

State change modal method для численного моделирования of dynamic processes in a nuclear reactor

Alexander V. Avvakumov^a, Valery F. Strizhov^b, Petr N. Vabishchevich^{b,c,*},
Alexander O. Vasilev^c

^a*National Research Center Kurchatov Institute, 1, Sq. Academician Kurchatov, Moscow, Russia*

^b*Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, 52, B. Tul'skaya, Moscow, Russia*

^c*North-Eastern Federal University, 58, Belinskogo, Yakutsk, Russia*

Abstract

Моделирование динамических процессов в ядерных реакторах проводится, чаще всего, на основе описания нейтронного потока в многогрупповом диффузионном приближении. Базовая модель включает многомерную систему связанных уравнений параболического типа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Динамические процессы моделируются последовательной сменой состояний реактора, которые характеризуются заданными постоянными коэффициентами уравнений. В modal method приближенное решение представляется в виде разложения по первым собственным функциям некоторой спектральной задачи. Численно-аналитический метод основан на использовании of dominant time-eigenvalues of a nuclear reactor для многогрупповой диффузионной модели с учетом запаздывающих нейтронов. Проведено численное моделирование нестационарного процесса в рамках двухгруппового приближения для тестовой модели реактора на тепловых нейтронах VVER-1000, которая характеризуется тем, что часть собственных значений является комплексными.

Keywords: Neutron diffusion equations, multi-group approximation, space-time kinetic, spectral problem, modal method.

1. Introduction

Среди основных физических процессов, происходящих в ядерном реакторе (Duderstadt and Hamilton, 1976), основное внимание уделяется переносу нейтронов. Для их описания привлекается достаточно сложное интегродифференциальное уравнение, в котором распределение потока нейтронов

*Corresponding author

Email addresses: Avvakumov2009@rambler.ru (Alexander V. Avvakumov), vfs@ibrae.ac.ru (Valery F. Strizhov), vabishchevich@gmail.com (Petr N. Vabishchevich), haska87@gmail.com (Alexander O. Vasilev)

зависит от времени, энергии, пространственных и угловых переменных (Hetrick, 1971; Stacey, 2007). Практические расчеты ядерных реакторов, как правило, проводятся с использованием более простых систем уравнений многогруппового диффузионного приближения (Marchuk and Lebedev, 1986; Lewis and Miller, 1993; Sutton and Aviles, 1996; Cho, 2005). В настоящее время diffusion models are derived and applied using sophisticated homogenization methodologies (see Sanchez (2009); Dugan et al. (2016)) which define parameters of the multigroup diffusion equations that enable one to take into account transport effects.

Расчетная модель представляет собой систему связанных параболических уравнений второго порядка, которая при учете запаздывающих нейтронов дополняется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Инженерные нейтронно-физические коды, которые предназначены для моделирования переноса нейтронов в диффузионном групповом приближении, базируются, чаще всего, на конечно-разностных аппроксимациях по пространству. Для повышения точности расчета широкое применение нашли нодальные методы (см., например, Smith (1979); Lawrence (1986)), которые позволяют проводить расчеты на достаточно грубой сетке (несколько точек на тепловыделяющую сборку в плане и несколько десятков слоев по высоте). В основе нодальных методов лежит представление нейтронного потока в пределах расчетного элемента в виде полинома малой степени или набора функций по одной из координат (или на плоскости). Нодальные методы в ряде случаев можно связать (Grossman and Hennart, 2007) со специальными вариантами конечно-элементной аппроксимации. Следует отметить, что более уместно использование стандартных процедур повышения точности конечно-элементного приближения при приближенном решении краевых задач, связанное со сгущением расчетной сетки и использованием конечных элементов более высокой степени. Такая технология используется в Vidal-Ferrandiz et al. (2014); Avvakumov et al. (2017) при рассмотрении спектральных задач для the multigroup diffusion equations.

При моделировании динамики нейтронно-физических процессов используются стандартные методы приближенного решения нестационарных задач (Sutton and Aviles, 1996; Cho, 2005; Stacey, 2007). Наибольшее внимание уделяется двухслойным схемам с весами (θ -метод, схема с весами) (Ascher, 2008; LeVeque, 2007; Hundsdorfer and Verwer, 2003), используются схемы Рунге-Кутты, схемы Розенброка (Butcher, 2008; Hairer and Wanner, 2010). Для характеристики динамической природы реактора используется спектральный параметр α . Он определяется как главное собственное значение спектральной задачи (time-eigenvalue, α -eigenvalue problem), которая связывается с нестационарными уравнениями диффузии нейтронов (Bell and Glasstone, 1970; Modak and Gupta, 2007; Verdu et al., 2010). По аналогии с обычными задачами теплопроводности (смотри, например, Luikov (1968); Samarskii and Vabishchevich (1996)) мы можем выделить регулярный режим реактора. При больших временах поведение нейтронного поля носит асимптотический характер, когда можно говорить о пространственно-временной факторизации решения, амплитуда которого есть $\exp(-\alpha t)$, форм-функция

— собственная функция спектральной задачи. Для моделирования регулярного режима реактора необходимо ориентироваться на использование чисто неявных схем, в то время, как схема Кранка-Николсон является непригодной (Avvakumov et al., 2016).

Нейтронно-физические расчеты реальных трехмерных конструкций требуют использования больших расчетных сеток, динамические процессы моделируются на больших временах. В силу сложности математической модели, применения больших расчетных сеток мы должны использовать современные многопроцессорные вычислительные системы. Параллельные вычислительные алгоритмы базируются на переходе к последовательности решения более простых задач для отдельных процессов. Успех достигается применением decoupling технологии (расщепления по физическим процессам (Vabishchevich, 2014)), декомпозиции расчетной области на подобласти (Toselli and Widlund, 2005), итерационных методов решения систем алгебраических уравнений (Saad, 2003). Применительно к спектральным задачам for the neutron diffusion problem domain decomposition methods используются, например, в Guérin et al. (2010). Особенности решения нестационарных задач на параллельных компьютерах учитываются построением специальных итерационных методов типа the parareal in time algorithm (Maday and Turinici, 2005). В работе Baudron et al. (2014) такой подход реализован при численном решении нестационарных multigroup neutron kinetics equations involving a time delayed contributions.

В теории и практике нейтронно-физических расчетов большое внимание уделяется быстрым методам построения приближенных решений. В этой связи отметим класс методов для моделирования нестационарного переноса нейтронов в диффузионном групповом приближении, который связан с мультипликативным представлением решения — space-time factorization methods) и квазистатический метод (quasistatic method) (Dodds Jr, 1976; Chou et al., 1990; Goluoglu and Dodds, 2001; Dulla et al., 2008; Dahmani et al., 2001). В этом случае приближенное решение ищется в виде произведения двух функций: одна из которых зависит от времени и связывается с амплитудой, вторая (shape function) — описывает пространственное распределение. The shape function часто связывается с fundamental собственной функцией тех или иных задач на собственные значения для neutron diffusion equations.

При использовании quasistatic method задача максимально упрощается, но рассчитывать на хорошую точность приближенного решения не приходится, в частности, при расчете динамических режимов со сложной перестройкой поля плотности нейтронного потока. В силу этого давно и успешно развивается более общий подход — the modal method (Stacey, 1967, 1969; Sutton and Aviles, 1996). В этом случае решение ищется в виде суммы нескольких доминантных собственных значений с коэффициентами, которые зависят от времени.

To characterize the reactor dynamic processes привлекаются some spectral problems (Bell and Glasstone, 1970; Hetrick, 1971; Stewart, 1976; Stacey, 2007). The processes occurring in a nuclear reactor are essentially non-stationary. The

stationary state of neutron flux is characterised by local balancing of neutron absorption and and generation and is usually described by solution of a spectral problem (Lambda modes problem, λ -eigenvalue problem). The fundamental eigenvalue (maximal eigenvalue) is called k -effective of the reactor core. The nodal method на основе использования решения λ -eigenvalue problem обсуждаются, например, в работах Verdú et al. (1998); Miró et al. (2002); González-Pintor et al. (2009). В частности, отдельного внимания заслуживают вопросы решения связанной системы уравнений для нестационарных коэффициентов разложения.

Нестационарные процессы естественно описывать на основе разложения приближенного решения по собственным функциям time-eigenvalue, α -eigenvalue problem (Ginestar et al., 2002; Verdu et al., 2010; Verdú and Ginestar, 2014). В более простой модели без учета запаздывающих нейтронов modal methods используется в работе Modak and Gupta (2007). Принципиальный момент связан с тем, что при таком подходе мы имеем несвязанную систему уравнений для коэффициентов. Необходимо также отметить, что как при использовании λ -eigenvalue problem, так и при использовании α -eigenvalue problem мы имеем, вообще говоря, комплексные собственные значения. Для задания начального состояния это приводит к необходимости решения соответствующих adjoint spectral problems.

В настоящей работе формулируется общая стратегия приближенного решения нестационарных задач нейтроники ядерных реакторов, которая ориентирована на быстрые расчеты реального времени — State Change Modal (SCM) метод. Динамическое поведение ядерного реактора рассматривается как последовательность его состояний, каждое из которых характеризуется своим набором постоянных коэффициентов системы the multigroup diffusion equations. Считается, что переход из одного состояния в другое происходит мгновенно. Нейтронное поле отдельного состояния рассчитывается на основе использования modal method — представление решения задачи в виде разложения по доминантным собственным функциям α -eigenvalue problem с учетом запаздывающих нейтронов (the full Alpha method). Real-time вычисления обеспечиваются тем, что необходимый набор собственных значений и собственных функций детерминистического состояния реактора рассчитываются заранее.

The paper is organised as follows. Динамическая модель ядерного реактора на основе системы the multigroup diffusion equations is given in Section 2. Общая стратегия численного моделирования нестационарных процессов на основе SCM метода описываются in Section 3. Ключевые вычислительные аспекты SCM технологии are discussed in Section 4. Two-dimensional test problems for VVER-1000 reactor is discussed in Section 5. Проведено моделирование динамического процесса, который соответствует двум состояниям (надкритическому и подкритическому) реактора: переход с регулярного режима на критическое состояние на подкритическое состояние реактора. The results of the work are summarised in Section 6.

