

1 Постановка задачи

Моделируется нейтронное поле в многогрупповом диффузионном приближении. Динамика нейтронов рассматривается в ограниченной выпуклой двумерной или трехмерной области Ω ($\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\} \in \Omega$, $d = 2, 3$) с границей $\partial\Omega$. Перенос нейтронов описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_g \phi_g - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s, g' \rightarrow g} \phi_{g'} \\ = (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + \tilde{\chi}_g \sum_{m=1}^M \lambda_m c_m, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\phi_g(\mathbf{x}, t)$ — поток нейтронов группы g в точке \mathbf{x} на момент времени t , G — число групп, v_g — эффективная скорость нейтронов в группе g , $D_g(\mathbf{x})$ — коэффициент диффузии, $\Sigma_g(\mathbf{x}, t)$ — сечение поглощения, $\Sigma_{s, g' \rightarrow g}(\mathbf{x}, t)$ — сечение рассеяния с группы g' в группу g , β — эффективная доля запаздывающих нейтронов, χ_g , $\tilde{\chi}_g$ — спектры мгновенных и запаздывающих нейтронов, $\nu \Sigma_{fg}(\mathbf{x}, t)$ — сечение генерации группы g , c_m — плотность источников запаздывающих нейтронов m типа, λ_m — постоянная распада источников запаздывающих нейтронов, M — число типов запаздывающих нейтронов. Плотность источников запаздывающих нейтронов описывается уравнениями

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \lambda_m c_m = \beta_m \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где β_m — доля запаздывающих нейтронов m типа, причем

$$\beta = \sum_{m=1}^M \beta_m.$$

На границе области $\partial\Omega$ ставятся условия альбедного типа:

$$D_g \frac{\partial \Phi_g}{\partial n} + \gamma_g \Phi_g = 0, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (3)$$

где n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Рассматривается задача для системы уравнений (1), (2) с краевыми условиями (3), и начальными условиями:

$$\phi_g(\mathbf{x}, 0) = \phi_g^0(\mathbf{x}), \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (4)$$

Запишем краевую задачу (1), (2), (3), (4) в операторной форме. Определим векторы $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G\}$, $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ и матрицы

$$\begin{aligned} V &= (v_{gg'}), \quad v_{gg'} = \delta_{gg'} v_g^{-1}, \\ D &= (d_{gg'}), \quad d_{gg'} = -\delta_{gg'} \nabla \cdot D_g \nabla, \\ S &= (s_{gg'}), \quad s_{gg'} = \delta_{gg'} \Sigma_g - \Sigma_{s, g' \rightarrow g}, \\ R &= (r_{gg'}), \quad r_{gg'} = (1 - \beta) \chi_g \nu \Sigma_{fg'}, \\ B &= (b_{gm}), \quad b_{gm} = \tilde{\chi}_g \lambda_m, \\ \Lambda &= (\lambda_{mm'}), \quad \lambda_{mm'} = \lambda_m \delta_{mm'}, \\ Q &= (q_{mg}), \quad q_{mg} = \beta_m \nu \Sigma_{fg}, \\ g, g' &= 1, 2, \dots, G, \quad m, m' = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где

$$\delta_{gg'} = \begin{cases} 1, & g = g', \\ 0, & g \neq g', \end{cases}$$

есть символ Кронеккера. Будем работать на множестве векторов $\boldsymbol{\phi}$, компоненты которого удовлетворяют граничным условиям (3). С учетом введенных обозначений система уравнений (1), (2) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} V \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} + (D + S)\boldsymbol{\phi} &= R\boldsymbol{\phi} + B\boldsymbol{c}, \\ \frac{d\boldsymbol{c}}{dt} + \Lambda\boldsymbol{c} &= Q\boldsymbol{\phi}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для (5) рассматривается задача Коши, когда

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}^0, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\phi}^0 = \{\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_G^0\}$.

2 Спектральная задача

Для характеристики динамических процессов в ядерном реакторе, которые описываются задачами Коши (5), (6) привлекаются решения некоторых спектральных задач [?, ?, 8].

Обычно рассматривается спектральная задача

$$\begin{aligned} (D + S)\boldsymbol{\varphi} &= \lambda^{(k)}(R\boldsymbol{\varphi} + B\boldsymbol{s}), \\ \Lambda\boldsymbol{s} &= \lambda^{(k)}Q\boldsymbol{\varphi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Это задача (7) известно как Lambda modes спектральная задача. Для характеристики нейтронного поля привлекается минимальное собственное значение, так что

$$k = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}}$$

есть эффективный коэффициент размножения. Значение $k = \lambda_1^{(k)} = 1$ связывается с критическим состоянием реактора, соответствующая собственная функция $\varphi_1(\mathbf{x})$ есть стационарное решение уравнения (5). При $k > 1$ говорят о надкритическом состоянии реактора, при $k < 1$ — о подкритическом состоянии.

