

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ В ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Посвящена вопросам моделирования активной зоны ядерного реактора. Рассматривается уравнение диффузии нейтронов в гексагональной геометрии, которое в операторной форме можно записать как обобщенную задачу на собственное значение. Ищем наименьшее собственное число, характеризующее эффективный коэффициент размножения и соответствующую ему собственную функцию, описывающую стационарное распределение нейтронного потока. Для численного решения используется метод конечных элементов, реализованный в вычислительном пакете FeniCS [1], библиотека для решения спектральных задач SLEPc [2], а для построения и генерации сетки – программа Gmsh [3]. Для тестирования данной методики были рассмотрены несколько двумерных численных тестов.

Получены результаты в виде таблиц и графиков для тестов. Сделаны выводы по результатам расчета тестовых задач.

Ключевые слова: ядерный реактор, активная зона, ВВЭР, уравнение диффузии нейтронов, двухгрупповое приближение, эффективный коэффициент размножения, спектральная задача, метод конечных элементов, FEniCS.

A. V. Avvakumov, P. N. Vabishchevich, A. O. Vasiliev

The Method of Finite Elements for Neutron Diffusion Equations in Hexagonal Geometry

The article is devoted to the issues of modeling the reactor core. The neutron diffusion equation in hexagonal geometry, which in operator form can be written as a generalized eigenvalue problem is observed. We search for the smallest eigenvalue, which characterizes the effective multiplication factor and the eigenfunction corresponding it, which describes the stationary distribution of the neutron flux. For the numerical solution finite element method, implemented in the computer package FeniCS, a library for solving spectral problems SLEPc, and for the construction and mesh generation – the program Gmsh were used. To test this methodology several two-dimensional numerical tests were considered. The results in the form of tables and graphs for the tests were got. Conclusions on the results of test calculations were made.

Key words: nuclear pile, core, Water-Water Energetic Reactor, neutron diffusion equation, two-group approximation, effective multiplication constant, spectral problem, finite elements method, FEniCS.

АВБАКУМОВ Александр Владимирович – с. н. с. Российского научного центра «Курчатовский Институт».

E-mail: avvakumov2009@rambler.ru

АВВАКУМОВ Aleksandr Vladimirovich – Senior Scientific Researcher of the Russian Scientific Centre “Kurchatovsky Institute”.

E-mail: avvakumov2009@rambler.ru

ВАБИЩЕВИЧ Петр Николаевич – д. ф.-м. н., профессор Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН.

E-mail: vabishchevich@gmail.com

VABISHCHEVICH Pyotr Nikolaevich – Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor of the Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences.

E-mail: vabishchevich@gmail.com

ВАСИЛЬЕВ Александр Олегович – ст. преп. кафедры прикладной математики и информатики ИМИ СВФУ им. М.К. Аммосова.

E-mail: haska87@gmail.com

VASILIEV Aleksandr Olegovich – Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, the Institute of Mathematics and Informatics, the North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov.

E-mail: haska87@gmail.com

Введение

Физические процессы, происходящие в ядерном реакторе [4], зависят от распределения нейтронного потока, математическое описание которого основывается на уравнении переноса нейтронов [5]. В общем виде это уравнение имеет интегро-дифференциальную форму, а искомое распределение потока нейтронов зависит от времени, энергии, пространственных и угловых переменных. Для практических расчетов ядерных реакторов, как правило, используют упрощенные формы уравнения переноса нейтронов. Наибольшее распространение для анализа реакторов получило уравнение, известное как групповое диффузионное приближение, которое используется в подавляющем большинстве инженерных нейтронно-физических кодов [6-7]. В практике реакторных расчетов особое место занимает решение условно-критической задачи, которая в математической формулировке сводится к задаче на собственные значения, характеризующие эффективный коэффициент размножения нейтронов [8]. Собственной функцией этой задачи является стационарное распределение потока нейтронов.

Постановка задачи

В операторной форме стационарное уравнение переноса нейтронов в размножающей системе, ограниченной областью Ω с выпуклой границей $\partial\Omega$, можно записать в следующем виде (как обобщенную задачу на собственное значение):

$$MF = \lambda F\Phi, \quad (1)$$

где M – оператор, описывающий убыль (потерю) нейтронов за счет процессов переноса (утечки), поглощения и рассеяния, а F – оператор, описывающий образование (генерацию) нейтронов за счет процессов деления и рассеяния из верхней области энергий. Наименьшее собственное число λ характеризует эффективный коэффициент размножения нейтронов $K_{eff} = 1/\lambda$, а соответствующая ему собственная функция $\Phi(r)$ описывает стационарное распределение нейтронного потока в данной системе ($r \in \Omega$).

В двухгрупповом диффузионном приближении уравнение (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -\nabla(D_1 \nabla \Phi_1) + (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_1 &= \frac{1}{K_{eff}} (v_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + v_2 \Sigma_{f2} \Phi_2), \\ -\nabla(D_2 \nabla \Phi_2) + \Sigma_{a2} \Phi_2 &= \Sigma_r \Phi_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Групповые параметры $D_g(r)$, $\Sigma_{ag}(r)$, $v_g(r)$, $\Sigma_{fg}(r)$ – коэффициент диффузии, макросечение поглощения, число вторичных нейтронов и макросечение деления соответственно, а $\Sigma_r(r)$ – макросечение рассеяния. На границе области $\partial\Omega$ ставятся условия альбедного типа:

$$D_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial n} = -\gamma_g \Phi_g, \quad g = 1, 2, \quad (3)$$

где n – внешняя нормаль границы $\partial\Omega$, γ_g – групповой альбедный параметр (логарифмическая производная). Решением уравнений (2)-(3) является эффективный коэффициент размножения нейтронов K_{eff} и стационарное распределение нейтронного потока $\Phi(r)$. Одной из основных задач в физике ядерных реакторов является оценка различных функционалов нейтронного потока. Определим нейтронную мощность $P(r)$ как следующий функционал:

$$P = A(\Sigma_{f1} \Phi_1 + \Sigma_{f2} \Phi_2), \quad (4)$$

где A – коэффициент нормировки на заданное значение интегральной мощности.

