются различные управляющие воздействия, передаваемые по каналам управления: правила дорожного движения, дорожные знаки, светофорная сигнализация, конструкционные особенности участков дороги, информационные табло. Все эти каналы являются “внешними” по отношению к одному из основных факторов, формирующих транспортный поток — выбор водителем маршрута следования. При условии, что подавляющее большинство

транспортных средств были бы маршрутными, то задача управления сводилась бы к решению многокритериальной оптимизационной задачи по нахождению оптимального набора маршрутов следования и калибровке времени их прохождения. Но, так как подавляющее большинство ТС находится в личном пользовании, то перед решением задачи по нахождению оптимальных маршрутов необходимо решить задачу оказания управляющего воздействия на выбор маршрута следования водителем.

Для реализации такого управляющего воздействия необходимо создать “внутренний” канал управления/воздействия. Решением могут стать, набравшие популярность, навигационные бортовые системы. Такие системы состоят из комплекса позиционирования объектов GPS/ГЛОНАС и геоинформационной системы, представляющей УДС в виде объектов. На сегодняшний день такие системы позволяют формировать маршрут исходя из критериев длины маршрута, качества дорожного покрытия и т.д. Наиболее продвинутые системы, благодаря развитию технологий беспроводной связи, могут получать данные о пробках из сетевых сервисов, и формировать маршрут с учетом предполагаемого времени прохождения пути. Используя технологии беспроводной связи можно объединить такие системы в единый комплекс с сервисом расчета оптимальных маршрутов на базе ЭВМ. Постоянный анализ данных от большого количества объектов в реальном времени требует большой вычислительной мощности. Для таких расчетов потребуются суперкомпьютер/кластер.

Для реализации такой системы можно использовать и иные решения — без использования суперкомпьютера. Тогда потребуется снабдить бортовой комплекс вычислительной частью (что не составит труда при сегодняшней миниатюризации вычислительных мощностей). Но такой подход ведет за собой необходимость решить задачу параллелизма вычислений. При этом возрастет нагрузка на беспроводную сеть, так как возникает необходимость передавать данные для расчетов на каждую бортовую систему. Можно использовать и комбинированные архитектуры.

Правительством РФ готовится законопроект об обязательном

комплектовании транспортных средств системами экстренного аварийного реагирования на базе ГЛОНАС, что является существенной нормативно-правовой базой для создания и внедрения таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кременец, Ю.А. Технические средства организации дорожного движения / Ю.А. Кременец, М.П. Печерский, М.Б. Афанасьев. - М.: Академкнига, 2005.-280 с
2. Стенбринк П.А. Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт, 1981
3. Hoogendoorn S.P., Bovy P.H.L. State-of-the-art of vehicular traffic flow modeling / / Proc. Inst. Mech. Engrs. Part I. 2001. Vol. 215. No. 4. P. 283-303
4. Гулев, Я. Ф. Основные показатели и измерители работы транспорта / Я.Ф. Гулев, П.К. Лебединский. М.: Транспорт, 1980. - 315 с.
5. Self-Driving Cars: Traveling On Autopilot, April 9, 2012 issue of Fortune.
6. IBM Global Commuter Pain Survey: Traffic Congestion Down, Pain Way Up, Sara Delekta Galligan, IBM Media Relations 2010

КВАЗИТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА И ДИАГНОСТИКА ТРЕНИЯ В ПОЛИМЕРНОМ ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Васильева М. А., Кондаков А. С., Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Тепловая диагностика трения сводится к математическому моделированию теплового процесса в узле трения и определению функции фрикционного тепловыделения в сопряжении по

дополнительной температурной информации решением граничной обратной задачи. Учитывая, что практически вся энергия, затрачиваемая на трение, трансформируется в теплоту, по функции тепловыделения определяется сила трения. Точность такого расчетно-экспериментального определения силы трения по температурным данным во многом определяется адекватностью математической модели реальному тепловому процессу. Основные соотношения метода тепловой диагностики трения ранее получены с использованием плоской модели теплового процесса в подшипнике скольжения, что не позволяло учитывать теплоотвод по длине металлического вала, и неизбежно привело бы к большим погрешностям при восстановлении тепловыделения. В данной работе предлагается квазитрехмерная модель теплового процесса, позволяющая с достаточной для практических приложений точностью восстанавливать фрикционное тепловыделение и силу трения по замерам температуры в ограниченном количестве точек, не приводящих к разрушению элемента узла трения.

Анализ температурного поля полимерного подшипника скольжения с использованием полной трехмерной модели показал, что распределение температуры практически однородно по длине подшипника и корпуса. Влияние теплоотдачи от торцевых поверхностей подшипника незначительно. Вследствие этого втулку и корпус можно рассматривать плоскими, а вал трехмерным. Таким образом, трехмерное температурное поле в подшипнике скольжения представимо в виде суперпозиции двумерного и трехмерного полей. С использованием математической модели, описывающей тепловой процесс в подшипнике скольжения при указанных допущениях, построен алгоритм определения функции интенсивности тепловыделения. Вычислительными экспериментами установлена эффективность восстановления функции тепловыделения по разработанному алгоритму.

Для оценки эффективности разработанного метода тепловой диагностики трения проведена экспериментальная проверка восстановления по замерам температуры силы трения, изменяющейся во времени.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДОГРЕВА ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ В БУХТАХ НАГРЕТЫМ ВОЗДУХОМ

Васильева М. А., Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Согласно нормативным документам разматывание длинномерных труб (из бухт или катушек) осуществляется при температуре наружного воздуха не ниже плюс 10°C . При более низкой температуре трубы в бухтах или катушках подогревают до требуемой температуры, например, размещая трубы на время не менее 4 часов в отапливаемое помещение с температурой воздуха не ниже $(20 \pm 3)^{\circ}\text{C}$ или, если это невозможно, разогревать при помощи тепловой воздуходувной машины до достижения температуры наружной и внутренней поверхности бухты не ниже $(15 \pm 5)^{\circ}\text{C}$.

В то же время, нерешенным остается вопрос о продолжительности подогрева труб в бухтах в зависимости от температуры окружающего воздуха и сортамента труб. Экспериментальное исследование теплового состояния труб в широком диапазоне низких температур для различного сортамента труб потребует значительных материальных затрат. В связи с этим, использование методов математического моделирования, позволяющих имитировать в вычислительных экспериментах изменением параметров модели практически любые внешние условия, геометрические размеры, является наиболее эффективным. Рассматривается задача теплообмена при стабилизированном течении газа в прямой круглой трубе. Предполагается, что газ несжимаемый, ее параметры постоянны, теплота трения мала и внутри трубы перенос тепла теплопроводностью в радиальном направлении много больше, чем в осевом. Обычно коэффициент теплоотдачи в изогнутых трубах получают введением поправочного множителя к коэффициенту теплоотдачи для прямой трубы. Аналогично,

изогнутость трубы в бухте учитывается коэффициентом турбулентной теплопроводности при его экспериментальном определении. Считается, что в вязком подслое скорость потока равна нулю. В ядре турбулентного слоя распределение скоростей по сечению трубы считается однородной.

Система уравнений нестационарного теплообмена при турбулентном течении подогретого воздуха в круглой трубе решается методом конечных разностей с использованием расщепления по физическим процессам. Приводятся результаты расчетов изменения температуры подаваемого подогретого воздуха вдоль трубы и продолжительности подогрева полиэтиленовой трубы диаметром 90 мм при различных температурах окружающего воздуха.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРОНТАЛЬНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ КРУГЛОГО БРИЛЛИАНТА

Васильев Н. В., Яковлев Б. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В связи с развитием алмазно-гранильного производства в республике Саха (Якутия) задача проектирования бриллиантов с наилучшими оптическими свойствами стала актуальной. Благодаря наличию современных мощных компьютерных технологий и программных средств в настоящее время имеется возможность получить эффективные компьютерные модели будущих бриллиантов. Моделируя процессы отражения и преломления света в бриллианте можно создать фотореалистическую визуализацию продукта с заданными параметрами, что позволяет делать предварительный численный эксперимент при проектировании бриллианта.

В настоящей работе создана обобщенная геометрическая модель бриллиантов круглой и фантазийных форм. Для фантазийных форм бриллиантов найдена общая формула, полученная

из геометрии круглого бриллианта. Создана модель «алмазной линзы», с помощью которой получают изображения фигур помещенных в алмазную среду. На основе данных о значениях интенсивности отраженного света от каждой грани и павильона и коронки, с учетом преломления, полученных численным методом и с помощью модели «алмазной линзы» разработан алгоритм математической модели фотореалистической визуализации круглого бриллианта. Предварительная реализация алгоритма проведена в Delphi. Произведено сравнение модели с визуализацией бриллианта полученной с помощью пакета Mathcad.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЫ

Голиков И. А., Гололобов А. Ю., Попов В. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Процессы, протекающие в высокоширотной ионосфере, такие как высыпание высокоэнергичных частиц, электрические токи и дрейфы плазмы оказывают сильное влияние на тепловой режим ионосферы.

Целью данной работы является численное моделирование теплового режима высокоширотной ионосферы. Построена модель ионосферы на основе уравнений магнитной гидродинамики. Задача сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнения непрерывности для ионов O^+ и уравнений теплопроводности для электронов и ионов O^+ .

Система моделирующих уравнений включает:

1) уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{u}) = q - l, \quad (1)$$

2) уравнение теплопроводности для электронов:

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} + \vec{u}_b \nabla T_b + \frac{2}{3} T_b \nabla \vec{u}_b + \frac{2}{3kn_b} = \frac{2}{3kn_b} (Q_{b\lambda} + Q_{bd} - L_{bn} - L_{bv} - L_{bo} - L_{bi}), \quad (2)$$

3) уравнение теплопроводности для ионов O^+ :

$$\rho_i c_{vi} \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + \vec{u}_l \nabla T_i \right) + p_i \nabla \vec{u}_l + \nabla \vec{S}_l = Q_{ib} + Q_{id} - L_{in}. \quad (3)$$

Концентрация и температура нейтральных частиц задаются по эмпирической модели MSIS-83[1].

Для решения трехмерных дифференциальных уравнений используется метод прогонки в сочетании с методом суммарной аппроксимации [2]. Применяется алгоритм решения системы уравнений, основанный на методе прямых итераций.

На модели проведены численные расчеты. Результаты расчетов, полученные на разработанной модели, согласуются с результатами расчетов по эмпирической модели IRI 2007 [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hedin A.E.* Revised Thermospheric Model Based on Mass Spectrometr and Incoherent Scatter Data: MSIS-83 // *J. Geophys. Res.* -1983. -Vol.88, -7p.10170-10188
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.:Наука, 1977. 656 с.
3. *Bilitza D. and Reinisch B.* International Reference Ionosphere 2007: Improvements and new parameters, *J. Adv. Space Res.*, 42, #4, 599-609, doi:10.1016/j.asr.2007.07.048, 2008.

МОДЕЛЬ РАСТЕПЛЕНИЯ КИМБЕРЛИТОВОЙ РУДЫ ПРИ ДРОБЛЕНИИ

Григорьев Ю. М., Никифорова Л. В., Сивцев В. И.,
Яковлев Б. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В настоящей работе рассматривается задача, поставленная компанией АЛРОСА, которая появилась при разработке схемы стадийного дробления кимберлитов перед обогащением для проектирования УСО на трубке «Зарница» Удачинского ГОКа. Для технологии сухого обогащения кимберлитовой руды вредное воздействие имеет водная фаза на поверхности кусков руды с отрицательной температурой, которая возникает из-за конденсации паров влажного воздуха в дробилке, обусловленного таянием естественной влаги руды.

В работе представлена модель растепления руды различной крупности при дроблении. Разработана физическая модель растепления руды при дроблении. Рассматривается следующий процесс: влажная руда с отрицательной температурой поступает в дробилку с температурой окружающей среды. Окружающая среда имеет положительную температуру. Ясно, что при дроблении происходит конденсация влаги на вновь образуемые поверхности кусков руды при дроблении. Количество конденсируемой влаги должно быть пропорциональным площади образуемой поверхности при дроблении, влажности окружающего воздуха и разности температур поверхности и среды. Можно допустить, что конденсация паров воды при этом происходит моментально. При дроблении поверхность конденсируемой жидкой фазы все время контактирует с окружающим воздухом. С другой стороны, поверхность руды имеет контакт с жидкостью. Отметим, что площадь соприкосновения непосредственно зависит от крупности кусков руды. Так как теплообмен происходит только через

поверхность, данную задачу можно экстраполировать на плоскую систему. Руда получает тепло от слоя воды и из процесса дробления. Модель можно разбить на пять этапов эволюции изменения термодинамических характеристик руды и воды. 1 этап — температура воды изменяется от T_0 до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. В этом этапе определяется время остывания воды на поверхности кусков холодной руды до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и температура руды в этот момент времени. Второй этап — процесс кристаллизации поверхностной воды. Третий этап — процесс растепления при температуре льда T^{II} . Четвертый этап связан с плавлением льда и пятый этап — приповерхностная вода и руда имеют положительные температуры по Цельсию и стремятся к температуре окружающей среды.

Для всех этапов модели получены системы уравнений. Используются приближенные уравнения на основе закона Ньютона-Рихмана. Получены аналитические выражения и численные параметры для температур водного слоя и руды. Результаты исследования для кусков руды различной крупности и различных диапазонов температур представлены в виде графиков и таблиц.

МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ УПРОЩЕННОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТА ДЛЯ СЕКТОРНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Григорьев Ю. М., Харбанов М. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Для повышения эффективности бурения новых скважин (ВНС) и зарезки боковых стволов (ЗБС) требуются разные виды исследований. Одним из таких исследований является геолого-гидродинамическое моделирование на специализированных программных продуктах. Такое моделирование очень желательно проводить в районах интенсивной добычи, где есть неопределенности с уровнем водо-нефтяного контакта (ВНК), а также в рай-

онах, где есть нагнетательные скважины, с целью определения границ фронта нагнетательных вод (ФНВ).

Геолого-гидродинамическое моделирование имеет свои преимущества перед другими видами исследований, к ним можно отнести маленькие экономические затраты на исследование, не требуются остановки скважин, т.е. отсутствует простаивание работающего фонда, а также не требуется мобилизация многочисленных человеческих ресурсов и техники. Но моделирование имеет ряд недостатков: для проведения расчетов требуются специалисты со знанием работы на геологическом и гидродинамическом ПО, а при их отсутствии возникает сложность к приобщению других работников в моделирование в связи со сложностью геологических и гидродинамических ПО для восприятия и освоения. Также для исследования одного региона требуется относительно большое время. Перечисленные недостатки сводят к отказу от моделирования, как одного из видов исследования для обоснования бурения ЗБС или ВНС.

Поэтому с целью устранения сложности в построении геологической модели пласта, а также оптимизации времени создания модели в данной работе разработан модуль для создания упрощенной геологической модели пласта по скважинным данным. Что даст возможность проводить секторное гидродинамическое моделирование.

Для построения модели методика модуля использует интерполяцию глубин кровли коллектора, его мощности с помощью геостатистического метода – обыкновенного кригинга. Метод в частности учитывает анизотропию по направлениям.

Данный модуль требует минимум входных данных и минимум усилий при построении геологической модели пласта, поэтому является очень простым и легкоосваиваемым для любого специалиста в области геологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбрул О. Использование геостатистики для включения в геологическую модель сейсмических данных”, EAGE, 2002г.

2. 2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидро-механика. М: Недра, 1993.
3. Haldorsen H. On the modeling of vertical permeability barriers in single-well simulation models”, paper SPE 16554, pp 349-358, 1989.

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТЕСТИРОВАНИЯ НА ПРОНИКНОВЕНИЕ

Данилов Д. С., Добржинский Ю. В.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Тестирование на проникновение (penetration testing) одно из важных частей области информационной безопасности. Значение этого термина можно определить как проверка системы с целью обнаружения, каких либо уязвимостей информационной безопасности (как динамическая, так и статическая). Существуют различные модели этого тестирования. В этой статье представлена объектно-ориентированная модель по работе [1].

Объектно-ориентированная модель строится для того чтобы лучше описать и более качественно анализировать принципы атаки, что в результате может привести к большей эффективности подхода к тестированию. Также существуют другие модели тестирования, например дерево атаки, сети Петри (сеть атаки). Однако все эти модели основаны на процессе реализации атаки и связей между другими атаками. Можно в какой-то мере сравнить эти модели с процедурными языками программирования, где нужно описывать полностью процедуру получения того или иного результата. В [1] последние названы процесс-ориентированные модели (process-oriented modes). Так в объектно-ориентированную модель может включаться не только процесс (в терминах объектно-ориентированного программирования - метод некоторого класса), но и другие элементы присущие атакам. Например, такие как представление окружения,

Цель	Протокол	Имя	
	Тип устройства	Описание	
Уязвимость			
Условие	Сеть	Узлы	имя
			тип
			ID
			связь
	Граница		
	Преатака		

Таблица 1. Факторы атрибутов

цели атакующего, влияние на атакующего и некоторые другие параметры (все это составляет состояние атакующего объекта) могут также включаться (будут инкапсулированы в класс, представляющий некоторую разновидность атаки). Таким образом, будет обеспечиваться не только всестороннее знание об атаке, но и возможность повторного использования и масштабируемость, категорий объектно-ориентированного программирования (ООП).

Рассмотрим пример такой модели приведенный в [1] для тестирования безопасности WSN протокола. Класс атакующего субъекта (в ООП по этому классу создается его экземпляр, т.е. объект класса) является следующей четверкой элементов: Атака = <Имя, Атрибуты, Процесс, Влияние>, где 'Имя' - это строка, которая представляет название атаки, 'Атрибуты' - тройки элементов для представления трех основных атрибутов атаки. Все факторы и их взаимосвязи представлены в таблице 1. Описание приведенных в таблицы факторов приводится ниже.

А) Цель: Два кортежа для описания общей информации о цели атаки;

Б) Протокол: Два кортежа для описания целевого протокола;

В) имя: Строка, входящая в “Протокол”, представляет название тестируемого протокола;

Г) описание: Строка другой элемент, входящий в “Протокол” представляет собой резюме о протоколе;

Д) Тип устройства: перечисление (EndDevice, Router, Coordinator, BaseStation) другой элемент, входящий в “Цель” представляет типы устройств в сети;

Е) Уязвимость: Перечисление для описания типа угрозы, которая используется атакой. В перечисления входят шесть значений: Data Confidentiality Vulnerability, Data Freshness Vulnerability, Forgery Vulnerability, Authentication Vulnerability, Unjust Enrichment Vulnerability, Typical Attack Vulnerability;

Ж) Условие: Два кортежа для описания требований к завершению атаки;

З) Сеть: Два кортежа для описания логической структуры сети;

И) Узлы (Vertex): Множество устройств: $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, где V_i представляет один из узлов сети. В частности V_i имеет четыре фактора: имя, тип, ID, связь;

Й) имя: Строка представляющая название устройства.

К) тип: перечисление для представления логической роли в сети со следующими значениями: EndDevice, Router, Coordinator, BaseStation, Attacker;

Л) ID: множество идентификаторов всех устройств сети: $\{ID_1, ID_2, \dots, ID_n\}$, каждый идентификатор уникальный;

М) связь: множество всех границ соединенных с узлом V_i ;

Н) Граница: Множество всех границ в логической структуре сети: $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$. $E_t = \langle V_i, V_j \rangle$ означает, что два узла V_i и V_j (V_i не равен V_j) логически соединены;

О) Предатака: множество атакующих объектов, другой элемент входящий в “Условие” представляет собой все атаки, которые должны быть успешно завершены перед тем как данная атака может быть произведена.

Следующим элементом входящим в структуру модели атаки является ‘Процесс’. Процесс в данном контексте это тройка эле-

ментов для формального и детального описания самого процесса на основе концепции конечных автоматов с тремя известными факторами: состояние, событие и переход.

А) Состояние: множество всех состояний атаки: $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. В каждый момент времени атака должна находиться в одном из состояний S_i ;

Б) Событие: множество всех атомарных событий, которые могут произойти: $\{AV_1, \dots, AV_n\}$;

В) Переход: Множество всех функций переходов состояний, вычисляемых как: Переход(Состояние_а, Событие) \rightarrow Состояние_б. Это означает, что если происходит некоторое событие и объект находился в состоянии а, то этот объект переходит в другое состояние б.

