Matière : Physique-Chimie
Unité : Electricité
Niveau : 2BAC-SM-PC

Professeur : Zakaria HAOUZAN
Établissement : Lycée SKHOR qualifiant
Heure : 6H

Leçon $N°8$: Circuit RLC série

I La Bobine :

I.1 Définition :

Le circuit RLC est constitué d'un condensateur initiallement chargé monté en série avec une résistance R et une bobine

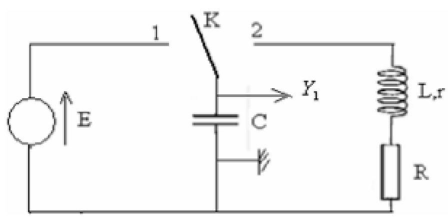
II Oscillations libres dans un circuit RLC série.

II.1 Décharge d'un condensateur dans une bobine.

II.1.1 Etude expérimentale.

On réalise le montage suivant :

On place l'interrupteur K à la position (1) une durée suffisante pour que le condensateur soit chargé puis le bascule à la position 2 tout en visualisant à la voie y1 sur l'écran d'un oscilloscope la tension aux bornes du condensateur .



On obtient ainsi un circuit RLC en série dans lequel la charge emmagasinée dans le condensateur oscille entre ses armatures car le condensateur se décharge et se charge régulièrement mais grâce à l'existence de la résistance dans le circuit , la charge du condensateur diminue de même que la tension entre ses bornes :on dit que les oscillations sont amorties .

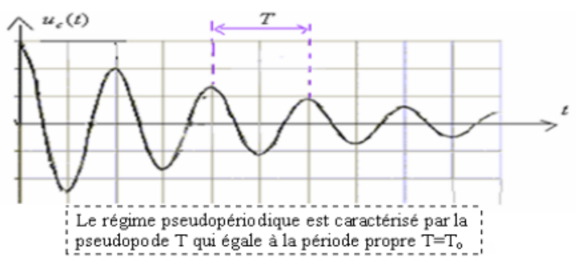
Et comme le circuit RLC ne comporte pas de générateur : **les oscillations sont dites libres et amorties** . (l'amortissement est due au fait qu'une partie de l'énergie électrique se perd sous forme de chaleur au niveau de la résistance du circuit par effet Joule).

II.1.2 Les régime d'amortissement :

Selon la valeur de la résistance on distingue trois régimes:

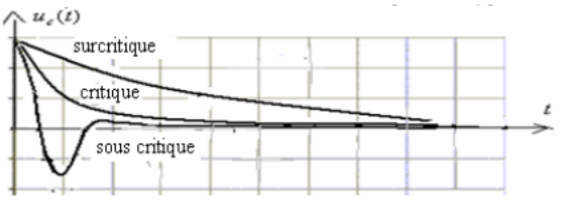
Le régime périodique : Si la résistance totale du circuit est nulle les oscillations sont libres et non amorties

Le régime pseudopériodique : Si la résistance totale du circuit est faible les oscillations sont libres et amorties et leur amplitude diminue jusqu'à ce qu'il s'annule. (c'est l'état de l'amortissement faible).



Le régime apériodique: Si la résistance totale du circuit est grande, les oscillations disparaissent car l'amortissement est fort, le condensateur perd sa charge sans oscillations et on distingue dans ce cas trois régimes:

- Le régime sous critique : la tension aux bornes du condensateur effectue une seule oscillation avant de s'annuler.
- Le régime critique : la tension aux bornes du condensateur s'annule sans oscillations.
- Le régime surcritique : la tension aux bornes du condensateur dure un temps très long pour s'annule sans oscillations.



II.1.3 Equation différentielle d'un circuit RLC en série :

On considère le montage suivant dans lequel le condensateur est initialement chargé.

En appliquant la loi d'additivité des tensions on a: $u_C + u_R + u_L = 0$

donc

$$\frac{d^u_C}{dt^2} + \frac{R_t}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$$

avec $R_t = R + r$ et C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC en série.

