

Метод конечных элементов для уравнения диффузии нейтронов в гексагональной геометрии

Аввакумов А.В., Вабищевич П.Н., Васильев А.О.

НИК Вычислительные технологии, СВФУ

16 июля 2014



Научно-исследовательский семинар
по вычислительной и прикладной математике

Ядерный реактор

Конструкция:

1 — Управляющий стержень

2 — Радиационная защита

3 — Теплоизоляция

4 — Замедлитель

5 — Ядерное топливо

6 — Теплоноситель

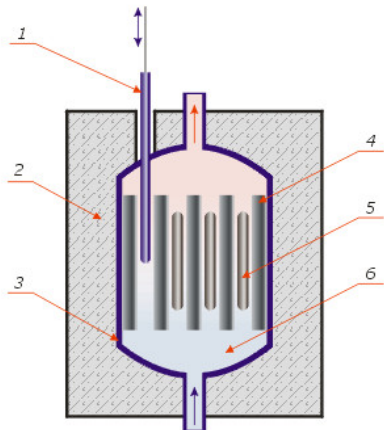
По спектру нейтронов:

Реактор на тепловых нейтронах

Реактор на быстрых нейтронах

Характеристика:

P — Мощность



Критичность реактора

Параметр:

K_{eff} — эффективный коэффициент размножения

Значения:

$K_{eff} > 1$ — цепная реакция нарастает, реактор надкритичен

$K_{eff} < 1$ — цепная реакция затухает, реактор подкритичен

$K_{eff} = 1$ — реакция постоянна, реактор критичен

Уравнение переноса нейтронов

- Групповое диффузионное приближение
- Условно-критическая задача
- Задача на собственные значения

Двухгрупповое диффузионное приближение

$$\begin{aligned}-\nabla(D_1\nabla\Phi_1)+(\Sigma_{a1}+\Sigma_r)\Phi_1 &= \frac{1}{K_{eff}}(\nu_1\Sigma_{f1}\Phi_1+\nu_2\Sigma_{f2}\Phi_2), \\ -\nabla(D_2\nabla\Phi_2)+\Sigma_{a2}\Phi_2 &= \Sigma_r\Phi_1.\end{aligned}$$

Граничные условия альбедного типа:

$$D_g\frac{\partial\Phi_g}{\partial n} = -\gamma_g\Phi_g, \quad g = 1, 2.$$

Φ_g – стационарное распределение нейтронного потока в группе g ,
 D_g – коэффициент диффузии, Σ_{ag} – макросечение поглощения,
 ν_g – число вторичный нейтронов, Σ_{fg} – макросечение деления,
 Σ_r – макросечение рассеяние, γ_g – логарифмическая производная.

Вариационная постановка

Умножаем на тестовые функции v_1, v_2 и интегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \nabla(D_1 \nabla \Phi_1) v_1 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_1 v_1 d\mathbf{x} \\
 = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) v_1 d\mathbf{x}, \\
 - \int_{\Omega} \nabla(D_2 \nabla \Phi_2) v_2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_2 v_2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_1 v_2 d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Граничные условия альбедного типа:

$$\int_{\partial\Omega} D_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial n} v_g d\mathbf{s} = - \int_{\partial\Omega} \gamma_g \Phi_g v_g d\mathbf{s}, \quad g = 1, 2.$$

Вариационная постановка

Далее заменяем первые интегралы с помощью интегрирования по частям и используем формулу Гаусса-Остроградского для перехода к поверхностным интегралам:

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \nabla(D_1 \nabla \Phi_1) v_1 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_1, \nabla v_1) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} D_1 v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds, \\ - \int_{\Omega} \nabla(D_2 \nabla \Phi_2) v_2 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_2, \nabla v_2) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} D_2 v_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} ds.\end{aligned}$$

Вариационная постановка

Найти $\Phi_g \in V$, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_1, \nabla v_1) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_1 v_1 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_1 v_1 ds \\ = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) v_1 d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_2, \nabla v_2) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_2 v_2 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_2 v_2 ds \\ = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_1 v_2 d\mathbf{x}, \quad \forall v_g \in \hat{V}. \end{aligned}$$

Здесь $V = H(\Omega)$, $\hat{V} = H(\Omega)$, где $H(\Omega)$ – пространство Соболева.