2. Problem statement

The neutron flux моделируется in multigroup diffusion approximation. The neutron dynamics is considered in the bounded convex two-dimensional or three-dimensional area Ω ($\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\} \in \Omega$, $d = 2, 3$) with boundary $\partial\Omega$. The neutron transport is described by the system of equations:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg} \phi_g - \sum_{g' \neq g=1}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} \\ & = (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + \tilde{\chi}_g \sum_{m=1}^M \lambda_m c_m, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (1)$$

Here $\phi_g(\mathbf{x}, t)$ — neutron flux of g group at point \mathbf{x} and time t , G — number of energy groups, v_g — effective velocity of neutrons in the group g , $D_g(\mathbf{x})$ — diffusion coefficient, $\Sigma_{rg}(\mathbf{x}, t)$ — removal cross-section, $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{x}, t)$ — scattering cross-section from group g' to group g , β — effective fraction of delayed neutrons, $\chi_g, \tilde{\chi}_g$ — spectra of prompt and delayed neutrons, $\nu \Sigma_{fg}(\mathbf{x}, t)$ — generation cross-section of group g , c_m — density of sources of delayed neutrons of m -type, λ_m — decay constant of sources of delayed neutrons, M — number of types of delayed neutrons. The density of sources of delayed neutrons is described by the equations:

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \lambda_m c_m = \beta_m \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{fg} \phi_g, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

where β_m is a fraction of delayed neutrons of m -type, and

$$\beta = \sum_{m=1}^M \beta_m.$$

System of equations (1), (2) is supplemented with corresponding initial and boundary conditions.

The albedo-type conditions are set at the boundary $\partial\Omega$ of the area Ω :

$$D_g \frac{\partial \phi_g}{\partial n} + \gamma_g \phi_g = 0, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (3)$$

where n — outer normal to the boundary $\partial\Omega$. Начальное состояние определяется следующим образом:

$$\phi_g(\mathbf{x}, 0) = \phi_g^0(\mathbf{x}), \quad c_m(\mathbf{x}, 0) = c_m^0(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Let's write the boundary problem (1)–(4) in operator form. The vectors

$\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ and matrices are defined as follows:

$$\begin{aligned} V &= (v_{gg'}), & v_{gg'} &= \delta_{gg'} v_g^{-1}, \\ D &= (d_{gg'}), & d_{gg'} &= -\delta_{gg'} \nabla \cdot D_g \nabla, \\ S &= (s_{gg'}), & s_{gg'} &= \delta_{gg'} \Sigma_g - \Sigma_{s,g' \rightarrow g}, \\ R &= (r_{gg'}), & r_{gg'} &= (1 - \beta) \chi_g \nu \Sigma_{fg'}, \\ B &= (b_{gm}), & b_{gm} &= \tilde{\chi}_g \lambda_m, \\ \Lambda &= (\lambda_{mm'}), & \lambda_{mm'} &= \lambda_m \delta_{mm'}, \\ Q &= (q_{mg}), & q_{mg} &= \beta_m \nu \Sigma_{fg}, \\ g, g' &= 1, 2, \dots, G, & m, m' &= 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

where

$$\delta_{gg'} = \begin{cases} 1, & g = g', \\ 0, & g \neq g', \end{cases}$$

is the Kronecker symbol. We shall use the set of vectors ϕ , whose components satisfy the boundary conditions (3). Using the set definitions, the system of equations (1), (2) can be written in the form of first-order equation of evolution:

$$\begin{aligned} V(t) \frac{d\phi}{dt} + (D(t) + S(t))\phi &= R(t)\phi + B(t)\mathbf{c}, \\ \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \Lambda(t)\mathbf{c} &= Q(t)\phi. \end{aligned} \tag{5}$$

Для уравнений (5) рассматривается задача Коши, когда

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}^0, \tag{6}$$

где с учетом (4) $\phi^0 = \{\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_G^0\}$, $\mathbf{c}^0 = \{c_1^0, c_2^0, \dots, c_M^0\}$.

Для приближенного решения задачи Коши (5), (6) используется два основных подхода. Первый из них связан с использованием стандартных двухслойных или трехслойных схем, которые широко используются при численном решении параболических задач (Samarskii, 2001). Операторные матрицы V, D диагональные, а S – нижняя треугольная матрица. Существенное связывание уравнений обусловлено только оператором генерации нейтронов R . Актуальной является проблема выбора расчетных схем среди устойчивых разностных схем, которые являются оптимальными по тем или иным дополнительным критериям. В теории разностных схем выделен класс асимптотически устойчивых разностных схем, которые (Samarskii and Vabishchevich, 1996) обеспечивают правильное поведение приближенного решения при больших временах. В теории численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Butcher, 2008; Gear, 1971) введено понятие L -устойчивых методов, в которых с несколько других позиций также отслеживается асимптотическое поведение приближенного решения при больших временах. Чисто неявная схема имеет лучшие асимптотические свойства, чем симметричная схема (схема Кранка-Николсон)

(see Vabishchevich (2012)), что важно при исследовании регулярного режима ядерного реактора (Avvakumov et al., 2016).

Вторым классом являются численно-аналитические методы решения задачи (5), (6), наиболее ярким примером которых выступают отмеченные выше modal methods (Stacey, 1967, 1969; Sutton and Aviles, 1996). Они учитывают линейную природу рассматриваемой задачи, независимость коэффициентов системы уравнений от времени. Это позволяет построить приближенное решение методом разделения переменных при численном нахождении зависимости решения от пространственных переменных.

3. State change modal method

Ядерный реактор всегда находится в динамическом состоянии. Предельный случай выхода на стационарное состояние (критическое состояние реактора) наблюдается только при определенных наборах коэффициентов системы уравнений (5). Мы будем использовать следующее упрощенное описание динамических процессов в ядерном реакторе.

На отдельных отрезках времени нестационарное нейтронное поле определяется состоянием ядерного реактора. Состояние реактора характеризуется постоянными коэффициентами системы уравнений многогруппового диффузионного приближения (1), (2).

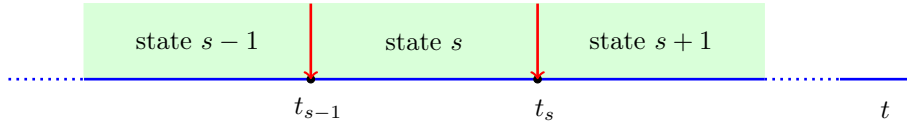


Рис. 1: State change схема.

Динамические процессы в ядерном реакторе можно рассматривать как смену состояний (see Fig.1). В некоторый момент времени $t = t_s$, $s = 1, 2, \dots$ происходит мгновенная смена состояния. Состояние системы s есть задание

$$V(t) = V(t_s), \quad D(t) = D(t_s), \quad S(t) = S(t_s), \quad R(t) = R(t_s), \quad B(t) = B(t_s),$$

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_s), \quad Q(t) = Q(t_s), \quad t_{s-1} < t \leq t_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

в уравнениях (5).

Моделирование динамического поведения реактора состоит в решении последовательности подзадач для отдельных состояний реактора. Начальное условие для состояния s (при $t = t_{s-1}$) есть конечное состояние реактора для состояния $s - 1$.

Приближенное описание нестационарного процесса на отдельной стадии проводится на основе modal approximation. Приближенное решение ищется

в виде разложения по собственным функциям time-eigenvalue, α -eigenvalue problem. Используется конечно-элементная аппроксимация по пространству.

На отдельной стадии s рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} V(t_s) \frac{d\phi}{dt} + (D(t_s) + S(t_s))\phi &= R(t_s)\phi + B(t_s)\mathbf{c}, \\ \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \Lambda(t_s)\mathbf{c} &= Q(t_s)\phi, \quad t_{s-1} < t \leq t_s, \end{aligned} \quad (7)$$

которая дополняется соответствующими начальными условиями

$$\phi(t_{s-1}) = \phi^s, \quad \mathbf{c}(t_{s-1}) = \mathbf{c}^s. \quad (8)$$

Пусть $\mathbf{u} = \{\phi, \mathbf{c}\}$. Запишем систему уравнений (7) в виде

$$\mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{u} = 0, \quad t_{s-1} < t \leq t_s, \quad (9)$$

с постоянными

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D(t_s) + S(t_s) - R(t_s) & -B(t_s) \\ -Q(t_s) & \Lambda(t_s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} V(t_s) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

причем I — единичная матрица. Из (8) имеем

$$\mathbf{u}(t_{s-1}) = \mathbf{u}^s. \quad (10)$$

После аппроксимации по пространству методом конечных объемов или методом конечных элементов от (9), (10) перейдем к задаче Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{B}_h \frac{d\mathbf{u}_h}{dt} + \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = 0, \quad t_{s-1} < t \leq t_s, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_h(t_{s-1}) = \mathbf{u}_h^s, \quad (12)$$

где h — параметр дискретизации. Основная особенность рассматриваемых нами задач состоит в том, что матрицы \mathbf{A}_h и \mathbf{B}_h действительные и несимметричные.

The modal approximation соответствует представлению приближенного решения ($\mathbf{u}_h \approx \mathbf{u}_N$) задачи (11), (12) в виде

$$\mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \mathbf{w}_n(\mathbf{x}), \quad (13)$$

где N — число dominant собственных значений спектральной задачи, $\mathbf{w}_n(\mathbf{x})$ — соответствующие собственные функции.

Собственные функции и собственные значения мы определяем как решение α -eigenvalue problem:

$$\mathbf{A}_h \mathbf{v} = \lambda \mathbf{B}_h \mathbf{v}. \quad (14)$$

В простейшем случае все собственные значения спектральной задачи (14) действительные:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N_h}.$$

В этих условиях (Laub, 2005; Ortega, 1987) общее решение уравнения (11) есть

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_h} b_n \exp(-\lambda_n(t - t_{s-1})) \mathbf{v}_n(\mathbf{x}), \quad (15)$$

т.е. в (13)

$$a_n(t) = b_n \exp(-\lambda_n(t - t_{s-1})), \quad \mathbf{w}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_n(\mathbf{x}), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В общем случае собственные функции и собственные значения в спектральной задаче (14) комплексные. С учетом действительности коэффициентов матриц \mathbf{A}_h , \mathbf{B}_h комплексные собственные значения появляются в виде пар комплексно-сопряженных чисел. Например, имеем пару $n, n+1$:

$$\lambda_{n+1} = \text{Re}\lambda_n - i\text{Im}\lambda_n.$$

Тогда в представлении (13) получим

$$\begin{aligned} a_n(t) \mathbf{w}_n(\mathbf{x}) &= b_n \text{Re}(\exp(-\lambda_n(t - t_{s-1})) \mathbf{v}_n(\mathbf{x})), \\ a_{n+1}(t) \mathbf{w}_{n+1}(\mathbf{x}) &= b_{n+1} \text{Im}(\exp(-\lambda_n(t - t_{s-1})) \mathbf{v}_n(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Отдельного обсуждения требует вопрос нахождения коэффициентов $a_n(t_{s-1}) = b_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Для этого привлекается начальное условие (12). Например, в случае действительных собственных значений имеем

$$\mathbf{u}_h^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_h} b_n \mathbf{v}_n(\mathbf{x}).$$

Это представление не очень пригодно для практического использования при modal approximation, когда мы работаем только с dominant собственными функциями.

