

Leçon N°15: **Systèmes oscillants.**

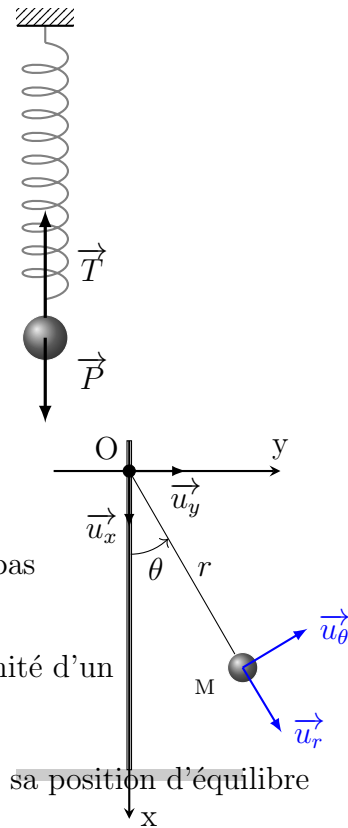
I Les Systèmes mécaniques oscillants.

I.1 Exemples de quelques oscillateurs mécaniques:

On donne quelques exemples de systèmes mécaniques oscillants:

- **Le pendule élastique** : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à un ressort à spires non jointives.
- **Le pendule simple** : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible.
- **Le pendule pesant**: est tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité
- **Le pendule de torsion**: est constitué d'une barre horizontale, fixée à l'extrémité d'un fil de torsion.

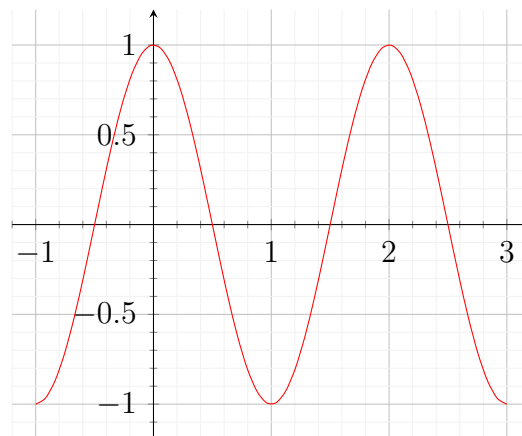
D'une façon générale un oscillateur mécanique , effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre



I.2 Caractéristiques des mouvements oscillatoires:

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par:

- **Sa position d'équilibre** stable c'est la position à laquelle le système tend à y revenir lorsque l'on en éloigne légèrement.
- **Sa période propre** : c'est le temps mis pour effectuer une oscillation.
- **Son amplitude** : c'est la valeur maximale positive que prend la grandeur qui exprime le décalage ou l'inclinaison de l'oscillateur de sa position d'équilibre.



I.3 Amortissement des oscillations:

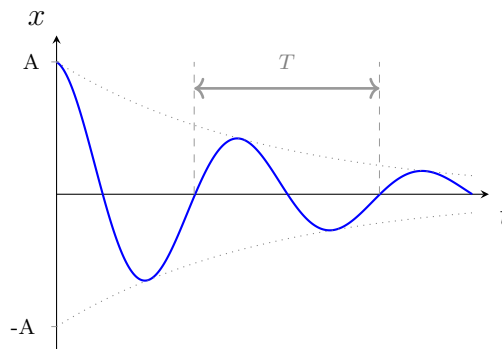
I.3.1 Définition:

En écartant un pendule élastique de sa position d'équilibre et en le lâchant, l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce qu'il s'annule: on dit que le mouvement est amorti. Le phénomène d'amortissement est provoqué par les frottements. Il existe deux types de frottements :

- Le frottement solide qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide.
- Le frottement fluide qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (liquide ou gaz) .

I.3.2 Les régimes d'amortissement:

Le régime pseudo périodique : si l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations diminue progressivement jusqu'à ce qu'il s'annule.