Последний элемент атаки 'Влияние'. Это кортеж для описания воздействия атаки на тестируемый протокол и сеть. Имеет два фактора: Тип и значение.

А) Тип: перечисление входящие в "Влияние" представляет типы угроз этого влияния. Возможные значения перечисления: Data Confidentiality Threat, Data Integrity Threat, Entity Authentication Threat, Data Authentication Threat, DoS Threat;

Б) Значение: собственно сами значение этих шести элементов кортежа: Data Confidentiality, Data Availability, Data Freshness, Data Authentication, Data Integrity, Network Availability, каждое из этих значений определяет влияние этого элемента и в целом влияние всех элементов равно 1 (т. е. сумма всех значений равна 1).

В результате с помощью ООП модели атаки, можно получить всестороннее знание об атаке, включая требования, влияния, связи с другими атаками и т.д. Это может оказаться полезным для проведения соответствующего тестирования. Таким образом, объектно-ориентированная модель тестирования на проникновения может применяться в соответствующей области. Однако, в этой ООП модели отсутствуют такие категории ООП как наследование и полиморфизм, которые могут быть вполне включены для составления обширной иерархии классов всевоз-

можных атак некоторого объекта реальности. Также в модели не применялся известный подход с использованием языка для ООП моделирования – UML, который тоже может расширить предлагаемый подход.

ЛИТЕРАТУРА

1. Qi Y. и др A security testing approach for WSN protocols based on object-oriented attack model // Computational Intelligence and Security (CIS), 2011 Seventh International Conference on. , 2011. С. 517 –520.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДОГРЕВА ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ ДЛЯ ГАЗОПРОВОДОВ В БУХТАХ

Дмитриева М. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В ближайшие годы ожидается расширение круга потребителей природного газа за счет газификации сельских районов центральной Якутии. Перспективным является строительство газопроводов из длинномерных (до 400 м) полиэтиленовых труб, которые транспортируются в бухтах и катушках. Согласно нормативным документам разматывание таких труб для газопроводов из бухт осуществляется при температуре наружного воздуха не ниже плюс 10°C. При более низкой температуре трубы в бухтах или катушках подогревают до требуемой температуры, например, размещая трубы на время не менее 4 часов в отапливаемое помещение с температурой воздуха не ниже $(20 \pm 3)^\circ\text{C}$ или, если это невозможно, разогревать при помощи тепловой воздушодувной машины до достижения температуры наружной и внутренней поверхности бухты не ниже $(15 \pm 5)^\circ\text{C}$. В то же время, нерешенным остается вопрос о продолжительности подогрева труб в бухтах в зависимости от температуры окружающего воздуха и сортамента труб. Экспериментальное исследование

теплового состояния труб в широком диапазоне низких температур для различного сортамента труб потребует значительных материальных затрат. В связи с этим, использование методов математического моделирования, позволяющих имитировать в вычислительных экспериментах изменением параметров модели практические любые внешние условия, геометрические размеры, является наиболее эффективным.

В данной работе рассматривается задача подогрева полиэтиленовой трубы путем подачи подогретого воздуха с температурой до 60°C во внутрь трубы. Реализован алгоритм численного решения одномерной смешанной задачи для уравнения теплопроводности в полярных координатах методом конечных разностей. Граничные условия третьего рода аппроксимированы со вторым порядком точности. Коэффициенты теплообмена на внутренней поверхности трубы рассчитываются по известным формулам в зависимости от скорости потока воздуха. Полученные результаты расчета позволяют оценить продолжительность подогрева в зависимости от температур подаваемого воздуха и окружающей среды. Приводятся результаты численных расчетов продолжительности подогрева для полиэтиленовой трубы диаметром 110 мм, предназначенной для строительства межселенных газопроводов с давлением до 12 атм.

ВЛИЯНИЕ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ТРУБОПРОВОДА

**Ефремов П. В., Стручкова Г. П., Капитонова Т. А.,
Тарская Л. Е.**

*Институт физико-технических проблем Севера
им. В.П. Ларионова СО РАН, Якутск*

При оценке безопасности участков магистральных трубопроводов, которые эксплуатируются в сложных инженерно-геологи-

ческих условиях, важно знать динамику развития процессов на участках сложных геологических условий. Как правило, на таких участках вследствие взаимовлияния трубопровода и окружающих грунтов, в металле трубы возникают дополнительные нагрузки в виде изгибающих моментов и растягивающих или сжимающих сил. Если на таких участках трубопровода имеются различные концентраторы напряжений, то перенапряжение представляет реальную угрозу безопасности трубопровода. Во избежание этой угрозы необходимо оценить напряжения в трубопроводе с учетом происходящих грунтовых изменений в разных условиях.

При этом принимаются следующие допущения:

а) Допустимое напряженно-деформированное состояние для трубопроводов находится в пределах упругого состояния металла труб и сварных соединений.

б) Общее напряженное состояние трубопровода включает составляющие: напряжения, зависящие от внутреннего рабочего давления; напряжения, зависящие от температуры трубопровода; напряжения, определяемые внешними силами (реакции грунта, воды).

в) При расчетах напряжений от воздействия внешних сил трубопровод рассматривается как бесконечно протяженная упругая балка, находящаяся под действием поперечных и продольных сил.

г) Магистральные трубопроводы относятся к тонкостенным сосудам. При этом радиальными напряжениями можно пренебречь по сравнению с окружными и продольными напряжениями.

Расчет напряженно-деформированного состояния линейной части магистральных трубопроводов производится численно методом конечных элементов.

Определение физико-механических свойств и предельных реакций грунта при различных перемещениях трубы производится по характеристикам грунта, полученным в результате инженерно-геологических изысканий, или по справочным таблицам.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОТБОРА ИДЕАЛЬНОГО И РЕАЛЬНОГО ГАЗОВ

Иванов Г. И., Николаев В. Е.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В данной работе представлены результаты вычислительного эксперимента по исследованию влияния граничного условия на динамику изменения полей температуры и давления двумерной математической модели отбора газа через центральную скважину при теплообмене с постилающими горными породами. Проведен сравнительный анализ для двух случаев газа: реального и идеального. Для математического описания процесса отбора газа использовалась полная нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, полученная из законов сохранения массы и энергии, закона Дарси и уравнения неразрывности. На скважине задается режим отбора газа с постоянным забойным давлением. На внешней границе ставится условие непроницаемости и тепловой изоляции пласта. Сверху происходит теплообмен с постилающей породой по закону Ньютона. Снизу ставится условие симметрии. В начальный момент времени, давление и температура считаются постоянными.

Выявлены следующие особенности изменения температуры и давления: для обоих случаев газа, за все время наблюдения, отклонение температуры от начального значения, на верхней границе, меньше чем на нижней, при этом на этих же границах давление распределено одинаково. В начальный момент времени вблизи скважины наблюдается резкое охлаждение реального газа, но со временем температура выравнивается, а в случае идеального газа температура на порядок меньше. При этом динамика изменения давления реального газа, за все время наблюдения, представляет собой монотонно убывающую функцию по

радиальной координате и также по времени, остается практически постоянной по координате высоты; в случае идеального газа наблюдается аналогичное поведение давления. Изменение темпа отбора приводит лишь к количественным изменениям распределений температурного поля и давления, не наблюдаются качественные изменения последних.

КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В МЕТАСТАБИЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Коледин В. В.

*Бирская государственная социально-педагогическая академия,
Бирск*

Известно, что жидкость, содержащая паровые пузырьки является неустойчивой из-за действия капиллярных сил на межфазной поверхности [1,2].

Пусть в жидкости при температуре T_0 и давлении p_0 находится газовый зародыш радиуса a_0 . Будем предполагать, что жидкость метастабильна, то есть ее температура T_0 выше равновесной температуры $T_s(p_0)$ ($T_0 > T_s(p_0)$). Тогда, при механическом и тепловом равновесии такой системы «парогазовый пузырек – жидкость» имеет место соотношение

$$p_{v0} + p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad p_{v0} = p_s(T_0) \quad (1)$$

где p_{v0} , p_{g0} – парциальные давления пара и газа в пузырьке; σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Система «парогазовый пузырек – жидкость» устойчива, если выполняется условие

$$p_{g0} \leq \frac{2\sigma}{3a_0} \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) p_{g0} получим выражение для минимального радиуса $a_0^{(m)}$ в виде

$$a_0^{(m)} = \frac{2}{3}a_0^{(M)} = \frac{4\sigma}{3(p_{v0} - p_0)} \quad (3)$$

С другой стороны, используя для p_{g0} выражения $p_{g0} = m_{g0}R_gT_0 / (4\pi a_0^3/3)$ и (2) получим формулу для критической массы газового зародыша

$$m_{g0}^* = \frac{128\pi\sigma^3}{81R_gT_0(p_{v0} - p_0)^2}, \quad p_{v0} = p_s(T_0) \quad (4)$$

Используя условие (2) и условие равновесия парогазового пузыря (1) получим функцию

$$f(a_0) = (p_0 - p_{v0})a_0^3 + 2\sigma a_0^2 - \frac{3}{4\pi}m_{g0}R_gT_0 = 0 \quad (5)$$

Для определения равновесного радиуса a_0 для заданного значения массы m_{g0} газового зародыша. Из анализа уравнения (3) следует, что при любом значении $m_{g0} > 0$ для перегретой жидкости ($p_{v0} > p_0$) оно имеет один отрицательный корень, лишенный физического смысла. Кроме того, при $0 < m_{g0} < m_{g0}^*$ это уравнение для a_0 имеет два положительных корня a_{01} и a_{02} , находящихся в промежутках $a^{(m)} < a_{01} < a_0^{(M)}$ и $0 < a_{02} < a_0^{(m)}$. Причем, для большего значения радиуса a_{01} система «пузырек – жидкость» неустойчива, а для меньшего значения радиуса a_{02} – устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Шагапов В.Ш. Об устойчивости пузырьковых парожидкостных сред // Изв. АН СССР, 1986. № 50. С. 516-522.

АЛГОРИТМ СОЗДАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО ОБРАЗА РЕАЛЬНОГО КРИСТАЛЛА ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Колосова Г. Г., Яковлев Б. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Развитие бриллиантового производства безусловно требует разработки технологии оптимальной разметки и проектирования бриллиантов с определенными параметрами. Для решения этих проблем эффективно используется современная компьютерная техника. Одной из важных задач является ввод геометрии реального кристалла в компьютер. Для этого используются специальные сканирующие устройства с видеокамерами, позволяющие получение изображения с различных направлений объекта. Таким образом, можно получить ряд изображений объекта, например равномерно вращая объект можно получить ряд проекций изображений кристалла, которые могут быть обработаны с помощью компьютерных программ. В данной работе представлен один из этапов этой работы.

Актуальность работы, заключается в том, что точный ввод геометрии кристалла в компьютер позволяет более эффективно разрабатывать технологии оптимальной разметки и проектировать бриллианты с заданными параметрами. В мире имеются такие программы, но разработчики, как правило, не раскрывают алгоритмы решения проблемы, а продают готовый программный продукт.

Целью исследования является разработка алгоритма создания трехмерного образа кристалла по его изображениям. Для достижения цели были поставлены следующие задачи: изучение графических и вычислительных средств пакета MathCad, получение графических данных о кристалле с помощью видеокамеры, преобразование видеофайла в ряд графических файлов, ввод данных в пакет MathCad и преобразование в численные

данные, обработка изображений, создание алгоритма и его реализация. В работе разработан алгоритм создания трехмерной модели кристалла по изображениям его проекций. Преобразование графических данных проекций кристалла в численные и их обработка проводились с помощью математического пакета Mathcad. В качестве примера представлена разработка алгоритма создания трехмерных образов кристаллов простых конфигураций: пирамида, октаэдр, параллелограмм и его реализация. Для автоматизированного ввода геометрических характеристик кристалла необходимо иметь его изображения. Их можно сделать с помощью цифровой видеокамеры, вращая объект. Файлы должны иметь расширение jpg. или bmp, поэтому полученный видеофайл преобразуется с помощью конвертора в ряд графических файлов. Они вводятся в пакет MathCad и преобразуются в численные данные в виде матрицы. Обработка этих данных производится с помощью программных и вычислительных средств пакета, в результате которой определяются геометрические характеристики и координаты проекций кристалла. Трехмерный компьютерный образ кристалла создается графическими средствами пакета MathCad.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР НА АСИММЕТРИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОТВОДА В ПОЛИМЕРНОМ ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Кондаков А. С., Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

Работа посвящена исследованию влияния низких климатических температур на асимметрию распределения тепловых потоков в полимерном подшипнике скольжения на основе математического моделирования теплового процесса.

Экспериментальное исследование влияния низких температур окружающего воздуха на динамику температурного поля, а также на асимметрию распределения тепловых потоков, чрезмерно трудоемко. Эффективным методом исследования таких процессов является метод математического моделирования, позволяющий получать температурное поле и распределения тепловых потоков, изменяющиеся во времени. В большинстве работ, посвященных определению температурного поля в подшипнике скольжения, вводят предположение о постоянстве коэффициента разделения теплового потока, рассматривают стационарный период трения, не учитывают зазор между валом и втулкой, не учитывают зависимость теплофизических свойств материалов от температуры. В данной работе предлагается математическая тепловая модель для расчета теплового режима в полимерном подшипнике скольжения без указанных ограничений и допущений, заведомо искажающих процесс теплообмена.

Вычислительными расчетами установлено, что распределение теплоты, выделившейся в результате трения между валом и полимерной втулкой, существенно зависит от скорости вращения вала и мало зависит от температуры окружающего воздуха. Во избежание аварийных ситуаций, при работе техники с узлами трения из полимерных подшипников в условиях низких температур, целесообразно предварительно подогревать узел трения путем запуска и работы в течение не менее 5 минут в теплом помещении.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ИХ СТЫКОВОЙ СВАРКЕ

Крылова Е. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В возникновении и развитии сварочных напряжений и деформаций основным возмущающим фактором является изменение в широком диапазоне температуры свариваемого тела. В настоящей работе с целью более точного описания температурного поля задача определения температуры в свариваемых изделиях поставлена в виде двухфазной задачи Стефана в двумерной области. Предложена модификация учета теплоты фазового перехода, более точно описывающая реальный процесс тепловыделения на поверхности фазового перехода, путем введения распределенного в сторону источника тепла.

Во многих работах задача о сварочных напряжениях и деформациях с использованием теории неизотермического пластического течения представляется в виде задачи упруго-пластически деформируемого тела в условиях переменных температур. Разработанные алгоритмы, в которых температурное поле определяется по формулам Н.Н. Рыкалина, позволяют численными методами отыскать скорости сварочных напряжений и деформаций, а для нахождения самих искомых величин используются формулы численного дифференцирования, которые вносят дополнительные погрешности в решение.

В настоящей работе для численного решения упруго-пластической задачи в напряжениях использована методика работы академика А.Н. Коновалова, разработанная для плоских статических задач теории упругости. Для определения сварочных напряжений и деформаций построены разностно-итерационные схемы, свободные от указанных недостатков.

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ТЕПЛОТЫ, ВЫДЕЛЯЮЩЕЙСЯ В ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ²

Лукин Е. С.¹, Иванов А. М.

*Институт физико-технических проблем Севера
им. В.П. Ларионова СО РАН, Якутск*

Пластическая деформация конструкционных сталей сопровождается выделением теплоты. Явление термопластического эффекта в основном связывают с эволюцией дислокационной структуры. Зарождение и движение дислокаций по рельефу Пайерлса, приводит к возникновению дополнительного колебательного движения атомов кристаллической структуры, в результате которого наблюдается повышение температуры деформируемого металла [1]. В соответствии с первым началом термодинамики работа пластической деформации dA_p частично поглощается материалом, в то время как другая часть выделяется в виде теплоты dQ . Таким образом, поглощенная энергия dE_S определяется как разность между работой пластической деформации и количеством теплоты, рассеявшимся в окружающую среду [2]:

$$dE_S = dA - dQ. \quad (1)$$

Работа пластической деформации определяется из диаграммы деформирования [3]. Образец рассматривается как стержень. Количество теплоты оценивается из решения одномерного стационарного уравнения теплопроводности (2) с постоянными коэффициентами на основе данных тепловизионных измерений тем-

²Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 12-01-98509)

пературы деформируемого образца [4]:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} - v(T(x, \tau) - T_c) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (2)$$

с краевыми условиями: $T(x, 0) = T_c$, $T(0, \tau) = T_c$, $T(l, \tau) = T_c$.

Для нахождения мощности внутреннего источника теплоты, решается обратная задача теплопроводности с постоянными коэффициентами. В работе приведена оценка теплоты, рассеявшейся в процессе статического растяжения плоских гладких образцов, изготовленных из конструкционной стали. Показано, что количество рассеявшейся теплоты зависит от пластичности конструкционной стали. Снижение характеристик пластичности материала приводит к снижению диссипации энергии в виде теплоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.К. Григорьев, Н.Г. Колбасников, С.Г. Фомин. Структурообразование при пластической деформации металлов. – СПб.: Издательство С.-ПбУ, 1992. – 244 с.
2. G.I. Taylor, H. Quinney. The latent energy remaining in a metal after cold working // Proc. Roy. Soc., 1934. – Vol. CXLIII. – A. – P. 307-326.
3. E.A. Pieczyska, S.P. Gadaj, W.K. Nowacki. Rate of energy storage during consecutive deformation of steel // QIRT'2000. No. 64. – Reims, France, 2000. – P. 260-264.
4. A.M. Ivanov, E.S. Lukin, B.G. Vainer. Evaluation of storage energy of the constructional steel during plastic deformation. // QIRT'2006. – Padova, Italy, 2006. – P. 10-11.

ЯДРА КОНДЕНСАЦИИ – ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ИОНЫ

Павлов Г. С.

*Институт космофизических исследований и астрономии
им. Ю.Г.Шафера СО РАН, Якутск*

В предлагаемом тезисе отражен процесс, приводящий к разделению зарядов в грозовых облаках. Из поверхности морей, океанов и рек непрерывно идет процесс испарения, молекулы воды легче молекул воздуха, поэтому они диффундируют в вверх. На высоте 2-3 км от земли воздух охлаждается, происходит конденсация. Проведено моделирование испарения-конденсации на отрицательных и на положительных зарядах.

Испарение воды и конденсации водяного пара — элементарные процессы, параметры которых определяют явления облакообразования и свойства метеорологических явлений. Элементарная феноменологическая теория дает для кривых насыщения формулу:

$$P = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\rho}{m_0} (\Delta E + kT) e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

где P — давление насыщения, T — абсолютная температура, $k = 1.3810 - 23$ Дж/К — постоянная Больцмана, ΔE — энергетический параметр, имеющий смысл энергии связи молекулы воды и работу ионов, ρ — плотность воды, m — масса молекулы воды, α_c — коэффициент залипания молекул при касании водной поверхности [1].

Кривая насыщения существенно изменяется для капель малого радиуса: испарение таких капель идет быстрее, чем испарение больших объемов, даже в расчете на одну единицу поверхности. Причиной является поверхностное натяжение $\sigma = 76 \cdot 10^{-3}$ Н/м которое создает избыточное давление в капле. Влияние на процессы испарения малых капель оказывают так же ионы. Заряженные капли наоборот испаряются медленнее. При этом показана, что отрицательные ионы более значительное воздействие на процессы испарения, чем положительные.