Le terme $\frac{R_t}{L}.\frac{du_C}{dt}$ résulte de l'amortissement (par son annulation l'amortissement disparait).

III Oscillations non amorties dans un circuit idéal LC :

III.1 Etude expérimentale.

On considère le montage expérimental suivant constitué d'un condensateur de capacité C initialement chargé et d'une bobine idéale d'inductance L et de résistance nulle r=0.(ce qui est difficile de réaliser pratiquement car quelque soit la bobine , sa résistance est non nulle , donc c'est un circuit idéal)

III.2 Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions: $u_L + u_C = 0$ donc

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC.

III.3 Solution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle: $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$ est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$$

- $u_C(t)$: tension aux bornes du condensateur. en (V)
- U_m :amplitude des oscillations :(c'est l'élongation maximale) en (V)
- ϕ : la phase du mouvement à l'instant t=0. en (rad).
- T_0 : la période propre des oscillations en (s)

III.4 Expression de la période propre :

Or la solution de l'équation différentielle: $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$ est $u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
En remplaçant dans l'équation différentielle on Trouve que $T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$

III.5 Utilisation de l'équation de dimension pour Déterminer l'Unité de T_0

On a $T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$ donc $[T_0] = ([L][C])^2$
d'après la relation : $i = C\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$ donc $[T_0] = [t]$

III.6 Expression de l'intensité du courant et de la charge dans le circuit idéal LC :

L'expression de la charge du condensateur en fonction du temps est : $q(t) = C.u_C(t)$ avec
$u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
qu'on peut écrire :

$$q(t) = q_m.cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi)$$

avec $q_m = C.U_m$
L'expression de l'intensité du courant:
$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m.\frac{2.\pi}{T_0}.sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi) = q_m.\frac{2\pi}{T_0}.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi + \frac{\pi}{2})$ car $-sin(\alpha) = cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$
qu'on peut écrire :

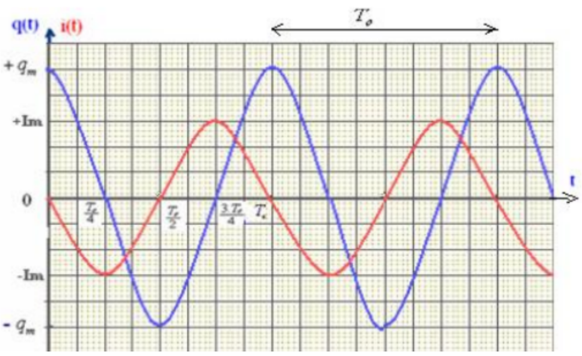
$$i(t) = I_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

avec $I_m = q_m.\frac{2\pi}{T_0}$
Pour déterminer la valeur de ϕ on utilise les conditions initiales qui sont $u_C(t) = E$ à $t = 0$
donc en remplaçant dans $u_C(t = 0) = E$ elle devient $cos(\phi) = \frac{E}{E} = 1$ donc $\phi = 0$
donc:

$$q(t) = q_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t) et i(t) = I_m.Cos(\frac{2\pi}{T_0} + \frac{\pi}{2})$$

q(t) et: i(t). sont en quadrature de phase.(lorsque l'une est maximale ou bien minimale l'autre s'annule.)

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3.T_0}{4}$	T_0
q(t)	$+ q_m$	0	$-q_m$	0	$+q_m$
i(t)	0	$-I_m$	0	$+I_m$	0



IV Transfert d'énergie entre la bobine et le condensateur :

IV.1 Energie du circuit LC :

IV.1.1 Expression de l'énergie totale d'un circuit LC:

L'énergie totale d'un dipôle LC est la somme de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine.

$$\xi = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}.L.i^2$$

On a

- $u(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
- $q(t) = C.u(t) = q_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
- $i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m.\frac{2\pi}{T_0}sin(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
- $T_0^2 = 4\pi^2.L.C$