Спектральную задачу (7) нельзя напрямую связать с динамическими процессами в ядерном реакторе. В лучшем случае мы можем выделить только предельный случай — стационарное критическое состояние. Более приемлемая спектральная характеристика для нестационарного уравнения (5) связана со спектральной задачей

$$\begin{aligned} (D + S - R)\varphi - B\mathbf{s} &= \lambda^{(\alpha)}V\varphi, \\ \Lambda\mathbf{s} - Q\varphi &= \lambda^{(\alpha)}\mathbf{s}. \end{aligned} \tag{8}$$

Фундаментальное собственное значение

$$\alpha = \lambda_1^{(\alpha)}$$

называется [?] α -eigenvalues или period eigenvalues. С собственным значением α можно связать асимптотическое поведение решения задачи Коши (5), (6) при больших временах. В этом регулярном режиме поведение реактора описывается функцией $e^{-\alpha t}\varphi_1(\mathbf{x})$.

3 Аппроксимация по времени

Для численного решения задачи методом конечных элементов, необходимо дискретизировать производные по времени используя конечно-разностные схемы, а затем каждую стационарную задачу привести к вариационной постановке [1].

Для аппроксимации по времени рассмотрим две схемы: чисто-неявную, явно-неявную. Пусть τ шаг равномерной сетки по времени, такой что $\phi^n = \phi(\mathbf{x}, t_n)$, $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t_n)$ где $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $N\tau = T$.

Проинтегрируем уравнение (2) от t_n до t_{n+1} , тогда

$$c_m^{n+1} = c_m^n e^{-\lambda_m \tau} + \beta_m e^{-\lambda_m \tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\lambda_m(t-t_n)} \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M. \tag{9}$$

Рассмотрим для уравнения 5 чисто-неявную разностную схему. Будем использовать верхнюю сумму для вычисления подынтегральной функции (9), тогда получаем

$$\begin{aligned} V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} &= R\phi^{n+1} + B\mathbf{c}^{n+1}, \\ \mathbf{c}^{n+1} &= \hat{\Lambda}\mathbf{c}^n + \tau Q\phi^{n+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\hat{\Lambda} = (\hat{\lambda}_{mm'}), \quad \hat{\lambda}_{mm'} = \delta_{mm'} e^{-\lambda_m \tau}$$

Теперь рассмотрим для уравнения 5 явно-неявную разностную схему. Для этого случая используем нижнюю сумму для вычисления подынтегральной функции (9), тогда получаем

$$\begin{aligned} V \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\tau} + (D + S)\phi^{n+1} &= R\phi^n + B\mathbf{c}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} &= \hat{\Lambda}\mathbf{c}^n + \tau \hat{Q}\phi^n, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\hat{Q} = (\hat{q}_{mg}), \quad \hat{q}_{mg} = e^{-\lambda_m \tau} \beta_m \nu \Sigma_{fg}$$

Подставляем \mathbf{c}^{n+1} из нижнего уравнения в верхнее и перепишем так, чтобы ϕ^{n+1} были с левой стороны уравнения, а ϕ^n с правой стороны уравнения, тогда получаем СЛАУ

$$Au = b,$$

где $u = \phi^{n+1}$. Для уравнения (10) имеем

$$A = \frac{V}{\tau} + D + S - R - \tau Q, \quad b = \frac{V}{\tau} \phi^n + \hat{\Lambda} \mathbf{c}^n.$$

А для уравнения (11) имеем

$$A = \frac{V}{\tau} + D + S, \quad b = \left(\frac{V}{\tau} + R + \tau \hat{Q} \right) \phi^n + \hat{\Lambda} \mathbf{c}^n.$$

4 Модельная задача

Рассматривается тестовая задача для реактора ВВЭР-1000 без отражателя [2] в двумерном приближении (Ω — сечение активной зоны реактора). Геометрическая модель активной зоны ВВЭР-1000 состоит из набора кассет гексагональной формы и представлена на рис.1, где цифрами показаны кассеты различных типов. Размер кассеты «под ключ» равен 23.6 см. Диффузионные нейтронно-физические константы в системе измерений СИ приведены в табл.1. Используются граничные условия (3) при задании $\gamma_g = 0.5$, $g = 1, 2$. Задача рассматривается при $v_1 = 12500000$, $v_2 = 250000$, $\lambda_1 = 0.08$ и