Конечно-элементная аппроксимация

Введем конечномерные пространства $V_h \subset V$, $\hat{V}_h \subset \hat{V}$ и определим дискретную задачу: найти $\Phi_{gh} \in V_h$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_{1h}, \nabla v_{1h}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_{1h} v_{1h} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_{1h} v_{1h} ds \\ = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_{1h} + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_{2h}) v_{1h} d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_{2h}, \nabla v_{2h}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_{2h} v_{2h} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_{2h} v_{2h} ds \\ = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_{1h} v_{2h} d\mathbf{x}, \quad \forall v_{gh} \in \hat{V}_h. \end{aligned}$$

В качестве пространств V_h будем использовать пространства Лагранжевых полиномов.

Задача на собственные значения

$$M\Phi = \lambda F\Phi$$

Операторы M и F являются блочными:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ -M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы M_{11} , M_{21} и M_{22} соответствуют билинейным формам a_{11} , a_{21} и a_{22} , операторы F_{11} и F_{12} соответствуют b_{11} и b_{12} соответственно:

$$a_{11} = \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_{1h}, \nabla v_{1h}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_{1h} v_{1h} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_{1h} v_{1h} ds,$$

$$a_{21} = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_{1h} v_{2h} d\mathbf{x}, \quad a_{22} = \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_{2h}, \nabla v_{2h}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_{2h} v_{2h} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_{2h} v_{2h} ds.$$

Программная реализация

- Геометрия и сетка: Gmsh
- Вычисления и расчеты: FEniCS
- Визуализация: ParaView, Gnuplot



FEniCS
PROJECT



Параметры и неизвестные

Параметры:

- n — число расчетных ячеек на кассету (от 6 до 1536);
- p — порядок конечных элементов (от 1 до 3).

Неизвестные:

- эффективный коэффициент размножения K_{eff} ;
- распределение нейтронной мощности P по кассетам с нормировкой на среднее значение по активной зоне:

$$P = A(\Sigma_{f1}\Phi_1 + \Sigma_{f2}\Phi_2),$$

где A — коэффициент нормировки.

Оценка точности

- $\Delta K = |K_{eff} - K_{ref}|$, *pcm* (percent-milli, т.е. 10^{-5})
- Относительные отклонения ε_i (выраженные в %):

$$\varepsilon_i = \frac{P_i - P_{ref}}{P_{ref}}, \quad i = 1..N.$$

- По отклонениям ε_i рассчитываются интегральные отклонения:
 - среднеквадратическое отклонение RMS:

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2},$$

- среднее по модулю отклонение AVR:

$$\text{AVR} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i|,$$

- максимальное по модулю отклонение MAX:

$$\text{MAX} = \max |\varepsilon_i|.$$

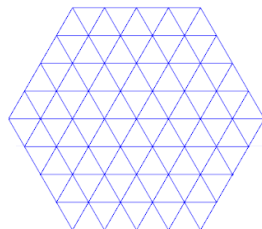
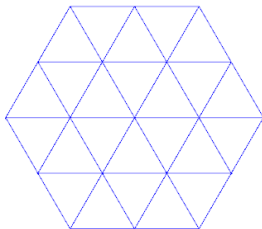
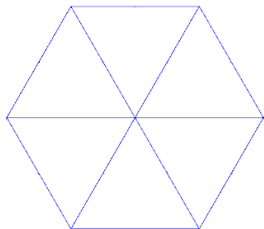
Критерий

Определим критерии «приемлемости» результатов с точки зрения достижения достаточной для практических расчетов ВВЭР точности:

- погрешность K_{eff} не выше 0.1% (100 pcm);
- максимальное по модулю отклонение в покассетных мощностях не выше 2%

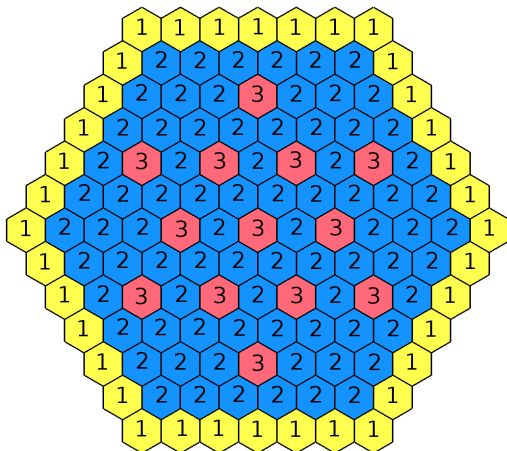
Будем считать «оптимальным» вариант, удовлетворяющий этим критериям и наиболее экономичный (по времени счета).