Alors

$$\xi = \frac{q_m^2}{2.C}$$

avec $I_m = q_m.\frac{2.\pi}{T_0}$ donc $q_m = \frac{I_m.T_0}{2\pi}$
donc $q_m = LCI_m^2$

$$\xi_t = \frac{1}{2}.\frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2}.L.I_m^2$$

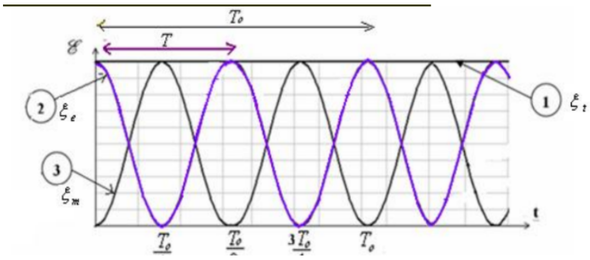
et On a $q_m = C.E$

$$\xi = \frac{1}{2}.CE^2$$

donc:l'énergie totale du circuit LC est constante.

IV.1.2 Courbes de variation des énergies d'un circuit idéal LC:

La période T de l'échange énergétique entre la bobine et le condensateur est égale à la moitié de la période propre To. Au cours des oscillations non amorties, l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur se transforme en énergie magnétique emmagasinée dans la bobine et inversement.



IV.1.3 Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique:

L'énergie totale d'un dipôle LC est constante $\xi_t = Cst$ donc $\frac{d\xi}{dt} = 0$ avec $\xi_t = \xi_e + \xi_m$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.u_C = 0$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC.

IV.2 Energie du circuit RLC en série :

L'énergie totale d'un dipôle RLC est : $\xi_t = \frac{1}{2}.L.i^2 + \frac{1}{2}.\frac{q^2}{c}$

En appliquant la loi d'additivité des tensions On a : $u_R + u_C + u_L = 0$

donc

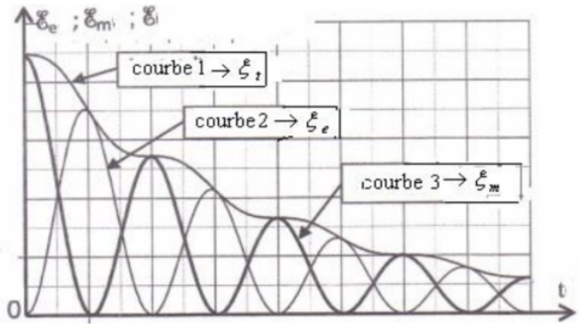
$$L.\frac{di}{dt} + u_C = -R_t.i$$

avec $R_t = R + r$

d'autre part on a : $\frac{\xi_t}{dt} = L.i\frac{di}{dt} + \frac{q}{c}.\frac{dq}{dt} = i.(L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{c}) = -R_t.i^2$

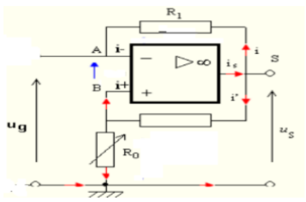
donc $\frac{d\xi_t}{dt} = -R_t.i^2 < 0$ donc l'énergie totale du circuit RLC est décroissante.

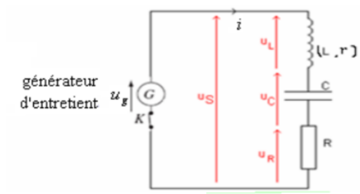
L'énergie totale du circuit RLC décroit en fonction du temps et les oscillations sont amorties à cause de la perte de l'énergie électrique par effet joule au niveau de la résistance.



V Entretien des oscillations :

Pour entretenir les oscillations on doit utiliser un générateur d'entretient pour récompenser l'énergie perdue par effet Joule à chaque oscillation.





La tension aux bornes du générateur d'entretient est proportionnelle à l'intensité du courant $u_g = R_0.i$ avec $R_0 = R + r$

Ce générateur se comporte comme une résistance négative. En appliquant la loi d'additivité des tensions on a: $u_g = u_R + u_C + u_L$

$$LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC.donc les oscillations sont entretenues et l'amplitude devient constante.