$$\beta_1 = 0.0065.$$

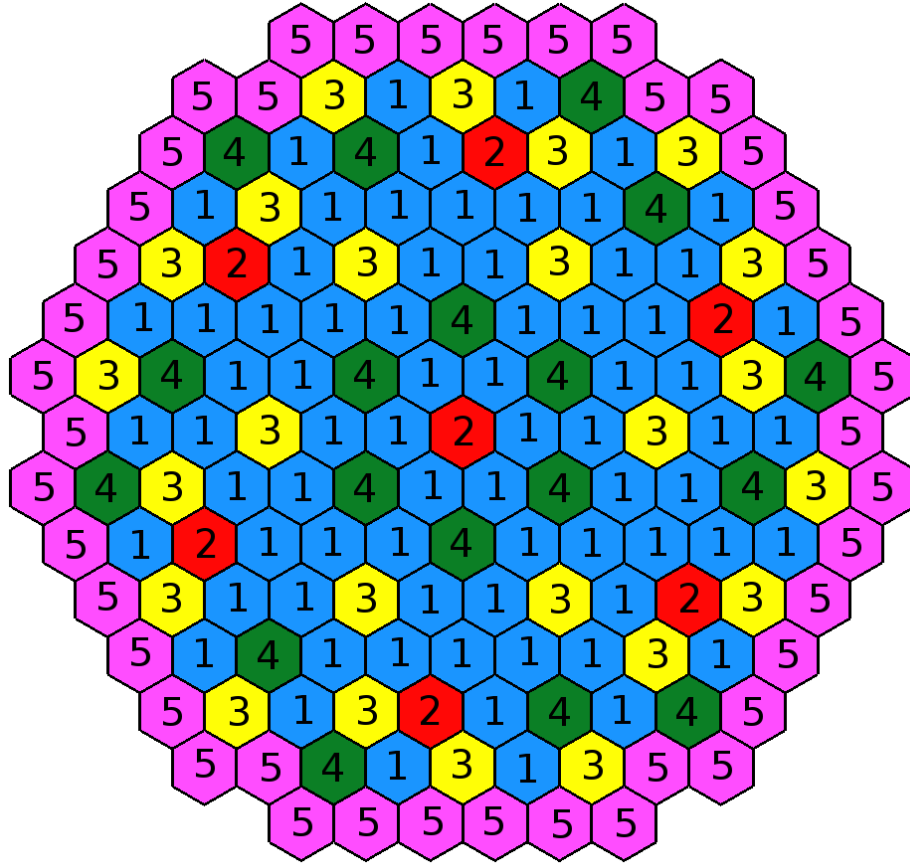


Рис. 1: Геометрическая модель активной зоны реактор ВВЭР-1000.

Таблица 1: Диффузионные константы для ВВЭР-1000

Материал	1	2	3	4	5
D_1	1.38320e-0	1.38299e-0	1.39522e-0	1.39446e-0	1.39506e-0
D_2	3.86277e-1	3.89403e-1	3.86225e-1	3.87723e-1	3.84492e-1
$\Sigma_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	2.48836e-2	2.62865e-2	2.45662e-2	2.60117e-2	2.46141e-2
Σ_2	6.73049e-2	8.10328e-2	8.44801e-1	9.89671e-2	8.93878e-2
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	1.64977e-2	1.47315e-2	1.56219e-2	1.40185e-2	1.54981e-2
$\nu \Sigma_{f1}$	4.81619e-3	4.66953e-3	6.04889e-3	5.91507e-3	6.40256e-3
$\nu \Sigma_{f2}$	8.46154e-2	8.52264e-2	1.19428e-1	1.20497e-1	1.29281e-1

Для приближенного решения задачи используется метод конечных элементов [3] на треугольных расчетных сетках. Число треугольников на одну кассету $\kappa = 6, 24, 96$ (рис.2). Используются стандартные лагранжевые конечные элементы степени $p = 1, 2, 3$ (рис 3). Программное обеспечение написано с использованием библиотеки инженерных и научных вычислений FEniCS [4]. Для численного решения спектральных задач привлекается SLEPc [5].

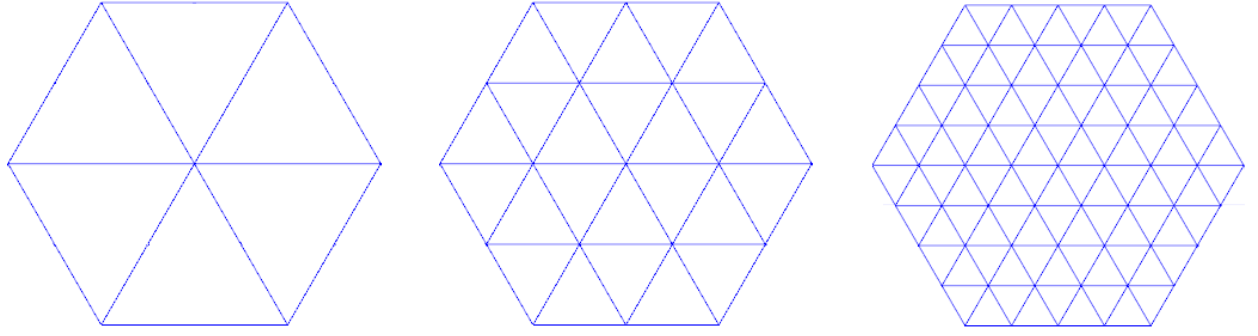


Рис. 2: Разбиение кассеты на 6, 24 и 96 конечных элементов.

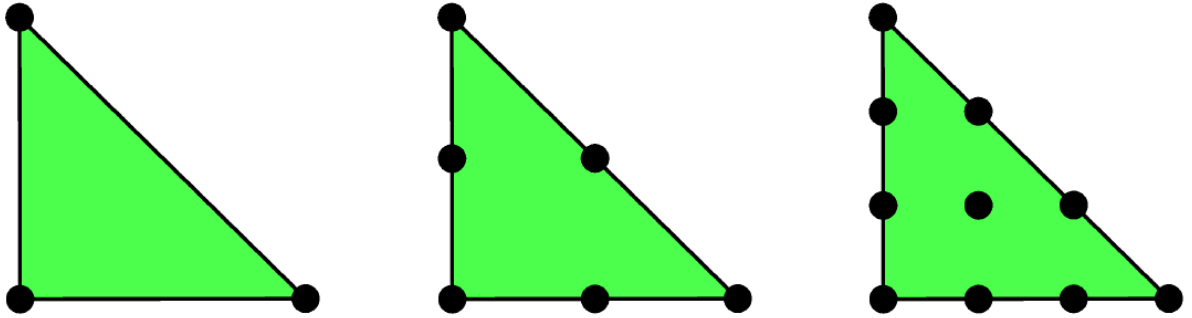


Рис. 3: Лагранжевые полиномы 1, 2, 3 степени соответственно.