Конечно-элементная аппроксимация

Для численного решения задачи методом конечных элементов, уравнения (2)-(3) необходимо привести к вариационной постановке [9]. Основным способом перевода дифференциальной задачи в вариационную являются следующие операции: умножение уравнения на некую функцию v , интегрирование полученного уравнения по области, замена производных второго порядка через интегрирование по частям. Функция v называется *тестовой функцией*, а искомая функция – *пробной функцией*. В нашем случае мы каждое уравнение умножаем на тестовую функцию, первое – на v_1 , второе – на v_2 и интегрируем полученные уравнения по области Ω . Тогда получаем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla(D_1 \nabla \Phi_1) v_1 dr + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_1 v_1 dr = \\ & = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (v_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + v_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) v_2 dr, \\ & - \int_{\Omega} \nabla(D_2 \nabla \Phi_2) v_2 dr + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_2 v_2 dr = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_1 v_2 dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее заменяем первые интегралы с помощью интегрирования по частям и используем формулу Гаусса-Остроградского для перехода к поверхностному интегралу:

$$\int_{\Omega} \nabla(D_1 \nabla \Phi_1) v_1 dr = \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_1, \nabla v_1) dr - \int_{\partial\Omega} D_1 v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} ds, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \nabla(D_2 \nabla \Phi_2) v_2 dr = \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_2, \nabla v_2) dr - \int_{\partial\Omega} D_2 v_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} ds.$$

Тогда из (3) и (6) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_1, \nabla v_1) dr + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_1 v_1 dr + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_1 v_1 ds \\ & = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (v_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + v_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) v_1 dr, \\ & \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_2, \nabla v_2) dr + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_2 v_2 dr + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_2 v_2 ds = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_1 v_2 dr. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученная вариационная задача формулируется следующим образом: нужно найти такие функции $\Phi_g \in V$, которые удовлетворяют системе уравнений (7) для любых $v_g \in \hat{V}$, где V – пространство пробных функций, а \hat{V} – пространство тестовых функций. Здесь $V = H^1(\Omega)$, $\hat{V} = H^1(\Omega)$, где $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева, состоящее из функций v_g таких, что и $|\nabla v_g|^2$ имеют конечный интеграл в Ω .

Далее мы должны перейти от непрерывной вариационной задачи (7) к дискретной задаче. Введем конечномерные пространства $V_h \subset V$, $\hat{V}_h \subset \hat{V}$ и определим в них дискретную задачу: найти $\Phi_{gh} \in V_h$ такие, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_{1h}, \nabla v_{1h}) \, dr + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_{1h} v_{1h} \, dr + \\ & + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_{1h} v_{1h} \, ds \\ & = \frac{1}{K_{eff}} \int_{\Omega} (v_1 \Sigma_{f1} \Phi_{1h} + v_2 \Sigma_{f2} \Phi_{2h}) v_{1h} \, dr, \\ & \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_{2h}, \nabla v_{2h}) \, dr + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_{2h} v_{2h} \, dr + \\ & + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_{2h} v_{2h} \, ds = \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_{1h} v_{2h} \, dr. \end{aligned} \quad (8)$$

В качестве пространств V_h будем использовать стандартные пространства Лагранжевых полиномов [10-11]. Перепишав уравнение (8) в операторном виде получаем уравнение (1). Операторы M и F являются блочными:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь операторы M_{11} , M_{21} и M_{22} соответствуют билинейным формам a_{11} , a_{21} и a_{22} соответственно, которые представляются в виде:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{\Omega} (D_1 \nabla \Phi_{1h}, \nabla v_{1h}) \, dr + \int_{\Omega} (\Sigma_{a1} + \Sigma_r) \Phi_{1h} v_{1h} \, dr + \\ & + \int_{\partial\Omega} \gamma_1 \Phi_{1h} v_{1h} \, ds, \\ a_{21} &= \int_{\Omega} \Sigma_r \Phi_{1h} v_{2h} \, dr, \\ a_{22} &= \int_{\Omega} (D_2 \nabla \Phi_{2h}, \nabla v_{2h}) \, dr + \int_{\Omega} \Sigma_{a2} \Phi_{2h} v_{2h} \, dr + \\ & + \int_{\partial\Omega} \gamma_2 \Phi_{2h} v_{2h} \, ds. \end{aligned} \quad (10)$$

А операторы F_{11} и F_{12} соответствуют билинейным формам b_{11} и b_{12} , которые представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \int_{\Omega} v_1 \Sigma_{f1} \Phi_{1h} v_{1h} \, dr, \\ b_{12} &= \int_{\Omega} v_2 \Sigma_{f2} \Phi_{2h} v_{2h} \, dr. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция Φ называется собственной функцией операторов M и F . Число λ называется собственным значением операторов M и F , соответствующим собственной функции Φ .

Тестовые расчеты

Для тестирования данной методики рассмотрим несколько двумерных численных тестов, имитирующих различные конфигурации загрузок типа ВВЭР с гексагональной кассетной структурой. В расчетах варьировались следующие параметры:

- n – параметр, характеризующий детализацию расчетной сетки – число расчетных ячеек (конечных элементов) на кассету; диапазон изменения n от 6 до 1536 (рис. 1);
- p – порядок конечных элементов; диапазон изменения p от 1 до 3.

Вычислялись следующие параметры:

- эффективный коэффициент размножения K_{eff} ;
- распределение нейтронной мощности $P(4)$ по кассетам с нормировкой на среднее значение по активной зоне.