Сетка



Разбиение кассеты на 6, 24 и 96 конечных элементов.

Модифицированный тест IAEA-2D

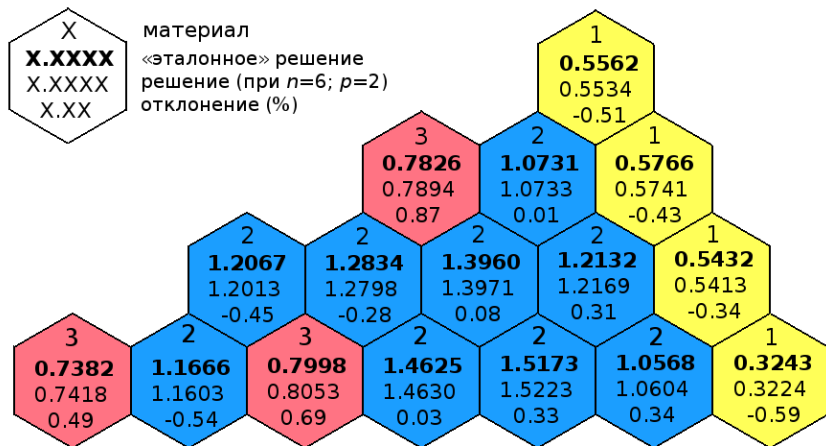


- Размер кассеты "под ключ" равен 20 см
- 13 стержней СУЗ (устройства систем управления и защиты реактора)
- Имеет 1/12 зеркальную симметрию
- Два варианта граничных условий:
 - 1 $\gamma = 0.5$
 - 2 $\gamma = 0.125$

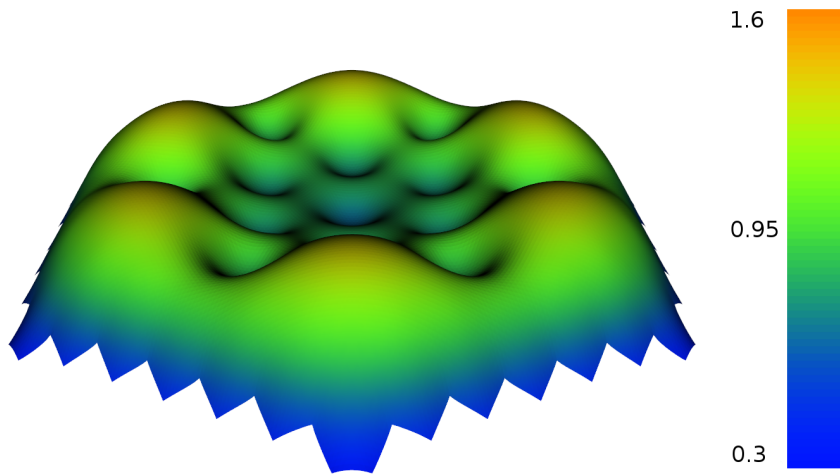
Модифицированный тест IAEA-2D

n	p	K_{eff}	$\Delta K(pcm)$	RMS(%)	AVR(%)	MAX(%)	$t(sec)$
	1	0.9733476	472.94	3.80	2.94	9.04	0.03
	2	0.9775987	47.83	0.45	0.39	0.87	0.08
	3	0.9780084	6.86	0.07	0.06	0.12	0.19
24	1	0.9765384	153.86	1.28	1.04	2.86	0.07
	2	0.9779893	8.77	0.08	0.07	0.16	0.35
	3	0.9780690	0.80	0.01	0.01	0.03	0.94
96	1	0.9776501	42.69	0.36	0.30	0.79	0.32
	2	0.9780655	1.15	0.02	0.01	0.03	2.00
	3	0.9780757	0.13	0.01	0.01	0.02	5.50
384	1	0.9779644	11.26	0.10	0.08	0.20	1.88
	2	0.9780752	0.18	0.01	0.01	0.02	12.50
	3	0.9780764	0.06	0.01	0.00	0.01	34.70
1536	1	0.9780477	2.93	0.03	0.02	0.05	11.60
	2	0.9780763	0.07	0.01	0.00	0.01	82.70
	3	0.9780764	0.06	0.01	0.00	0.01	230.50
Ref.		0.9780770					