4.1 Решение Alpha Modes спектральной задачи

Приведем результаты численного решения спектральной задачи (8). В рамках используемого двухгруппового приближения имеем

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1 + \Sigma_1 \varphi_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 - (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) - \lambda_1 s &= \lambda^{(\alpha)} \frac{1}{v_1} \varphi_1, \\
 -\nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2 + \Sigma_2 \varphi_2 - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 &= \lambda^{(\alpha)} \frac{1}{v_2} \varphi_2, \\
 \lambda_1 s - \beta_1 (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) &= \lambda^{(\alpha)} s.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Ищется главное собственное значение $\alpha = \lambda_1^{(\alpha)}$, $(\lambda_1^{(\alpha)} \leq \lambda_2^{(\alpha)} \leq \dots)$.

Результаты решения спектральной задачи (12) для первых собственных значений $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$, $\lambda_1^{(\alpha)} \leq \lambda_2^{(\alpha)} \leq \dots$ на разных расчетных сетках при использовании различных конечно-элементных аппроксимаций показаны в табл.2. Собственные значения $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{10}$ для спектральной задачи (12) являются комплексные с малыми мнимыми частями, собственные значения $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ — действительные.

Таблица 2: Собственные значения $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$

κ	p	α_1	α_2, α_3	α_4, α_5
6	1	-0.22557	$0.04241 \pm 3.08808\text{e-}06i$	$0.06588 \pm 4.80448\text{e-}07i$
	2	-2.10154	$0.03592 \pm 4.96474\text{e-}06i$	$0.06452 \pm 1.21320\text{e-}06i$
	3	-2.47975	$0.03561 \pm 5.83719\text{e-}06i$	$0.06445 \pm 1.41869\text{e-}06i$
24	1	-0.82680	$0.03777 \pm 5.37884\text{e-}06i$	$0.06489 \pm 1.37315\text{e-}06i$
	2	-2.46601	$0.03562 \pm 5.78277\text{e-}06i$	$0.06445 \pm 1.40897\text{e-}06i$
	3	-2.50294	$0.03559 \pm 5.80783\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41341\text{e-}06i$
96	1	-1.74998	$0.03619 \pm 5.69002\text{e-}06i$	$0.06456 \pm 1.40299\text{e-}06i$
	2	-2.50375	$0.03559 \pm 5.80693\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41324\text{e-}06i$
	3	-2.51280	$0.03558 \pm 5.80954\text{e-}06i$	$0.06444 \pm 1.41362\text{e-}06i$

Собственные функции для главного собственного значения ($n = 1$) спектральной задачи (12) показаны рис.4.

В нашем примере главное собственное значение отрицательно и поэтому главная гармоника будет нарастать, а все другие будут затухать. Тем самым выражен регулярный режим работы реактора. Сама величина $\alpha = \lambda_1^{(\alpha)}$ определяет амплитуду развития нейтронного поля и непосредственно связывается с периодом реактора в регулярном режиме.

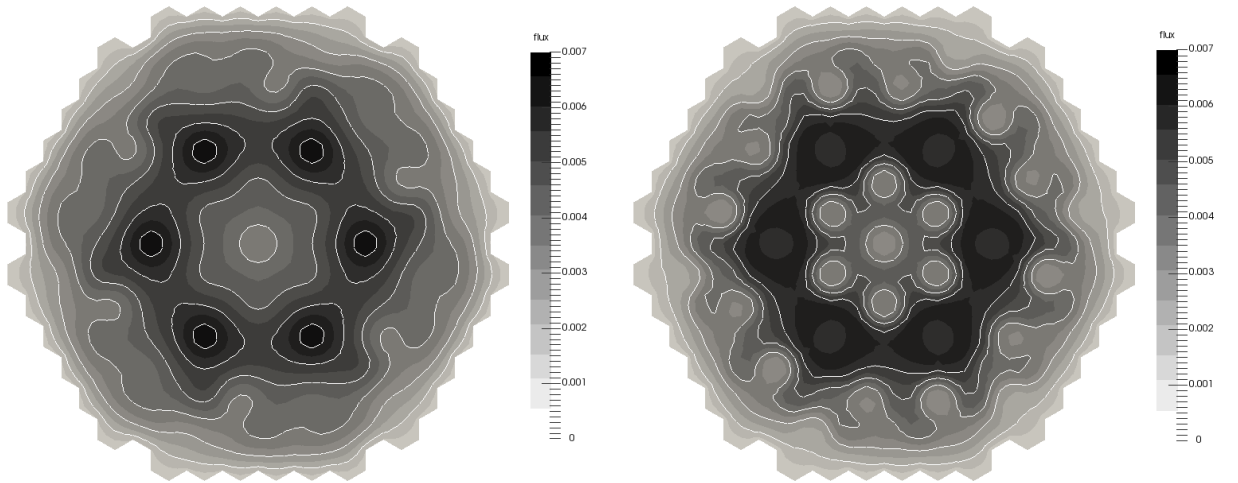


Рис. 4: Собственные функции $\varphi_1^{(1)}$ (слева) и $\varphi_2^{(1)}$ (справа).