С целью анализа сходимости и эффективности разработанного алгоритма все тестовые расчеты были выполнены с фиксированной точностью отгонки собственного числа равной 10-15. Полученные результаты сравнивались с результатами расчетов по диффузионной мелкосеточной программе DIF3D-FD [13] (эталонное решение было получено путем экстраполяции результатов на бесконечно малый размер элементарной ячейки расчетной сетки). Будем рассматривать следующие отклонения в расчетных параметрах:

- для эффективного коэффициента размножения абсолютное отклонение от «эталонного» значения K_{eff} : $\Delta K = |K_{eff} - K_{ref}|$, выражается в *pcm* (percent-milli, т. е. 10^{-5});
- для распределения покассетных мощностей P_i вычисляются относительные отклонения ε_i (выражаются в %):

$$\varepsilon_i = \frac{P_i - P_i^{ref}}{P_i^{ref}},$$

где P_i^{ref} – «эталонное» значение мощности в кассете i ($i=1, \dots, N$).

- по отклонениям ε_i рассчитываются интегральные отклонения:
- среднеквадратическое отклонение RMS:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2},$$

- среднее по модулю отклонение AVR:

$$AVR = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i|,$$

- максимальное по модулю отклонение MAX:

$$MAX = \max_i |\varepsilon_i|.$$

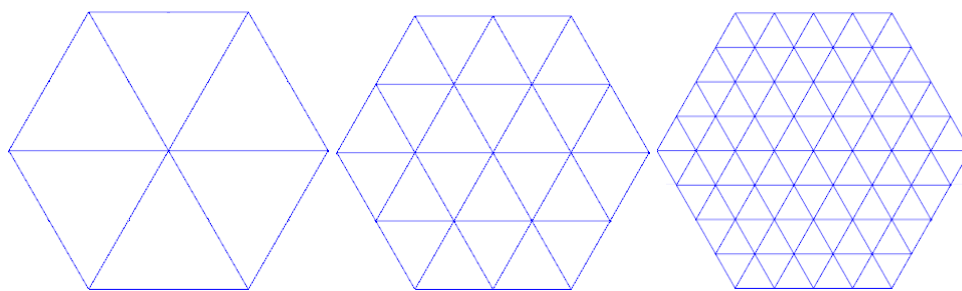


Рис. 1. Разбиение кассеты на 6, 24 и 96 конечных элементов

Определим критерии «приемлемости» результатов с точки зрения достижения достаточной для практических расчетов ВВЭР точности:

- отклонение K_{eff} не выше 0.1 % (100 pcm);
- максимальное по модулю отклонение в покассетных мощностях не выше 2 %.

Будем считать «оптимальным» вариант, удовлетворяющий этим критериям и наиболее экономичный (по времени счета). Результаты расчетов, полученные для «оптимального» варианта, будут отражены на рисунках и выделены в таблицах серым цветом. Все вычисления проводились на компьютере со следующей конфигурацией: processor – IntelCorei3 3.30GHz, memory – 8 Gb.

Модифицированный тест IAEA-2D без отражателя

Тестовая задача является модификацией на случай гексагональной геометрии известной тестовой задачи IAEA-2D [13]. Геометрическая модель активной зоны реактора моделируется набором кассет гексагональной формы. Активная зона имеет 13 стержней устройства систем управления и защиты реактора (СУЗ) и 1/12 зеркальную симметрию. Размер кассеты «под ключ» равен 20 см. На рис. 2 дана

геометрическая модель активной зоны, где цифрами показаны кассеты различных сортов. Диффузионные нейтронно-физические константы заданы в табл. 1. Отражатель не моделируется, граничные условия задаются в виде логарифмической производной. Рассматриваются два варианта, отличающиеся значениями логарифмической производной на границе.

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D без отражателя приведены в табл. 2, и табл. 3. Здесь приняты следующие обозначения: n – число ячеек на кассету; p – порядок конечного элемента; K_{eff} – эффективный коэффициент размножения; ΔK – абсолютное отклонение от «эталонного» значения; RMS – среднеквадратичное отклонение; AVR – среднее отклонение; MAX – максимальное отклонение; t – время счета. Распределения мощности показаны на рис. 3, 5. Здесь для каждой кассеты сверху вниз приведены материал, «эталонное» решение, решение и относительное отклонение от «эталонного» решения.

Модифицированный тест IAEA-2D с отражателем

Тестовая задача аналогична предыдущей, за исключением того, что был добавлен внешний ряд

Таблица 1

Диффузионные константы для модифицированного теста IAEA-2D

Материал	1	2	3	4
D_1	1.50	1.50	1.50	1.50
D_2	0.40	0.40	0.40	0.40
Σ_{a1}	0.01	0.01	0.01	0.00
Σ_{a2}	0.08	0.085	0.13	0.01
Σ_r	0.02	0.02	0.02	0.04
Σ_{f1}	0.00	0.00	0.00	0.00
Σ_{f2}	0.056	0.056	0.056	0.00
$\nu_1 \Sigma_{f1}$	0.00	0.00	0.00	0.00
$\nu_2 \Sigma_{f2}$	0.135	0.135	0.135	0.00

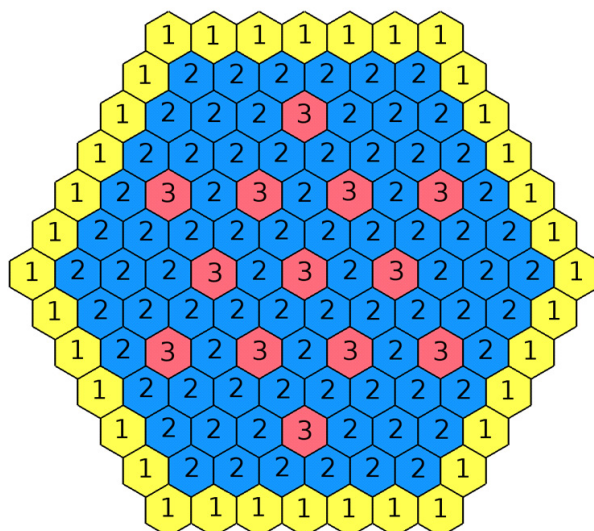


Рис. 2. Геометрическая модель активной зоны модифицированного теста IAEA-2D без отражателя