Начальное условие включает две компоненты $\mathbf{u}_h^s(\mathbf{x}) = (\phi_h^s(\mathbf{x}), \mathbf{c}_h^s(\mathbf{x}))$. Динамическое поведение этих составляющих в силу различных time-scale процессов. Запаздывающие нейтроны определяют медленные процессы, когда $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ слабо меняется при изменении состояний реактора. В противоположность этому нейтроны $\phi(\mathbf{x}, t)$ определяют быстрые процессы при изменении состояния ядерного реактора. В силу такого разделения динамических процессов мы при modal approximation моделируем медленную фазу динамики реактора ориентируемся на приближенном задании начального состояния для запаздывающих нейтронов — аппроксимируется только функция $\mathbf{c}_h^s(\mathbf{x})$. Аппроксимация $\phi_h^s(\mathbf{x})$ при этом нас не интересует — мы не моделируем быструю фазу смены состояния.

Стандартный подход для разложения функции $\mathbf{u}_h^s(\mathbf{x})$ по системе неортogonalных функций $\mathbf{v}_n(\mathbf{x})$, $n = 1, 2, \dots, N_h$ состоит в использовании biorthogonal

system of functions (Henry, 1975; Brezinski, 1991). Рассмотрим сопряженную к (14) спектральную задачу

$$\mathbf{A}_h^T \tilde{\mathbf{v}} = \lambda \mathbf{B}_h^T \tilde{\mathbf{v}}. \quad (16)$$

Собственные функции задач (14) и (16) ортогональны (Laub, 2005; Ortega, 1987) в смысле выполнения равенства

$$(\mathbf{B}_h \mathbf{v}_n, \tilde{\mathbf{v}}_m) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots, N_h,$$

где через (\cdot, \cdot) обозначено соответствующее скалярное произведение. В силу этого получим

$$b_n = \frac{1}{(\mathbf{B}_h \mathbf{v}_n, \tilde{\mathbf{v}}_n)} (\mathbf{u}_h^s, \mathbf{B}_h \tilde{\mathbf{v}}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N_h. \quad (17)$$

При известных решениях спектральных задач (14), (16) решение представляется в виде (15), (17).

При приближенном решении задачи (11), (12) используются (see (13)) только первые N коэффициентов b_n из (17):

$$\mathbf{c}_h^s(\mathbf{x}) \approx \sum_{n=1}^N b_n \mathbf{c}_n(\mathbf{x}), \quad (18)$$

где $\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = (\phi_n(\mathbf{x}), \mathbf{c}_n(\mathbf{x}))$. При этом спектральные задачи (14), (16) решаются для N dominant собственных значений.

Решение сопряженной спектральной задачи привлекается только для расчета коэффициентов начального условия. Такое усложнение задачи не всегда оправдано. Поэтому имеет смысл в использовании более простых алгоритмов нахождения коэффициентов b_n , $n = 1, 2, \dots, N$ в (18). Можно определять их, например, на основе linear least squares (Björck, 1996; Verdú and Ginestar, 2014). В этом случае имеем

$$(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \min, \quad \mathbf{r}_N(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_h^s(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^N b_n \mathbf{c}_n(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Для нахождения коэффициентов решается система линейных уравнений.

State change modal method базируется на следующей организации вычислений.

Off-line calculation. Расчет коэффициентов математической модели многогруппового диффузионного приближения для выделенных состояний ядерного реактора, который выполняется заранее. Паспорт состояния включает также рассчитанные dominant собственные значения и собственные функции α -eigenvalue problem (14). Эти данные могут дополняться dominant собственными значениями и собственными функциями сопряженной eigenvalue problem (16).

On-line calculation. Real-time моделирование проводится на основе modal решения задачи (11), (12). Для этого по начальному условию рассчитываются коэффициенты в представлении (18) с использованием (17) или (19). Решение на другие моменты времени определяется согласно (15).

4. Вычислительные аспекты state change modal method

При практической реализации рассматриваемого подхода для приближенного решения динамических задач ядерного реактора ключевыми аспектами является аппроксимация по пространству и численное решение спектральных задач. Мы не будем обсуждать имеющиеся возможности в этом направлении, а дадим лишь краткое описание того, как эти вопросы решаются нами для ниже выполненных расчетов.

Для аппроксимации по пространству будем использовать метод конечных элементов (Brenner and Scott, 2008; Quarteroni and Valli, 2008). Пусть $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из скалярных функций v таких, что v^2 и $|\nabla v|^2$ имеют конечный интеграл в Ω . Для векторных функций $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ определим аналогично $V^d = [H^1(\Omega)]^d$. Для тестовых функций используем обозначения $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_G\}$, $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$. В вариационной форме задача (5) имеет вид: найти $\phi \in V^D$, $\mathbf{c} \in V^M$, для которых имеет место

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(V \frac{d\phi}{dt} + S\phi \right) \chi d\mathbf{x} + \sum_{g=1}^G \int_{\Omega} D_g \nabla \phi_g \nabla \chi_g d\mathbf{x} + \sum_{g=1}^G \int_{\partial\Omega} \gamma_g \phi_g \chi_g d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} R\phi \chi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} B\mathbf{c} \mathbf{s} d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{c}}{dt} \mathbf{s} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Lambda \mathbf{c} \mathbf{s} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} Q\phi \chi d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (20)$$

при всех $\chi \in V^D$, $\mathbf{s} \in V^M$.

Далее мы должны перейти от непрерывной вариационной задачи (20) к дискретной задаче. Введем конечномерные пространства конечных элементов $V_h^D \subset V^D$, $V_h^M \subset V^M$. Дискретная вариационная задача формулируется следующим образом: найти $\phi^h \in V_h^D$, $\mathbf{c}^h \in V_h^M$, такие, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(V \frac{d\phi^h}{dt} + S\phi^h \right) \chi^h d\mathbf{x} + \sum_{g=1}^G \int_{\Omega} D_g \nabla \phi_g^h \nabla \chi_g^h d\mathbf{x} + \sum_{g=1}^G \int_{\partial\Omega} \gamma_g \phi_g^h \chi_g^h d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} R\phi^h \chi^h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} B\mathbf{c}^h \mathbf{s}^h d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{c}^h}{dt} \mathbf{s}^h d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Lambda \mathbf{c}^h \mathbf{s}^h d\mathbf{x} = \int_{\Omega} Q\phi^h \chi^h d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (21)$$

для всех $\chi^h \in V_h^D$, $\mathbf{s}^h \in V_h^M$. Скалярные функции (компоненты векторных функций) при рассмотрении двумерных задач аппроксимируются на

треугольной сетке с использованием лагранжевых конечных элементов с полиномами степени 1, 2 и 3.

Вычисление первых собственных значений и соответствующих собственных функций является стандартной задачей вычислительной математики (Saad, 2011). Необходимо отметить некоторые принципиальные особенности спектральных задач (14) и (16). Первая особенность связана с тем, что рассматриваемые задачи относятся к задачам большой размерности: двумерность или трехмерность по пространству, большое число искомых величин (система уравнений). Это означает, что в прикладных задачах мы должны ориентироваться на использование компьютеров параллельной архитектуры. Вторая особенность порождена несимметричностью матриц. Это приводит к тому, что могут появляться комплексные корни.

В своем исследовании (see Avvakumov et al. (2017, 2016)) мы ориентируемся на использование хорошо проработанных алгоритмов и соответствующего свободного программного обеспечения To solve spectral problems with non-symmetrical matrices we use the SLEPc (Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations, <http://slepc.upv.es/>). Эта библиотека традиционно широко (смотри, например, Hernandez et al. (2003, 2005)) применяется for numerical solution of the spectral problems нейтроники ядерных реакторов. We use a Krylov-Schur algorithm, a variation of Arnoldi method, proposed by (Stewart, 2001).

5. Тест: динамика реактора ВВЭР-1000 при переходе с надкритического режима на подкритический

Рассматривается тестовая задача для реактора ВВЭР-1000 без отражателя Chao and Shatilla (1995) в двумерном приближении (Ω — сечение активной зоны реактора).

5.1. Общее описание

Геометрическая модель активной зоны ВВЭР-1000 состоит из набора кассет гексагональной формы и представлена на рис.2, где цифрами показаны кассеты различных типов. Размер кассеты «под ключ» равен 23.6 см.

Для приближенного решения задачи используется регулярные треугольные сетки. Число треугольников на одну кассету k варьируется от 6 до 96 (рис.3).

Используется двухгрупповое приближения с учетом запаздывающих ней-

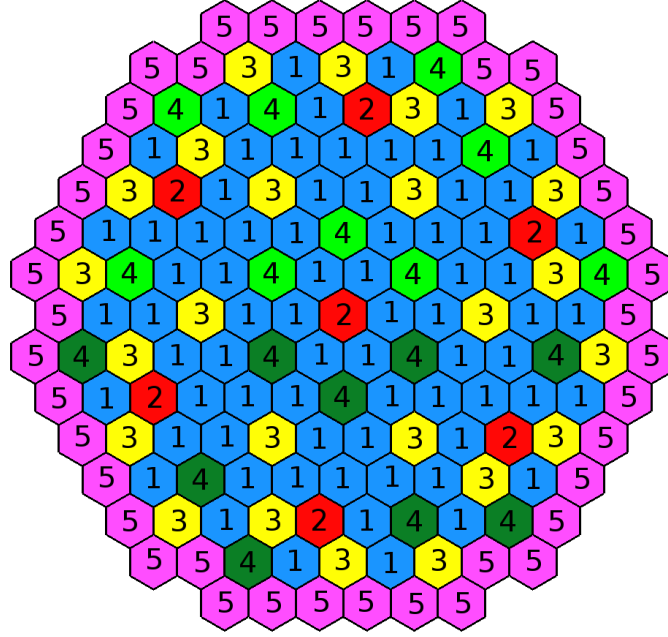


Рис. 2: Geometrical model of the VVER-1000 reactor core.