Ионы служат центром конденсации пара, и вокруг них возникают мелкие капли. Энергия связи для положительных и отрицательных зарядов различна, где экспериментально и теоретически показана в работах [1]. Молекула в такой капле имеет

энергию связи с ионом

$$\Delta A_k(r) = \frac{\Delta E_i(r)}{\varepsilon}, \quad (1)$$

и давление насыщенного пара для капли составляет

$$P_k = P \exp \left[- \left(\Delta A_k - \frac{2m\sigma}{\rho r} \right) / kT \right].$$

Представим себе некоторый замкнутый объем, внутри которого имеется пересыщенный пар соответствующей величины и очищенный воздух. Внутри объема помещаем однозарядных ионов двух сортов положительных и отрицательных ионов. Ионы начнут поглощать молекулы воды из пара, концентрация пара начнет убывать. Работа ионов захватывающий молекулы воды начнет убывать с расстоянием, во первых работа иона подчиняется кулоновской работе как $1/r$ убывает, во вторых поляризация соседних молекул, а в третьих поверхностное натяжение воды будет препятствовать работе иона. Капли образованных на положительных ионах достигнув определенного радиуса перестанут расти, с убыванием пересыщения пара капли начнут испаряться, а капли образованные на отрицательных ионах станут продолжать расти, так как убывание пересыщенного пара и рост капли на отрицательных ионах будут идти параллельно, потому что поверхностное натяжение убывает с ростом расстояния. Под действием силы тяжести капли образованные на отрицательных зарядах начнут падать. Кривая насыщения на положительных и отрицательных заряженных каплях показаны на (рис.1).

Таким образом данная модель описывает механизм зарядовой асимметрии в атмосферных облаках.

В результате проведенного экспериментального моделирования установлено различие в поведении положительно и отрицательно заряженных капель. Обнаружен процесс зарядовой асимметрии. Найдено причина такого поведения и показано, что вследствие этого возникает грозное электричество.

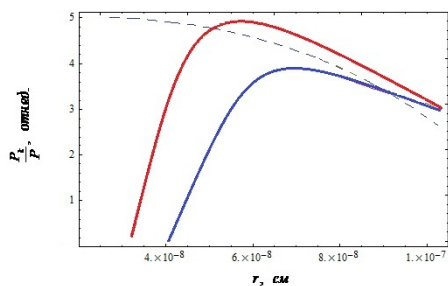


Рис. 1. Кривая насыщения для положительных и отрицательно заряженных капель

ЛИТЕРАТУРА

1. Крымский Г. Ф. Павлов Г. С. ДАН, т. 420, №6, с. 750-751. 2008.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КЛАСТЕРОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СТРУКТУРЫ ИЗНОСОСТОЙКИХ Порошковых покрывтий с ТУГОПЛАВКИМИ ДОБАВКАМИ, ПОЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОДУГОВОЙ МЕТАЛЛИЗАЦИЕЙ

Прокопьев А. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В настоящее время электродуговая металлизация является перспективным методом получения износостойких покрытий и

материалов. Как показывают многочисленные экспериментальные исследования, процессы разрушения при изнашивании порошковых покрытий и материалов тесно связаны с их макроструктурой, поэтому разработка методов описания структуры является актуальной проблемой. Для повышения износостойкости покрытия используются различные модифицирующие добавки из тугоплавких металлов. Матричная структура таких покрытий, где основой является одна фаза, в которую вкраплены частицы второй тугоплавкой дисперсной фазы, позволяет представить естественным образом кластерной структурой и описывать её в терминах теории кластеров.

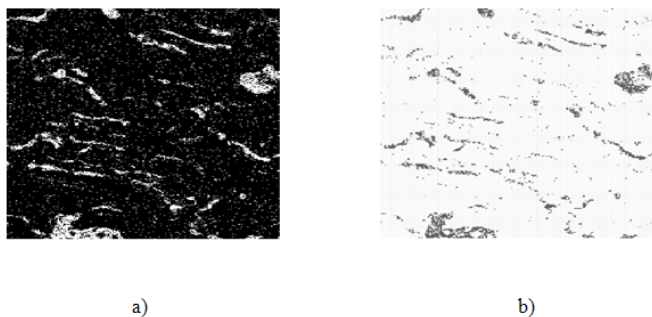


Рис. 2. Структура порошкового покрытия: а) микрорентгено-спектральные данные алюминия; б) цифровое изображение кластеров тугоплавких добавок Al_2O_3 .

На рис.1(а) показана предоставленная ИФТПС СО РАН элементная карта данных микрорентгеноспектрального анализа поперечных металлографического шлифа покрытия, полученного электродуговой металлизацией на промышленной установке ЭДУ-500С из модифицированной проволоки, состоящей из стальной оболочки, тугоплавкого оксида Al_2O_3 и феррохрома. На рисунке видно, что при формировании покрытия тугоплавкие частицы расплавляются и при застывании принимают раз-

нообразные диспергированные формы (светлые области). Полученное изображение было переведено с помощью программы MathCad в изображение в растровом формате (рис. 1(b)), которое интерпретировалось как кластерная структура моделирующая структуру покрытия. Граница раздела оттенков серого цвета на чёрный и белый цвета, найдена из условия равенства объёмного содержания корунда в покрытии и кластерной структуре. Рассчитанные основные характеристики кластерной структуры (распределения кластеров по размерам, общая развитость системы, средний размер кластера, корреляционная функция и др., которые предлагается использовать как дополнение к характеристикам структуры металлов определяемых стандартными методами металлографии) позволяют получить более детальную информацию о структуре исследуемого объекта.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТНЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Русинов А. А., Чиглинцева А. С.

*Бирская государственная социально-педагогическая академия,
Бирск*

В современном мире возникла новая проблема, связанная с техногенными авариями – утечка газа из скважин в морских глубинах. Большинство таких аварий происходит в водах Мирового океана, чему соответствуют недавние примеры: 2010 год – утечка в Мексиканском заливе, 2012 – в Северном море. Известно, что температура воды около морского дна составляет в среднем 4 °С [1]. В таких районах аварий на морских глубинах выполняются термобарические условия, которые способствуют образованию гидрата: на поднимающихся вверх пузырьках газогидрата. С помощью образовавшихся гидратов можно закупорить скважину, для этого мы предлагаем следующую технологическую схему.

К месту утечки газа, опускается металлическая конструкция, имеющая форму цилиндра внутри которой имеется система алюминиевых решеток. В вертикальный канал снизу поступает вода. В результате этого происходит образование гидрата, как на пузырьках метана, так и на алюминиевой решётке, и как следствие приведет к полному закрытию места утечки газа.

Следует отметить, что все идеи устранения такого рода аварий различными нефтяными и газовыми компаниями не нашли применения. Поэтому на сегодняшний день остро стоит проблема разработки технологии, с помощью которой можно было бы эффективно и быстро устранить аварии такого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриевский А.Н. Газогидраты морей и океанов – источник углеводородов будущего. – М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2009, 416 с.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА ДАРЬЕ

Сатымбеков А. М.¹, Тулепбергенов А. К.¹, Уалиев
Ж. Р.²

¹Алматинский государственный университет им. Абая,
Алматы

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Алматы

Вращение турбины Дарье связано с действием подъемной силы крыла возникающей на рабочих лопастях ветротурбины при наличии ветра и вращения турбины [1-4]. В известной книге [1] достаточно полно приведен аэродинамический расчет турбины Н-ротора с использованием геометрического метода. В данной работе изложен другой подход аэродинамического расчета, условно названный – алгебраическим. Суть его заключается в

ведении единичных векторов связанных с компонентами подъемной силы (тангенциальной и радиальной) при круговом движении рабочей лопасти.

В теоретических подходах к расчёту аэродинамики ветротурбин наибольшее развитие получили представления о взаимодействии трубки тока с вращающимся ветроколесом как активным проницаемым диском [3]. Здесь получены все основные результаты: крутящий момент, связь мощности машины с энергией ветра, коэффициент использования энергии ветра и другие характеристики.

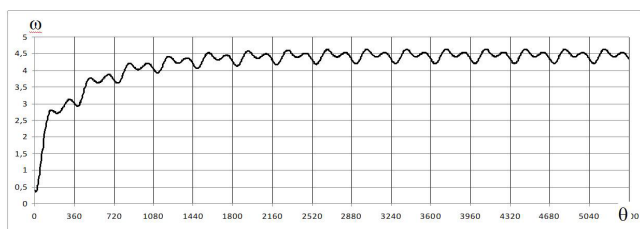


Рис. 1. График зависимости угловой скорости ω от θ

Для определения угловой скорости вращения ротора Дарье, при воздействии ветрового потока применяем теорему об изменении кинетического момента механической системы, а взаимодействие турбины с воздушным потоком моделируется теории трубки тока. Алгоритм данной модели позволяет вычислить угловой скорости ω турбины. Один из результатов расчета приведен на рис.1. В докладе будет подробно излагаться анализ результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершина А.К., Ершин Ш.А., Жалбасбаев У.К. Основы теории ветротурбины Дарье. – Алматы, 2001. – 104 с.
2. Liu M.-K., Yocke M.A., Myers T.C. Mathematical Model For the Analysis of Wind – Turbine Wakes //J. Energy. – 1983. – Vol.7, № 1. – P. 73-78.

3. Yershin S., Yershina A., Manatbayev R., Tulepbergenov A. Bi-Darrie windturbine //ASME-ATI-UIT 2010: Conference on Thermal and Environmental Issues in Energy Systems. – Sorrento, Italy, 2010. – P. 615-619.
4. Ершина А.К., Ершин Ш.А., Тулепбергенов А.К. Расчет мощности ветротурбины «Дарье» с применением теории трубки тока //Тезисы докладов 2-ой международной научной конференции: Проблемы современной механики. – Алматы, 2006. – С. 112.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

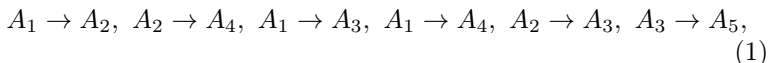
Степашина Е. В.

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия
им.З.Бишовой, Стерлитамак*

Кинетическая модель химического процесса описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Применение для ее решения численных методов, реализующих соответствующие необходимые и достаточные условия оптимальности, нередко связано с большими вычислительными затратами, трудностями в достижении сходимости процесса, неэффективностью алгоритмов при увеличении размерности вектора состояния объекта. В настоящее время широкую популярность приобретают генетические алгоритмы, позволяющие эффективно отыскивать глобальный оптимум за приемлемое время. Основная идея генетических алгоритмов состоит в том, что они имитируют в своей работе природные способы оптимизации: наследование и естественный отбор [1].

Используя генетические алгоритмы, решим задачу оптимального управления процессом получения фталевого ангидрида. Хи-

мическая реакция получения фталевого ангидрида имеет вид [2]:



где A_1 — исходное вещество — нафталин, A_2 — нафтохинон, A_3 — целевой продукт — фталевый ангидрид, A_4 — углекислый газ, A_5 — малеиновый ангидрид.

Система дифференциальных уравнений, описывающая кинетику реакции, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dl} &= -k_1C_1 - k_3C_1 - k_4C_1, & \frac{dC_4}{dl} &= k_2C_2 + k_4C_1, \\ \frac{dC_2}{dl} &= k_1C_1 - k_2C_2 - k_5C_2, & \frac{dC_5}{dl} &= -k_6C_3, \\ \frac{dC_3}{dl} &= k_3C_1 + k_5C_2 - k_6C_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_i — концентрация i -го вещества ($i = 1, \dots, 5$) (мольная доля), k_j — константа скорости j -й реакции ($j = 1, \dots, 6$) ($\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{ч})$), зависящая от температуры T согласно уравнению Аррениуса.

Задача поиска оптимального управления формулируется как задача нахождения оптимального температурного режима $T(t)$ процесса, описываемого системой (2). Критерий оптимальности — максимальный выход целевого продукта — фталевого ангидрида.

Начальные концентрации веществ были приняты как $C_1(0) = 1$, $C_i(0) = 0$, ($i = 1, \dots, 5$), длина реактора $L = 0,8$. Исходя из технологических соображений на выбор оптимального значения температуры наложены ограничения $620 \leq T \leq 644\text{K}$.

Для решения поставленной задачи использовался генетический алгоритм с вещественным кодированием со следующими параметрами: количество особей в популяции — 60, количество популяций — 3000, оператор селекции — турнирный отбор, оператор скрещивания — арифметический кроссовер, оператор мутации — неравномерная мутация с параметром 1. Для численно-

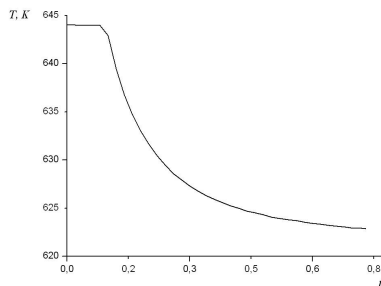


Рис. 1. Изменение оптимальной температуры по длине реактора

го решения системы дифференциальных уравнений применялся метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

По результатам вычислительного эксперимента концентрация целевого продукта (фталевого ангидрида) на выходе реактора составила 0,727106 мольные доли. Изменение оптимальной температуры по длине реактора представлены на рис.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В. Генетические алгоритмы поиска оптимального управления непрерывными детерминированными системами // Электронный журнал «Труды МАИ», 2011, №45.2.
2. Степашина Е.В., Байтимерова А.И., Мустафина С.А. Программный комплекс автоматизации процедуры уточнения механизма химической реакции на основе DRGEP-метода // Башкирский химический журнал, 2011, Т.18, №3. С.112-115

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ТРЕНИЯ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ЗАМЕРУ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА

Тихонов Р. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

При использовании известного факта трансформации в теплоту практически всей работы, затрачиваемой на трение, предлагается алгоритм восстановления фрикционного тепловыделения для определения силы трения в подшипниках скольжения по замерам температуры при достаточно высоких скоростях скольжения. При скорости вращения, превышающем 48 об/мин, для рассматриваемого подшипника скольжения можно принять допущение об однородности температуры по поверхности вращающегося вала. Поскольку теплопроводность стального вала на два порядка выше теплопроводности полимерного материала, принимается допущение об однородности температуры по поперечному сечению вала. Конвективный теплоотвод с торцевых поверхностей полимерной втулки можно считать пренебрежимо малым. Тогда нестационарный трехмерный тепловой процесс в подшипнике скольжения описывается системой, состоящей из одномерного (для вала) и двумерного (для втулки с обоймой) уравнений теплопроводности в полярных координатах. Уравнения связаны условием фрикционного тепловыделения

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{2\pi r_v}{S_v} \alpha_v (U - T_0) + [Q(t) + \\ + 2r_2 \lambda_2 d \int_0^{\phi_0} \left. \frac{\partial T(r, \phi, t)}{\partial r} \right|_{r=r_2} d\phi] \frac{\theta(z)}{S_v d}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $U(z, t)$ — температура вала; $T(r, \phi, t)$ — температура втулки и обоймы.

На свободных поверхностях подшипника задаются условия конвективного теплообмена. При известной функции тепловыделения прямая задача определения температурного поля решается методом конечных разностей.

Задача определения силы трения сводится к решению граничной обратной задачи восстановления функции фрикционного тепловыделения по температурным данным, регистрируемым в одной точке втулки. В экстремальной форме задача представляется как задача минимизации по функции тепловыделения функционала невязки, характеризующего меру уклонения расчетных и экспериментальных температур. Характерной особенностью граничных обратных задач является неустойчивость решения к малым погрешностям в температурных данных, поэтому необходимо использовать методы регуляризации.

Предлагается алгоритм решения граничной обратной задачи методом итерационной регуляризации. Получена сопряженная краевая задача, решение которой используется для определения градиента функционала. Приближения решения граничной обратной задачи находятся методом сопряженных градиентов.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Показано, что удаление расположения датчика температуры от зоны трения приводит к ухудшению результатов восстановления функции тепловыделения от времени. Замечено, что чрезмерное увеличение количества итераций, даже при стремлении значения функционала невязки к нулю, приводит к неустойчивости решения обратной задачи. Процесс уточнения решения обратной задачи следует прекращать при выполнении условия итерационной регуляризации. Показано, что при таком останове итераций погрешность восстановления тепловыделения соизмерима с погрешностью температурных данных.

Сила трения определяется по интенсивности фрикционного тепловыделения по формуле:

$$F_{\text{тр}}(t) = \frac{Q(t)}{v}$$

где v — скорость скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.З.
3. Мишин В.П., Алифанов О.М. Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Ч. I. Общие вопросы теории // Машиноведение. 1986. № 5. С. 19 – 29.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Старостин Н.П., Тихонов А.Г., Мороз В.А., Кондаков А.С. Расчет триботехнических параметров в опорах скольжения. – Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 1999. – 276 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Филиппов И. М.

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия
им.З.Биишевой, Стерлитамак*

Задачи о полях давления при фильтрации жидкости составляют основу теории массопереноса в пористой среде, поскольку они имеют большое практическое значение для нефте- и газодобычи, гидрогеологии, экологии и т.д. Особое место имеет задача о фильтрации в неоднородных анизотропных пластах в силу разнообразия условий и практической значимости. В работе показано, что важные аналитические зависимости могут быть успешно

получены на основе новых модификаций асимптотических методов, основанных на специальном выборе формального параметра асимптотического разложения. Оценка остаточного члена указывает, что высокую точность для большинства практических задач обеспечивает первое приближение в широкой области. Возникающие при этом проблемы вязких границ решаются построением погранслоевых функций. Важно заметить, что нулевой коэффициент асимптотического разложения имеет физический смысл: он описывает осредненные по ширине пласта значения физических параметров. Формулировка задачи для первого коэффициента требует добавочных условий, которые получены на основе требования тривиальности решения осредненной задачи для остаточного члена. В силу этого соответствующие выражения для нулевого и первого приближения названы «в среднем точными».

Математически задачи в квазистационарном приближении сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial F_o} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 1, F_o > 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} &= 0, \quad 0 < z < 1, r > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, P_1 \Big|_{F_o=0} = 0, P_1 \Big|_{z=1} = P \Big|_{z=1}, \\ \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=1} &= \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=1},\end{aligned}$$

Предполагается, что решение является регулярным на бесконечности. Развита в работе модификация асимптотического метода позволяет реализовать некоторый универсальный подход построения осредненных и стационарных или квазистационарных решений задач в ограниченных подобластях некоторой общей бесконечной однородной или неоднородной области, где стационарное или квазистационарное решение получить затруднительно.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ)

Чернова Е. С.

Кемеровский государственный университет, Кемерово

В данной работе рассматривается методика применения многофакторного регрессионного анализа для построения математической модели устойчивого развития региона. Прежде всего, с нашей точки зрения, такая модель должна соответствовать триединой концепции, то есть содержать подмодели, отвечающие экономической, экологической и социальной составляющей устойчивого развития, каждая из которых должна включать уравнения, описывающие динамику основных показателей. Для этого будем определять параметры, описывающие ее состояние (фазовые переменные), и параметры, посредством которых можно воздействовать на развитие системы (управляющие параметры). Уравнения движения получим путем построения авторегрессионных моделей, далее необходимо описать начальное состояние и целевые точки, ограничения, а также векторный критерий качества, каждая из компонент которого оценивает «уровень благосостояния» в одной из рассматриваемых сфер. Таким образом, наша модель будет соответствовать дискретной задаче оптимального управления со многими критериями качества [1].

При исследовании различных компонент устойчивого развития нередко применяются линейные регрессионные модели, что объясняется простотой и удобством их использования, однако такие модели часто недостаточно адекватно отражают свойства исследуемого объекта. В данной работе строятся модели более сложной структуры, включающие нелинейные взаимосвязи

между переменными, продиктованные конфигурацией используемых статистических данных.

В качестве управляющих параметров модели будем рассматривать доли бюджета региона (субъекта РФ), направляемые в национальную экономику (обозначим через u_1), жилищно-коммунальное хозяйство (u_2), охрану окружающей среды (u_3), образование (u_4), культуру (u_5), здравоохранение (u_6) и социальную политику (u_7).

Предлагаемую методику построения модели продемонстрируем на примере социального сектора, исходя из сравнительной полноты необходимых статистических данных по Кемеровской области (для подмоделей экономического и экологического секторов применяется такая же методика).