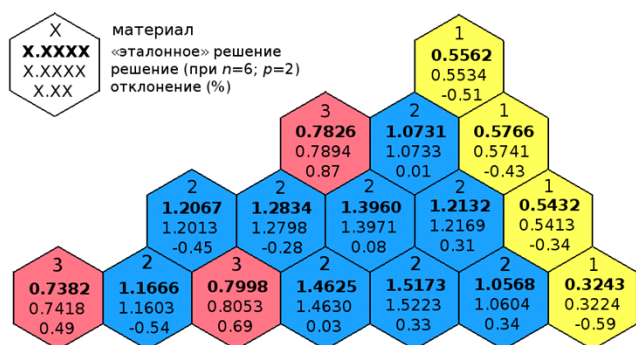


Рис. 3. Распределение мощности для модифицированного теста IAEA-2D без отражателя при $\gamma=0.5$

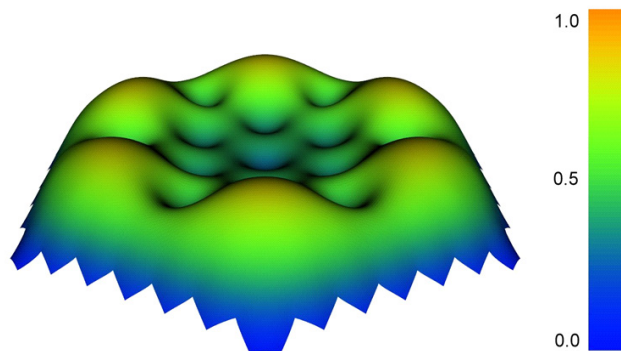
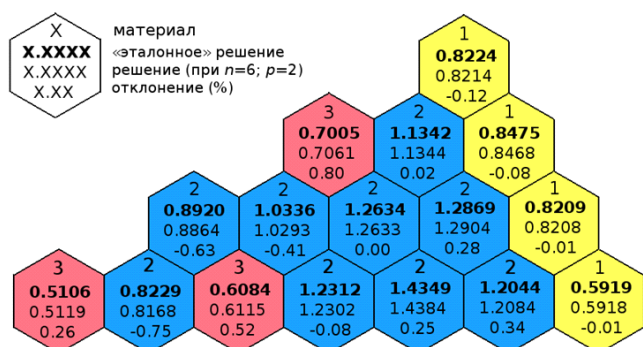
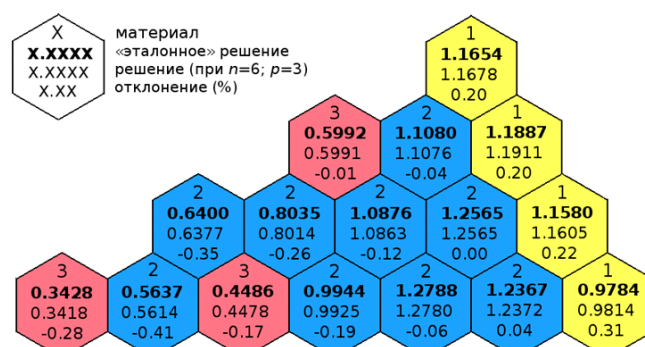


Рис. 4. Плотность потока быстрых нейтронов для модифицированного теста IAEA-2D без отражателя при $\gamma=0.5, n=1536, p=1$

Таблица 2

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D без отражателя при $\gamma=0.5$

n	p	$K_{eff}(pcm)$	$\Delta K(pcm)$	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	$t(sec)$
6	1	0.9733476	472.94	3.80	2.94	9.04	0.03
	2	0.9775987	47.83	0.45	0.39	0.87	0.08
	3	0.9780084	6.86	0.07	0.06	0.12	0.19
24	1	0.9765384	153.86	1.28	1.04	2.86	0.07
	2	0.9779893	8.77	0.08	0.07	0.16	0.35
	3	0.9780690	0.80	0.01	0.01	0.03	0.94
96	1	0.9776501	42.69	0.36	0.30	0.79	0.32
	2	0.9780655	1.15	0.02	0.01	0.03	2.00
	3	0.9780757	0.13	0.01	0.01	0.02	5.50
384	1	0.9779644	11.26	0.10	0.08	0.20	1.88
	2	0.9780752	0.18	0.01	0.01	0.02	12.50
	3	0.9780764	0.06	0.00	0.00	0.01	34.70
1536	1	0.9780477	2.93	0.03	0.02	0.05	11.60
	2	0.9780763	0.07	0.01	0.00	0.01	82.70
	3	0.9780764	0.06	0.01	0.00	0.01	230.50
ref.		0.9780770					

Рис. 5. Распределение мощности для модифицированного теста IAEA-2D без отражателя при $\gamma=0.125$ Рис. 6. Распределение мощности для модифицированного теста IAEA-2D с отражателем при $\gamma=0.5$

отражателя (материал 4). Диффузионные нейтронно-физические константы заданы в табл. 1. Граничные условия задаются в виде логарифмической производной. Так же рассматриваются два варианта, отличающиеся значениями логарифмической производной на границе.

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D с отражателем приведены в табл. 4, 5 и на рис. 6, 7.

Двухмерная модель ВВЭР-1000 без отражателя

Геометрическая модель активной зоны ВВЭР-1000 моделируется набором кассет гексагональной формы. На рис. 8 показана геометрическая модель активной зоны ВВЭР-1000, где цифрами показаны кассеты различных сортов. Размер кассеты «под ключ» равен 23.6 см. Активная зона имеет 25 стержней СУЗ и 1/6 зеркальную симметрию. Диффузионные

нейтронно-физические константы заданы в табл. 6. На внешней границе реактора задается условие границы с вакуумом (логарифмическая производная $\gamma=0.5$) и более реалистичные условия (логарифмическая производная $\gamma=0.125$).