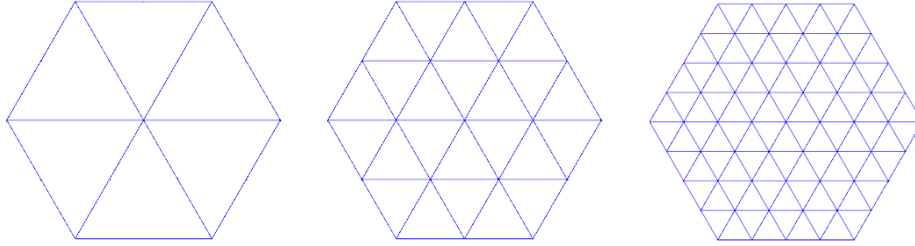


Рис. 3: Discretization of assembly into 6, 24 and 96 finite elements.

тронов, когда

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1 + \Sigma_1 \varphi_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 \\
 & \quad - (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) - \lambda_1 s = 0, \\
 & \frac{1}{v_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2 + \Sigma_2 \varphi_2 - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 = 0, \\
 & \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_1 s - \beta_1 (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Надкритическое состояние реактора характеризуется набором коэффи-

Таблица 1: Diffusion neutronics constants for VVER-1000

Материал	1	2	3	4	5
D_1	1.38320e-0	1.38299e-0	1.39522e-0	1.39446e-0	1.39506e-0
D_2	3.86277e-1	3.89403e-1	3.86225e-1	3.87723e-1	3.84492e-1
$\Sigma_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	2.48836e-2	2.62865e-2	2.45662e-2	2.60117e-2	2.46141e-2
Σ_2	6.73049e-2	8.10328e-2	8.44801e-1	9.89671e-2	8.93878e-2
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	1.64977e-2	1.47315e-2	1.56219e-2	1.40185e-2	1.54981e-2
$\nu \Sigma_{f1}$	4.81619e-3	4.66953e-3	6.04889e-3	5.91507e-3	6.40256e-3
$\nu \Sigma_{f2}$	8.46154e-2	8.52264e-2	1.19428e-1	1.20497e-1	1.29281e-1

циентов, которые приведены в Table 1. Используются граничные условия (3) при задании $\gamma_g = 0.5$, $g = 1, 2$. Характеристики запаздывающих нейтронов: используется одна группа запаздывающих нейтронов (эффективная доля $\beta_1 = 6.5 \cdot 10^{-3}$; постоянная распада $\lambda_1 = 0.08 \text{ c}^{-1}$). Скорость нейтронов $v_1 = 1.25 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ и $v_2 = 2.5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

5.2. Надкритическое состояние: α -eigenvalue problem

Приведем результаты численного решения α -eigenvalue problem (14). С учетом запаздывающих нейтронов в рамках используемого двухгруппового приближения имеем

$$\begin{aligned}
 & -\nabla \cdot D_1 \nabla \varphi_1 + \Sigma_1 \varphi_1 + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 \\
 & \quad - (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) - \lambda_1 s = \lambda^{(\alpha)} \frac{1}{v_1} \varphi_1, \\
 & -\nabla \cdot D_2 \nabla \varphi_2 + \Sigma_2 \varphi_2 - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1 = \lambda^{(\alpha)} \frac{1}{v_2} \varphi_2, \\
 & \quad \lambda_1 s - \beta_1 (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) = \lambda^{(\alpha)} s.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Ищутся dominant собственное значение $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, N$ при

$$\text{Re} \lambda_1^{(\alpha)} \leq \text{Re} \lambda_2^{(\alpha)} \leq \dots \leq \text{Re} \lambda_N^{(\alpha)} \leq \dots \leq \text{Re} \lambda_{N_n}^{(\alpha)}.$$

Аналогичные расчеты собственных значений реактора VVER-1000 без учета запаздывающих нейтронов можно найти в работе Avvakumov et al. (2017).

Результаты решения спектральной задачи (23) для первых собственных значений $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $N = 10$ на разных расчетных сетках при использовании различных конечно-элементных аппроксимаций показаны в табл.2, 3. Собственные значения $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{10}$ для спектральной задачи (23) являются комплексные с малыми мнимыми частями, собственные значения $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ — действительные.

Таблица 2: Собственные значения $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$

p	κ	α_1	α_2, α_3	α_4, α_5
1	6	-0.22557	$0.04241 \mp 3.08808\text{e-}06i$	$0.06588 \mp 4.80449\text{e-}07i$
	24	-0.82690	$0.03777 \mp 5.37884\text{e-}06i$	$0.06489 \mp 1.37315\text{e-}06i$
	96	-1.74998	$0.03619 \mp 5.69002\text{e-}06i$	$0.06456 \mp 1.40299\text{e-}06i$
2	6	-2.10154	$0.03592 \mp 4.96474\text{e-}06i$	$0.06452 \mp 1.21320\text{e-}06i$
	24	-2.46601	$0.03562 \mp 5.78277\text{e-}06i$	$0.06445 \mp 1.40897\text{e-}06i$
	96	-2.50375	$0.03559 \mp 5.80693\text{e-}06i$	$0.06444 \mp 1.41324\text{e-}06i$
3	6	-2.47975	$0.03561 \mp 5.83718\text{e-}06i$	$0.06445 \mp 1.41869\text{e-}06i$
	24	-2.50294	$0.03559 \mp 5.80783\text{e-}06i$	$0.06444 \mp 1.41341\text{e-}06i$
	96	-2.51280	$0.03558 \mp 5.80954\text{e-}06i$	$0.06444 \mp 1.41362\text{e-}06i$

Таблица 3: Собственные значения $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 6, 7, \dots, 10$

p	κ	α_6	α_7	α_8	α_9, α_{10}
1	6	0.07107	0.07214	0.07323	$0.07397 \mp 2.04990\text{e-}08i$
	24	0.07050	0.07167	0.07283	$0.07362 \mp 3.65907\text{e-}08i$
	96	0.07033	0.07152	0.07269	$0.07351 \mp 3.91936\text{e-}08i$
2	6	0.07030	0.07151	0.07268	$0.07349 \mp 3.69824\text{e-}08i$
	24	0.07027	0.07147	0.07265	$0.07347 \mp 4.03121\text{e-}08i$
	96	0.07026	0.07147	0.07265	$0.07347 \mp 4.02324\text{e-}08i$
3	6	0.07027	0.07147	0.07265	$0.07347 \mp 4.02573\text{e-}08i$
	24	0.07026	0.07147	0.07265	$0.07347 \mp 4.02248\text{e-}08i$
	96	0.07026	0.07147	0.07265	$0.07347 \mp 4.02332\text{e-}08i$

В нашем примере главное собственное значение отрицательно и поэтому главная гармоника будет нарастать, а все другие будут затухать. Тем самым выражен регулярный режим работы реактора. Сама величина $\alpha = \lambda_1^{(\alpha)}$ определяет амплитуду развития нейтронного поля и непосредственно связывается с периодом реактора в регулярном режиме.

Dominant собственные функции спектральной задачи (23) для группы 1 показаны рис.4–8. Расчеты выполнены на сетке с $\kappa = 96$ с использованием конечных элементов степени $p = 3$. Главные собственные функции для второй группы $\varphi_2^{(1)}$ и запаздывающих нейтронов $s^{(1)}$ показаны на рис.9.

5.3. Сопряженная спектральная задача

Аналогичные данные получены при приближенном решении сопряженной спектральной задачи (16). Собственные значения спектральных задач (14) и (16) совпадают. Их отличие друг от друга является косвенной мерой точности численного решения. Данные по dominant собственным значениям

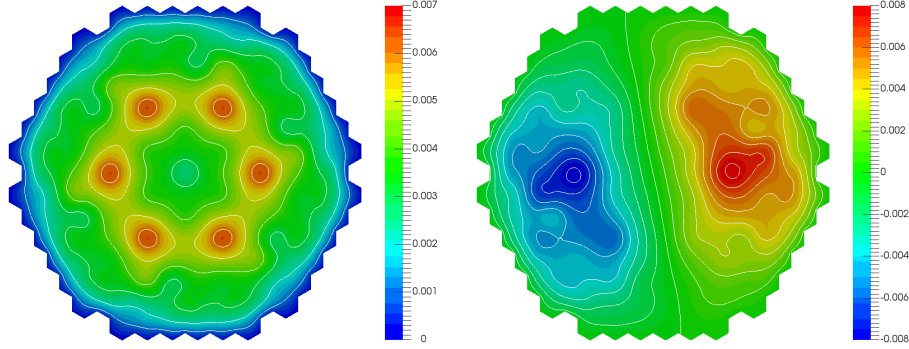


Рис. 4: The eigenfunction $\varphi_1^{(1)}$ (left) and real part of eigenfunctions $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_1^{(3)}$ (right).

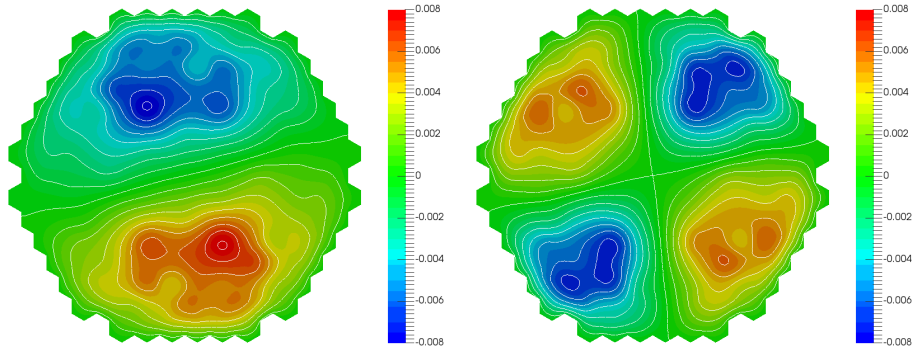


Рис. 5: Imaginary part of eigenfunctions $\varphi_1^{(2)}$, $-\varphi_1^{(3)}$ (left) and real part of eigenfunctions $\varphi_1^{(4)}$, $\varphi_1^{(5)}$ (right).

