1.1: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄ

Դիցուք X -ը նորմավորված տարածության ենթաբազմություն է և $f(x)$-ը այդ բազմության վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: $f(x)$ ֆունկցիայի սուպրեմում կանվանենք այն M , թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. f(x) ≤M, x ∈X :

2. Յանկացած ε > 0 թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $x_ε$ ∈X ,որ՝ $f(x_ε)$ >M –ε

$f(x)$ ֆունկցիայի սուպրեմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\sup\limits_{x \epsilon X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի x^0 ∈ X կետ, որ $f(x^0)$= M , ապա M թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մաքսիմում* կամ մեծագույն արժեք, նշանակում են $\max\limits_{x \epsilon X} f(x)$ և ասում են, որ սուպրեմումը հասանելի է, կամ մաքսիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ : $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին, անվանում են մաքսիմումի կետեր, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $\operatorname{Arg}\max\limits_{x \epsilon X} f(x)$ -ով՝

$$\operatorname{Arg}\max_{x \epsilon X} f(x) = \left\{x' \in \mathrm{X} :\ f(x') = \max_{x \epsilon X} f(x)\right\} :$$

Նմանապես $f(x)$ ֆունկցիայի *ինֆիմում* կանվանենք այն m թիվը, որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

1. $f(x)$ ≥ m, x ∈ X ,

2. Յանկացած ε > 0 թվի համար գոյություն ունի այնպիսի, $x_ε$ ∈X ,որ՝ $f(x_ε)$ > m –ε

Ֆունկցիայի ինֆիմումը X բազմության վրա նշանակվում է՝ $\inf\limits_{x \epsilon X} f(x)$: Այն դեպքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի x^0 ∈ X կետ, որ $f(x^0)$= m, ապա m թիվը անվանում են $f(x)$ *ֆունկցիայի մինիմում* կամ *փոքրագույն արժեք*, նշանակում են $\min\limits_{x \epsilon X} f(x)$և ասում են, որ ինֆիմումը հասանելի է, կամ մինիմումը գոյություն ունի: Այն կետերը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան հասնում է իր նվազագույն արժեքին, անվանում են մինիմումի կետերը, և այդ կետերի բազմությունը նշանակում $\operatorname{Arg}\min\limits_{x \epsilon X} f(x)$ -ով՝

$$\operatorname{Arg}\min_{x \epsilon X} f(x) = \left\{x' \in \mathrm{X} :\ f(x') = \min_{x \epsilon X} f(x)\right\} :$$

Հաճախ օգտագործվում է նաև ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի ընդհանուր՝ *ֆունկցիայի էքստրեմում* անվանումը:

$x^0 \in X$ կետը $f(x)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե գոյություն ունի x^0 կետի I շրջակայք այնպես, որ բոլոր $x \in I$ համար

$$f(x) \le f(x^0) \quad (f(x) \ge f(x^0)) :$$

Թեորեմ 1.1.1: R^n տարածության փակ սահմանափակ (կոմպակտ) բազմության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին:

Թեորեմ 1.1.2: Դիցուք $f(x)$ -ը $D \subseteq R^n$ տիրույթում որոշված ածանցելի ֆունկցիա է: Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետը ֆունկցիայի D տիրույթի ներքին կետ է, ապա այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները պետք է հավասար լինեն 0-ի, այսինքն բավարարվեն հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \; i = 1,2,\dots,n$$

Այլ կերպ ասած, էքստրեմումի կետում (եթե այն ներքին կետ է) ֆունկցիայի գրադիենտը հավասար է 0-ի:

2.1 ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ

Դիցուք R^n-ը n-չափանի էվկլիդեսյան տարածությունն է: R^n-ում $x = (x_1, x_2, \dots x_n,)$վեկտորի նորմը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}:$$

Երկու՝ $x = (x_1, x_2, \dots x_n,)$և $y = (y_1, y_2, \dots y_n,)$ վեկտորների $\langle x, y\rangle$ սկալյար արտադրյալը սահմանվում է այսպես՝ 1 , $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, իսկ ρ(x ,y) հեռավորությունը՝

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}:$$

Սահմանում 2.1.1: $X \subseteq R^n$ բազմությունը անվանում են *ուռուցիկ բազմություն*, եթե իր ցանկացած երկու՝ x ′ և x ′′ կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև

$$x = \alpha x' + (1+\alpha)x'' \qquad (1)$$

տեսքի բոլոր կետերը, որտեղ $0 \leq \alpha \leq 1$:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ իր ցանկացած երկու կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև այդ կետերը միացնող հատվածը: R^n-ում հենց (1) հավասարմանը բավարարող բոլոր x կետերի բազմությունն են անվանում x′ և x′′ կետերը միացնող հատված: Ուռուցիկ բազմության օրինակներ են՝ գունդը, ուղղանկյունը, ուղիղը, հարթությունը, R^n տարածության դրական օկտանտը (R_+^n) և այլն:

Թվարկենք ուռուցիկ բազմությունների մի քանի պարզ հատկություններ:

Հ.1: Ուռուցիկ բազմությունների հատումն ուռուցիկ է:

Հ.2: Ուռուցիկ X բազմության կամայական վերջավոր թվով $x^1, x^2, \dots, x^k$, կետերի՝

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$$

ուռուցիկ գծային կոմբինացիաները պատկանում են X -ին ցանկացած

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

գործակիցների համար:

Հ.3. Դիցուք X_1 -ը և X_2 -ը կամայական ուռուցիկ բազմություններ են: Այդ դեպքում ուռուցիկ է նաև $X_1 + X_2$ բազմությունը, որտեղ՝

$$X_1 + X_2 = \{x: x = x^1 + x^2, x^1 \in X_1, x^2 \in X_2\}$$

Հ.4. ՈՒռուցիկ X բազմության $\bar{X}$փակումը ուռուցիկ է:

Հ.5. Ուռուցիկ X բազմության ներքին կետերի X^0 բազմությունը ուռուցիկ է:

Հ.6. Ուռուցիկ X բազմության x^0 ներքին կետից դուրս եկող ցանկացած ճառագայթի վրա կա ամենաշատը մեկ եզրային կետ:

Սահմանում 2.1.2: X բազմության *ուռուցիկ թաղանթ* են անվանում այդ բազմությունը պարունակող C (X) մինիմալ ուռուցիկ բազմությունը, այսինքն ուռուցիկ բազմություն, որն ընկած է X բազմությանը պարունակող ցանկացած այլ ուռուցիկ բազմության մեջ:

Հ.7. Ոչ դատարկ X բազմության ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է այդ բազմության կետերի բոլոր հնարավոր ուռուցիկ գծային կոմբինացիաների բազմության հետ:

Թեորեմ 2.1.1: Ոչ դատարկ X $\subset R^n$ բազմության C(X) ուռուցիկ թաղանթի յուրաքանչյուր կետ կարելի է ներկայացնել X բազմության ոչ ավել, քան n +1 կետերի ուռուցիկ գծային կոմբինացիայի տեսքով:

Սահմանում 2.1.3: $\nu \in R^n$ *կետի պրոեկցիա* X $\subset R^n$ բազմության վրա անվանում են այն ρ∈ X կետը, որի համար

$$\|\rho - \nu\| = \inf_{x \in X} \|x - \nu\| = \rho(\nu, X)$$

$\rho(\nu, X)$ -ը անվանում են ν կետի հեռավորություն X բազմությունից:

Հ.8. Ցանկացած X ուռուցիկ փակ բազմության և $\nu \in R^n$, $\nu \notin X$ համար գոյություն ունի ν կետի միակ ρ պրոեկցիա X բազմության վրա: