

Dédicace

“

À nos parents bien-aimés, pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices silencieux, leur patience infinie et leur soutien constant. C'est grâce à leurs valeurs et à leur confiance que nous avons pu avancer avec détermination.

À nos frères, sœurs, et tous les membres de nos familles respectives, pour leur présence, leurs encouragements et leur bienveillance tout au long de notre parcours.

À M Fakhouri, pour son accompagnement inspirant, sa passion communicative pour la finance quantitative, et ses conseils éclairés. Son encadrement a été déterminant dans l'aboutissement de ce projet.

À nos amis, camarades, enseignants et toutes les personnes qui ont croisé notre chemin avec bienveillance.

À tous ceux qui nous sont chers — cette modeste contribution académique vous est dédiée, avec gratitude et respect.

Merci.

”

Remerciements

Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude à l'ensemble de nos professeurs pour les efforts qu'ils ont déployés tout au long de notre formation. Leur engagement constant, la richesse de leur enseignement et leur rigueur intellectuelle ont constitué les piliers de notre parcours académique.

Ce projet représente l'aboutissement d'un long processus d'apprentissage et de recherche. Nous tenons à adresser nos plus sincères remerciements à notre encadrant, **Monsieur Imade FAKHOURI**, professeur à l'ENSA, pour son encadrement précieux, sa disponibilité, ses remarques pertinentes, ainsi que son accompagnement bienveillant et motivant durant toutes les étapes de ce travail.

Nous remercions également **Monsieur Anas NADIM**, CEO de l'entreprise où nous avons effectué notre stage, pour son accueil, sa confiance, ainsi que les conditions favorables qu'il nous a offertes pour la réalisation de ce projet.

Nos remerciements vont également à toutes les personnes, de près ou de loin, qui ont contribué au bon déroulement de ce travail. Bien que nous ne puissions les citer individuellement, qu'elles trouvent ici l'expression de notre reconnaissance sincère.

Enfin, nous adressons nos remerciements respectueux aux membres du jury, **Madame Soukaina HADIRI** et **Monsieur Lahcen TAOUFIQ**, pour l'intérêt qu'ils portent à notre projet et l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'évaluer ce travail.

Merci à toutes et à tous.

Résumé

Ce projet examine de manière critique les méthodes de calibration du modèle de Heston, un sujet classique en finance quantitative mais toujours au cœur de défis computationnels significatifs. Nous commençons par situer le modèle de Heston dans le contexte de la valorisation d'options, en soulignant sa capacité à dépasser les limites du modèle de Black-Scholes grâce à sa modélisation de la volatilité stochastique. Notre travail se concentre ensuite sur l'analyse approfondie des limitations de la calibration traditionnelle du modèle, notamment sa sensibilité aux valeurs initiales, son instabilité temporelle, et ses difficultés à reproduire fidèlement les surfaces de volatilité complexes. Face à ces contraintes, nous proposons une approche alternative basée sur Deep Learning, en développant une architecture de réseau de neurones spécifiquement conçue pour inverser le problème de calibration. La comparaison empirique des deux méthodes révèle des avantages significatifs de l'approche par deep learning en termes de rapidité d'exécution et de robustesse face aux données bruitées, tout en maintenant une précision comparable. Cette étude apporte ainsi une contribution à l'optimisation des processus de calibration pour les modèles à volatilité stochastique, avec des implications directes pour la gestion des risques et le pricing d'options.

Mots clés :

Modèle de Heston, calibration, volatilité stochastique, optimisation non-linéaire, Deep Learning, réseaux de neurones, robustesse algorithmique, surface de volatilité, pricing d'options

Abstract

This project critically examines calibration methods for the Heston model, a classic topic in quantitative finance that still presents significant computational challenges. We begin by situating the Heston model within the context of option pricing, highlighting its ability to overcome the limitations of the Black-Scholes model through its stochastic volatility framework. Our work then focuses on a thorough analysis of the limitations of traditional calibration approaches, particularly their sensitivity to initial values, temporal instability, and difficulties in faithfully reproducing complex volatility surfaces. To address these constraints, we propose an alternative approach based on deep learning, developing a neural network architecture specifically designed to invert the calibration problem. The empirical comparison between the two methods reveals significant advantages of the deep learning approach in terms of execution speed and robustness to noisy data, while maintaining comparable accuracy. This study thus contributes to the optimization of calibration processes for stochastic volatility models, with direct implications for risk management and option pricing.