ям, которые приведены в Table 4 ($k = 96$, $p = 3$), показывают, что собственные значения основной и сопряженной спектральных задач близки друг к другу с хорошей точностью.

Рассматриваемые спектральные задачи характеризуются небольшими значениями мнимых частей собственных значений. В силу этого мы можем рассчитывать на то, что собственные функции задачи (14) близки к ортогональным. Иллюстрацией служит Table 5, в которой приведены данные для скалярных произведений $(\phi_1^{(n)}, \phi_1^{(m)})$ для первых 10 собственных функций.

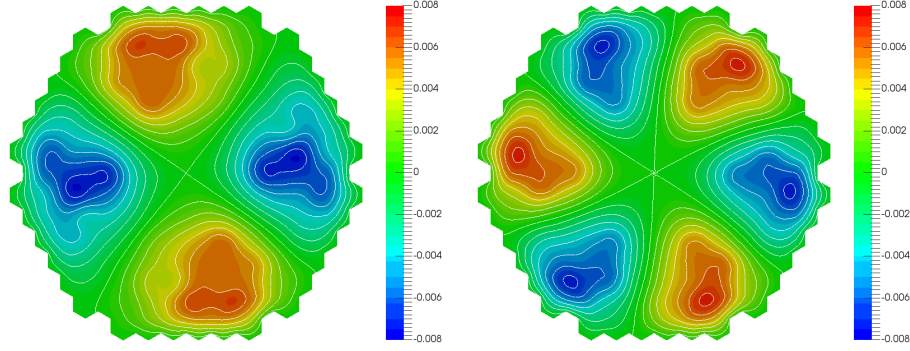


Рис. 6: Imaginary part of eigenfunctions $\varphi_1^{(4)}$, $-\varphi_1^{(5)}$ (left) and eigenfunction $\varphi_1^{(6)}$ (right).

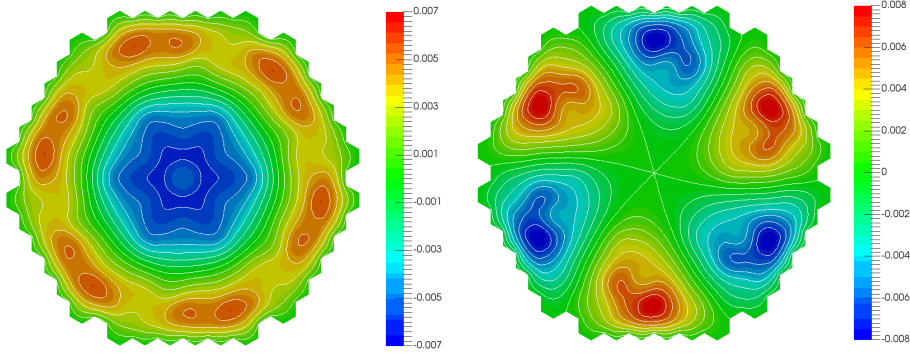


Рис. 7: The eigenfunction $\varphi_1^{(7)}$ (left) and eigenfunction $\varphi_1^{(8)}$ (right).

Для удобства сравнения собственные функции нормированы в $L_2(\Omega)$:

$$\phi_1^{(n)} \longrightarrow \frac{\phi_1^{(n)}}{\|\phi_1^{(n)}\|}.$$

Наибольшая неортогональность (для $(\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(7)})$) не превышает 10 %. Примерно с этой же точностью выполняется и условие биортогональности собственных функций основной (смотри (14)) и сопряженной (смотри (16)) спектральных задач. Эту наблюдаемую погрешность можно связать с приближенным вычислением собственных значений и собственным функциям.

В рамках modal method мы не можем рассчитывать на высокую точность при учете относительно небольшого числа dominant собственных значений. В силу этого в рассматриваемом примере мы можем считать, что

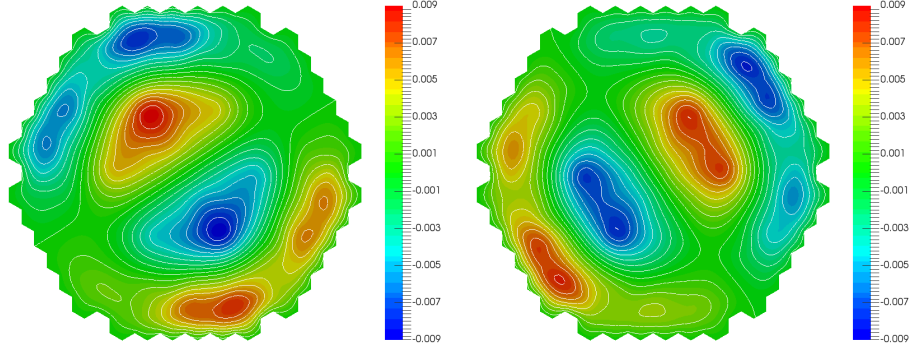


Рис. 8: Real part of eigenfunctions $\varphi_1^{(9)}$, $\varphi_1^{(10)}$ (left) and imaginary part of eigenfunctions $\varphi_1^{(9)}$, $-\varphi_1^{(10)}$ (right).

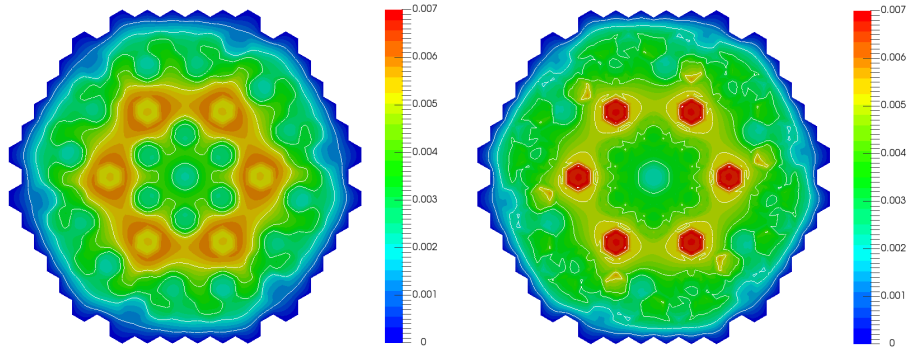


Рис. 9: The eigenfunction $\varphi_2^{(1)}$ (left) and the eigenfunctions $s^{(1)}$ (right).

собственные значения действительны, а соответствующие им собственные функции — ортогональными. Вместо (17) используются коэффициенты

$$b_n \approx \frac{1}{(c_n, c_n)} (c_h^s, c_n), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

для аппроксимации начального условия.

5.4. Подкритическое состояние

В надкритическом режиме в силу достаточно большой величины по модулю главного собственного значения быстро развивается регулярный режим реактора, в котором

$$u(x, t) \approx a_1 \exp(-\alpha_1 t) v_1^0(x).$$

Таблица 4: Собственные значения $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 10$ основной и сопряженной задач

n	α_n для задачи (14)	α_n для задачи (16)
1	-2.51280117966	-2.51280117972
2,3	0.0355815000364 \mp 5.80954455861e-06	0.0355815000365 \mp 5.80954421646e-06
4,5	0.0644427013767 \mp 1.41362187449e-06	0.0644427013767 \mp 1.41362190730e-06
6	0.0702618501639	0.0702618501639
7	0.0714652882224	0.0714652882164
8	0.0726456060606	0.0726456060606
9,10	0.0734708921578 \mp 4.02332269037e-08	0.0734708921578 \mp 4.02332146248e-08

Таблица 5: Скалярное произведение $(\phi_1^{(n)}, \phi_1^{(m)})$, $n, m = 1, 2, \dots, 10$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0e-00	1.3e-08	2.2e-08	-3.8e-08	9.8e-09	-1.8e-09	1.0e-02	-3.2e-09	-2.2e-08	1.6e-09
2	1.3e-08	1.0e-00	-1.6e-08	-1.6e-08	1.4e-08	4.1e-08	1.2e-09	-2.0e-07	-3.1e-03	7.5e-03
3	2.2e-08	-1.6e-08	1.0e-00	-9.8e-09	-1.1e-08	-1.8e-08	1.1e-08	-3.3e-08	-7.5e-03	-3.1e-03
4	-3.8e-08	-1.6e-08	-9.8e-09	1.0e-00	-3.9e-10	-1.1e-08	1.4e-08	4.0e-09	3.0e-09	-1.1e-08
5	9.8e-09	1.4e-08	-1.1e-08	-3.9e-10	1.0e-00	2.9e-09	-1.6e-08	-1.9e-08	6.3e-09	6.3e-09
6	-1.8e-09	4.1e-08	-1.8e-08	-1.1e-08	2.9e-09	1.0e-00	-4.2e-09	-5.6e-03	4.1e-08	-1.2e-07
7	1.0e-02	1.2e-09	1.1e-08	1.4e-08	-1.6e-08	-4.2e-09	1.0e-00	-2.1e-09	-1.8e-08	8.0e-09
8	-3.2e-09	-2.0e-07	-3.3e-08	4.0e-09	-1.9e-08	-5.6e-03	-2.1e-09	1.0e-00	-5.2e-08	2.3e-07
9	-2.2e-08	-3.1e-03	-7.5e-03	3.0e-09	6.3e-09	4.1e-08	-1.8e-08	-5.2e-08	1.0e-00	-5.5e-07
10	1.6e-09	7.5e-03	-3.1e-03	-1.1e-08	6.3e-09	-1.2e-07	8.0e-09	2.3e-07	-5.5e-07	1.0e-00

Здесь $\mathbf{v}_1^0(\mathbf{x})$ есть первая мода надкритического состояния. Рассмотрим задачу с переходом из этого надкритического состояния при $t_0 = 0$ в подкритический.

Подкритическая стадия характеризуется увеличением на 15% коэффициента Σ_2 в diffusion neutronics constants for VVER-1000 для материала 4 (see Table 1). Тем самым рассматривается динамика реактора при

$$\Sigma_2 \longrightarrow 1.15\Sigma_2 \quad (\text{material 4}).$$

Начальное состояние характеризуется заданием начальных условий (8) при $t_0 = 0$ в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_1^0(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Результаты расчетов dominant собственных значений подкритического состояния реактора представлены в Tables 6, 7. В этом случае даже первые собственные значения менее сильно отличаются друг от друга.