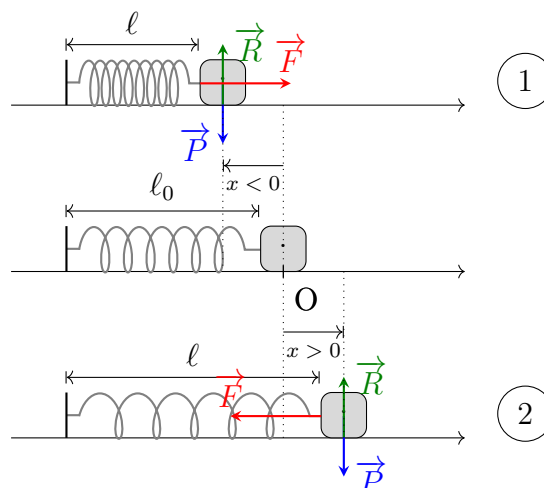
Le régime apériodique : si le frottement est fort les oscillations disparaissent et selon l'importance de l'amortissement on distingue trois régimes:

- Le régime sous critique : l'oscillateur effectue une seule oscillation avant de s'arrêter.
- Le régime critique : l'oscillateur revient à sa position d'équilibre sans oscillations.
- Le régime surcritique l'oscillateur revient à sa position d'équilibre après temps très long sans oscillations.

II Etude de quelques systèmes mécanique oscillants

II.1 Le pendule Élastique horizontale :

Il est constitué d'un ressort posé sur un banc à coussin d'air horizontal comme l'indique la figure suivante:



Après avoir mis en marche la soufflerie, on écarte la cavalier horizontalement d'une distance x_m puis on le lâche, il effectue des oscillations non amorties.

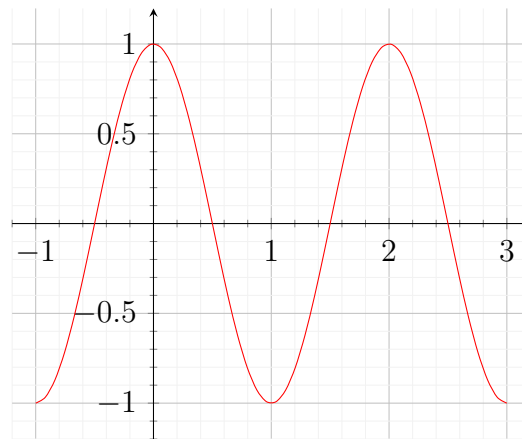
Equation différentielle du mouvement:

- Le système étudié le cavalier
- Bilan des forces : Le cavalier lors de son mouvement oscillatoire est soumis à l'action des forces suivantes:
 - \vec{P} : son poids.
 - \vec{R} : la réaction du banc à coussin d'air (elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables).
 - \vec{T} : la tension du ressort, c'est une force de rappel $\vec{T} = -T\vec{i}$. (Elle s'oppose toujours à l'allongement du ressort et elle est proportionnelle à cet allongement).
- Application de la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$
 par projection sur l'axe Ox : $m.\ddot{x} + K.x = 0$
 d'où: $\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ C'est l'équation différentielle du mouvement

Solution de l'équation différentielle du mouvement :

La solution de l'équation différentielle du mouvement $\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ est une fonction sinusoidale qui s'écrit sous la forme suivante:

$$x(t) = x_m.\cos(\omega_0.t + \phi)$$



- $x(t)$: l'élongation qui est une valeur algébrique exprimée en (m)
- x_m : l'élongation maximale exprimée en (m)
- ω_0 : la pulsation propre en (rad/s) $\omega_0 = \frac{2.\pi}{T_0}$
- T_0 : la période propre en (s)
- ϕ : la phase du mouvement à l'instant $t = 0$ en (rad)

Période propre du mouvement:

Or la solution de l'équation différentielle $x(t) = x_m.\cos(\omega_0.t + \phi)$

d'où:

$$\dot{x}(t) = -x_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t + \phi)$$

et

$$\ddot{x}(t) = -x_m.\omega_0^2.\cos(\omega_0.t + \phi) = -\omega_0^2.x(t)$$

en remplaçant dans l'équation différentielle on trouve que $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

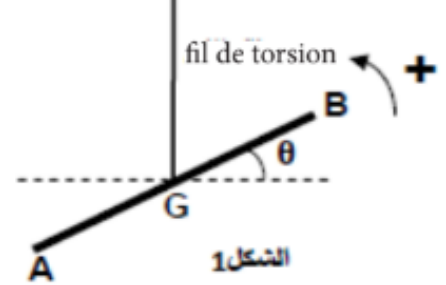
La période propre du pendule élastique est : $T_0 = \frac{2.\pi}{\omega_0} = 2.\pi.\frac{m}{K}$

II.2 LE PENDULE DE TORSION:

II.2.1 Moment du couple de torsion:

Le pendule de torsion est constitué d'un fil de torsion, et d'une tige homogène horizontale fixée en son milieu à l'extrémités de ce fil. L'orsqu'on écarte la tige de sa position d'équilibre et on la libère, elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre.