Оценивая степень взаимосвязи между предполагаемыми фазовыми переменными и долями бюджета, направляемыми в различные сферы финансирования, при помощи коэффициента ранговой корреляции Спирмена и применяя для построения уравнений регрессии метод Брандона, получим уравнения динамики численности населения Кемеровской области (1), представляющее собой сумму численности населения в предыдущий момент времени, численности рожденных $b(t)$ и миграционного прироста $m(t)$ минус численность умерших (рассматриваемую как временной ряд); доли населения с доходом ниже прожиточного минимума (2) и доходов населения (3):

$$\begin{aligned} x_1(t) = & x_1(t-1) + 11963,1150e^{10^{-9}b(t-1)}(1,0378 + 10^{-11}I(t) \times \\ & \times (-3,4935u_1(t) + 2 \cdot 10^{-10}u_1^2(t)I(t) - 0,7801u_2(t) + 3,1702u_6(t) - \\ & - 1,7763u_7(t))) + 7,3 \cdot 10^{-7}(2811,5 + 8,41 \ln(m(t-1)) - 0,6(\ln(m(t-1)))^2 - \\ & - 1,3 \ln(u_2(t)I(t)) - 254,2 \ln(u_6(t)I(t)) + 5,7(\ln(u_6(t)I(t)))^2 u_1(t)I(t) - \\ & - 39271,5 + 4017,2 \ln(t) - 3583,9 \cos\left(\frac{2\pi t}{9}\right) - 2513,1 \sin\left(\frac{2\pi t}{9}\right)) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & 6,23e^{0,05x_2(t-1)}(1,04 + 10^{-11}I(t)(-5,92u_1(t) - \\ & - 4,15u_2(t) + 8,86u_6(t))) \quad (2) \end{aligned}$$

$$x_3(t) = 3539244984,33 + 0,54x_3(t-1) + 1,62u_1(t) - 0,28u_2(t), \quad (3)$$

$$t = 1, \dots, T.$$

В качестве критериев качества можем рассматривать коэффициент рождаемости (4), равный отношению числа родившихся к численности населения, который подлежит максимизации в соответствии с настоящей демографической политикой Кемеровской области, минимизацию введенной величины доли населения с доходом ниже прожиточного минимума (5) и максимизацию показателя среднедушевого дохода населения (6):

$$F_1 = \sum_{t=1}^T \frac{b(t)}{x_1(t)} \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$F_2 = \sum_{t=1}^T x_2(t) \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$F_3 = \sum_{t=1}^T \frac{x_3(t)}{x_1(t)} \rightarrow \max, \quad (6)$$

К ограничениям модели можно отнести следующие очевидные условия:

$$\sum_{i=1}^7 (t) \leq 1, t = 1, \dots, T, \quad (7)$$

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

Аналогичным образом исследуя взаимосвязи фазовых переменных и управляющих параметров на основе имеющихся статистических данных, а также внутренние взаимосвязи между секторами и применяя в случае необходимости метод Брандона для построения моделей нелинейной регрессии, можно определить уравнения динамики, формирующие модель устойчивого развития экономического региона в целом.

Помимо ограничений вида (7), (8), в модели могут содержаться, например, в экологическом секторе – условия на предельно

допустимую концентрацию химических элементов в окружающей среде, условия, ограничивающие снизу доли бюджетных отчислений, направляемые в каждую из сфер и т.д. Конечное состояние как целевую точку устойчивого развития региона можно определить при помощи теоретико-игрового подхода [2].

Предложенную методику построения модели можно применять для определения оптимальных величин бюджетных отчислений в различные сферы устойчивого развития региона, что позволит раскрыть общие качественные тенденции динамики переменных и произвести анализ чувствительности результатов к различным заложенным в модель предположениям. Модели такого рода могут быть использованы на уровне администрации субъектов РФ при планировании и прогнозировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов Н.Н., Чернова Е.С. Применение кусочно-непрерывных функций при моделировании устойчивого развития региона // Природные и интеллектуальные ресурсы Сибири (СИБ-РЕСУРС-16-2010): доклады (материалы) 16-й Международной научно-практической конференции, Абакан, 4-6 окт. 2010 г. / отв. ред. Н.В. Замятин, В.Н. Масленников. Томск: САН ВШ; В-Спектр, 2010. С. 100 – 102.
2. Чернова Е.С. Методика определения конечного состояния региона как целевой точки устойчивого развития с помощью теоретико-игрового подхода // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). 2010. №6. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=7051>.

ПОВЫШЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ЛЬДА В ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ

Юмагулова Ю. А.

*Бирская государственная социально-педагогическая академия,
Бирск*

В процессе эксплуатации технических устройств в различных температурных режимах работы, используемых например в нефтегазодобыче, строительстве, могут возникнуть аварийные ситуации, связанные с образованием льда в замкнутых системах. Это объясняется повышением давления жидкости, т.к. при ее замерзании происходит уменьшение плотности.

В работе рассмотрены плоскоодномерная, радиально-симметричная и сферически-симметричная задачи о замерзании воды в емкости при охлаждении через стенки.

При математическом описании процесса теплопереноса уравнение теплопроводности для льда и жидкости имеет вид [1]:

$$\rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\lambda_j}{r^n} \frac{\partial}{\partial t} \left(r^n \frac{\partial T_j}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где ρ_j — плотность, λ_j — теплопроводность, c_j — теплоемкость и T_j — температура среды, (лед, жидкость), $n = 0, 1, 2$ соответствует плоской, радиальной и сферической геометрии задачи.

Для жидкости запишем уравнение неразрывности и линейное уравнение состояния [2]:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial t} (r^n \rho_l v_l) = 0, \quad (2)$$

$$\rho_l = \rho_{l0} \left(1 - \alpha^{(T)} (T_l - T_{l0}) + \alpha^{(p)} (p - p_0) \right) \quad (3)$$

где v_l, p — скорость и давление жидкости, нижний индекс 0 здесь и далее соответствует начальным значениям параметров жидкости, $\alpha^{(T)}$ — коэффициент теплового расширения жидкости, $\alpha^{(p)} = 1/(\rho_l C_l^2)$ — коэффициент сжимаемости, определяемый скоростью звука в жидкости C_l .

В начальном состоянии ($t = 0$) жидкость имеет температуру T_{l0} , давление p_0 . С некоторого момента времени на границе с координатой начинает поддерживаться постоянная температура T_e , которая ниже температуры замерзания жидкости T_s , на оси симметрии емкости $r = 0$ выполняется условие отсутствия тепловых потоков $\partial T / \partial r = 0$.

На границе между жидкостью и льдом $r = r_{(s)}$ температура равна температуре образования льда $T_i = T_l = T_s$, а также выполняются условия теплового баланса и баланса массы:

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \rho_i \dot{r}_{(s)} l, \quad (4)$$

$$-\rho_i \dot{r}_{(s)} = \rho_l (v_l - \dot{r}_{(s)}), \quad (5)$$

где l — удельная теплота замерзания жидкости.

Уравнение теплопроводности (1) и неразрывности (2) жидкости с учетом линейного уравнения состояния (3) и граничных условий (4), (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{(p)}}{(n+1)} \frac{dp}{dt} = & - \left(\alpha^{(T)} v_i^{(T)} + \frac{\lambda_l (\rho_l - \rho_i)}{\rho_l \rho_i l} \right) \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_{r_{(s)}} + \\ & + \frac{\lambda_l (\rho_l - \rho_i)}{\rho_l \rho_i l} \left(\frac{\partial T_i}{\partial r} \right)_{r_{(s)}} \end{aligned} \quad (6)$$

Данное уравнение означает, что изменение давления происходит за счет термического расширения жидкости и за счет образования слоя льда.

Система уравнений (1)-(6) решена методом конечных разностей [3]. Разностные аналоги вышеперечисленных дифференциальных уравнений решены методом итераций с применением неявной четырехточечной разностной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 360 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Секция II. Исследование математических моделей

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА¹

Антипин В. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Mu \equiv B(t)u_t - L(t)u = f, \quad t \in (0, T), \quad T \leq \infty, \quad (1)$$

где $B(t), L(t)$ ($t \in (0, T)$) – линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E . Предполагаем, что оператор B обратим, в частности, он может иметь ненулевое ядро. Определим пространства F_0, G_0 , как пополнение $D(|B(0)|^{1/2})$ и $D(|B(T)|^{1/2})$ по нормам $\|u\|_0 = \| |B(0)|^{1/2} u \|$ и $\|u\|_T = \| |B(T)|^{1/2} u \|$ соответственно. Пусть также $F_0^\pm = \{u \in F_0 : E^\pm(0)u = u\}$, $G_0^\pm = \{u \in G_0 : E^\pm(T)u = u\}$, где $E^\pm(0), E^\pm(T)$ – спектральные проекторы операторов $B(0)$ и $B(T)$, соответствующие положительной и отрицательной частям спектра [1,2].

Уравнение (1) дополним краевыми условиями

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad (T = \infty).$$

$$E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+,$$

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и гранта Министерства образования и науки РФ №02.740.11.0609.

$$E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^-(T < \infty),$$

где операторы h_{ij} обладают свойствами: $h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+)$, $h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+)$, $h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-)$, $h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-)$.

В работе сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности поставленных краевых задач для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пятков С.Г. Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сибир. мат. журнал. 1989. Т.30, N4. С.111-124.
2. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск. 1986. С.65-84.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ИМЕЮЩЕЙ ТРЕЩИНУ, ПРИ УСЛОВИИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ОДНОГО ИЗ БЕРЕГОВ

Аргунова С. Д.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе рассматривается краевая задача для упругой пластины с трещиной при условии закрепления одного из ее берегов с учетом вертикального прогиба срединной плоскости пластины.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ_0 . Срединная плоскость пластины с трещиной занимает область $\Omega_c = \Omega \setminus \Gamma_c$, где Γ_c – кривая, задающая форму трещины, $\Gamma_c \subset \Omega$, $\Gamma_c \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Задачу о равновесии пластины с трещиной будем рассматривать в области Ω_c .

Рассматривается следующая задача. Найти функции $\chi = (w^1, w^2, w)$ (перемещения точек срединной плоскости пластины), $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ (тензор напряжений), $m = \{m_{ij}\}$ (тензор моментов):

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \Omega_c \quad (1)$$

$$-\nabla \nabla m = g \quad \Omega_c \quad (2)$$

$$\sigma - \varepsilon(W) = 0 \quad \Omega_c \quad (3)$$

$$m + D \nabla \nabla w = 0 \quad \Omega_c \quad (4)$$

$$W = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_0 \quad (5)$$

$$W^+ \nu \geq \left| \frac{\partial w^+}{\nu} \right| \quad \text{на } \Gamma_c^+ \quad (6)$$

$$|m_\nu| \leq -\sigma_\nu, \quad \sigma_\nu W^+ \nu - m_\nu \frac{\partial w^+}{\nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c \quad (7)$$

$$W^- = w^- = \frac{\partial w^-}{\nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_c^- \quad (8)$$

$$\sigma_\nu = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad t^\nu(m) = 0 \quad \text{на } \Gamma_c^\pm \quad (9)$$

Здесь (1), (2) – уравнения равновесия, (3), (4) – представляют уравнение состояния. Краевое условие (5) соответствует закреплению пластины на границе Γ_0 , а (6)–(9) описывают условие взаимного непроникания берегов трещины, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$ – тензор малых деформаций, $A = \{A_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости.

Задача о равновесии пластины, решение которой удовлетворяет условиям непроникания (8) эквивалентна вариационной задаче минимизации функционала энергии $\Pi_u(W)$ на выпуклом множестве допустимых перемещений K :

$$\inf_{\chi \in K} \Pi_u(W) \quad (10)$$

Решение задачи (10) эквивалентно отысканию решения вариационного неравенства

$$\chi \in K : \quad \delta \Pi_u(\bar{\chi} - \chi) \geq 0, \quad \forall \bar{\chi} \in K.$$

Задача имеет единственное решение.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Атласова Е. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В данной работе рассматривается одна нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами. Актуальность избранной темы не вызывает сомнений. С одной стороны, обоснованием этого вывода служат многочисленные приложения параболических уравнений в естественности, технике и экономике. С другой стороны, исследование разрешимости краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, в том числе и параболических, значительно усложняется, если коэффициенты уравнений или краевые условия являются разрывными функциями [1, 2].

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, где Ω – ограниченная область из \mathbb{R} , для простоты возьмем $\Omega = [-1; 1]$. Введем следующие обозначения $D^+ = D \cap \{x > 0\}$ и $D^- = D \cap \{x < 0\}$.

Определим пространство V_0 :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_2(D), d_1 v_x(-0, t) = d_2 v_x(+0, t)\};$$

норму в пространстве V_0 определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))}.$$

Пусть $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ суть заданные при $(x, t) \in \bar{D}^-$, и $(x, t) \in \bar{D}^+$ соответственно функции. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$Lu = f(x, t), \tag{1}$$

¹Работа выполнена при поддержке Гранта ректора СВФУ

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - d_1 u_{xx}, & x < 0, \\ u_t - d_2 u_{xx}, & x > 0, \end{cases} \quad f(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t), & x < 0, \\ f_2(x, t), & x > 0, \end{cases}$$

$$d_1, d_2 > 0 - const,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(-0, t) = u(+0, t), \\ d_1 u_x(-0, t) = d_2 u_x(+0, t), \end{cases} \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \alpha(x)u(x, T) + u_0(x). \quad (4)$$

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$\alpha(x) \in \overset{\circ}{W}^1_{\infty}(\Omega), \quad |\alpha(x)| \leq \alpha_0 < 1. \quad (5)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$ из пространства $L_2(D)$ и любой функции $u_0(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, такой что $u_0(-1) = u_0(1) = 0$, $u_0(-0) = u_0(+0)$, $d_1 u_{0x}(-0) = d_2 u_{0x}(+0)$, краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И. Нелокальные по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т.7, №1. С.50-60
2. Шарин Е.Ф. Разрешимость краевых задач для параболических уравнений с разрывными начальными функциями и меняющимся направлением времени // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5–12 октября 2008 г.): Тез. Докладов / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2008. С.235.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ МЕДИЦИНСКИХ РАБОТНИКОВ РАЗНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ НА ПОКАЗАТЕЛЬ ЗДОРОВЬЯ НАСЕЛЕНИЯ В РЕГИОНЕ

Богатырева Н. И.

Кемеровский государственный университет, Кемерово

Здравоохранение области как социальная отрасль очень важна. Одной из характеристик эффективности ее работы является уровень здоровья населения в регионе. Для измерения этого уровня часто используется единый критерий – интегральный показатель (ИП), одновременно учитывающий комплексное влияние разных факторов и обобщающий информацию о различных аспектах состояния здоровья населения. Существует большое число моделей ИП здоровья, например, модель, предложенная Кирьяновым Б. Ф. (см., напр., [1]):

$$\begin{aligned} \text{ИП} = & K_{\text{ОРЖ}} \cdot \text{ОРЖ} + K_{\text{СППЖ}} \cdot \text{СППЖ} - K_{\text{ОЗО}} \cdot \text{ОЗО} \\ & - K_{\text{ОСМ}} \cdot \text{ОСМ} - K_{\text{ПИНВ}} \cdot \text{ПИНВ} + C \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ОРЖ характеризует воспроизводство населения, СППЖ – расчетный показатель смертности, ОЗО – общая заболеваемость, ПИНВ – первичная инвалидность, ОСМ – общая смертность, K_i – весовые коэффициенты показателей здоровья, C – константа.

По формуле (1) на основе статистических данных была построена модель ИП здоровья населения для Кемеровской области [2]:

$$\begin{aligned} \text{ИП}_t = & 0.02405 \cdot y_t^{\text{ОРЖ}} + 0.00198 \cdot y_t^{\text{СППЖ}} - 0.00034 \cdot y_t^{\text{ОЗО}} \\ & - 0.00750 \cdot y_t^{\text{ОСМ}} - 0.02277 \cdot y_t^{\text{ПИНВ}} + 0.75 \end{aligned} \quad (2)$$

На состояние здоровья населения оказывают влияние различные факторы такие, например, как качество окружающей среды в регионе, эффективность работы системы здравоохранения, образ жизни населения и социально-экономические условия жизни. В данной

работе рассматривается влияние численности медицинских работников разных специальностей в регионе на показатели здоровья ОРЖ, СППЖ, ОЗО, ОSM, ПИНВ, а через них и на ИП (2).

Значения исследуемых показателей в год t обозначим $y_t^{\text{ОРЖ}}$, $y_t^{\text{СППЖ}}$, $y_t^{\text{ОСМ}}$, $y_t^{\text{ПИНВ}}$, $y_t^{\text{ОЗО}}$ и построим регрессионные уравнения их зависимости от численности медицинских работников разных специальностей (терапевтов, хирургов, педиатров, неврологов и пр. – всего 13 категорий). В качестве формы зависимости используем нелинейную функцию, в которую дополнительно включим значения соответствующих показателей здоровья в предыдущий период времени. Оценка коэффициентов производится методом наименьших квадратов (МНК). В результате получаются следующие уравнения:

$$y_t^{\text{ОСМ}} = 6.07 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.001} x_{5t}^{0.001} x_{6t}^{0.379} x_{7t}^{0.001} x_{8t}^{0.001} x_{9t}^{0.001} x_{10t}^{0.001} x_{11t}^{0.278} x_{12t}^{0.001} x_{13t}^{0.001} (y_{t-1}^{\text{ОСМ}})^{0.332} \quad (3)$$

$$y_t^{\text{ПИНВ}} = 1.57 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.001} x_{5t}^{0.001} x_{6t}^{0.176} x_{7t}^{0.001} x_{8t}^{0.001} x_{9t}^{0.001} x_{10t}^{0.001} x_{11t}^{0.001} x_{12t}^{0.001} x_{13t}^{0.001} (y_{t-1}^{\text{ПИНВ}})^{0.81} \quad (4)$$

$$y_t^{\text{СППЖ}} = 21.174 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.035} x_{3t}^{0.177} x_{4t}^{0.001} x_{5t}^{0.024} x_{6t}^{0.001} x_{7t}^{0.001} x_{8t}^{0.001} x_{9t}^{0.225} x_{10t}^{0.167} x_{11t}^{0.168} x_{12t}^{0.001} x_{13t}^{0.001} (y_{t-1}^{\text{СППЖ}})^{0.197} \quad (5)$$

$$y_t^{\text{ОЗО}} = 207.041 x_{1t}^{0.077} x_{2t}^{0.002} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.176} x_{5t}^{0.001} x_{6t}^{0.001} x_{7t}^{0.462} x_{8t}^{0.059} x_{9t}^{0.051} x_{10t}^{0.084} x_{11t}^{0.001} x_{12t}^{0.001} x_{13t}^{0.051} (y_{t-1}^{\text{ОЗО}})^{0.033} \quad (6)$$

$$y_t^{\text{ОРЖ}} = 1.049 x_{1t}^{0.002} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.002} x_{5t}^{0.001} x_{6t}^{0.001} x_{7t}^{0.001} x_{8t}^{0.001} x_{9t}^{0.001} x_{10t}^{0.001} x_{11t}^{0.001} x_{12t}^{0.001} x_{13t}^{0.001} (y_{t-1}^{\text{ОРЖ}})^{0.985} \quad (7)$$

Подставляя (3) – (7) в модель (2), получим уравнение зависимости ИП здоровья от численности медицинских работников в области. Его

анализ позволит оценить вклад отдельных специальностей в поддержание общего уровня здоровья населения, а в дальнейшем – построить модель оптимального управления регионом, где это выражение выступало бы в роли критерия качества, а соотношения (3) – (7) играли бы роль уравнений движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирьянов Б. Ф. Математические модели интегрального показателя здоровья населения / Б. Ф. Кирьянов // *Фундаментальные исследования*. – 2008. – № 9. – С. 99-100.
2. Мешечкин В. В. Математическое моделирование задачи повышения уровня здоровья населения Кемеровской области с применением интегрального показателя / В. В. Мешечкин, Н. И. Богатырева // *Вестник КемГУ*. – 2011. – Вып. 3 (47). – С. 76-85.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРВОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ¹

Васильева А. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u - u_{xt} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), \quad (2)$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609)

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), \quad (3)$$

а также с нелокальными краевыми условиями

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad (4)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad (5)$$

где $a(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \Omega = [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2), (3), а также начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (4), (5), а также начальные условия (6).

Отметим, что в работе [1] методом регуляризации и продолжения по параметру была исследована разрешимость начально-краевой задачи для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t). \quad (7)$$

В настоящей работе доказывается разрешимость краевых задач с краевыми условиями (2), (3) и (4), (5), методами использованными при исследовании уравнения (7). В случае локальных краевых условий (2), (3) — т.е. при выполнении условий $\alpha_2(t) \equiv \beta_1(t) \equiv 0$ — теоремы разрешимости аналогичных краевых задач для уравнений (1), называемых псевдогиперболическими, были доказаны в работах [2–4]. Отметим также, что в работе [5] для волнового уравнения (7) в случае $c = c(x)$ методом Фурье были исследованы общие нелокальные краевые условия (2), (3) с постоянными коэффициентами α_i , β_j при выполнении условия самосопряженности в L_2 оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)$, определенного на функциях, удовлетворяющих краевым условиям.