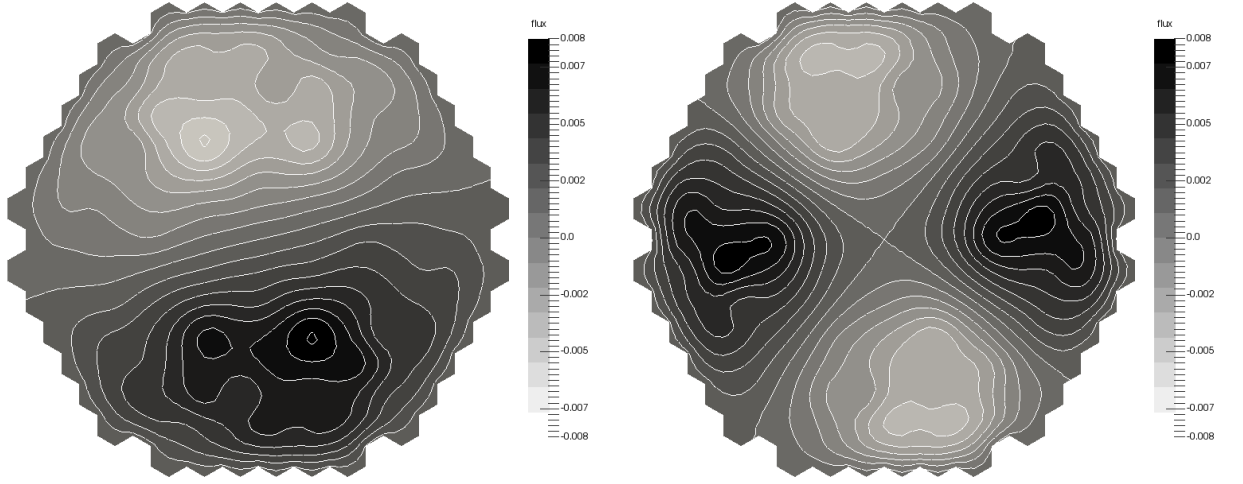


Рис. 5: Реальная часть собственных функций $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_1^{(3)}$ (слева) и $\varphi_1^{(4)}$, $\varphi_1^{(5)}$ (справа).

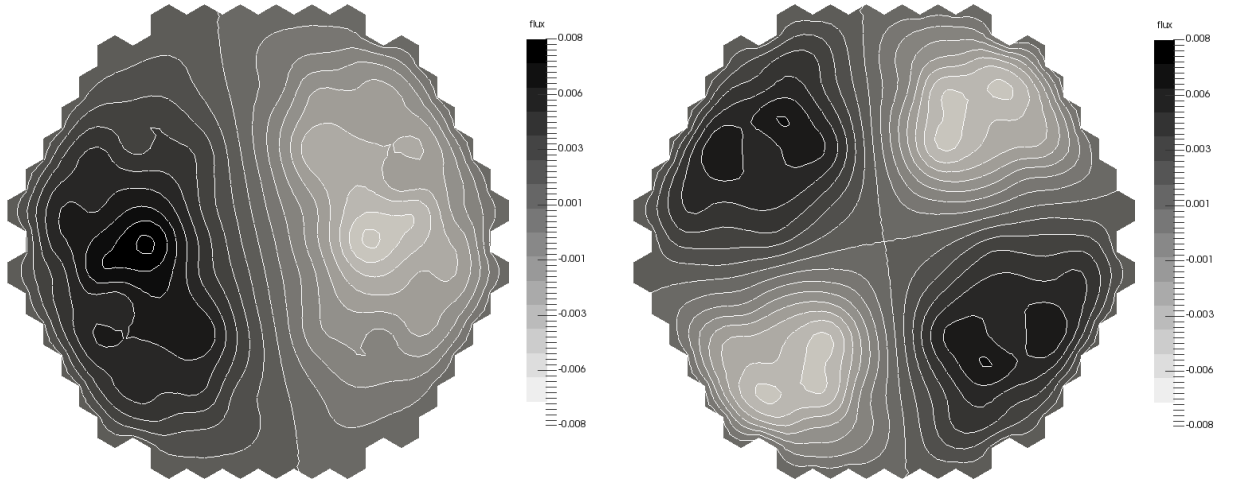


Рис. 6: Мнимая часть собственных функций $\varphi_1^{(2)}$, $-\varphi_1^{(3)}$ (слева) и $\varphi_1^{(4)}$, $-\varphi_1^{(5)}$ (справа).

4.2 Решение нестационарной задачи

Нестационарная задача будет рассматриваться при следующих параметрах $k = 24$ и $p = 2$.

В рамках используемого двухгруппового приближения и чисто-неявной схемы(10)

имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau v_1} \varphi_1^{n+1} - \nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1^{n+1} + \Sigma_1 \varphi_1^{n+1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1^{n+1} \\
& - (1 - \beta_1 + \tau \lambda_1 \beta_1) (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1^{n+1} + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2^{n+1}) = \frac{1}{\tau v_1} \varphi_1^n + \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} s^n, \\
& \frac{1}{\tau v_2} \varphi_2^{n+1} - \nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2^{n+1} + \Sigma_2 \varphi_2^{n+1} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1^{n+1} = \frac{1}{\tau v_2} \varphi_2^n,
\end{aligned} \tag{13}$$

В случае явно-неявной схемы (11) имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau v_1} \varphi_1^{n+1} - \nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1^{n+1} + \Sigma_1 \varphi_1^{n+1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1^{n+1} \\
& = \frac{1}{\tau v_1} \varphi_1^n + (1 - \beta_1 + \tau \lambda_1 \beta_1) e^{-\lambda_1 \tau} (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1^n + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2^n) + \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} s^n, \\
& \frac{1}{\tau v_2} \varphi_2^{n+1} - \nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2^{n+1} + \Sigma_2 \varphi_2^{n+1} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1^{n+1} = \frac{1}{\tau v_2} \varphi_2^n.
\end{aligned} \tag{14}$$

В качестве начального условия задачи (6) возьмем следующие значения:

$$\phi_1^0 = 1.0, \quad \phi_2^0 = 0.25.$$

Возмем $T = 1 \cdot 10^{-2}$ и будем варьировать шаг по времени $\tau = 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4}$ в случае чисто-неявной аппроксимации, $\tau = 5 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}, 4 \cdot 10^{-4}$ в случае явно-неявной аппроксимации. Реперным решением (*ref*) для обоих случаев будет решение при чисто-неявной аппроксимации при $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$.

Рассмотрим сходимость решения нестационарной задачи (13), (14) к решению спектральной задачи (12). Для этого введем оценку сходимости η , которая равна норме разности решений спектральной и нестационарной задач:

$$\begin{aligned}
\eta &= \left\| \hat{\phi}_{\alpha_1} - \hat{\phi}_t \right\|, \\
\hat{\phi}_{\alpha_1} &= \frac{\phi_{\alpha_1}}{\|\phi_{\alpha_1}\|}, \\
\hat{\phi}_t &= \frac{\phi_t}{\|\phi_t\|},
\end{aligned} \tag{15}$$

где ϕ_{α_1} – решение спектральной задачи, ϕ_t – решение нестационарной задачи. Введем еще одну оценку сходимости, которая имеет следующий вид:

$$\theta = \frac{1}{\|\alpha\|} \left\| \frac{1}{\phi_t} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} - \alpha \right\|. \tag{16}$$

Графики η в зависимости от времени t при разных шагах по времени τ показаны на рис. 7 для чисто-неявной аппроксимации и на рис. 11 для явно-неявной аппроксимации.

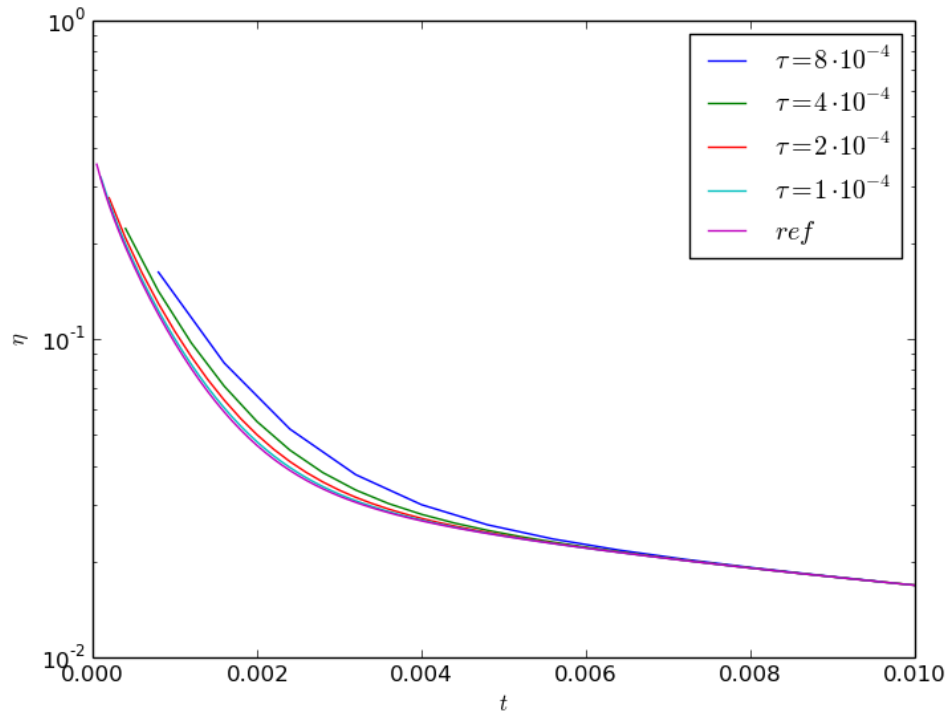


Рис. 7: η для $\phi_1(t)$ при чисто-неявной аппроксимации.