L'action du fil tordu sur la tige est dû à un ensemble de forces auxquelles on associe un couple de forces appelé couple de torsion.



Le moment du couple de torsion est : $M_t = -C.\theta$

- M_t : moment du couple de torsion en (N.m)
- C : Constante de torsion en (N.m/rad)
- θ : angle de torsion en (rad)

II.2.2 Equation différentielle du mouvement:

On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on la libère sans vitesse initiale.

Bilan des forces qui s'exercent sur la tige :

- \vec{P} : son poids.
- \vec{R} : réaction du fil de suspension.
- La somme des forces de torsion dont le moment est $M_t = -C.\theta$
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum M = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

$$M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M_t = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

- avec $M(\vec{P}) = 0$ et $M(\vec{R}) = 0$
- On obtient l'équation différentielle du mouvement: d'un pendule de torsion :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}}.\theta = 0$$

II.2.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement:

La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoidale qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(t) = \theta_m.\cos(\omega_0.t + \phi)$$

avec $\dot{\theta}(t) = -\omega_0.\theta_m.\sin(\omega_0.t + \phi)$ et $\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2.\theta(t)$

En remplaçant dans l'équation différentielle donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$

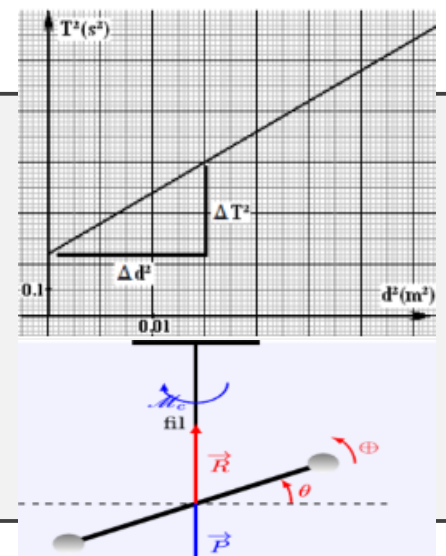
La période propre du pendule de torsion : $T_0 = \frac{2.\pi}{\omega_0} = 2.\pi.\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$

Remarque : si la tige du pendule de torsion porte deux masselottes équivalentes ayant la même masse

Dans ce cas le moment d'inertie de l'ensemble est $J'_{\Delta} = J_{\Delta} + 2.m.d^2$ et la période propre

$$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{J_{\Delta} + 2.m.d^2}{C}}$$

donc $T_0^2 = 4.\pi^2.\frac{J_{\Delta}}{C} + \frac{8.\pi^2.m.J_{\Delta}}{C}.d^2$ et pour coefficient directeur $\alpha = \frac{\Delta T_0}{\Delta d^2} = \frac{8.\pi^2.m.J_{\Delta}}{C}$



II.3 LE PENDULE PESANT:

II.3.1 Equation différentielle du mouvement:

On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale. Appelons θ l'angle que forme OG avec la ligne verticale passant par O. (voir figure).

Pendant son mouvement, le pendule pesant est soumis à l'action des forces suivantes:

- \vec{P} : son poids.
- \vec{R} : réaction de l'axe de rotation.
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F}_\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow M(\vec{P}_\Delta) + M(\vec{R}_\Delta) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{m \cdot g \cdot d}{J_\Delta} \cdot \sin(\theta) = 0$$

- pour Les faibles oscillations dont $\theta < 15^\circ$ on peut écrire par approximation $\sin(\theta) \approx \theta$ et l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{m \cdot g \cdot d}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$

II.3.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement:

La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(t) = \theta_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

donc $\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \cdot \theta_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$ et $\ddot{\theta}(t) = \omega_0^2 \cdot \theta(t)$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on $\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{J_\Delta}}$

La période propre du pendule pesant dans le cas des petites oscillations $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$

donc $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

II.4 LE PENDULE SIMPLE:

Lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale, il oscille autour de sa position d'équilibre.