В настоящей работе методом продолжения по параметру доказывается существование регулярного решения краевых задач I, II.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады АН. 2009. Т.427, №6. С. 747–749.
2. Якубов С.Я. Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм., 1985.
3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
4. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Netherlands, Utrecht, 1999.
5. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №8. С. 1072–1077.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДОБЫЧИ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОХРАНЯЕМОЙ ТЕРРИТОРИИ

Васильев М. Д., Трофимцев Ю. И., Григорьев М. П.,
Халтанова М. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Изучается оптимальная добыча популяции при наличии охраняемой территории и существовании миграции между охраняемой и остальной частью территории. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – плотности популяции вне охраняемой территории и внутри ее; $f(x)$ – функция, описывающая добычу популяции вне охраняемой территории; s – доля заповедной территории; $d_2(s)$ – коэффициент, описывающий обмен между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции. Функцию добычи выбираем в виде $f(x) = b + hx(t)$. Здесь $b > 0$ – величина браконьерской добычи, h – доля добычи в неохраняемой популяции $x(t)$, $0 \leq h \leq 1$.

Оптимальное значение величины добычи определяется с помощью неантагонистической иерархической игры двух лиц. Управлением Центра является доля заповедной части территории s . Игрок

второго уровня иерархии управляет величиной h в функции добычи $f(x)$. В качестве критерия оптимальности рассматривается равновесие по Нэшу.

Функция выигрыша Центра записывается в виде:

$$K_1(s, h) = \begin{cases} l_1(1-s) - l_2s - l_3b - \frac{sd_2}{1-s}(x(t) - y(t)) \\ \quad + \frac{\lambda}{(1-s)}(hx(t) - \theta), hx(t) > \theta, \\ l_1(1-s) - l_2s - l_3b - \frac{sd_2}{1-s}(x(t) - y(t)), hx(t) \leq \theta, \end{cases}$$

где l_1 – плата за использование неохраняемой территории, l_2 – затраты на содержание охраняемой территории, l_3b – ущерб от браконьерской добычи, $\frac{sd_2}{1-s}$ – ставка затрат на содержание одной особи, попадающей на охраняемую территорию, θ – размер популяции, оптимальный для использования, и λ – ставка штрафа за превышение нормы добычи.

Выигрыш игрока второго уровня имеет вид:

$$K_2(s, h) = \begin{cases} hx(t)(p - qhx(t)) - l_1(1-s) - \frac{\lambda}{1-s}(hx(t) - \theta), hx(t) > \theta, \\ hx(t)(p - qhx(t)) - l_1(1-s), hx(t) \leq \theta. \end{cases}$$

Здесь p – рыночная стоимость добычи, q – затраты на добычу. Оптимальное решение игры при $hx(t) > \theta$:

$$s^* = 1 - \frac{1}{l_1 + l_2} [2(l_1 + l_2) + d_2(x(t) - y(t)) + \sqrt{(2(l_1 + l_2) + d_2(x(t) - y(t)))^2 + 4\lambda(hx(t) - m)(l_1 + l_2)}],$$

$$h^*x(t) = \frac{p(1-s) - \lambda}{2q(1-s)}.$$

Получены плотности распределения случайных функций выигрыша K_1 и K_2 в предположении, что случайная величина браконьерской добычи b равномерно распределена на отрезке $[\nu, \omega]$, а величина h нормально распределена с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Случайные величины считаются независимыми.

Для $K_1(s, h)$ при $hx(t) > \theta$

$$f_1(z) = \frac{1}{l_3} \frac{1}{\omega - \nu} [F(\frac{m}{\sigma} - \frac{(1-s)(z + l_3\nu + Q)}{\lambda x(t)\sigma}) - F(\frac{(1-s)(z + l_3\omega + Q)}{\lambda x(t)\sigma})].$$

Здесь $F(z)$ – функция Лапласа и $Q = \frac{1}{1-s}[\lambda\theta + sd_2(x(t) - y(t))] + l_1(s-1) + l_2s$ (рис. 1).

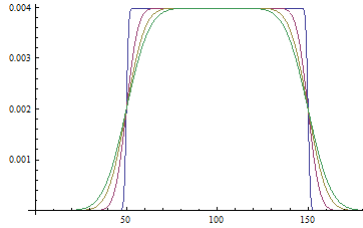


Рис. 1. Плотность распределения функции выигрыша Центра при $hx(t) > \theta$.

При $hx(t) \leq \theta$ функция $K_1(s, h)$ распределена равномерно.

Плотность распределения функции $K_2(s, h)$ имеет вид (рис. 2):

$$f_2(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi q(z-l)}} \exp\left\{-\frac{z-L+qA^2}{2qC^2} - ch \frac{A\sqrt{z-L}}{C^2\sqrt{q}}\right\}, z-L > 0.$$

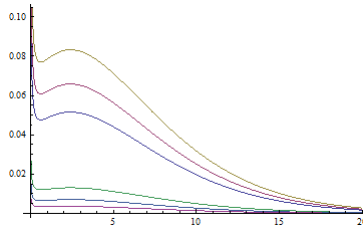


Рис. 2. Плотность распределения функции выигрыша игрока второго уровня.

Если $h(t) \leq \theta$, то $A = mx(t) - \frac{p}{2q}$, $C = x(t)\sigma$, $L = l_1(1-s) - \frac{p^2}{4q}$.

При $h(t) > \theta$ имеем $A = mx(t) - \frac{1}{2q}(p - \frac{\lambda}{1-s})$, $C = x(t)\sigma$, $L = l_1(1 - s) - \frac{1}{4q}(p - \frac{\lambda}{1-s})^2$.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Вершинин Я. Н., Крутиков В. Н.

Кемеровский государственный университет, Кемерово

В этой работе предлагается и изучается многошаговый метод решения множества неравенств, в котором для ускорения сходимости используется идея ортогонализации последовательных направлений процесса обучения. Предложенный метод предназначен для поиска направления спуска в релаксационных субградиентных методах. Показано, что алгоритм ортогонализации последовательных направлений приводит к ускорению скорости сходимости.

1. Постановка задачи. Для решения задачи минимизации $f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$ в релаксационных процессах ε -субградиентного типа $x_{K+1} = x_k - \gamma_k s_{k+1}$, $\gamma_k = \arg \min f(x_k - \gamma s_{k+1})$, направление спуска s_{k+1} выбирается из множества $S(\partial_\varepsilon f(x_k))$ [1, с.259], где $\partial_\varepsilon f(x_k)$ - ε -субградиентное множество в точке x_k , а $S(G) = \{s \in R^n | \min_{g \in G} \langle s, g \rangle > 0\}$, где G выпуклое множество. Обозначим η_G — ближайший к началу координат вектор множества G , $\rho_G = \|\eta_G\|$, $\mu_G = \eta(G)/\|\eta(G)\|$, $s^* = \eta_G/\rho_G^2$, $R_G = \max_{g \in G} \|g\|$.

Задача 1. Необходимо найти вектор неизвестных параметров, удовлетворяющий следующей системе неравенств : $\langle s^*, g \rangle > 0$, $\forall g \in G \subset R^n$

Здесь и далее n — размерность пространства, оператор скалярного произведения и (\cdot, \cdot) — Евклидова норма вектора.

Методы решения задачи 1 и построение на этой основе эффективных методов минимизации впервые получены в работах [2-4]. В следующем разделе совершенствуется алгоритм решения неравенств на основе алгоритма Качмажа.

2. Многошаговый алгоритм решения множества неравенств.
В работе сформулирован алгоритм А1 для получения вектора $s_k \in$

$S(G)$, т.е. решения задачи 1. Итерация получения приближения s^* в алгоритме A1 имеет вид

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1 - (s_k, g_k)}{(p_k, g_k)} p_k, \quad p_k = \begin{cases} g_k, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) \geq 0, \\ g_k - \frac{(g_k, p_{k-1})}{\|p_{k-1}\|^2} p_{k-1}, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Свойства сходимости алгоритма A1 сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть множество выпуклое, замкнутое, ограниченное и удовлетворяет условию отделимости, то есть $\rho_G > 0$. Тогда для оценки скорости сходимости к точке s^* последовательности $\{s_k\}$, генерируемой алгоритмом A1 до момента останова, справедливо соотношение:

$$\|s_k - s^*\|^2 \leq (\|s_0\| + \rho_G^{-1})^2 - k/R_G^2, \quad (9)$$

а при некотором значении, удовлетворяющем неравенству

$$k \leq k^* \equiv R_G^2(\|s_0\| + \rho_G^{-1})^2 + 1 \quad (10)$$

будет получен вектор $s_k \in S(G)$, т.е. решение задачи 1.

3. Заключение. В работе предложен и исследован многошаговый алгоритм решения неравенств. Теоретически показано, что свойства сходимости нового алгоритма не хуже чем у алгоритма Качмажа. Предложенный алгоритм предназначен для ускорения сходимости субградиентных методов минимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов, В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
2. Крутиков, В.Н. Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента / В.Н. Крутиков, Т.В. Петрова // Экономика и мат. методы. – 2003. – Т. 39, Вып. 1. – С 33-49.
3. Крутиков, В.Н. Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики / В.Н. Крутиков, Т.А. Горская // Экономика и мат. методы. – 2009. – Т. 45, – №4. – С 37-80.

4. Крутиков, В.Н. Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение. / В.Н. Крутиков - Томск: Изд-во Том. государственного педагогического ун-та, 2008. – 264с.
5. Вершинин, Я.Н. Многошаговый алгоритм обучения / Я.Н. Вершинин // Образование, наука, инновации - вклад молодых исследователей: Материалы VI (XXXVIII) Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. - Кемерово: ООО «ИНТ», 2011. – Вып. 12. – Т. 2. – С. 111-112.

ПРИМЕНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К НЕКЛАССИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ¹

Ефимова Е. С., Семенова Г. Е.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени посвящена обширная литература, которые входят в класс эллиптических параболических уравнений.

В данной работе сначала доказывается существование и единственность решения краевой задачи для неклассического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени. Далее к решению краевой задачи применяется стационарный метод Галеркина. При этом базисные функции выбираются как решения спектральной задачи для уравнения четного порядка. Доказана слабая и сильная сходимость приближенных решений к регулярному решению краевой задачи.

Для приближенных решений установлена оценка погрешности стационарного метода Галеркина в норме пространства $W_2^{1,s}(Q)$ для

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и гранта Министерства образования и науки РФ №02.740.11.0609.

неклассического уравнения высокого порядка через собственные числа соответствующей спектральной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т.18, вып.2. С.41-46.
2. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1971. С.7-252. (Итоги науки).
3. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений // Математика. 1963. Т.7. №6. С.99-121.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ефимова П. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Настоящая работа представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием А.А. Самарского с переменными коэффициентами для одномерных линейных гиперболических уравнений второго порядка. В случае граничных условий с постоянными коэффициентами для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x)u = f(x, t)$$

подобные задачи изучались ранее в работе [1]. Существенным моментом в этой работе было использование метода Фурье, что и диктовало специальный вид уравнения, а также постоянство коэффициентов граничных условий. В настоящей работе будет использоваться другой

метод, и этот метод позволит существенно расширить класс уравнений (в частности, можно будет отказаться от самосопряженного вида пространственной части), а также существенно ослабить требования на коэффициенты граничных условий (см. [2]). Более того, полученные результаты будут новыми и для случая постоянных коэффициентов в граничных условиях.

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $c(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt} - Bu = f(x, t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b^{ij}(x) u_{x_j}) + b(x, t)u \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T,$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T.$$

Предполагаем выполнение условия на оператор B :

$$\sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n.$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условия

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T,$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T.$$

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условия

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T,$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T.$$

В настоящей работе методом продолжения по параметру доказывается существование регулярного решения краевых задач I–III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка. Дифференц. уравн. Т. 42, № 8. 2006. С. 1072–1077.
2. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады АН. 2009. Т.427, №6. С. 747–749.

ПРЕДПИСАННАЯ 2-ДИСТАНЦИОННАЯ ($\Delta + 4$)-РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ

Лепчиков А. Ю.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В дискретной математике теория раскраски занимает центральное место и имеет многочисленные приложения, особенно в информатике (распределение памяти, диагностика ошибок в программах и т. д.), задаче назначения частот в мобильном телефонировании, в теории расписаний и др.

Этот вид раскраски изучается в теории графов с конца 70-х годов и интересен как сам по себе, так и своими приложениями. В частности, одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот (ПРР) в сетях мобильной связи является (p, q) -раскраска. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета вершин (целые числа) на расстоянии 1 различались не менее чем на p , а на расстоянии 2 — не менее чем на q .

Здесь $p \geq q$, т.к. частоты близко расположенных источников должны различаться сильнее ввиду интерференции волн (при $p = q = 1$ мы получаем 2-дистанционную раскраску). Иногда в ПРР каждый источник имеет свой собственный набор разрешенных частот, т.е. возникает известная в теории графов задача предписанной раскраски.

Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется его 2-дистанционным хроматическим числом и обозначается через $\chi_2(G)$ (в случае предписанной раскраски — $\chi_2^l(G)$). Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $\Delta(G)$ и $g(G)$ максимальную степень и обхват (минимальная длина цикла) графа G , соответственно.

В 1977 г. Вегнер предположил, что для любого плоского графа $\chi_2 \leq 7$ при $\Delta = 3$, $\chi_2 \leq \Delta + 5$ при $4 \leq \Delta \leq 7$ и $\chi_2 \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ в остальных случаях. Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 2$ при $\Delta \geq 749$ — Агнарсоном и Холдorsoном (2000, 2003), $\lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 1$ при $\Delta \geq 47$ — Бородиным и др. (2001): $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$ при $\Delta \geq 241$ — Молойем и Салаватипуром (2002, 2005), $\frac{3\Delta}{2} + o(\Delta)$ — Аве и др. (2007).

Очевидно, что $\chi_2^l(G) \geq \chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ для любого графа G (поскольку в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$). С другой стороны, при $\Delta = 2$ существуют графы с $\chi_2 = 4$ и произвольно большим обхватом, например, C_{3k+1} .

Были получены достаточные условия (в терминах g и Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta + 1$. В частности, установлено, что минимальное g такое, что $\chi_2^l(G) = \chi_2(G) = \Delta(G) + 1$, если Δ достаточно велико, равно 7 (см. [1, 2, 3]). Более конкретно, $\chi_2^l(G) = \Delta(G) + 1$ в каждом из следующих случаев: (i) $\Delta \geq 16$ and $g = 7$; (ii) $\Delta \geq 10$ and $8 \leq g \leq 9$; (iii) $\Delta \geq 6$ and $10 \leq g \leq 11$; (iv) $\Delta = 5$ and $g \geq 12$; (v) $\Delta = 4$ and $g \geq 15$.

Кроме того, для плоских графов с $g \leq 4$ и произвольно большой Δ известно, что $\chi_2 = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$ (поскольку существует треугольник Шеннона). С другой стороны, существуют плоские графы с $g \leq 6$ такие, что $\chi_2^l = \Delta + 2$ при произвольно больших Δ (см. [4, 5]).

Дворжак и др. (2008) доказали, что каждый плоский граф с $\Delta \geq 8821$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_2 \leq \Delta + 2$. Бородиным и Ивановой в (2009) условие на Δ было ослаблено до 18, а в предписанном случае — до 24.

Достаточно много исследований посвящено субкубическим (т.е. с

$\Delta = 3$) графам. Вегнер (1977) доказал, что достаточно восьми цветов для 2-дистанционной раскраски таких плоских графов. Кренстон и Ким (2008) доказали, что для плоских субкубических графов $\chi_2^{list} \leq 8$ и $\chi_2^{list} \leq 7$, если $g \geq 7$. Аве (2009) доказал, что $\chi_2^{list} \leq 6$, если $g \geq 9$. Для $g \geq 14$ Монтасьером, Распо (2006) и Дворжак, Шкрековский, Танцер (2008) была получена оценка $\chi_2 \leq 5$. Ограничение на обхват было улучшено до $g \geq 13$ Ивановой, Соловьевой (2009) и Аве (2009), и до $g \geq 12$ — Бородиным, Ивановой (2012). Наконец, оценка $\chi_2 = 4$ была получена для $g \geq 24$ Бородиным и др. (2004) и, независимо, Дворжаком и др. (2008), что было позже улучшено до $g \geq 22$ Бородиным и Ивановой (2012).

Для всех C_4 -свободных плоских графов Ванг и Кай (2008) доказали, что $\chi_2 \leq \Delta + 48$. Интересным представляется вопрос о $(\Delta + k)$ -раскрашиваемости плоских графов с $\Delta \geq 4$, где $k \geq 3$. В данной работе даются достаточные условия $(\Delta + 4)$ -раскрашиваемости плоских графов, а именно доказываются теоремы:

Теорема 1. *Каждый плоский граф G с $g(G) \geq 8$ и $\Delta(G) \geq 4$ имеет $\chi_2^l(G) \leq 8$.*

Теорема 2. *Каждый плоский граф G с $g(G) \geq 7$ и $\Delta(G) \geq 5$ имеет $\chi_2^l(G) \leq 9$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В. Бородин, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева, Предписанная 2-дистанционная $(\Delta + 1)$ -раскрашиваемость плоских графов с заданным обхватом, Дискрет. анализ и исслед. операций, 14, 3 (2007) 13–30.
2. Z. Dvořák, D. Král, P. Nejedlý, R. Škrekovski, Coloring squares of planar graphs with girth six, Europ. J. Combin., 29, 4 (2008) 838–849.
3. А.О. Иванова, Предписанная 2-дистанционная $(\Delta + 1)$ -раскраска плоских графов с обхватом не менее 7, Дискрет. анализ и исслед. операций, 17, 5 (2010) 22–36.
4. О.В. Бородин, А.Н. Глебов, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева, В.А. Ташикинов, Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta + 1)$ -раскрашиваемости плоских графов, Сибирские электронные матем. известия, 1 (2004) 129–141.
5. Z. Dvořák, D. Král, P. Nejedlý, R. Škrekovski, Distance constrained labelings of planar graphs with no short cycles, Discrete Appl. Math., 157, no. 12 (2009) 2634–2645.

АНАЛИЗ И ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ БАНКРОТСТВА ПРЕДПРИЯТИЙ

Мамбетова К. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово

В настоящее время в мировой практике для прогнозирования изменения финансового состояния предприятия, для выбора его финансовой стратегии и для определения риска возможного банкротства используют различные экономико-математические модели.

Широкое распространение в качестве инструментов прогнозирования банкротства предприятий получили зарубежные аналитические модели Э. Альтмана, У. Бивера, Г. Спрингейта, Ф. Лиса, Р. Тафлера, Д. Фулмера, Ж. Конана – М. Гольдера, Д. Чессера, Аргенти, отечественные модели Давыдовой – Беликова, Сайфулина – Кодекова, О. Зайцевой, четырехфакторная R-модель Иркутской государственной экономической академии, модель Казанского государственного технического университета и другие (см., напр., [1-5]).

Все перечисленные модели относятся к количественным методам анализа, используются для оценки и прогнозирования банкротства.

Решению проблем банкротства организаций, с математической точки зрения, на практике уделяется недостаточно внимания. С помощью наиболее адекватных математических моделей можно получить практически полезные рекомендации по предотвращению банкротства.

Большинство моделей оценки банкротства представляют собой линейное уравнение

$$Z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

где Z — показатель вероятности возможного банкротства; x_1, x_2, \dots, x_n — переменные, характеризующие финансовое состояние предприятия; a_0 — свободный член; a_1, a_2, \dots, a_n — константы, найденные эмпирическим путем, характеризующие значимость переменных; n — число включаемых в модель факторов.

Существующие модели имеют ряд недостатков. К примеру, двухфакторная модель Альтмана не обеспечивает всестороннюю оценку финансового состояния предприятия, а пятифакторная модель Альтмана (индекс кредитоспособности) не учитывает специфику российской экономики; в модели Таффлера из всех обследованных должников 87,5% были признаны финансово устойчивыми, что не соответствует реальности.