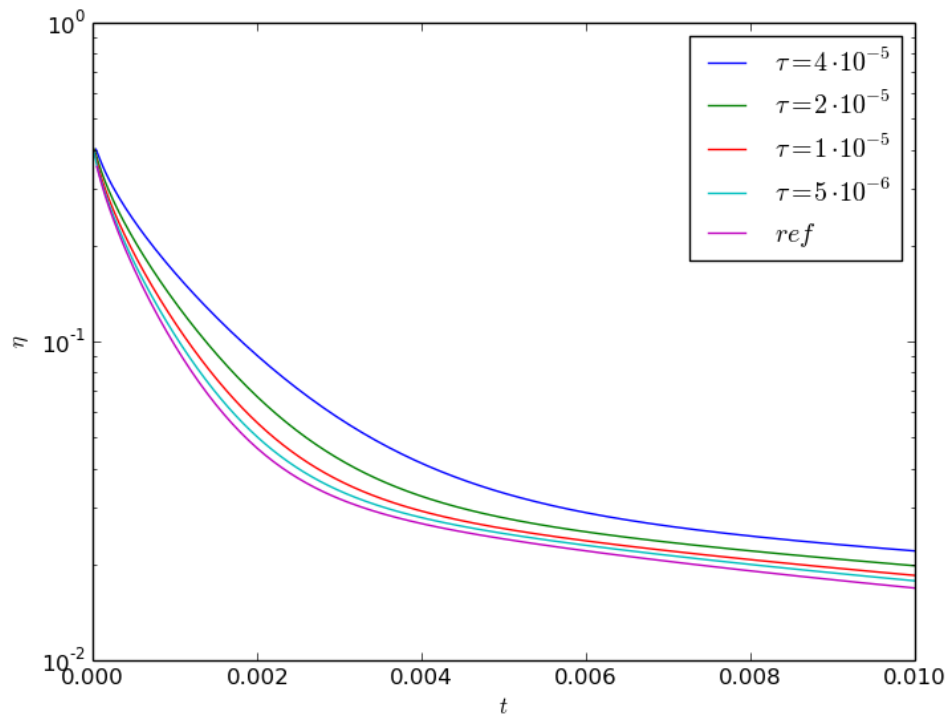


Рис. 8: η для $\phi_1(t)$ при явно-неявной аппроксимации.

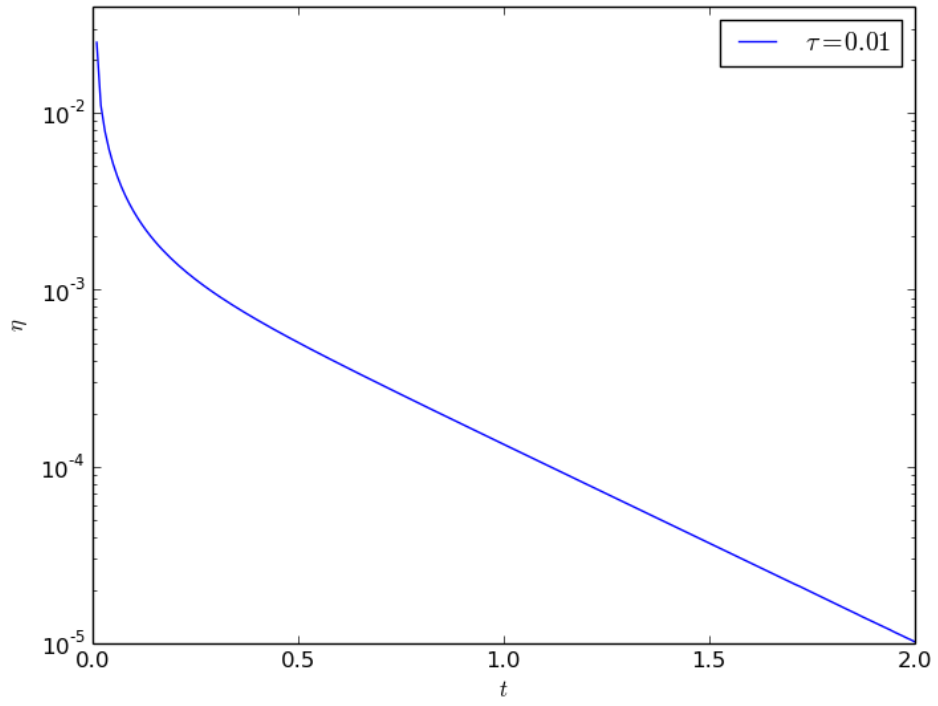


Рис. 9: η для $\phi_1(t)$ при чисто-неявной аппроксимации.