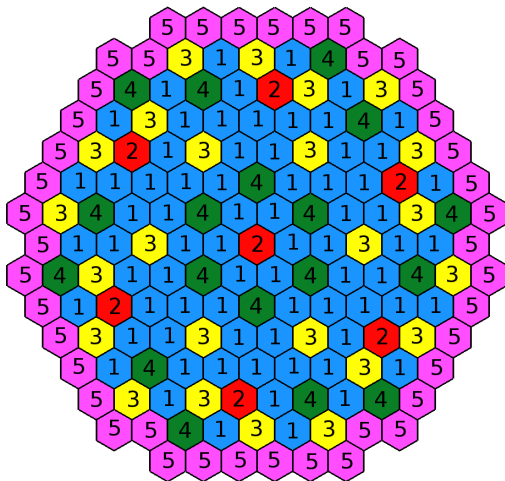
Распределение мощности при $\gamma = 0.5, n = 6, p = 2$



Распределение мощности при $\gamma = 0.5, n = 1536, p = 1$

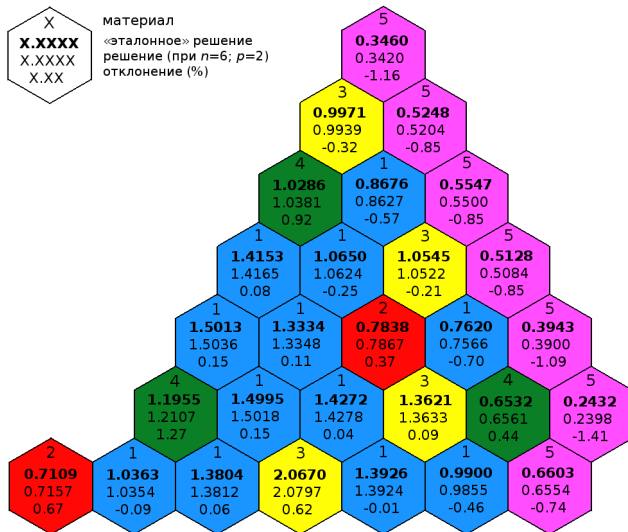


ВВЭР-1000 без отражателя

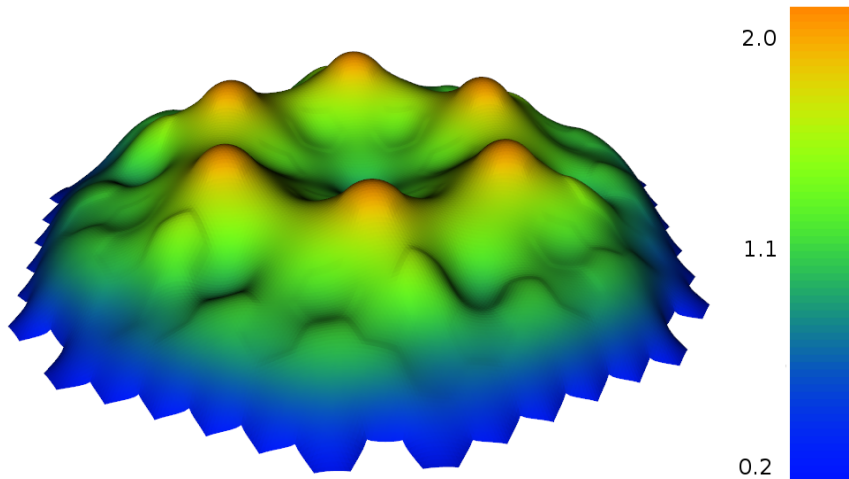


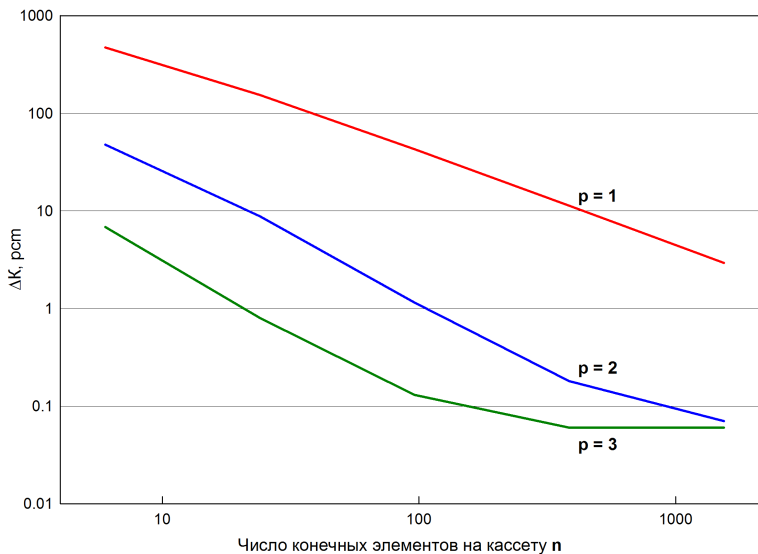
- Размер кассеты "под ключ" равен 23,6 см
- Имеет 25 стержней СУЗ
- Имеет 1/6 зеркальную симметрию
- Два варианта граничных условий:
 - 1 $\gamma = 0.5$
 - 2 $\gamma = 0.125$