Результаты расчета двухмерного теста ВВЭР-1000 без отражателя приведены в табл. 7, 8 и на рис. 9, 11.

Анализ результатов расчетов

Для иллюстрации результатов расчета тестовых задач по разработанному алгоритму рассмотрим несколько графиков для первой тестовой задачи. На графиках (рис. 12-14) приведены кривые отклонения ΔK , максимального отклонения мощности MAX и времени счета задачи t в зависимости от числа конечных элементов на кассету n и порядка конечных элементов p .

Из графиков (рис. 12-14), а также таблиц 2-5, 7 и 8 можно сделать следующие выводы:

Таблица 3

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D без отражателя при $\gamma=0.125$

n	p	$K_{eff}(pcm)$	$\Delta K(pcm)$	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	$t(sec)$
6	1	0.9877260	365.20	3.65	2.66	8.40	0.03
	2	0.9910086	36.94	0.39	0.28	0.80	0.08
	3	0.9913262	5.18	0.06	0.04	0.12	0.20
24	1	0.9901896	118.84	1.21	0.88	2.65	0.08
	2	0.9913114	6.66	0.07	0.05	0.15	0.36
	3	0.9913743	0.37	0.01	0.01	0.02	0.99
96	1	0.9910477	33.03	0.34	0.25	0.74	0.34
	2	0.9913713	0.67	0.01	0.01	0.02	2.10
	3	0.9913789	0.09	0.00	0.00	0.01	5.70
384	1	0.9912924	8.56	0.09	0.07	0.20	1.96
	2	0.9913785	0.05	0.01	0.00	0.01	12.80
	3	0.9913792	0.12	0.00	0.00	0.01	35.00
1536	1	0.9913571	2.09	0.02	0.02	0.06	12.00
	2	0.9913792	0.12	0.00	0.00	0.01	83.00
	3	0.9913793	0.13	0.00	0.00	0.01	231.50
ref.		0.9913780					

Таблица 4

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D с отражателем при $\gamma=0.5$

n	p	$K_{eff}(pcm)$	$\Delta K(pcm)$	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	$t(sec)$
6	1	1.0104126	490.56	13.29	11.13	23.73	0.03
	2	1.0062265	71.95	1.88	1.59	3.40	0.11
	3	1.0055754	6.84	0.22	0.18	0.41	0.27
24	1	1.0069873	148.03	4.54	3.77	8.45	0.10
	2	1.0056090	10.20	0.30	0.25	0.57	0.54
	3	1.0055135	0.65	0.02	0.02	0.04	1.46
96	1	1.0059079	40.90	1.28	1.06	2.41	0.50
	2	1.0055186	1.16	0.04	0.03	0.07	3.00
	3	1.0055097	0.27	0.01	0.01	0.02	8.30
384	1	1.0056119	10.49	0.34	0.28	0.64	2.95
	2	1.0055102	0.32	0.01	0.01	0.02	18.70
	3	1.0055096	0.26	0.01	0.01	0.02	52.00
1536	1	1.0055354	2.84	0.09	0.08	0.17	18.65
	2	1.0055096	0.26	0.01	0.01	0.02	132.30
	3	1.0055096	0.26	0.01	0.01	0.02	370.50
ref.		1.0055070					

Таблица 5

Результаты расчета модифицированного теста IAEA-2D с отражателем при $\gamma=0.125$

n	p	$K_{eff}(pcm)$	$\Delta K(pcm)$	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	$t(sec)$
6	1	1.0120630	543.30	13.72	11.55	24.47	0.03
	2	1.0074831	85.31	2.00	1.69	3.60	0.11
	3	1.0067469	11.69	0.23	0.19	0.44	0.27
24	1	1.0083333	170.33	4.74	3.95	8.80	0.10
	2	1.0067838	15.38	0.32	0.27	0.60	0.54
	3	1.0066733	4.33	0.02	0.02	0.04	1.46
96	1	1.0071200	49.00	1.34	1.11	2.52	0.50
	2	1.0066790	4.9	0.04	0.03	0.07	3.00
	3	1.0066682	3.82	0.01	0.01	0.01	8.30
384	1	1.0067847	15.47	0.35	0.29	0.67	2.95
	2	1.0066688	3.88	0.01	0.01	0.02	18.70
	3	1.0066680	3.8	0.01	0.01	0.01	52.00
1536	1	1.0066975	6.75	0.09	0.08	0.18	18.65
	2	1.0066680	3.8	0.01	0.01	0.01	132.30
	3	1.0066680	3.8	0.01	0.01	0.01	370.50
ref.		1.0066300					

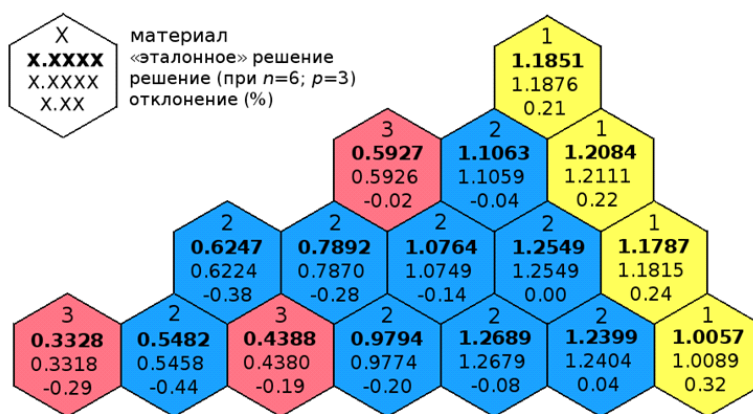


Рис. 7. Распределение мощности для модифицированного теста IAEA-2D с отражателем при $\gamma=0.125$