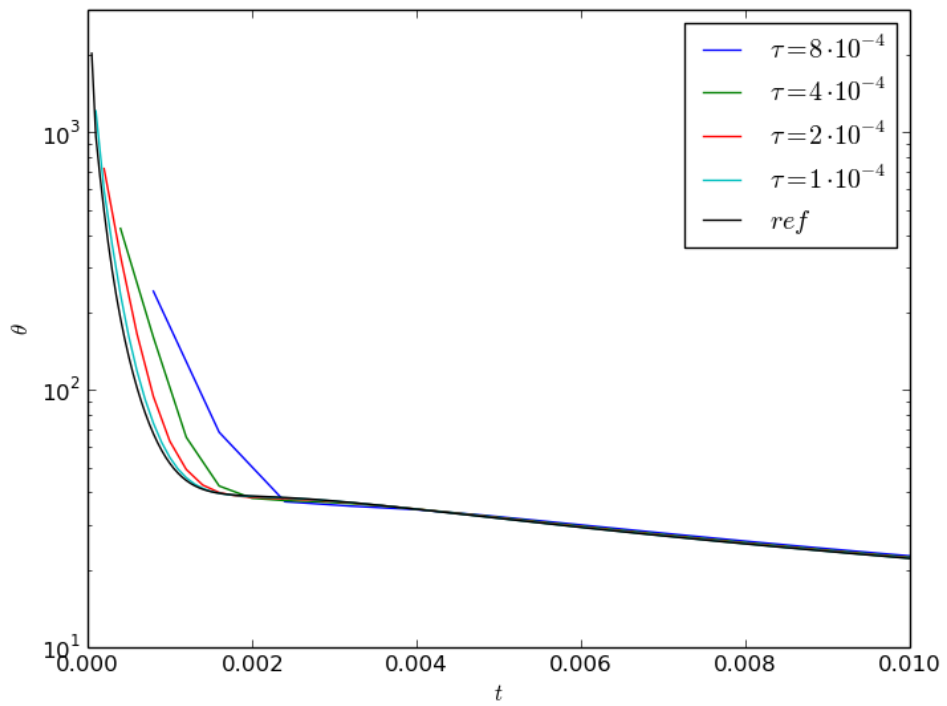


Рис. 10: θ при чисто-неявной аппроксимации.

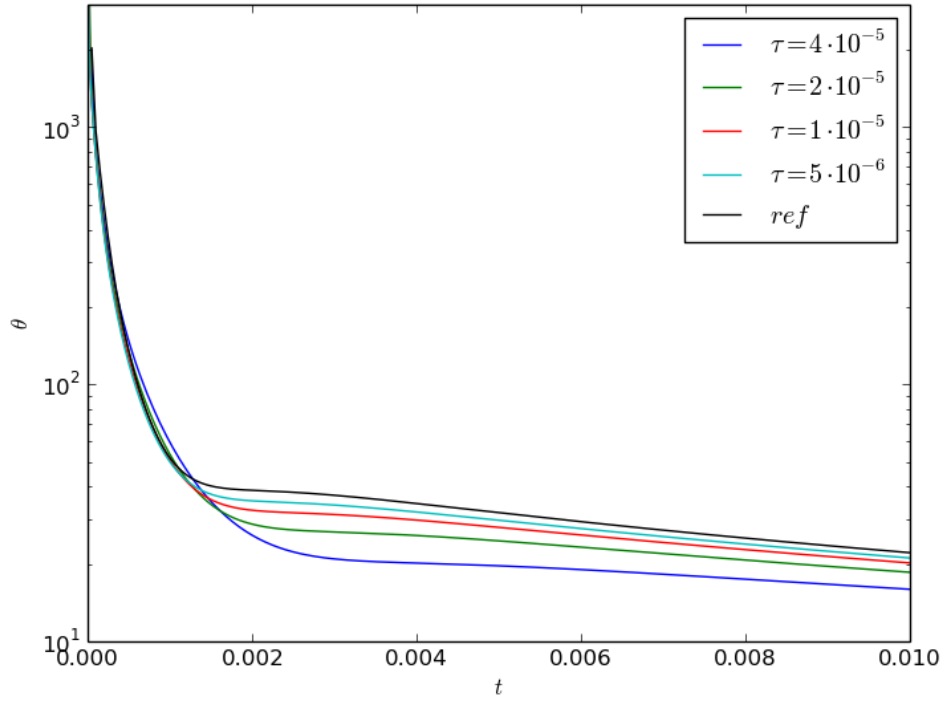


Рис. 11: θ при явно- неявной аппроксимации.

На рис. 10 показан график η в зависимости от времени для чисто- неявной аппроксимации при $\tau = 0.01$ до $T = 2.0$.

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 16-08-01215).

Список литературы

- [1] A. Hebert. Application of a dual variational formulation to finite element reactor calculations. *Annals of Nuclear Energy*, 20:823–845, 1993.
- [2] Y.A. Chao and Y.A. Shatilla. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-ii: Implementation in the anc-h code. *Nuclear Science and Engineering*, 121:210–225, 1995.
- [3] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 2008.
- [4] A. Logg, K.A. Mardal, G. Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2012.
- [5] C. Campos, J.E. Roman, E. Romero, A. Tomas. *SLEPc Users Manual*, 2013.
- [6] C. Geuzaine, J.F. Remacle. *Gmsh Reference Manual*, 2014.
- [7] А.Н. Климов. *Ядерная физика и ядерные реакторы*. Атомиздат, 1971.
- [8] W.M. Stacey. *Nuclear Reactor Physics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [9] И.Х. Ганев, Н.А. Доллежалъ. *Физика и расчет реактора*. Энергоиздат, 1981.
- [10] Г.И. Марчук, В.И. Лебедев. *Численные методы в теории переноса нейтронов*. Атомиздат, 1981.
- [11] S. Gonzalez-Pintor, G. Verdu, and D. Ginestar. Approximation of the neutron diffusion equation on hexagonal geometries. New York, 2009.