Таблица 6: Подкритическое состояние: $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$

p	κ	α_1	α_2, α_3	α_4, α_5
1	6	0.03602	$0.05760 \mp 1.49652\text{e-}06i$	$0.06890 \mp 4.92606\text{e-}07i$
	24	0.02656	$0.05502 \mp 2.06007\text{e-}06i$	$0.06804 \mp 1.01253\text{e-}06i$
	96	0.02276	$0.05411 \mp 2.16813\text{e-}06i$	$0.06774 \mp 1.03843\text{e-}06i$
2	6	0.02250	$0.05404 \mp 1.81823\text{e-}06i$	$0.06772 \mp 8.73562\text{e-}07i$
	24	0.02144	$0.05380 \mp 2.19400\text{e-}06i$	$0.06765 \mp 1.04253\text{e-}06i$
	96	0.02125	$0.05376 \mp 2.20812\text{e-}06i$	$0.06763 \mp 1.04715\text{e-}06i$
3	6	0.02139	$0.05379 \mp 2.22579\text{e-}06i$	$0.06764 \mp 1.05369\text{e-}06i$
	24	0.02124	$0.05376 \mp 2.20883\text{e-}06i$	$0.06763 \mp 1.04736\text{e-}06i$
	96	0.02122	$0.05376 \mp 2.20951\text{e-}06i$	$0.06763 \mp 1.04756\text{e-}06i$

Таблица 7: Подкритическое состояние: $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 6, 7, \dots, 10$

p	κ	α_6	α_7	α_8	α_9, α_{10}
1	6	0.07276	0.07363	0.07369	$0.07466 \mp 2.47162\text{e-}08i$
	24	0.07222	0.07316	0.07329	$0.07429 \mp 1.08814\text{e-}08i$
	96	0.07204	0.07301	0.07316	$0.07417 \mp 1.38093\text{e-}08i$
2	6	0.07203	0.07300	0.07315	$0.07416 \mp 1.26708\text{e-}08i$
	24	0.07199	0.07296	0.07312	$0.07413 \mp 1.50527\text{e-}08i$
	96	0.07198	0.07295	0.07312	$0.07413 \mp 1.49196\text{e-}08i$
3	6	0.07198	0.07295	0.07312	$0.07413 \mp 1.52256\text{e-}08i$
	24	0.07198	0.07295	0.07312	$0.07413 \mp 1.49141\text{e-}08i$
	96	0.07198	0.07295	0.07311	$0.07413 \mp 1.49178\text{e-}08i$

Для приближенного решения используется представление

$$\mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N b_n \exp(-\text{Re } \alpha_n t) \mathbf{v}_n(\mathbf{x}), \quad (26)$$

в котором коэффициенты b_n , $n = 1, 2, \dots, N$ рассчитываются по заданному начальному условию согласно (24). Эти коэффициенты для $N = 50$ показаны на рис.10. Как мы видим, приближенное решение может быть описано только одной первой модой.

Мы выделяем две фазы динамического процесса: быстрая и медленная. На быстрой фазе происходит перестройка начального условия (25) к начальному условию, которое соответствует (26): от функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ к функции $\mathbf{u}_N(\mathbf{x}, 0)$. Медленная фаза связывается с эволюцией решения согласно (26). В рамках state change modal технологии выделенная быстрая фаза не моделируется.

Начало и конец быстрой фазы иллюстрируется расчетными данными на

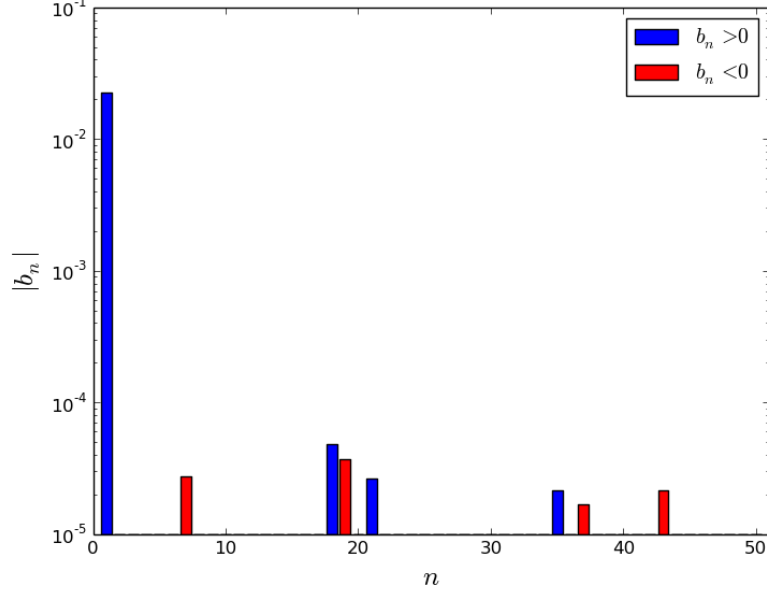


Рис. 10: Коэффициенты для приближенного решения (26).

рис.11, которые получены при $N = 10$. Мы можем отметить непринципиальные изменения топологии исходных и перестроенных начальных условий. Обратим внимание на существенную перестройку решения, которая иллюстрируется большими изменениями амплитуд нейтронов первой и второй групп.

5.5. Несимметричное возмущение

Рассмотрим более сложный переход в подкритическое состояние. Подкритическую стадию будем характеризовать разным увеличением коэффициента Σ_2 в diffusion neutronics constants для материала 4 в верхней и нижней половине сечения реактора (see рис.2). Пусть теперь динамика реактора соответствует трансформации

$$\Sigma_2 \longrightarrow \begin{cases} 1.1\Sigma_2, & \text{material 4 (top part),} \\ 1.2\Sigma_2, & \text{material 4 (bottom part).} \end{cases}$$

Результаты расчетов dominant собственных значений подкритического состояния реактора при несимметричном возмущении представлены в Tables 8, 9. Все собственные значения для этого состояния реактора являются действительными.

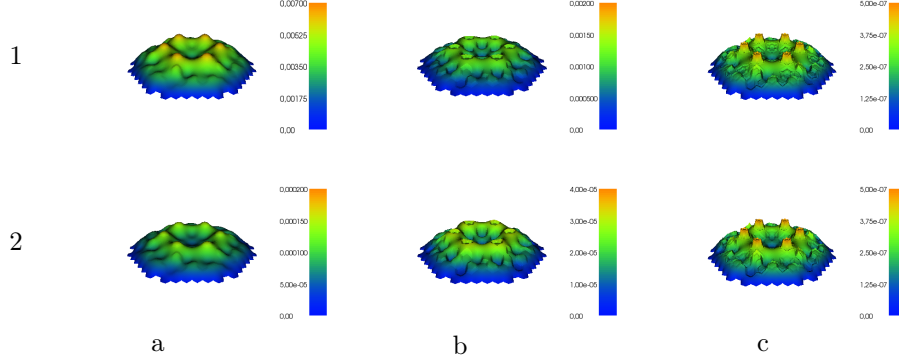


Рис. 11: Функция $u(x, 0)$ (строка 1) и функция $u_N(x, 0)$ (строка 2): а — neutron flux of 1 group, б — neutron flux of 2 group, в — delayed neutron.

Таблица 8: Подкритическое несимметричное состояние: $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \dots, 5$

p	κ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	6	0.03347	0.05728	0.05788	0.06884	0.06889
	24	0.02333	0.05467	0.05528	0.06797	0.06802
	96	0.01925	0.05374	0.05436	0.06768	0.06772
2	6	0.01894	0.05367	0.05429	0.06765	0.06770
	24	0.01782	0.05343	0.05405	0.06758	0.06762
	96	0.01763	0.05339	0.05401	0.06757	0.06761
3	6	0.01777	0.05342	0.05404	0.06758	0.06762
	24	0.01762	0.05339	0.05400	0.06757	0.06761
	96	0.01760	0.05338	0.05400	0.06757	0.06761

Коэффициенты b_n , $n = 1, 2, \dots, N$, $N = 50$ для приближенного решения (26) при начальном условии (25) приведены на рис.12. В рассматриваемом случае приближенное решение содержит группу мод и не может быть описано только первой модой. Быстрая фаза перехода иллюстрируется рис.11, Расчеты конца быстрой фазы (функции $u_N(x, 0)$) выполнены при $N = 10$.

5.6. Сравнение с решением нестационарной задачи

Приближенное решение, которое получено на основе modal approximation, можно сравнить с решением динамической задачи. Решается краевая задача для системы уравнений (22). Используется (смотри детали в Avvakumov et al. (2016)) полностью неявная схема на равномерной сетке по времени с достаточно малым шагом $\tau = 0.0025$. Динамика neutronic power ядерного реактора P и запаздывающих нейтронов C на начальной стадии при переходе от накритического состояния в подкритическое при симметричном

Таблица 9: Подкритическое несимметричное состояние: $\alpha_n = \lambda_n^{(\alpha)}$, $n = 6, 7, \dots, 10$

p	κ	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
1	6	0.07274	0.07355	0.07369	0.07464	0.07468
	24	0.07220	0.07309	0.07329	0.07427	0.07430
	96	0.07202	0.07294	0.07316	0.07415	0.07419
2	6	0.07201	0.07293	0.07314	0.07414	0.07417
	24	0.07197	0.07289	0.07311	0.07412	0.07415
	96	0.07196	0.07288	0.07311	0.07411	0.07414
3	6	0.07196	0.07289	0.07311	0.07411	0.07415
	24	0.07196	0.07288	0.07311	0.07411	0.07414
	96	0.07196	0.07288	0.07311	0.07411	0.07414

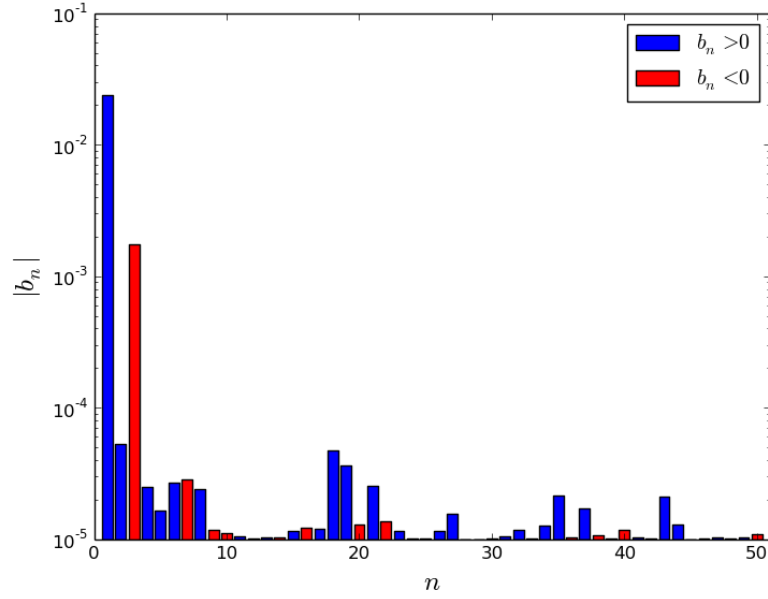


Рис. 12: Коэффициенты для приближенного решения (26) — несимметричное возмущение.