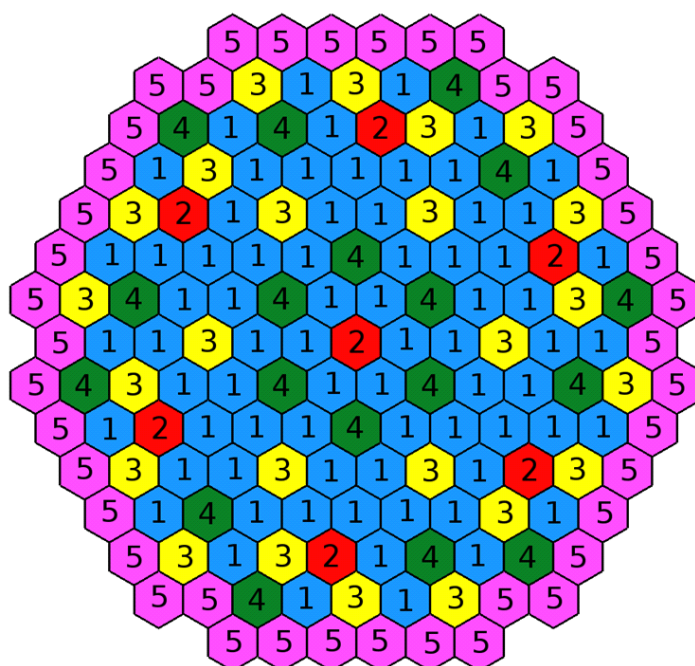


Рис. 8. Геометрическая модель активной зоны двухмерной модели ВВЭР-1000 без отражателя

- наблюдается устойчивая сходимость решения тестовых задач при увеличении числа конечных элементов на кассету n и порядка конечных элементов p ;
- с точки зрения экономичности расчета увеличение порядка конечных элементов p намного эффективнее увеличения числа конечных элементов на кассету n ;
- расчет с использованием конечных элементов первого порядка ($p=1$) с малым числом конечных элементов на кассету ($n=6$ или 24) дает неудовлетворительные результаты;
- определены параметры «оптимального» вариан-

та, удовлетворяющего выбранным критериям «приемлемости» результатов с точки зрения достижения достаточной для практических расчетов ВВЭР точности:

- $n=6$; $p=2$ для тестов IAEA-2D и модели ВВЭР-1000 без отражателя;
- $n=6$; $p=3$ для тестов IAEA-2D с отражателем.

Заключение

1. Рассмотрено уравнение диффузии нейтронов в гексагональной геометрии, которое в операторном виде представляет спектральную задачу. Проводились

Таблица 6

Диффузионные константы для ВВЭР-1000

Материал	1	2	3	4	5
D_1	1.383200	1.382990	1.395220	1.394460	1.395060
D_2	0.386277	0.389403	0.386225	0.387723	0.384492
Σ_{a1}	8.38590e-3	1.15490e-2	8.94410e-3	1.19932e-2	9.11600e-3
Σ_{a2}	6.73049e-2	8.10328e-2	8.44801e-2	9.89670e-2	8.93878e-2
Σ_r	1.64977e-2	1.47315e-2	1.56219e-2	1.40185e-2	1.54981e-2
Σ_{f1}	1.86139e-3	1.81560e-3	2.36371e-3	2.31026e-3	2.50773e-3
Σ_{f2}	3.48111e-2	3.48111e-2	4.91322e-2	4.95721e-2	5.31856e-2
$\nu_1 \Sigma_{f1}$	4.81619e-3	4.66953e-3	6.04889e-3	5.91507e-3	6.40256e-3
$\nu_2 \Sigma_{f2}$	8.46154e-2	8.52264e-2	1.19428e-1	1.20497e-1	1.29281e-1

Таблица 7

Результаты расчета двухмерного теста ВВЭР-1000 без отражателя при $\gamma=0.5$

n	P	K_{eff} (pcm)	ΔK (pcm)	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	t (sec)
6	1	1.0048318	165.32	5.71	4.57	12.07	0.03
	2	1.0063985	8.65	0.66	0.52	1.41	0.12
	3	1.0064517	3.33	0.14	0.11	0.28	0.30
24	1	1.0060003	48.47	1.94	1.55	4.20	0.12
	2	1.0064500	3.50	0.16	0.13	0.32	0.59
	3	1.0064546	3.04	0.08	0.07	0.15	1.61
96	1	1.0063358	14.92	0.58	0.47	1.25	0.54
	2	1.0064547	3.03	0.08	0.07	0.15	3.37
	3	1.0064559	2.91	0.07	0.06	0.14	8.96
384	1	1.0064248	6.02	0.19	0.16	0.37	3.15
	2	1.0064559	2.91	0.07	0.06	0.14	19.77
	3	1.0064561	2.89	0.07	0.06	0.14	55.00
1536	1	1.0064481	3.69	0.10	0.08	0.17	18.00
	2	1.0064561	2.89	0.07	0.06	0.14	129.70
	3	1.0064561	2.89	0.07	0.06	0.14	366.50
ref.		1.0064850					

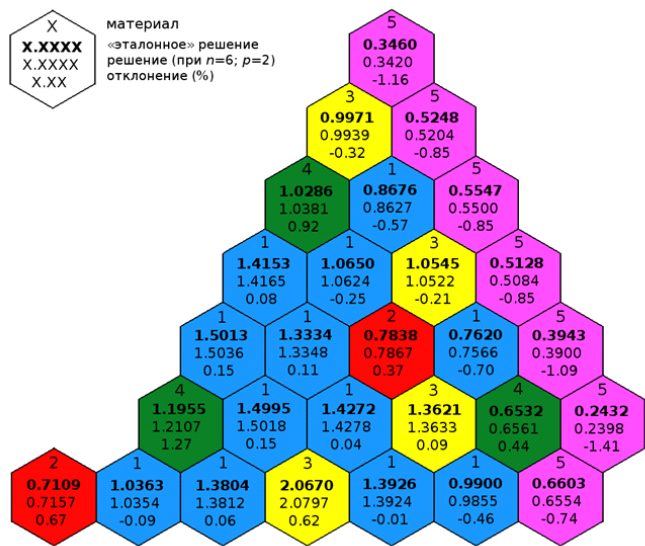


Рис. 9. Распределение мощности для модели ВВЭР-1000 без отражателя при $\gamma=0.5$