Распределение мощности при $\gamma = 0.5, n = 6, p = 2$

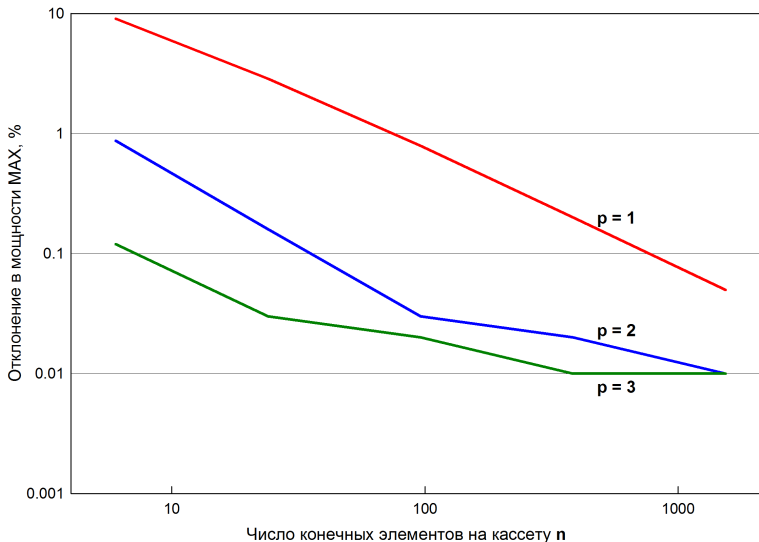


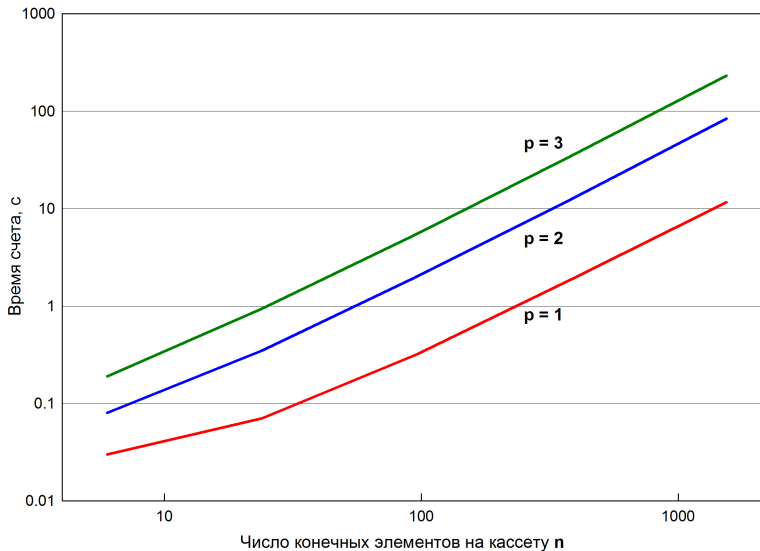
Распределение мощности при $\gamma = 0.5, n = 1536, p = 1$



Поргешность K_{eff} 

Максимальное отклонение мощности, MAX



Время счета, t 

Выводы

- наблюдается устойчивая сходимость решения тестовых задач при увеличении n и p ;
- с точки зрения экономичности расчета, увеличение p намного эффективнее увеличения n ;
- расчет с использованием $p = 1$ и с малым числом $n = 6$ или $n = 24$ дает неудовлетворительные результаты;
- определены параметры «оптимального» варианта, с точки зрения достижения достаточной для практических расчетов ВВЭР точности:
 - $n = 6$; $p = 2$ для тестов IAEA-2D и модели ВВЭР-1000 без отражателя;
 - $n = 6$; $p = 3$ для тестов IAEA-2D с отражателем.

Планы

- Трехмерные тестовые расчеты
- Параллелизация

Спасибо за внимание!