Учитывая вышеизложенное, можно сделать вывод о необходимости модификации некоторых линейных моделей оценки банкротства для повышения вероятности адекватности прогноза.

Доклад посвящен анализу существующих зарубежных и отечественных математических моделей оценки банкротства предприятий и модернизации некоторых них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. - М.: Финансы и статистика, 1996. - 432 с.;
2. Антикризисное управление: от банкротства - к финансовому оздоровлению/ Под ред. Г.П. Иванова. - М.: Закон и право, ЮНИТИ, 1995. - с.130;
3. Давыдова Г.В., Беликов А.Ю. Методика количественной оценки риска банкротства предприятий // Управление риском, 1999 г., № 3, с. 13-20;
4. Черногорский С.А., Ли Вэй Анализ бухгалтерской отчетности и принятие управленческих решений - Издание второе. 2007, с.7-54;
5. Данилов Н.Н. Курс математической экономики. – М.: Высшая школа, 2006. – 407с.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Неустроев Р. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В статье [1] в качестве спектральных кривых конструкции Кричевера [2] ортогональных криволинейных систем координат были рассмотрены сингулярные кривые. Это позволило свести конструкцию построения ортогональных координат к решению систем линейных уравнений и простых вычислений с элементарными функциями. В качестве иллюстрации предложенной схемы были построены спектральные кривые, отвечающие полярной, цилиндрической, и сферической системам координат. Для эллиптической системы координат спектральные кривые не были найдены.

В этой работе доказана следующая характеристизационная теорема, выделяющая эллиптические координаты среди остальных координат на плоскости.

Теорема 1. Декартову систему координат на плоскости при $x, y > 0$, полярную систему координат и параболическую систему координат на плоскости при $x > 0$ можно задать с помощью квадратичных форм

$$x = \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1 + \mu u^2} & e^{\rho u^1 + \sigma u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1 + \mu u^2} \\ e^{\rho u^1 + \sigma u^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y = \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1 + \mu u^2} & e^{\rho u^1 + \sigma u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda u^1 + \mu u^2} \\ e^{\rho u^1 + \sigma u^2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности вписанных криволинейных координат является равенство

$$\begin{aligned} & (a_1 e^{2u^1 \lambda + 2u^2 \mu} \lambda + c_1 e^{2u^1 \rho + 2u^2 \sigma} \rho + b_1 e^{u^1(\lambda + \rho) + u^2(\mu + \sigma)}(\lambda + \rho)) \times \\ & \times (a_1 e^{2u^1 \lambda + 2u^2 \mu} \mu + c_1 e^{2u^1 \rho + 2u^2 \sigma} \sigma + b_1 e^{u^1(\lambda + \rho) + u^2(\mu + \sigma)}(\mu + \sigma)) + \\ & + (a_2 e^{2u^1 \lambda + 2u^2 \mu} \lambda + c_2 e^{2u^1 \rho + 2u^2 \sigma} \rho + b_2 e^{u^1(\lambda + \rho) + u^2(\mu + \sigma)}(\lambda + \rho)) \times \\ & \times (a_2 e^{2u^1 \lambda + 2u^2 \mu} \mu + c_2 e^{2u^1 \rho + 2u^2 \sigma} \sigma + b_2 e^{u^1(\lambda + \rho) + u^2(\mu + \sigma)}(\mu + \sigma)) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

которое должно быть выполнено для всех (u^1, u^2) .

Эллиптическая система координат на плоскости не допускает представление (1-3) с помощью квадратичной формы на R^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Миронов А.Е., Тайманов И.А. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие спектральным кривым // Труды математического института им. В.А.Стеклова, 2006, Т. 255, С. 180-196.
2. Кричевер И.М. Алгебро-геометрические ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. анализ и его приложения, 1997, Т. 31, Вып. 1, С. 32-50.

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ И ЖЕСТКИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Никифорова Е. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Рассмотрим задачу о равновесии трехмерного тела при этом считаем, что пластина имеет трещину выходящая на жесткое препятствие.

В данной задаче искомой функцией является функция перемещения точек тела $u = (u^1, u^2, u^3)$. Далее мы имеем функционал энергии:

$$\Pi(\chi) = \langle \sigma_{ij}(W), \epsilon_{ij}(W) \rangle_c - \langle f, u \rangle_c,$$

где первое слагаемое описывает энергию перемещений, второе слагаемое описывает воздействие внешних нагрузок на тело, $F = (f_1, f_2, f_3) \in [L_2(\Omega_c)]^2$ – функция задающая внешние нагрузки. А этими скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ обозначено интегрирование по области Ω_c .

На границе области Ω_c задаются следующие краевые условия

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad (1)$$

$$un \geq 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (2)$$

$$[u]v \geq 0 \text{ на } \gamma, \quad (3)$$

где $[\cdot]$ - скачок функции на кривой Γ_c .

Введем следующие обозначения

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{1,0}(\Omega_c),$$

$$K = \{u \in H(\Omega_c) \mid u \text{ удовлетворяет (2),(3)}\}$$

Задачу о равновесии пластины решение которой удовлетворяет краевым условиям (1), (2), (3) можно сформулировать, как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений

$$\inf_{\bar{\chi} \in K_1} \Pi(\bar{\chi}).$$

В данной работе было доказано существование решения. При этом была использована теорема Вейерштрасса (монотонность, коэрцитивность, дифференцируемость).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. Мир, 1987.
2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., Мир, 1972.
3. Попова Т.С. О регулярности решений задачи равновесия для пластины с трещиной // Математические заметки ЯГУ, 1996, Т.3, вып. 2, стр 124-132.
4. Попова Т.С. Задача о равновесии линейного упругого тела с трещиной // II международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. Якутск, 1997, с. 48.
5. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М., Наука, 2010.
6. Хлуднев А.М. Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной. Сиб. мат. ж., 2002, т. 43, N 6 Ю с. 1388-1400.

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ВИДЕ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Николаева Н. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Изучение поведения тел, содержащих трещины, находящихся под воздействием внешних нагрузок, представляет собой актуальную тему для научных исследований. В настоящее время для исследования задач теории упругости описывающих равновесие тел с трещинами, разработаны разнообразные математические модели и методы. Математическая теория трещин, связанная с условиями непроникания берегов, берет свое начало с работ А. М. Хлуднева, исследовавшего с теоретической точки зрения краевые задачи с условиями в виде системы равенств и неравенств на негладкой компоненте границы области. Исследованы задачи с применением методов фиктивных областей, гладких областей, получены результаты о производных функционалы энергии. Также задачи с подобными условиями рассмотрены в работах Поповой Т.С., Лазарева Н.П., Неустроевой Н.В. В данной работе рассмотрены задачи:

- Для пластины с двумя трещинами, на одной из которых заданы классические краевые условия, на другой – в виде неравенств.
- Контактная задача Синьорини для упругой пластины с разрезом.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

Николаев Н. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

Обратная задача I: найти функции $u(x, t)$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x, t) + \sum_{k=1}^m q_k(x)h_k(x, t) \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

а также условий переопределения

$$u(x, t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Обратная задача II: найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x, t) + q(x)h(x, t) \quad (4)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ краевых условий (2), а также интегрального условия переопределения

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

В работе методом продолжения по параметру доказывается разрешимость обратных задач I и II.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе рассматриваются краевые задачи для неклассических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе. Исследованию подобных нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений посвящены работы [1–3]. Отметим, что многомерные псевдопараболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q .

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в цилиндре Q решением псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - \Delta u) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x, t) \in S}. \quad (3)$$

Краевая задача II. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (5) и такую, что для нее выполняются условия (6) и условие

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{(x, t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy \Big|_{(x, t) \in S}, \quad (4)$$

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609)

где $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ .

Краевая задача III. Найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_t - \Delta u) - Bu = f(x, t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b^{ij}(x) u_{x_j}) + b(x, t) u \quad (5)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy|_{(x,t) \in S}. \quad (7)$$

Предполагаем выполнение условия на оператор B :

$$\sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n.$$

Методом продолжения по параметру доказывается регулярная разрешимость нелокальных краевых задач I, II и III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. Задача со смещением для уравнений в частных производных // Известия вузов. Математика. 2007. Т. 540, № 5. С. 3–26.
2. Кожанов А.И. Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
3. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ¹

Прокопьев А. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Пусть Ω есть ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $h(x, t)$, $K(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$ соответственно.

В работе рассматривается эллиптико-параболическое уравнение вида:

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) u_{x_j} \right) + a(x, t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) и такие, что для функции $u(x, t)$ выполняются начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

а также интегральное условие переопределения:

$$\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Методом регуляризации доказывается существование обобщенного решения обратной задачи.

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и гранта Министерства образования и науки РФ №02.740.11.0609.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ИТЕРИРОВАННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ВЫСОКОГО ПОРЯДКОВ¹

Синявский А. Г.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В области $Q_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$ рассматривается параболическое уравнение с меняющимся направлением времени:

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_k (-1)^m \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \right) u = 0, \quad \alpha_k > 0. \quad (1)$$

При $n = m = 1$ краевые задачи для уравнения (1) изучались в [1]. При $m = 1$ краевые задачи для уравнения (1) рассматривались в работах [2,3].

Известно, что в краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гильбертовским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x,t}^{p,p/2m}$ при $p \geq 2m$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удастся показать, что нецелый показатель $p - [p]$ пространства $H_{x,t}^{p,p/2m}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения (см. [4,5]).

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект №4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609)

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для итерированных уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени (1) при $m \geq 2$, уточняются результаты [6] при $m = 2, 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
2. Ахмедов Х.Х. О некоторых краевых задачах для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Новосибирск, 1989. 98 с.
3. Попов С.В. Нелокальные контактные краевые задачи для итерированных уравнений теплопроводности // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т.1, №2. С. 55–65.
4. Попов С.В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2005. Т.400, №1. С. 29–31.
5. Попов С.В., Потапова С.В. Гельдеровские классы решений $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук. 2009. Т.424, №5. С. 594–596.
6. Tersenov S.A. On a method of solving initial boundary value problems for higher order equations // Математические заметки ЯГУ. 2010. Т.17, №1. С. 138–145.

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Тихонова И. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта № 02.740.11.0609) и государственной стипендией РС (Я) научным сотрудникам, молодым научным сотрудникам и аспирантам на 2012 г.

В данной работе с помощью стационарного метода Галеркина исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа в постановке В.Н. Врагова[1].

Пусть $\Omega \subseteq R^n$ - ограниченная область с гладкой границей S , $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$, $T > 0$. Рассмотрим уравнение смешанного типа второго порядка

$$Lu = k(x, t)u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

где коэффициенты уравнения (1) являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Положим

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\},$$

$$P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Введем в рассмотрение пространство Соболева $W_2^1(Q)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int_Q \left[uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right] dQ$$

и нормой $\|u\|_1^2 = (u, u)_1$, а также $L_2(Q)$ с $(u, v) = \int_Q uv dQ$, $\|u\|^2 = (u, u)$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (3)$$

Пусть C_L - класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), (3), а $\widehat{W}_2^1(Q)$ - замыкание C_L по норме $\|u\|_1$. Через $\widehat{W}_2^1(Q)$ обозначим подпространство $W_2^1(Q)$, выделенное условиями (2) и

$$u|_{\overline{P}_0^-} = 0, \quad u|_{\overline{P}_T^+} = 0.$$

Положим $u_t = \omega$ т.е. $u = \int_0^t \omega(x, \tau) d\tau$. Умножим уравнение (1) с обеих сторон на $e^{-2\lambda t}$, тогда краевая задача (1)-(3) переписется следующим образом:

$$M_\lambda w = e^{-2\lambda t} [kw_t + aw - \Delta \int_0^t w d\tau + c \int_0^t w d\tau] = e^{-2\lambda t} f, \quad (4)$$

$$w|_{S_T} = 0, \quad (5)$$

$$w|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad w|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (6)$$

Пусть C_M - класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (5), (6),

Лемма 1. Пусть коэффициент $c(x) > c_0 > 0$ достаточно большой,

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существует константа $\lambda > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$(Mv, v) \geq C_1 \int_Q [v^2 + \sum_{i=1}^N (\int_0^t v_{x_i} d\tau)^2 + (\int_0^t v d\tau)^2] dQ, \quad C_1 > 0, \quad v \in C_M. \quad (7)$$

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 1. Тогда краевая задача (4)-(6) может иметь не более одного регулярного решения из пространства $W_2^2(Q)$.

Рассмотрим случай $k(x, t) = k(t)$, $k(0) > 0$, $k(T) \geq 0$.

Функции $\{\varphi_k(x, t)\}_{k=1}^\infty$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\tilde{\Delta} v \equiv -v_{tt} - \Delta v = \lambda v, \quad (x, t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=T} = 0.$$

Приближенное решение краевой задачи (4)-(6) ищется в виде

$$v^N = \sum_{i=1}^N c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Mv^N, \psi_k) = (e^{-2\lambda t} f, \psi_k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Лемма 2. Пусть коэффициент $k(x, t) = k(t)$ и

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad c(x) \geq c_0 > 0,$$

кроме того, существует константа $\lambda > 0$ и имеет место $k(0) > 0$, $k(T) \geq 0$. Тогда для приближенного решения $v = u^N$ имеет место неравенство

$$(Mu, \tilde{\Delta}u) \geq C_2 \int_Q [v_t^2 + (\Delta \int_0^t v d\tau)^2 + \sum_{i=1}^N v_{x_i}^2] dQ, \quad C_2 > 0. \quad (9)$$

где $\tilde{\Delta}u = -v_{tt} - \Delta v$.

Теорема 1 Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$ и $f(x, 0) = 0$, $f(x, T) = 0$ существует единственное регулярное решение краевой задачи (4)-(6) такое, что

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{0,1}(Q)}^2 &= \int_Q [v_t^2 + (\Delta \int_0^t v d\tau)^2 + \sum_{i=1}^N v_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^N (\int_0^t v_{x_i} d\tau)^2 + \\ &+ (\int_0^t v d\tau)^2 + v^2] dQ \leq C_3 [\|f\|^2 + \|f_t\|^2], \quad C_3 > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$ и $f(x, 0) = 0$, $f(x, T) = 0$ существует единственное регулярное решение $u(x, t)$ краевой задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$, к которому слабо сходятся приближенные решения

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N \int_0^t \varphi_k(0, \tau) d\tau$$

в норме пространства $W_2^2(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Н.: Изд-во НГУ, 1983.

Секция III. Вычислительные алгоритмы

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Афанасьева Н. М.¹, Вабищевич П. Н.²

¹Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

²Институт проблем безопасного развития атомной энергетики
РАН, Москва

В работе рассматриваются безусловно монотонные схемы для нестационарных уравнений конвекции-диффузии [1]. На основе переформулирования исходных уравнений конвекции-диффузии, исключая члены конвективного переноса строятся экспоненциальные схемы. При этом условия устойчивости и монотонности остаются такими же, как и для схем с аппроксимацией конвективного переноса направленными разностями. Но погрешность аппроксимации по пространству имеет второй порядок, как и для схем с центрально-разностными аппроксимациями.

Вычислительная реализация экспоненциальных схем связана с обращением несамосопряженных сеточных эллиптических операторов. Для нахождения разностного решения на новом временном слое можно использовать локально-одномерные схемы, которые базируются на расщеплении оператора задачи. Также можно использовать локально-усредненные схемы, которые более перспективны, в плане организации параллельных вычислений.

Литература

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Книжный дом "Либроком 2009.-248 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ ПОТОКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Богарытова А. А., Тимофеева Т. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В данной работе исследуется возможность применения метода Shasta для численного моделирования процесса вытеснения нефти раствором химреагента, изучается ее работоспособность. При добавке полимеров в закачиваемую воду происходит увеличение ее вязкости и уменьшение фазовой проницаемости, несколько уменьшается остаточная нефтенасыщенность.

Используется модель изотермической двухфазной трехкомпонентной фильтрации [1].

Схемы первого порядка точности – монотонны, но обладают большой диссипативной погрешностью (т.е. размывают разрывы), а схемы второго порядка и выше приводят к сильным осцилляциям в окрестности разрыва [2]-[3].

Схема повышенного порядка точности Shasta является частным случаем FCT-методов (методов коррекции потоков). Метод состоит из двух этапов. На первом этапе одновременно с переходом от известного n -го слоя к $(n + 1)$ -му в решение вносится численная диффузия. На втором этапе диффузия исключается. Специальные ограничители, налагаемые на антидиффузионные потоки, позволяют исключить появления нефизических экстремумов [4].

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что схема Shasta позволяет более точно определять разрывное решение исходной задачи чем явная схема “уголок”

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В.М. Современное состояние и проблемы физико-химической подземной гидродинамики//Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. – М.:Наука, 1987.

2. Леви Б.И. Численное моделирование технологических процессов // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. – М.: Наука, 1987., с. 124-132.
3. Таранчук В.Б., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов двухфазной многокомпонентной фильтрации. // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. – М.: Наука, 1987. – с. 184-194.
4. . D.L. Book, J.P.Boris. Flux-corrected transport. I Shasta, a fluid transport algorithm that works. . J. Comput. Phys., 1973, 11, №1.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБЛУЧЕННОСТИ МЕЖДУ ЦИЛИНДРОМ И ВЫПУКЛЫМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОМ

Винокуров А. В., Шадрин В. Ю.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Между поверхностями, в зависимости от их степени нагретости, происходит теплообмен излучением. Для расчёта общего количества тепла, передаваемого излучением с поверхности 1 на поверхность 2, возникает необходимость вычисления коэффициентов облученности, которые являются геометрическими характеристиками взаиморасположения этих поверхностей.

Целью данной работы является разработка метода, алгоритма и программного продукта, вычисляющего коэффициент облученности между цилиндром и выпуклым четырехугольником.

Данная работа актуальна тем, что вычисление коэффициентов облученности проведено только между цилиндром и элементарной площадью (Зигель, Хауэлл).

Работа состоит из основной теории коэффициентов облученности, постановки задачи, алгоритма вычисления, численных экспериментов и сверки с точным решением.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕСНЕНИЯ СМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕД

Егорова А. Н., Тимофеева Т. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В данной работе приведены результаты численного исследования процесса горизонтального и вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей из трещиновато-пористой среды.

Наряду с пористыми средами, в которых жидкость содержится и движется в пространстве, встречаются также трещиноватые горные породы, в которых существует развитая система трещин, полностью или частично обуславливающая фильтрационные свойства среды. Важность изучения таких сред определяется тем, что ряд крупнейших месторождений нефти приурочен к породам, в которых имеются многочисленные трещины.

Одним из перспективных методов разработки нефтяных месторождений является вытеснение нефти жидкими и газовыми растворителями. При этом наиболее эффективен режим смешивающегося вытеснения - растворитель взаимно перемешивается с нефтью до достижения однородности.

Для получения результатов при горизонтальном смешивающем вытеснении используется модель крупномасштабного приближения, которая описывается системой уравнений неразрывности для суммарного потока через блоки и трещины, неразрывности растворителя в системе блоков и трещин и обобщенным законом Дарси для суммарного потока [1].

Одномерный процесс вертикального вытеснения из трещиновато-пористой среды описывается системой двух гиперболических уравнений первого порядка относительно неизвестных c_1 , c_2 [2]. Здесь, по сравнению с горизонтальным, учитываются гравитационные силы.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\beta c_1 + (1 - \beta)c_2) + \frac{\partial}{\partial Z}[c_1 F_g + c_2(1 - F_g)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau}(1 - \beta)c_2 + \frac{\partial}{\partial Z}(c_2(1 - F_g)) &= (c_1 - c_2) \left[\frac{(1 - F)H}{l_W} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma \phi \frac{H}{l_W} \frac{\mu(0)}{\mu(c_1)} (c_2 - c_1) + \frac{D_0 H}{l_D^2 W} \right], \\ \beta &= \left(1 + \frac{\alpha_2 m_2}{\alpha_1 m_1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ставятся начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \tau = 0 : c_1 &= c_2 = c_0(Z) \\ Z = 0 : c_1 &= c_2 = c^0 = 1 \end{aligned}$$

Для аппроксимации данных моделей использовались явные разностные схемы.