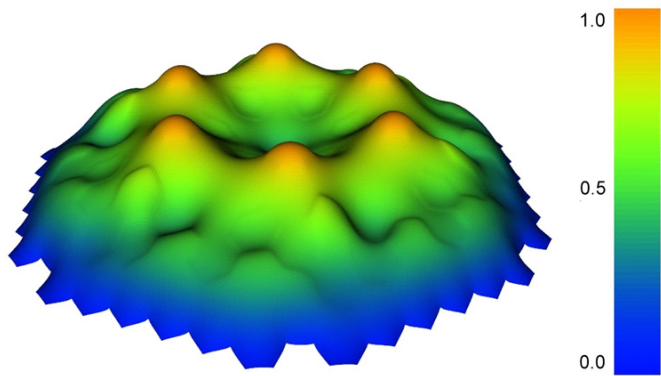
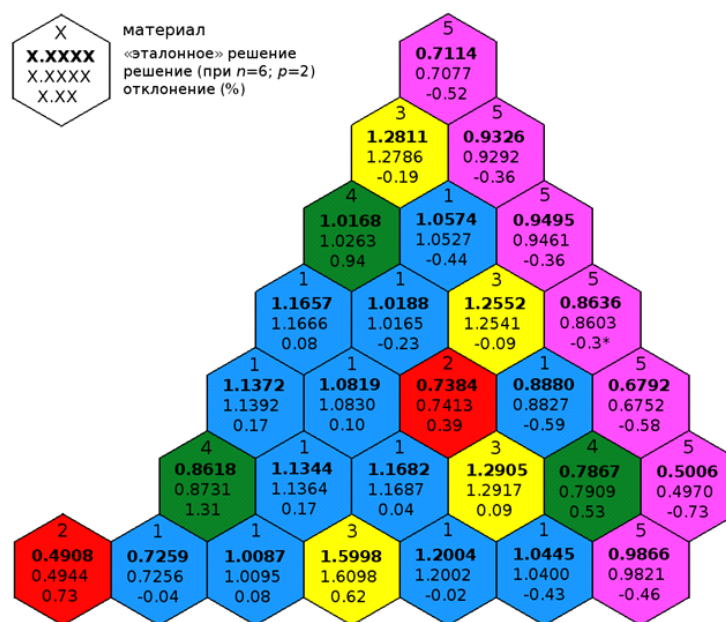


Рис. 10. Плотность потока быстрых нейтронов для модели ВВЭР-1000 без отражателя при $\gamma=0.5$, $n=1536$, $p=1$

Рис. 11. Распределение мощности для модели ВВЭР-1000 без отражателя при $\gamma=0.125$

поиски наименьшего собственного числа и соответствующей ему собственной функции, которые характеризуют эффективный коэффициент размножения нейтронов и пространственное распределение плотности нейтронного потока соответственно.

2. Разработан алгоритм решения спектральной задачи на основе метода конечных элементов. Написан

программный код на основе разработанного алгоритма, использующий вычислительную библиотеку FEniCS и библиотеку для решения спектральных задач SLEPc.

3. Проведено тестирование разработанного программного кода на следующих двухмерных тестах с различными граничными условиями:

- модифицированный тест IAEI-2D без отражателя;

Таблица 8

Результаты расчета двухмерного теста ВВЭР-1000 без отражателя при $\gamma=0.125$

n	P	$K_{eff} (pcm)$	$\Delta K (pcm)$	RMS (%)	AVR (%)	MAX (%)	$t (sec)$
6	1	1.0125509	185.61	4.74	3.88	11.75	0.04
	2	1.0143068	10.02	0.49	0.38	1.31	0.13
	3	1.0143717	3.53	0.11	0.09	0.30	0.32
24	1	1.0138630	54.40	1.54	1.26	3.83	0.12
	2	1.0143694	3.76	0.12	0.10	0.34	0.62
	3	1.0143777	2.93	0.07	0.06	0.13	1.69
96	1	1.0142408	16.62	0.46	0.38	1.15	0.57
	2	1.0143775	2.95	0.07	0.06	0.14	3.51
	3	1.0143789	2.81	0.06	0.05	0.12	9.32
384	1	1.0143431	6.39	0.15	0.13	0.39	3.03
	2	1.0143789	2.81	0.06	0.05	0.12	19.62
	3	1.0143792	2.78	0.06	0.05	0.12	54.00
1536	1	1.0143699	3.71	0.08	0.07	0.18	18.60
	2	1.0143792	2.78	0.06	0.05	0.12	134.00
	3	1.0143792	2.78	0.06	0.05	0.12	378.70
ref.		1.0144070					