Bilan des forces qui s'exercent sur le corps :

- \vec{P} :son poids.
- \vec{T} :tension du fil.
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F}_\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow M(\vec{P}_\Delta) + M(\vec{T}_\Delta) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$
- pour les petite oscillation on a $\sin(\theta) \approx \theta$ avec $J_\Delta = m \cdot l^2$
- l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

II.4.1 Solution de l'équation différentielle du mouvement:

La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme suivante :

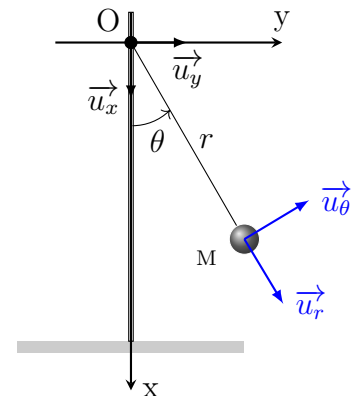
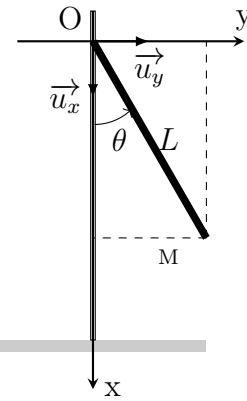
$$\theta(t) = \theta_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

donc $\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \cdot \theta_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$ et $\ddot{\theta}(t) = \omega_0^2 \cdot \theta(t)$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

La période propre du pendule pesant dans le cas des petites oscillations $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}$

donc $T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$



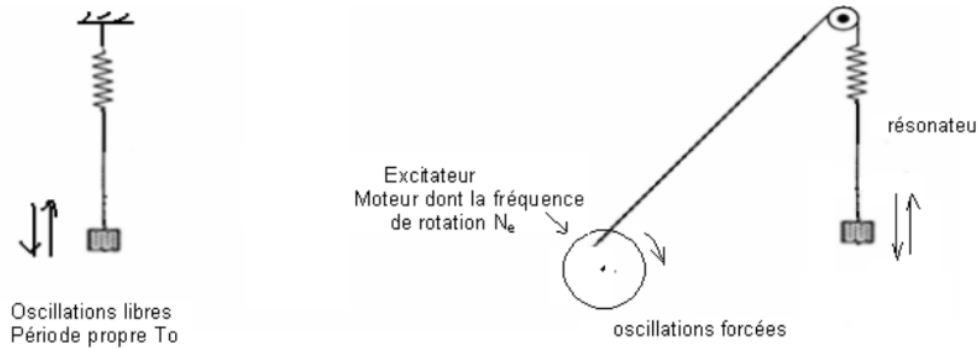
III Phénomène de résonance mécanique :

III.1 Les Oscillations forcées :

Les frottements agissent sur les oscillations mécaniques et leur mouvement devient amortie. et on peut entretenir leur mouvement en récompensant l'énergie dissipée par une méthode convenable à l'oscillateur.

On lie l'oscillateur avec un appareil qui lui fournit l'énergie nécessaire pour que son mouvement soit entretenu , cet appareil s'appelle : l'excitateur qui est un système ayant un mouvement oscillatoire qui impose sa période T_e à l'oscillateur qui s'appelle (résonateur) et le mouvement de ce dernier devient forcé.

III.2 Exemple d'oscillations forcées :



Dans cet exemple le pendule joue le rôle du résonateur, sa fréquence propre est N_0 alors que le moteur joue le rôle de l'excitateur sa fréquence est N_e . En liant l'oscillateur mécanique avec le moteur , il s'oblige d'osciller avec une fréquence égale à celle du moteur. En faisant varier la fréquence du moteur on obtient la plus grande amplitude du résonateur lorsque la fréquence du moteur (excitateur) est égale à la fréquence propre du pendule élastique (résonateur) ,on dit qu'il y'a résonance