Из полученных расчетов видно, что при вертикальном вытеснении по сравнению с горизонтальным концентрация вытесняющего растворителя в трещинах уменьшается, это объясняется действием вытесняющей силы на легкий газ, прорывающийся по системе трещин со стороны более тяжелого пластового флюида, насыщающего блоки. Таким образом, действие гравитационных сил, уменьшает длину зоны смеси, выравнивает профиль вытеснения и, тем самым, увеличивает текущую углеводородоотдачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бедриковецкий П. Г., Истомин Г.Д., Князева М.Б. Смешивающееся вытеснение из трещиновато-пористых сред // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989.- № 6. - С.100–110.
2. Бедриковецкий П. Г., Истомин Г.Д. Вертикальное вытеснение смешивающихся жидкостей из трещиновато-пористых сред // Нефтегазовая гидродинамическая механика. Сб. научных трудов. - М.:МИНГ.1991. - № 228 - С.112–128.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И СРАВНЕНИЕ С КОММЕРЧЕСКИМИ СИМУЛЯТОРАМИ

Захаров Н. А., Иванова С. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе рассматривается однофазная фильтрация слабосжимаемой жидкости в пористой среде. Система уравнений включает себя уравнение неразрывности и закон Дарси [1]. Для численного решения задачи проводится стандартная конечно-разностная аппроксимация пространственных переменных на равномерной сетке и неявная аппроксимация по времени [2]. Полученная система линейных уравнений решается итерационными методом Якоби и Гаусса-Зейделя.

Полученные результаты сравниваются с решением на коммерческих гидродинамических симуляторах Eclipse и Tempest.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М., Наука, 1989.

ПРИМЕНЕНИЕ ЯВНЫХ ТРЕХСТАДИЙНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕТИКИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ¹

Новиков А. Е.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Моделирование кинетики химических реакций применяется при исследовании разнообразных химических процессов [1]. Предметом

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00106)

изучения являются временные зависимости концентраций реагентов, которые являются решением дифференциальных уравнений химической кинетики [2]. Трудности решения таких задач связаны с жесткостью и большой размерностью. Современные методы решения жестких задач используют декомпозицию матрицы Якоби системы уравнений с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице [3]. При большой размерности исходной задачи декомпозиция практически полностью определяет общие вычислительные затраты. При решении умеренно жестких задач большой размерности в ряде случаев можно применять явные методы [4]. Они не требуют обращения матрицы Якоби и поэтому могут быть эффективнее Л-устойчивых методов. Однако для их эффективного использования требуется контролировать не только точность вычислений, но и устойчивость численной схемы. Здесь на основе явных методов типа Рунге-Кутты первого и третьего порядков точности построен алгоритм интегрирования переменного порядка и шага. Интервал устойчивости алгоритма расширен до 18. Приведены результаты численного моделирования орегонатора, дающего сложный предельный цикл.

Для решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k$$

построен явный метод типа Рунге-Кутты третьего порядка

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2k_1/9 + k_2/3 + k_2/3 + 4k_3/9, \\ k_1 &= hf(t_n, y_n), k_2 = hf(t_n + h/2, y_n + k_1/2), \\ k_3 &= hf(t_n + 3h/4, y_n + 3k_2/4), \end{aligned}$$

с минимальной локальной ошибкой δ_n , которая имеет вид

$$\delta_n = h^4 f'^3 f / 24 - h^4 f'' f^3 / 288 + O(h^5),$$

где h — шаг интегрирования. Неравенство для контроля точности вычислений построено с использованием численной схемы $y_{n+1,1} = y_n + k_2$ второго порядка. В результате оценка ошибки $\varepsilon_{n,3}$ метода третьего порядка имеет вид

$$\varepsilon_{n,3} = y_{n+1} - y_{n+1,1} = 2[k_1 - 3k_2 + 2k_3]/9,$$

а неравенство для контроля точности записывается следующим образом

$$2\|k_1 - 3k_2 + 2k_3\|/9 \leq \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — точность интегрирования. Согласно [4] оценку максимального собственного числа $v_{n,3} = h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить через стадии k_i , $1 \leq i \leq 3$, по формуле

$$v_{n,3} = 0,5 \max \left\{ |4k_1^i/3 - 4k_2^i + 8k_3^i/3| / |k_2^i - k_1^i| \right\}.$$

На основе тех же стадий построен метод первого порядка

$$y_{n+1} = y_n + (517k_1 + 208k_2 + 4k_3)/729$$

с максимальным интервалом устойчивости, равным 18. Его локальная ошибка имеет вид $\delta_{n,1} = 19h^2 f''/54 + O(h^3)$. Схему первого порядка точности предполагается использовать на участке установления, где ошибки невелики. Поэтому для контроля точности используется оценка локальной ошибки. В результате неравенство для контроля точности имеет вид $19\|k_2 - k_1\|/27 \leq \varepsilon$. Для контроля устойчивости можно применять неравенство $v_{n,3} \leq 8$.

Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага формулируется следующим образом. Расчеты всегда начинаются методом третьего порядка как более точным. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства $v_{n,3} \leq 2.5$, где числом 2.5 ограничен интервал устойчивости метода третьего порядка. Обратный переход на метод третьего порядка происходит в случае выполнения данного неравенства. При расчетах по методу первого порядка наряду с точностью контролируется устойчивость. В методе третьего порядка устойчивость не контролируется.

Построенным алгоритмом переменного порядка и шага проводилось численное моделирование модифицированного орегонатора, дающего сложный предельный цикл [5]. Схема реакции состоит из 6 стадий при участии семи реагентов. Соответствующая система вида (1) состоит из семи уравнений. Построенному алгоритму интегрирования потребовалось 192 652 вычисления правой части (1), а классическому варианту трехстадийного метода третьего порядка требуется

966 638 вычислений функции f . Таким образом, построенный алгоритм переменного порядка и шага на жестких задачах эффективнее классического трехстадийного метода примерно в 5 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эммануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. М.: Высшая школа. 1974.
2. Babusok V.I., Novikov E.A. Numerical solution of direct kinetic problems // React. Kinet. Catal. Lett., 1982, Vol. 21, №1?2, P. 121-124.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999.
4. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. 1997.
5. Showalter K., Noyes R.M., Bar-Eli K. A modified oregonator model, exhibiting complicated limit cycle behaviour in a flow system // J. Chem. Phys., 1978, Vol. 69, P. 2514-2515.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Поликарпова О. С., Тимофеева Т. С.

Северо-Восточный Федеральный Университет, Якутск

Процессы разработки нефтяных месторождений связаны с движением многофазных сред, которые характеризуются неравновесными свойствами [2].

Рассматривается модель неравновесного вытеснения, которая основана на зависимости эффективной насыщенности от скорости изменения истинной насыщенности [1]. Численные расчеты задачи вытеснения проведены без учета капиллярного скачка давления и при постоянной скорости фильтрации. Используется метод расщепления

по физическим процессам. На первом этапе решается уравнение переноса, которое аппроксимируется явной уголковой схемой с ориентацией по характеристике. На втором этапе используется консервативная неявная разностная схема.

Путем численных расчетов исследовано влияние параметра неравновесности на процесс фильтрации. Неравновесность приводит к размазыванию скачка насыщенности и образованию переходной стабилизированной зоны, длина которой зависит от ее величины. На структуру неравновесного двухфазного течения влияет отношение вязкостей. Чем меньше отношение, тем больше влияние неравновесности [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров О. Б., Кузнецов В. В., Чехович Ю.В. Численное исследование неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. №1. С. 91-95.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., Недра, 1984, 211с.
3. Хасанов М. М., Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 288 стр.

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Тихонов В. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Освоение северных территорий, в которых сосредоточены значительные запасы полезных ископаемых и углеводородного сырья, имеет ряд специфических проблем, обусловленных суровыми климатическими условиями [1].

В работе рассмотрен процесс вытеснения нефти водой и полимером. Анализ проведенных вычислений показывает, что разностные

схемы для аппроксимации уравнений позволяют существенно повысить точность расчета продвижения оторочек реагента по пласту. Эффективность ее применения связана с тем, что, явно не выделяя разрывы, она учитывает изменение гладкости решения в расчетной области, адаптируясь к особенностям моделируемого течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.И., Попов В.В., Тимофеева Т.С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. Газизов А.Ш. и др. Применение полимердисперсных систем и их модификаций для повышения нефтеотдачи // Нефтяное хозяйство. 1998.
3. Донцов К. М. Разработка нефтяных месторождений. М., Недра, 1977.
4. Шуров В. И. Технология и техника добычи нефти. М., Недра, 1983.

АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ СТРУКТУРЫ ИССЛЕДУЕМОГО ОБРАЗЦА ПО ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Федоров А. Г.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

За последние десятилетия наука сделала огромный шаг практически во всех областях науки, развитие затронуло и электронную микроскопию при изучении различных объектов с микро- и нано- размерами. Новые электронные микроскопы с большей разрешающей способностью, новые программные обеспечения для расчета полученных результатов.

Интересным для рассмотрения является вид электронного микроскопа основанная на методе осевой голографии Габора, которую можно назвать безлинзовым низкоэнергетическим проекционным электронным микроскопом. Это установка, в которой изображение ульт-

тратонкого объекта (толщиной порядка 0,1 мкм) формируется в результате взаимодействия пучка электронов с веществом образца с последующим увеличением только за счет геометрических проекций. На выходе данного вида микроскопа получаются голографические изображения структур объектов.

Чтобы получить исходное изображение объекта исследования необходимо подвергнуть голографическое изображение цифровой обработке, т.е. реконструировать. Поэтому одним из главных задач исследования структур объектов безлинзовым низкоэнергетическим проекционным электронным микроскопом является обработка выходной информации от данного вида микроскопа, т.е. голографических изображений.

Реконструкция голографических изображений основана на методе численной реконструкции голографических изображений. Это достигается за счет координатного преобразования формулы Кирхгофа-Гельмгольца.

Алгоритм реконструкции условно можно разбить на следующие части:

- Получение исходного изображения;
- Преобразование системы координат изображения;
- Численная реализация формулы Кирхгофа-Гельмгольца;
- Пространственное выравнивание изображения;
- Реализация вычислений по формуле Кирхгофа-Гельмгольца алгоритмом быстрого преобразования Фурье;
- Отображение реконструированного изображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОГНОЗ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ЗДОРОВЬЯ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА В ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОЙ СИСТЕМЕ

Храпачев Р. В.

*Дальневосточный федеральный технический университет,
Владивосток*

В человеко-машинных системах основным элементом является человек-оператор, состояние здоровья которого во время исполнения служебных обязанностей, определяет, в конечном счете, успех в

достижении цели функционирования рассматриваемых систем. При этом под здоровым состоянием понимается нахождение величин совокупности измеряемых параметров состояния человека-оператора $\mathbf{y}(t) = \{y_i(t)\}_{i=0}^n$ в заданной области D и на заданном интервале времени T (интервале эксплуатации)

$$\mathbf{y}(t) \in D = \{\mathbf{y}(t) : \mathbf{A} \leq \mathbf{y}(t) \leq \mathbf{B}, \forall t \in T\}, \quad (1)$$

где D — заданная область работоспособности; $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ — границы D .

Выход $\mathbf{y} \in T$ на $Pt(D)$ означает невозможность дальнейшего функционирования рассматриваемой ЧМС в штатном режиме.

Изменения \mathbf{y} на интервале T могут быть связаны и с неуклонным ухудшением состояния здоровья человека-оператора. При этом поправить в серьезных случаях здоровье человека-оператора чаще удается уже после возникновения аварийной ситуации (отказа по здоровью человеческой составляющей ЧМС). Обеспечение безотказности функционирования здесь можно обеспечить на основе прогнозирования изменений $\mathbf{y}(t)$ на интервале $T \setminus T_p$, где T_p — интервал контроля $\mathbf{y}(t)$, $T_p = [t_0, t_p] \subset T$ с учетом приближения $\mathbf{y}(t)$ к $Pt(D)$. При этом интервал времени $\tilde{T} \in T$, $\tilde{T} = [t_p, \hat{t}]$, границей которого является первый момент времени $\hat{t} \in T$, $\mathbf{y}(\hat{t}) \notin D$, по сути, определяет величину остаточного эксплуатационного ресурса данной эргатической системы.

Для решения задачи прогноза состояния здоровья человека-оператора с учетом зависимости (1) целесообразно представить в виде некоторого монотонного процесса движения точки к $Pt(D)$, то есть как

$$y_i(t) = V_{i0} + V_i t + \frac{a_i t^2}{2}, \quad i = \overline{0, n}, \quad t \in T \quad (2)$$

где V_{i0} — известная величина (номинальное значение $y_i(t)$ при $t = t_0$, a_i , V_i — неопределенные величины ускорения и скорости движения к $Pt(D)$ по кратчайшему пути при $t \in T$. При этом для обеспечения монотонности $y_i(t)$, $i = \overline{0, n}$ на $T = [t_0, t_m]$ необходимо выполнение условий

$$a_i \leq -V_i, \quad a_i t_m \geq -V_i, \quad i = \overline{0, n} \quad (3)$$

Из расчета на «наихудший» случай (принцип минимакса) представление (2) очевидным образом является вполне приемлемым и физически

объяснимым [1]. Кроме зависимости (1), (2) и (3) информацию о поведении $\mathbf{y}(t)$ на T содержат результаты измерений $\mathbf{y}(t)$, $t \in T_p \subset T$, то есть последовательность

$$\mathbf{Z}(t_j) = \mathbf{y}(t_j) + \mathbf{e}(t_j), \quad j = \overline{1, p}, \quad t_j \in T_p \subset T, \quad (4)$$

где $|\mathbf{e}(t_j)| \leq \Delta$, $\forall t_j \in T_p \subset T$, Δ — набор заданных величин.

С учетом зависимостей (1) – (4) задачу прогноза состояния здоровья человека-оператора можно свести к задаче линейного программирования:

$$V_{i0} + V_i t^* + a_i t^{*2} \rightarrow \max, \min, \quad (5)$$

$$Z_i(t_j) - \Delta_{ij} \leq V_{i0} + V_i t_j \leq Z_i(t_j) + \Delta_{ij}, \quad \overline{1, p}. \quad (6)$$

Решение задачи (5) дает для каждого $i = \overline{0, n}$, двойные наборы (\min и \max) интервальных минимаксных оценок $\{a_i, V_i\}$, $i = \overline{0, n}$, преобразование которых в точечные (представление в виде полусумм) с последующей подстановкой в зависимость (1) позволяет найти $\hat{t} \in T$, $\mathbf{y}(\hat{t}) \notin D$, то есть определить минимаксный остаточный эксплуатационный ресурс состояния здоровья человека-оператора $\tilde{T} = \lfloor t_p, \hat{t} \rfloor$.

В заключение следует отметить, что прогноз состояния здоровья и определение остаточного эксплуатационного ресурса человека-оператора позволяет в значительной мере снизить риски срывов выполнения плановых заданий судами (кораблями) по вине человеческого фактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенбаум А.Н. Выбор и измерение параметров состояния человека-оператора в человеко-машинной системе. // Материалы Международной научно-практической конференции «Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования в физиологии и медицине». – Санкт-Петербург, 2010. – Т. 2. – С. 223-227.

Секция IV. Параллельные технологии

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАССИВНОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОЛЕКУЛЯРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕМБРАННЫХ СТРУКТУР

Антонов М. Ю.¹, Шайтан А. К.²,
Боздаганян М. Е.², Орехов Ф. С.²

¹ *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск*

² *Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Москва*

Методы молекулярного моделирования и, в частности, метод молекулярной динамики, давно доказали свою эффективность и широко применяются при изучении свойств систем, имитирующих биологические (белки, пептиды, мембранные структуры и др). Новые задачи встающие перед исследователями, увеличение размеров и сложности рассматриваемых систем требуют все больших вычислительных мощностей. Традиционным подходом здесь являлось использование многопроцессорных вычислительных систем, однако в течение последнего времени значительный интерес вызывает использование графических сопроцессоров (GPU), что позволяет получить на некоторых задачах значительные ускорения расчетов, достигающие до 2 порядков по сравнению с центральными процессорами стандартной архитектуры.

Липидные бислои, являясь ключевым структурным компонентом мембран живых клеток, отвечают за выполнение важнейших для жизнедеятельности клеток функций, в том числе структурной, барьерно-транспортной и др. В связи с этим представляет значительный интерес применение методов молекулярного моделирования для изучения физико-химических свойств мембранных систем (таких как жесткость, текучесть и т.п.), а также анализа диффузионных процессов в липидных мембранах.

В работе на базе имеющегося гибридного вычислительного кластера, совмещающего возможности как традиционных, так и графических процессоров, были исследованы возможности применения па-

раллельных и массивно-параллельных алгоритмов для расчетов молекулярной динамики мембранных систем. Конфигурация гибридной вычислительной системы:

3x - T-Platforms Twin Dexus 1U, 2 intel Xeon X5550 2.4 GHz, 12 GB RAM

2x- NVIDIA Tesla 1U S1070

Infiniband Switch: Mellanox InfiniBand MTS3600Q-1UNC

Ethernet Switch: D-link DGS-1248T/GE

Была исследована производительность различных алгоритмов в расчетах молекулярной динамики мембранных систем, при этом показана высокая эффективность применения параллельных алгоритмов. Использование графических процессоров, на примере модельной системы из более 100 000 частиц, показало более чем трехкратный прирост вычислительной производительности. В то же время, существующие на данный момент реализации алгоритмов молекулярной динамики с использованием GPU обладают значительными ограничениями как по функциональности, так и по масштабируемости на многие GPU, что на данный момент ограничивает применимость таких алгоритмов.

ЭКОНОМИЧНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РЕАЛИЗАЦИЕЙ НА CUDA

Васильев А. О.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Одним из важных достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных уравнений в частных производных. В настоящее время имеется большое число экономичных схем для многомерных уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов. Экономичным разностным методам посвящены работы А.А. Самарского [1], Н.Н. Яненко [2], Г.И. Марчука[3] и С.К. Годунова [4], и других[5].

Для решения системы используется метод расщепления. Полученные уравнения решаются с помощью метода прогонки. Использование независимости прогонок позволяет строить эффективные параллельные алгоритмы, однако, при разделении данных вдоль одного из направлений появляется целый ряд проблем при реализации данного метода на параллельных архитектурах. Предложенный параллельный алгоритм реализован с использованием технологии NVidia CUDA[6] для графических карт. Произведено сравнение эффективности с технологией MPI[7].

Проведенные в данной работе исследования показали высокую эффективность на указанных параллельных архитектурах, а также доказали возможность эффективного использования всей вычислительной мощности современных графических карт. Несмотря на существенное ограничение памяти GPU, позволяет получить существенный выигрыш в скорости решения на графических устройствах, а при определенных условиях позволяет достигать эффективности, сравнимой с мощными дорогостоящими современными суперкомпьютерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.
2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
3. Марчук Г.И. Методы расщепления – М.: Наука, 1988.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
5. Охлопков Н.М. Об экономичных методах решения задач математической физики. Якутск: Изд-во ЯГУ, 1982.
6. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК-Пресс, 2010.
7. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М.: Изд-во МГУ, 2004.

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕТЕРОГЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ CUDA

Григорьев А. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Модель двойной пористости позволяет более детально описывать обменные процессы в трещиновато-пористой среде, в которой, несмотря на упрощение реальной модели пласта, возможно более полно учесть механизмы выработки обоих сред (трещин и поровых блоков).

Рассматривается модель двойной пористости задачи однофазной фильтрации флюида в трещиновато-пористой среде(среды несжимаемы):

$$\frac{k_1}{\mu} \Delta p_1 - \alpha(p_1 - p_2) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{k_2}{\mu} \Delta p_2 + \alpha(p_1 - p_2) = 0; \quad (2)$$

где индексами «1» и «2» обозначены соответственно параметры трещиноватой и пористой сред. $\alpha(p_1 - p_2)$ – обменный поток между средами. k_i – проницаемости, μ – вязкость флюида.

Решение задачи сводится к поочередному решению систем линейных уравнений вида , методом исключения переменных. В качестве итерационного метода решения полученных систем был выбран метод сопряженных градиентов в силу симметричности и положительной определенности матриц. Данный метод может быть успешно распараллелен с применением гетерогенных вычислений на графических ускорителях. Вычисления реализованы на GPU и заключаются в использовании GPU(графического процессора) для универсальных вычислений в области науки и моделирования. Благодаря многоядерной архитектуре, GPU способны обрабатывать многопоточные задачи более эффективно, нежели универсальные процессоры. Это также подтверждает тот факт, что наиболее производительные суперкомпьютеры имеют гибридную архитектуру (универсальные процессоры дополняются графическими).

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М: Недра, 1996.
2. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л: Недра, 1985.
4. Сандерж Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М: ДМК Пресс, 2011.
5. Боресков А., Харламов А. Основы работы с технологией CUDA. М: ДМК Пресс, 2010.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТА

Еремеева М. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В данной работе приводится задача восстановления теплового потока на поверхности грунта, удовлетворяющего данным замеров температуры внутри массива. В связи с потеплением климата данная задача является актуальной. Требуется определить функцию плотности теплового потока $q(t)$ на границе.

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(T), \quad 0 < x < l, 0 < t < t_n,$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad 0 < t < t_n,$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\lambda(T - T_{\text{окр}}), \quad 0 < t < t_n,$$

где температура в точках замера удовлетворяет следующим условиям:

$$T(b, t) = T_{\text{зам}}(t), \quad 0 < b < l.$$

Граничная обратная задача решается путем минимизации функционала

$$J[q(t)] = \int_0^{t_n} [T(b, t, q(t)) - T_{\text{зам}}(t)]^2 dt$$

зависящего от управления $q(t)$. Функционал минимизируется методом итерационной регуляризации.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ КЛАСТЕРЕ

Иннокентьев Б. Е.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе рассматривается двухфазная задача Стефана [1], моделирующая тепломассоперенос в вечной мерзлоте. Исследуется ряд итерационных методов и параллельных алгоритмов для численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Вычислительная реализация осуществляется с помощью набора свободно распространяемых библиотек Trilinos на суперкомпьютерном кластере. Интересным для рассмотрения является вид электронного микроскопа основанная на методе осевой голографии Габора, которую можно назвать безлинзовым низкоэнергетическим проекционным электронным микроскопом. Это установка, в которой изображение ультратонкого объекта (толщиной порядка 0,1 мкм) формируется в результате взаимодействия пучка электронов с веществом образца с последующим увеличением только за счет геометрических проекций. На выходе данного вида микроскопа получают голографические изображения структур объектов.

Библиотека Trilinos была разработана в Sandia National Laboratories на основе существующих алгоритмов и использует функциональность таких известных пакетов, как BLAS и LAPACK [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
2. Sala M. and others. Trilinos Tutorial. Sandia Report SAND2004-2189, 2004.
3. Heroux M. and others. An overview of Trilinos. Sandia Report SAND2003-2927, 2003.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

Колесов А. Е.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Процессы добычи и закачки во время разработки месторождений нефти и газа ведут к изменению напряженно-деформированного состояния в пластах и перекрывающих породах, что становится причиной таких явлений, как оседание земной поверхности, уплотнение и разрушение пород, смятие обсадных колонн скважин, вынос механических примесей и т.д. Все эти процессы могут приводить к сложным аварийным ситуациям и, как следствие, к социально-экономическому и экологическому ущербу, потерям и недоиспользованию запасов углеводородов.

В связи с вышесказанным становится актуальной проблема моделирования процесса взаимодействия пористой среды и насыщающей ее жидкости под действием внешних сил, называемого фильтрационной консолидацией.

В работе рассматривается однофазная фильтрация в деформируемой пористой среде. Математическая модель включает уравнения неразрывности, закон Дарси и уравнений упругости [1-4]. Для численного решения используется метод конечных разностей. Параллельная реализация осуществляется с помощью библиотеки PETSc[5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.
3. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975.
4. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. No. 12. Pp. 155-164.
5. PETSc: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ НА CUDA ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Михайлова М. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

При изучении тепловых процессов с фазовыми переходами вещества из одного состояния в другое приходится сталкиваться с задачей Стефана. Для численного решения задачи Стефана с несколькими фронтами фазового перехода наиболее эффективны разностные схемы сквозного счета.

Одной из важнейших характеристик любого вычислительного устройства является его быстродействие. Для математических расчетов быстродействие обычно измеряется в количестве float-point операций в секунду. Для персонального компьютера быстродействие обычно напрямую связано с тактовой частотой центрального процессора (CPU). Значит, чтобы увеличить быстродействие надо увеличить частоту CPU. Однако в последние годы рост частоты заметно замедлился, но зато появилась новая тенденция - создание многоядерных процессоров и систем и увеличение числа ядер в процессоре. Поэтому сейчас рост быстродействия идет на счет увеличения числа параллельно работающих ядер, т.е. через параллелизм.

В работе рассматривается технология распараллеливания CUDA от компании NVIDIA, а также разностные схемы сквозного счета.

В работе представлены результаты вычисления двухфазной задачи Стефана с краевыми условиями второго рода, используя алгоритм сквозного счета, без использования и с использованием технологии CUDA. Расчеты производились на видеокарте NVIDIA GeForce 9500MGS.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Боресков, А.А. Харламов. Основы работы с технологией CUDA. -М. ДМК Пресс, 2010.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем – М.: Наука, 1977. – 653с.
3. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана / / Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 816 – 827.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432с.
5. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е. Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 224с.
6. Будаков Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана / / Численные методы в газовой динамике. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – Вып. 4. – С. 139 – 183.
7. Будаков Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана / / Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 828 – 840.
8. Данилюк И.И. О задаче Стефана / / УМН. – 1985. – Вып. 5 (245). – С. 132 – 185.
9. Каменомостская С.Л. О задаче Стефана / / Матем. сб. – 1961. – Т. 53, № 4. – С. 489 – 514.

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ДАВЛЕНИЯ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ

Сирдитов И. К.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В моделировании задач разработки нефтяных месторождений базовыми являются модели однофазной, двухфазной фильтрации. Уравнение давления в случае несжимаемой фильтрации без учета гравитации приводится к следующему виду:

$$\operatorname{div}(-k\lambda \operatorname{grad} p) = q, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где k - коэффициент абсолютной проницаемости пористой среды, λ - подвижность фаз, p - давление в пласте, q - интенсивность источников и стоков. На границе области Ω задаётся постоянное давление $p=p^*$.

В работе рассматривается решение трехмерной задачи Дирихле для данного уравнения в прямоугольном параллелепипеде Ω .

Система линейных уравнений, получаемая после аппроксимации уравнения, решается методом сопряженных градиентов [2].

Для численной реализации написана программа на С с использованием технологии MPI[3]. Сравниваются алгоритмы разбиения расчетной области при моделировании на многопроцессорных системах с распределенной памятью. Расчеты проводились на вычислительном кластере «Ариан Кузьмин» СВФУ. Вычислительный кластер состоит из 160 узлов, содержащих по 2 шестиядерных процессора Intel Xeon X5675, его пиковая производительность составляет 23.5 TFLOPS.

Рассмотрены три различных способа декомпозиции расчетной области: по одному направлению, двум и трём направлениям. Результаты показали, что разбиение области на трехмерные блоки имеет высокую эффективность и при увеличении размерности расчетной сетки эффективность растёт, несмотря на увеличение количества MPI-пересылок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Society for Industrial Mathematics, 2003.
3. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI, 2004.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА PETSc

Степанов С. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Рассматривается процесс теплопередачи в твердом кусочно-одно-
родном теле. Процесс считается установившимся, и поэтому тепловое
состояние описывается следующим стационарным уравнением тепло-
проводности:

$$-\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = 0, \quad x \in \Omega.$$

В рассматриваемом случае коэффициент теплопроводности $k(x)$ яв-
ляется кусочно-постоянным. Боковые грани предполагаются тепло-
изолированными. Верхняя граница поддерживается при постоянной
температуре. На нижней границе осуществляется конвективный теп-
лообмен со средой.

Для численного решения задачи проводится стандартная конечно-
разностная аппроксимация. Задача реализуется с помощью матема-
тического пакета PETSc. Отдельное внимание уделено расчетам на
компьютерах параллельной архитектуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1989
3. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems, second edition, 2000
4. PETSc, User Manual <http://www.mcs.anl.gov/petsc>

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА ОГРАЖДАЮЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

Федоров А. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

Рассматривается уравнение теплопроводности со смешанными граничными условиями в неоднородной прямоугольной области с неравномерной сеткой.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 (T_1 - T), \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \alpha_2 (T - T_2), \end{array} \right. \quad (2)$$

где λ - коэффициент теплопроводности среды; $\alpha(T_0 - T)$ - поток тепла на границах

Для решения данной задачи используется неявная схема, которая составляется интегрированием в полу-узлах сетки. В качестве итерационного метода решения полученных систем был выбран метод

сопряженных градиентов в силу симметричности и положительной определенности матриц. Данный метод может быть успешно распараллелен с применением технологии CUDA для вычисления на видеокарте.

Таблица 2. Сравнение результатов решения проблемы на GPU и CPU

Кол-во неизвестных	Время на CPU	Время на GPU	CPU/GPU
2500	2.331	0.159	14.660
10000	17.138	0.281	60.989
250000	1000<	4.573	250<
1000000	1000<	22.41	1000<

ЛИТЕРАТУРА

1. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М.: ДМК Пресс, 2011.
2. Kirk D., Hwu W. Programming Massively Parallel Processors: A Hands-on Approach (Applications of GPU Computing Series). Elsevier inc., 2010
3. Самарский А. А. Теория разностных схем, учебное пособие, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1997

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные доклады	3
<i>Байдулов В.Г.</i> Формирование акустических предвестников конвективных структур в стратифицированной жидкости	3
<i>Вабищевич П.Н.</i> Потокосые схемы для параболических задач	7
<i>Гусев Е.Л.</i> Разработка и применение математических методов для исследования вариационных постановок волновых задачах синтеза	8
<i>Гусев Е.Л.</i> Качественные закономерности зависимости оптимальной структуры композиционных систем от определяющих параметров	11
<i>Данилов Н. Н.</i> Представление динамических матричных игр в форме задач конфликтного управления	14
<i>Попов С. В.</i> Некоторые свойства решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени	16
<i>Яковлев Н. Г.</i> Современные проблемы моделирования состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана	18
Секция I. Математическое моделирование прикладных проблем	21
<i>Акимов М.П., Мордовской С.Д., Старостин Н.П.</i> Определение толщины изоляции полимерного трубопровода теплоснабжения на основе численного исследования динамики температурного поля	21
<i>Аммосова О.А., Корнилова З.Г.</i> Определение объема истечения нефти из аварийного трубопровода	22
<i>Аммосова О.А., Сивцева В.В., Старостин Н.П.</i> Расчетное определение технологических режимов муфтовой сварки при низких температурах	24

Аммосова О.А., Старостин Н.П. Моделирование теплового процесса стыковой сварки при низких температурах с предварительным подогревом	26
Андреев Б.И., Аммосова О.А., Старостин Н.П. Моделирование теплового процесса приварки гильзы в полимерных армированных трубах	29
Аргунова К.К., Бондарев Э.А., Рожин И.И. Обобщенная математическая модель образования гидратов в газовых скважинах	30
Артемяева Е.С., Григорьев Ю.М. Математическая модель грозовых перенапряжений в линиях передач в условиях слоистой многолетней мерзлоты	32
Ахметова О.В., Заманова Ф.Г. Асимптотическое моделирование фильтрационных волновых полей на основе телеграфного уравнения	34
Ахметова О.В., Филиппов А.И. Математические модели тепломассопереноса на основе формального асимптотического параметра	36
Бушко Д. А. Управление транспортными потоками	38
Васильева М.А., Кондаков А.С., Старостин Н.П. Квазитрехмерная модель теплового процесса и диагностика трения в полимерном подшипнике скольжения	42
Васильева М.А., Старостин Н.П. Численное моделирование подогрева полиэтиленовых труб в бухтах нагретым воздухом	44
Васильев Н.В., Яковлев Б.В. Математическое моделирование фронтального изображения круглого бриллианта	45
Голиков И.А., Гололобов А.Ю., Попов В.И. Метод численного решения уравнений модели теплового режима высокоширотной ионосферы	46
Григорьев Ю.М., Никифорова Л.В. и др. Модель растепления кимберлитовой руды при дроблении	48
Григорьев Ю.М., Харбанов М.В. Методика создания упрощенной геологической модели пласта для секторного гидродинамического моделирования	49
Данилов Д.С., Добрыжинский Ю.В. Объектно-ориентированная модель тестирования на проникновение	51
Дмитриева М.П. Моделирование подогрева полиэтиленовых труб для газопроводов в бухтах	55
Ефремов П.В., Стручкова Г.П. и др. Влияние инженерно-геологических условий на напряженно-деформируемое состояние трубопровода	56

<i>Иванов Г.И., Николаев В.Е.</i> Сравнительный анализ двумерной задачи отбора идеального и реального газов	58
<i>Коледин В.В.</i> Критические условия для парогазового пузыря в метастабильной жидкости	59
<i>Колосова Г.Г., Яковлев Б.В.</i> Алгоритм создания трехмерного численного образа реального кристалла по его изображениям	61
<i>Кондаков А.С., Старостин Н.П.</i> Исследование влияния низких температур на асимметрию распределения теплоотвода в полимерном подшипнике скольжения	62
<i>Крылова Е.А.</i> Математическое моделирование развития напряженно-деформированного состояния тонких пластин при их стыковой сварке	64
<i>Лукин Е.С., Иванов А.М.</i> Расчетно-экспериментальная методика оценки теплоты, выделяющейся в процессе пластического деформирования стального стержня	65
<i>Павлов Г.С.</i> Ядра конденсации – отрицательные и положительные ионы	66
<i>Прокопьев А.А.</i> Применение теории кластеров для описания структуры износостойких порошковых покрытий с тугоплавкими добавками, полученных электродуговой металлизацией	69
<i>Русинов А.А., Чиглинцева А.С.</i> Математическое моделирование процесса образования гидратных пузырьков	71
<i>Сатымбеков А.М., Тулепбергенов А.К., Уалиев Ж.Р.</i> Численный расчет угловой скорости вращения ротора Дарье	72
<i>Степашина Е.В.</i> Решение задачи оптимального управления химическим процессом с помощью генетических алгоритмов	74
<i>Тихонов Р.С.</i> Определение мощности трения в подшипниках скольжения по замеру температуры при высоких скоростях вращения вала	77
<i>Филиппов И.М.</i> Моделирование поля давления в неоднородном пласте при фильтрации жидкости	79
<i>Чернова Е.С.</i> Применение регрессионного анализа для построения математической модели устойчивого развития экономического региона (на примере Кемеровской области)	81
<i>Юмагулова Ю.А.</i> Повышение давления жидкости при образовании льда в замкнутых системах	84

Секция II. Исследование математических моделей	87
<i>Антипин В. И.</i> Об одном операторно-дифференциальном уравнении смешанного типа	87
<i>Аргунова С.Д.</i> Краевая задача для упругой пластины, имеющей трещину, при условии закрепления одного из берегов	88
<i>Атласова Е. И.</i> Нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами	90
<i>Богатырева Н. И.</i> Анализ влияния численности медицинских работников разных специальностей на показатель здоровья населения в регионе	92
<i>Васильева А. Н.</i> Разрешимость пространственно нелокальных краевых задач для псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами	94
<i>Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. и др.</i> Оптимизация добычи популяции при наличии охраняемой территории	96
<i>Вершинин Я. Н., Крутиков В. Н.</i> Об одном методе решения неравенств	99
<i>Ефимова Е. С., Семенова Г. Е.</i> Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени	101
<i>Ефимова П. Н.</i> Краевые задачи для линейных гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями	102
<i>Лепчиков А.Ю.</i> Предписанная 2-дистанционная $(\Delta + 4)$ - раскраска плоских графов	104
<i>Мамбетова К. А.</i> Анализ и обобщение математических моделей оценки банкротства предприятий	107
<i>Неустроев Р. Н.</i> Характеризация эллиптических координат	108
<i>Никифорова Е.В.</i> Вариационная постановка задачи о равновесии упругого тела с трещиной и жестким препятствием	110
<i>Николаева Н. А.</i> Вариационная постановка задач с краевыми условиями в виде равенств и неравенств	112
<i>Николаев Н. Н.</i> Исследование свойств решений обратной краевой задачи для уравнения третьего порядка	112
<i>Попов Н. С.</i> Нелокальные краевые задачи для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений	114
<i>Прокопьев А. В.</i> Исследование разрешимости обратной задачи для эллиптико-параболического уравнения с интегральным условием переопределения	116
<i>Синяевский А. Г.</i> Исследование решений итерированных параболических уравнений второго и высокого порядков	117

<i>Тихонова И. М.</i> Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка	118
Секция III. Вычислительные алгоритмы	122
<i>Афанасьева Н.М., Вабищевич П.Н.</i> Экспоненциальные схемы для нестационарных уравнений конвекции-диффузии .	122
<i>Богарытова А. А., Тимофеева Т. С.</i> Применение метода коррекции потока для численного решения задачи двухфазной трехкомпонентной фильтрации	123
<i>Винокуров А.В., Шадрин В.Ю.</i> Приближенное вычисление коэффициентов облученности между цилиндром и выпуклым четырехугольником	124
<i>Егорова А.Н. Тимофеева Т.С.</i> Численное моделирование вытеснения смешивающихся жидкостей из трещиноватопористых сред	125
<i>Захаров Н.А., Иванова С.С.</i> Численное решение задачи фильтрации слабосжимаемой жидкости и сравнение с коммерческими симуляторами	127
<i>Новиков А.Е.</i> Применение явных трехстадийных методов для моделирования кинетики химических реакций	127
<i>Поликарпова О.С., Тимофеева Т.С.</i> Численное исследование задачи неравновесной двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей	130
<i>Тихонов В.В.</i> Численные исследования задачи двухфазной фильтрации	131
<i>Федоров А.Г.</i> Алгоритм реконструкции структуры исследуемого образца по голографическим изображениям . . .	132
<i>Храпачев Р.В.</i> Определение и прогноз параметров состояния здоровья человека-оператора в человеко-машинной системе	133
Секция IV. Параллельные технологии	136
<i>Антонов М.Ю., Шайтан А.К. и др.</i> Использование массивного параллелизма для решения задач молекулярного моделирования мембранных структур	136
<i>Васильев А.О.</i> Экономичные методы для уравнения теплопроводности с реализацией на CUDA	137
<i>Григорьев А.В.</i> Реализация модели двойной пористости с применением гетерогенных вычислений CUDA	139
<i>Еремеева М.С.</i> Параллельная реализация решения задачи определения теплового потока на поверхности грунта .	140

<i>Иннокентьев Б.Е.</i> Численное решение двухфазной задачи Стефана на вычислительном кластере	141
<i>Колесов А.Е.</i> Параллельная численная реализация задачи фильтрационной консолидации	142
<i>Михайлова М.П.</i> Применение технологии распараллеливания на CUDA для задачи Стефана	143
<i>Сирдитов И.К.</i> Сравнение алгоритмов декомпозиции области при расчете давления в нефтяном пласте	145
<i>Степанов С.П.</i> Численное решение задачи стационарной теплопроводности в кусочно-однородном теле с использованием пакета PETSc	146
<i>Федоров А.А.</i> Вычисление теплового режима ограждающей конструкции с применением технологии CUDA	147

ДЛЯ ЗАМЕТОК

**III Всероссийская научная конференция
студентов, аспирантов,
молодых ученых и специалистов**

**«Математическое моделирование развития
северных территорий Российской Федерации»**

**Тезисы докладов
21 – 26 мая 2012 г.**

Под редакцией д.ф.-м.н. В.И. Васильева
Оригинал-макет: НП «ИМИ Факториал»

Подписано в печать 17.05.2012. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 9. Тираж 100 экз. Заказ № 25

Отпечатано в ООО «Издательство Сфера»
677013, г. Якутск, ул. Сергеляхская 12/2-36
izd-sphera@mail.ru, тел.(факс): (4112)366-199