возмущении показана рис.14. Здесь

$$P(t) = \int_{\Omega} (\nu \Sigma_{f1} \varphi_1 + \nu \Sigma_{f2} \varphi_2) d\mathbf{x}, \quad C(t) = \int_{\Omega} c(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Наблюдается быстрое изменение neutronic power на небольшом отрезке времени, при этом запаздывающие нейтроны переставаются слабо. Динамика

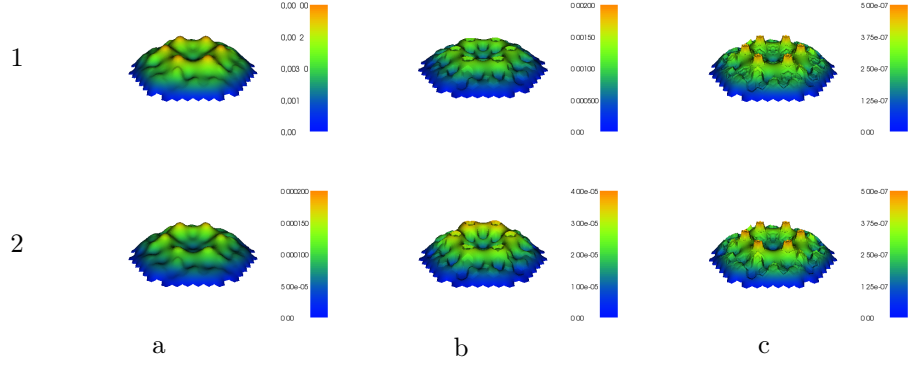


Рис. 13: Функция $u(x, 0)$ (строка 1) и функция $u_N(x, 0)$ (строка 2) для несимметричного возмущения: a — neutron flux of 1 group, b — neutron flux of 2 group, c — delayed neutron.

медленной фазы иллюстрируется рис.15, 16. Здесь приведены как решения, полученные при использовании полных уравнений (dynamic на рис.15, 16), так и решение при использовании modal approximation (modal). Аналогичные данные для несимметричного возмущения на критическом состоянии реактора приведены рис.17, 18. Мы видим, что с хорошей точностью передаются интегральные характеристики динамики реактора на медленной стадии.

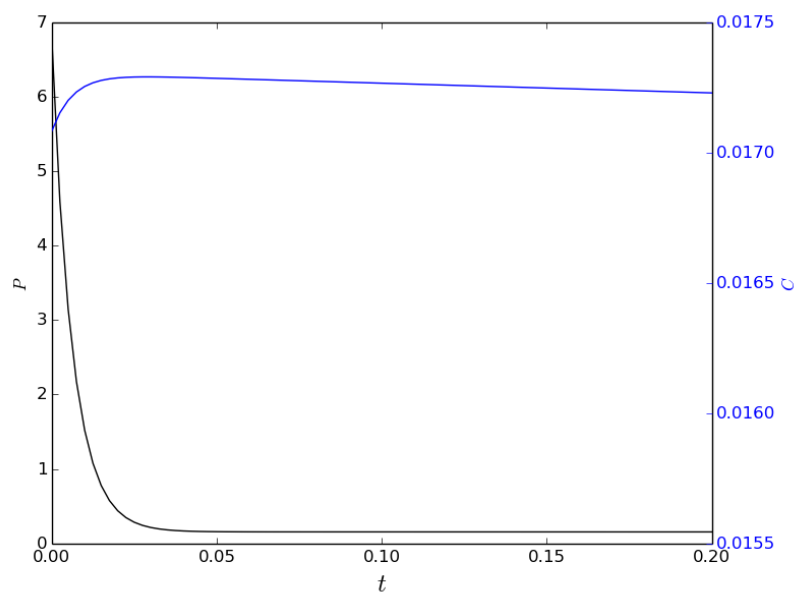


Рис. 14: Быстрая фаза изменения состояния.

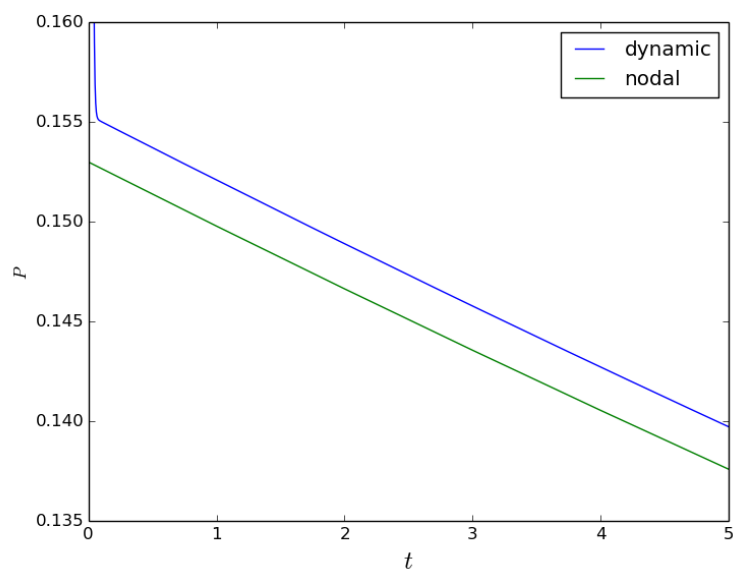


Рис. 15: Медленная фаза изменения состояния: neutronic power

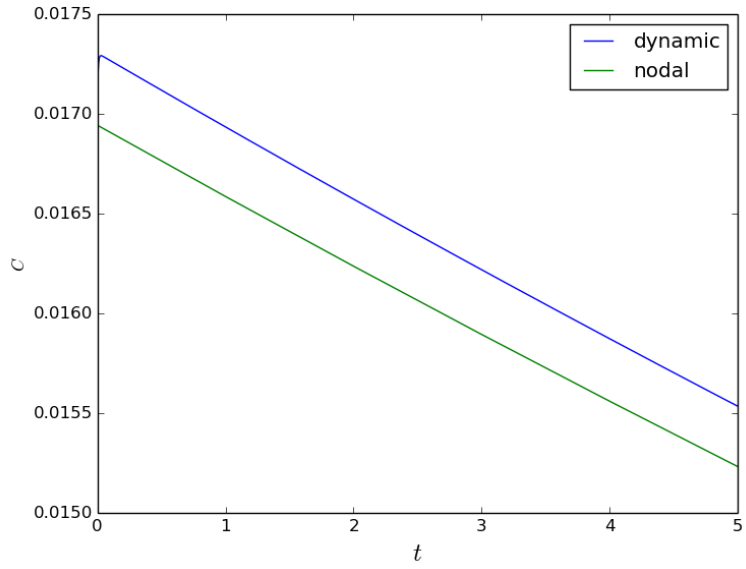


Рис. 16: Медленная фаза изменения состояния: запаздывающие нейтроны

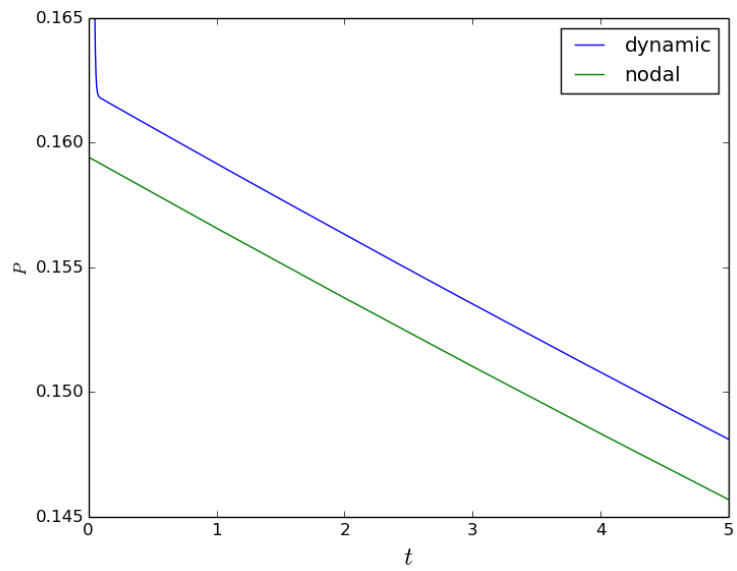


Рис. 17: Медленная фаза изменения состояния при несимметричном возмущении: neutronic power

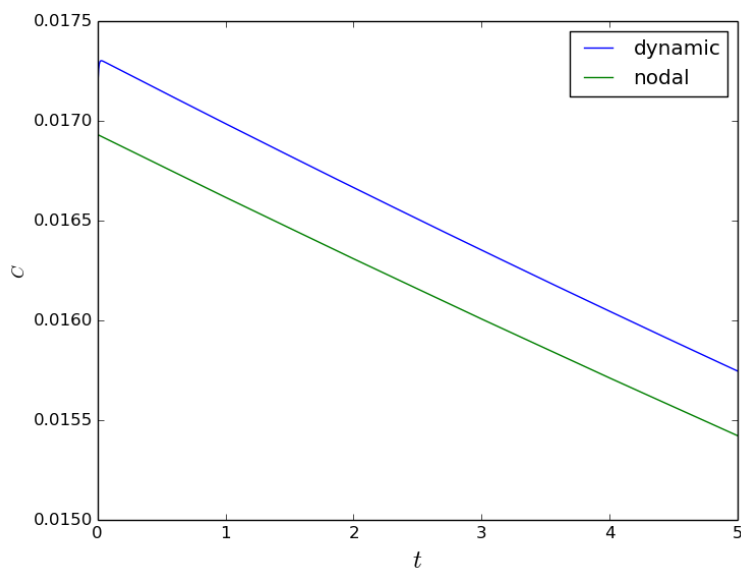


Рис. 18: Медленная фаза изменения состояния при несимметричном возмущении: запаздывающие нейтроны

6. Conclusions

Рассматривается проблема моделирования динамических процессов в ядерном реакторе на основе многогрупповых уравнений диффузии нейтронов с учетом запаздывающих нейтронов. Используется modal approximation, когда приближенное решение раскладывается по небольшому набору dominant собственных функций α -eigenvalue спектральной задачи.