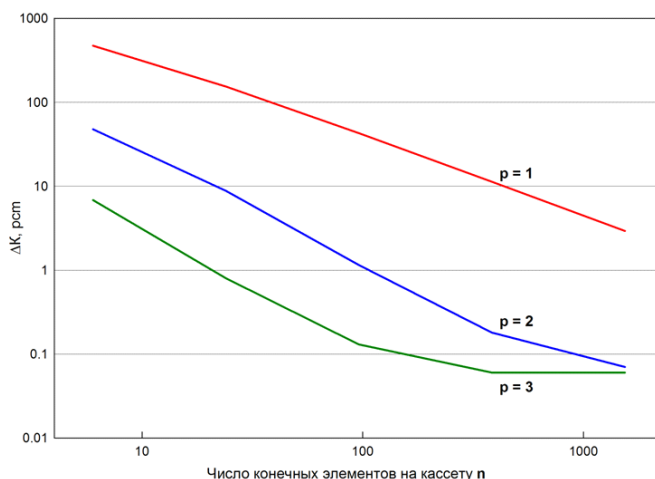


Рис. 12. Отклонение коэффициента размножения, ΔK

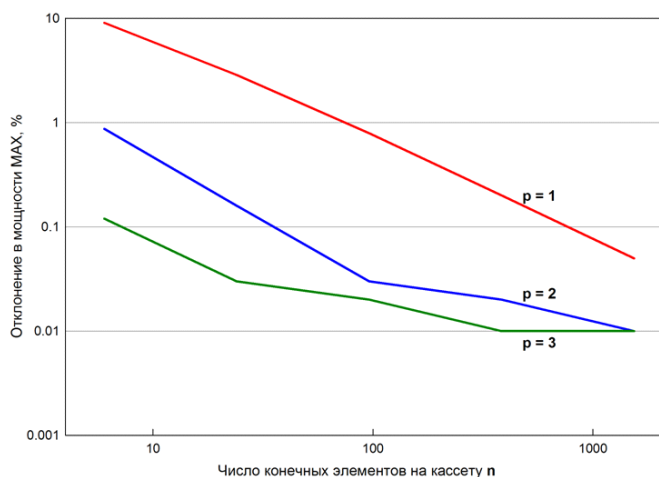


Рис. 13. Максимальное отклонение мощности, MAX

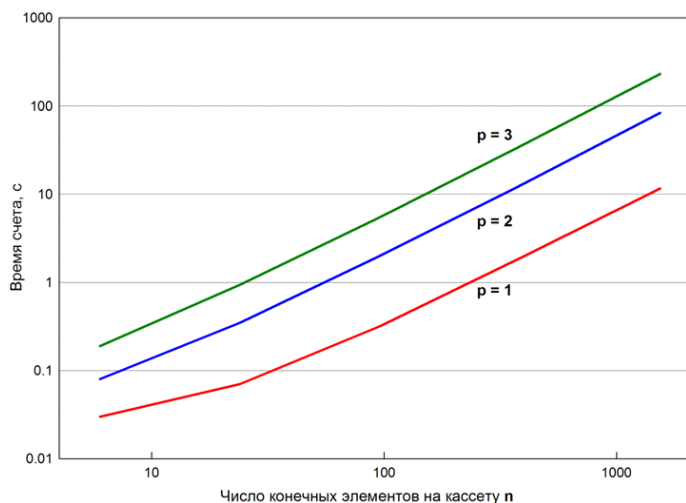


Рис. 14. Время счета задачи, t

- модифицированный тест IAEA-2D с отражателем;
- модель ВВЭР-1000 без отражателя.

4. Исследовалась сходимость метода в зависимости от числа конечных элементов на кассету n и порядка конечных элементов p . Разработанный алгоритм демонстрирует быструю сходимость и высокую точность при значениях $n=6$ и $p=2$ или 3;

Л и т е р а т у р а

1. Logg K. A. Mardal, G. Wells. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – Springer, 2012.
2. Campos C., Roman J. E., Romero E., Tomas A. SLEPc Users Manual, 2013.
3. Geuzaine C., Remacle J. F. Gmsh Reference Manual, 2014.
4. Климов А. Н. Ядерная физика и ядерные реакторы. – Атомиздат, 1971.
5. Stacey W. M. Nuclear Reactor Physics. – John Wiley & Sons, 2007.
6. Ганев И. Х., Доллежалъ Н. А. Физика и расчет реактора. – Энергоиздат, 1981.
7. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. – Атомиздат, 1981.
8. Gonzalez-Pintor S., Verdu G., Ginestar D. Approximation of the neutron diffusion equation on hexagonal geometries. – New York, 2009.
9. Hebert A. Application of a dual variational formulation to finite element reactor calculations // Annals of Nuclear Energy, – 1993. – 20. – P. 823-845.
10. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics. – Springer, 2008.

11. Brenner S. C., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Texts in Applied Mathematics. – Springer, 2008.
12. Kressner D. Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – Springer, 2006.
13. Chao Y. A., Shatilla Y. A. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-ii: Implementation in the anc-h code. Nuclear Science and Engineering. – 1995. – 121. – P. 210-225.

References

1. Logg K. A., Mardal G. Wells. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2012.
2. Campos C., Roman J. E., Romero E., Tomas A. SLEPc Users Manual, 2013.
3. Geuzaine C., Remacle J. F. Gmsh Reference Manual, 2014.
4. Klimov A. N. Jadernaja fizika i jadernye reaktory. Atomizdat, 1971.
5. Stacey W. M. Nuclear Reactor Physics. John Wiley &

Sons, 2007.

6. Ganev I. H., Dollezhal' N. A. Fizika i raschet reaktora. Jenergoizdat, 1981.
7. Marchuk G. I., Lebedev V. I. Chislennyye metody v teorii perenosa nejtronov. Atomizdat, 1981.
8. Gonzalez-Pintor S., Verdu G., Ginestar D. Approximation of the neutron diffusion equation on hexagonal geometries. New York, 2009.
9. Hebert A. Application of a dual variational formulation to finite element reactor calculations. Annals of Nuclear Energy. – 1993. – 20. – P. 823-845.
10. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2008.
11. Brenner S. C., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Texts in Applied Mathematics. – Springer, 2008.
12. Kressner D. Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – Springer, 2006.
13. Chao Y. A., Shatilla Y. A. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-ii: Implementation in the anc-h code. Nuclear Science and Engineering. – 1995. – 121. – P. 210-225.