Численное моделирование нестационарных процессов в ядерном реакторе проводится на основе последовательной смены состояний реактора, которые характеризуются набором постоянных многогруппового описания нейтронного поля. В разработанном state change modal method выделяется фаза быстрого перехода к приближенному решению в виде набора доминантных мод. На медленной фазе динамики реактора решение строится на основе эволюции dominant мод.

Вычислительная реализация state change modal method базируется на основе предварительно рассчитанных (of-line calculation) собственных значений и собственных функций α -eigenvalue спектральной задачи. Быстрое выделение dominant мод и расчет нейтронного поля реактора на отдельные моменты времени проводится на основе on-line calculation.

Для аппроксимации по пространству используются классические Lagrange finite elements степени $p = 1, 2, 3$. Контроль точности проводится на основе сгущения сеток. Спектральные задачи численно решаются с использованием хорошо разработанного свободного программного обеспечения SLEPc.

Test calculations are made in two-dimensional approximation for a model of VVER-1000 reactor without reflector using two-group diffusion approximation. Выполнены расчеты доминантных мод для ядерного реактора в надкритическом состоянии. Решение с главной модой, которое определяет регулярный режим реактора, используется как начальное условие для перехода в подкритический режим. Проведено моделирование смены динамики перевода реактора в новое состояние в двух вариантах. Первый из них (симметричное возмущение) соответствует одинаковому изменению свойств поглощающего материала. Второй вариант (несимметричное возмущение) связан с разным изменением свойств поглощающего материала по половинам сечения активной зоны реактора.

Сравнение расчетов на основе modal approximation с расчетами по полной динамической модели показывает приемлемую точность вычисления nuclear power и общего количества запаздывающих нейтронов for a model of VVER-1000.

Acknowledgements

This work are supported by the Russian Foundation for Basic Research (# 16-08-01215) and by the grant of the Russian Federation Government (# 14.Y26.31.0013).

Список литературы

- Ascher, U. M., 2008. Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations. Society for Industrial Mathematics.
- Avvakumov, A. V., Strizhov, V. F., Vabishchevich, P. N., Vasilev, A. O., 2017. Spectral properties of dynamic processes in a nuclear reactor. *Annals of Nuclear Energy* 99, 68–79.
- Avvakumov, A. V., Vabishchevich, P. N., Vasilev, A. O., Strizhov, V. F., 2016. Numerical modelling neutron diffusion unsteady problems. *Mathematical Models and Computer Simulations* (submitted).
- Baudron, A.-M., Lautard, J.-J., Maday, Y., Riahi, M. K., Salomon, J., 2014. Parareal in time 3D numerical solver for the LWR benchmark neutron diffusion transient model. *Journal of Computational Physics* 279, 67–79.
- Bell, G. I., Glasstone, S., 1970. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company.
- Björck, A., 1996. Numerical Methods for Least Squares Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brenner, S. C., Scott, R., 2008. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer.
- Brezinski, C., 1991. Biorthogonality and Its Applications to Numerical Analysis. CRC Press.
- Butcher, J. C., 2008. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley.
- Chao, Y. A., Shatilla, Y. A., 1995. Conformal mapping and hexagonal nodal methods-II: Implementation in the ANC-H Code. *Nuclear Science and Engineering* 121, 210–225.
- Cho, N. Z., 2005. Fundamentals and recent developments of reactor physics methods. *Nuclear Engineering and Technology* 37 (1), 25–78.
- Chou, H. P., Lu, J. R., Chang, M. B., 1990. A three-dimensional space-time model and its use in pressurized water reactor rod ejection analyses. *Nuclear Technology* 90 (2), 142–154.
- Dahmani, M., Baudron, A. M., Lautard, J. J., Erradi, L., 2001. A 3D nodal mixed dual method for nuclear reactor kinetics with improved quasistatic model and a semi-implicit scheme to solve the precursor equations. *Annals of Nuclear Energy* 28 (8), 805–824.
- Dodds Jr, H. L., 1976. Accuracy of the quasistatic method for two-dimensional thermal reactor transients with feedback. *Nuclear Science and Engineering* 59 (3), 271–276.

- Duderstadt, J. J., Hamilton, L. J., 1976. Nuclear Reactor Analysis. Wiley.
- Dugan, K., Zmijarevic, I., Sanchez, R., 2016. Cross-section homogenization for reactivity-induced transient calculations. *Journal of Computational and Theoretical Transport* 45 (6), 425–441.
- Dulla, S., Mund, E. H., Ravetto, P., 2008. The quasi-static method revisited. *Progress in Nuclear Energy* 50 (8), 908–920.
- Gear, C. W., 1971. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Prentice Hall, NJ.
- Ginestar, D., Miro, R., Verdu, G., Hennig, D., 2002. A transient modal analysis of a BWR instability event. *Journal of Nuclear Science and Technology* 39 (5), 554–563.
- Goluoglu, S., Dodds, H. L., 2001. A time-dependent, three-dimensional neutron transport methodology. *Nuclear science and engineering* 139 (3), 248–261.
- González-Pintor, S., Ginestar, D., Verdú, G., 2009. High order finite element method for the lambda modes problem on hexagonal geometry. *Annals of Nuclear Energy* 36 (9), 1450–1462.
- Grossman, L. M., Hennart, J.-P., 2007. Nodal diffusion methods for space-time neutron kinetics. *Progress in Nuclear Energy* 49 (3), 181–216.
- Guérin, P., Baudron, A.-M., Lautard, J.-J., 2010. Domain decomposition methods for the neutron diffusion problem. *Mathematics and Computers in Simulation* 80 (11), 2159–2167.
- Hairer, E., Wanner, G., 2010. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer Verlag.
- Henry, A. F., 1975. Nuclear-Reactor Analysis. MIT press.
- Hernandez, V., Roman, J. E., Vidal, V., 2005. SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 31 (3), 351–362.
- Hernandez, V., Roman, J. E., Vidal, V., Verdu, G., Ginestar, D., 2003. Resolution of the neutron diffusion equation with SLEPc, the Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations. In: Nuclear Mathematical and Computational Sciences: A Century in Review, A Century Anew Gatlinburg. American Nuclear Society, pp. 1–10.
- Hetrick, D. L., 1971. Dynamics of Nuclear Reactors. University of Chicago Press.
- Hundsdoerfer, W. H., Verwer, J. G., 2003. Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Springer Verlag.

- Laub, A. J., 2005. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Lawrence, R. D., 1986. Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations. *Progress in Nuclear Energy* 17 (3), 271–301.
- LeVeque, R. J., 2007. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Society for Industrial Mathematics.
- Lewis, E. E., Miller, W. F., 1993. *Computational Methods of Neutron Transport*. American Nuclear Society.
- Luikov, A., 1968. *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press.
- Maday, Y., Turinici, G., 2005. The parareal in time iterative solver: a further direction to parallel implementation. In: *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*. Springer, pp. 441–448.
- Marchuk, G. I., Lebedev, V. I., 1986. *Numerical Methods in the Theory of Neutron Transport*. Harwood Academic Pub.
- Miró, R., Ginestar, D., Verdú, G., Hennig, D., 2002. A nodal modal method for the neutron diffusion equation. application to BWR instabilities analysis. *Annals of Nuclear Energy* 29 (10), 1171–1194.
- Modak, R., Gupta, A., 2007. A scheme for the evaluation of dominant time-eigenvalues of a nuclear reactor. *Annals of Nuclear Energy* 34 (3), 213–221.
- Ortega, J. M., 1987. *Matrix Theory: A Second Course*. Springer.
- Quarteroni, A., Valli, A., 2008. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer.
- Saad, Y., 2003. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial Mathematics.
- Saad, Y., 2011. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. SIAM.
- Samarskii, A. A., 2001. *The Theory of Difference Schemes*. Marcel Dekker, New York.
- Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N., 1996. *Computational Heat Transfer*. Wiley.
- Sanchez, R., 2009. Assembly homogenization techniques for core calculations. *Progress in Nuclear Energy* 51 (1), 14–31.
- Smith, K. S., 1979. An analytic nodal method for solving the two-group, multidimensional, static and transient neutron diffusion equations. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Stacey, W. M., 1967. Modal Approximations: Theory and an Application to Reactor Physics. The MIT Press.
- Stacey, W. M., 1969. Space-Time Nuclear Reactor Kinetics. Academic Press.
- Stacey, W. M., 2007. Nuclear Reactor Physics. Wiley.
- Stewart, G. W., 2001. A Krylov–Schur algorithm for large eigenproblems. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 23 (3), 601–614.
- Stewart, H. B., 1976. Spectral theory of heterogeneous diffusion systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 54 (1), 59–78.
- Sutton, T. M., Aviles, B. N., 1996. Diffusion theory methods for spatial kinetics calculations. Progress in Nuclear Energy 30 (2), 119–182.
- Toselli, A., Widlund, O., 2005. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Springer.
- Vabishchevich, P. N., 2012. SM-stability of operator-difference schemes. Computational Mathematics and Mathematical Physics 52 (6), 887–894.
- Vabishchevich, P. N., 2014. Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes. de Gruyter.
- Verdú, G., Ginestar, D., 2014. Modal decomposition method for BWR stability analysis using Alpha-modes. Annals of Nuclear Energy 67, 31–40.
- Verdu, G., Ginestar, D., Roman, J., Vidal, V., 2010. 3D alpha modes of a nuclear power reactor. Journal of Nuclear Science and Technology 47 (5), 501–514.
- Verdú, G., Ginestar, D., Vidal, V., Miró, R., 1998. Modal decomposition method for BWR stability analysis. Journal of Nuclear Science and Technology 35 (8), 538–546.
- Vidal-Ferrandiz, A., Favez, R., Ginestar, D., Verdú, G., 2014. Solution of the lambda modes problem of a nuclear power reactor using an h–p finite element method. Annals of Nuclear Energy 72, 338–349.