Keywords : Heston model, calibration, stochastic volatility, non-linear optimization, deep learning, neural networks, algorithmic robustness, volatility surface, option pricing

Table des matières

Dédicace	I
Remerciements	II
Résumé	III
Abstract	IV
Table des figures	VIII
Liste des tableaux	IX
Liste des algorithmes	X
Liste des sigles et acronymes	XI
Introduction générale	1
1 Fondements théoriques et contexte financier	3
1.1 Introduction	3
1.2 Les marchés financiers et les produits dérivés	3
1.2.1 Structure et fonctionnement des marchés	4
1.2.2 Produits financiers fondamentaux	5
1.2.3 Le marché des options	6
1.3 Notions de risque et volatilité	8
1.3.1 Définition et types de risques de marché	8
1.3.2 La volatilité comme mesure du risque	9
1.4 Concepts Avancés pour l'Analyse des Options	9
1.4.1 L'univers risque neutre	9
1.4.2 Les "Grecques" : indicateurs de sensibilité	10
1.4.3 Transformation de Fourier	11
1.5 Conclusion	11
2 Modèles d'évaluation d'options	12
2.1 Introduction	12
2.2 Le modèle de Black-Scholes et ses limites	12
2.2.1 Hypothèses et formulation du modèle	12
2.2.2 Présentation du modèle	13
2.2.3 Volatilité implicite (VI)	13

2.2.4	Équation aux dérivées partielles de BS	14
2.2.5	Formule de Black-Scholes	14
2.2.6	Limites du modèle de Black-Scholes	15
2.3	Le modèle de Heston	16
2.3.1	Dynamique du modèle	16
2.3.2	Conditions de Feller et autres contraintes	17
2.3.3	EDP de Heston	18
2.3.4	Solution semi-analytique par transformée de Fourier	18
2.4	Méthodes numériques pour le pricing d'options avec Heston	19
2.4.1	Méthode de Monte Carlo	20
2.4.2	Pricing avec FFT (Méthode de Carr-Madan)	22
2.5	Limitations du modèle de Heston	23
2.5.1	Sensibilité aux paramètres du modèle	23
2.6	Conclusion	24
3	Calibration traditionnelle du modèle de Heston	25
3.1	Introduction	25
3.2	Principes de la calibration	25
3.2.1	Définition du problème de calibration inverse	25
3.2.2	Choix de la fonction objectif	26
3.2.3	Contraintes et espace des paramètres	27
3.3	Méthodes d'optimisation classiques	27
3.3.1	Algorithmes d'optimisation globale vs locale	27
3.3.2	Descente de gradient	29
3.3.3	Maximum de vraisemblance	30
3.4	Limitations des approches classiques	31
3.4.1	Sensibilité aux conditions initiales	31
3.4.2	Temps de calcul et complexité	32
3.4.3	Difficultés à capturer certaines dynamiques de marché	33
3.5	Conclusion	34
4	Calibration par les réseaux de neurones artificiels	35
4.1	Introduction	35
4.2	Principe des Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)	35
4.2.1	Architecture d'un neurone artificiel	36
4.2.2	Types de réseaux de neurones pour la calibration	38
4.2.3	Fonction de perte	38
4.2.4	Optimisation	39
4.3	Structure et Conception des RNA pour Calibration d'Options	42
4.3.1	Approches pour la calibration par RNA	42
4.3.2	Étape forward : RNA de pricing	42
4.3.3	Étape backward : optimisation par Évolution Différentielle	43
4.4	Conclusion	43
5	Implémentation empirique et comparaison sur l'indice SPX	44
5.1	Introduction du cas d'étude	44
5.2	Collecte et préparation des données	44

5.2.1	Sous-jacent	44
5.2.2	Les données d'options	45
5.2.3	Analyse descriptive de la volatilité	46
5.3	Résultats de calibration	47
5.3.1	Méthode par forme fermée	47
5.3.2	Méthode par transformation de Fourier rapide (FFT)	47
5.3.3	Comparaison des temps de calibration	48
5.3.4	Interprétation des résultats	49
5.3.5	Calibration par apprentissage profond	50
5.4	Conclusion	53
Conclusion et perspectives		55
Bibliographie		56
Webographie		57
A Démonstrations mathématiques		58

Table des figures

2.1	Comparaison entre la volatilité constante (Black-Scholes) et le smile observé sur le marché.	16
2.2	Sensibilité de la volatilité implicite à la volatilité de la volatilité (σ).	23
2.3	Sensibilité de la volatilité implicite au paramètre de corrélation (ρ).	24
4.1	neurone biologique	36
4.2	Schéma fonctionnel d'un neurone dans un réseau de neurones	36
4.3	Exemples de fonctions d'activation : Leaky ReLU, Mish, PReLU, ReLU, Sigmoid, Swish.	37
4.4	Architecture d'un réseau de neurones <i>Feed Forward</i>	38
5.1	Série temporelle des prix de l'indice SPX (janvier - décembre 2018)	45
5.2	Surface de volatilité implicite (maturité \times Strike) pour l'indice SPX	46
5.3	Comparaison entre le modèle de Heston calibré par forme fermée et les données de marché	47
5.4	Comparaison entre le modèle de Heston calibré par FFT et les données de marché	48
5.5	Temps de calibration des deux méthodes	49
5.6	Exemple d'une surface de volatilité implicite simulée pour l'entraînement.	51
5.7	Historique de la fonction de perte (ensemble entraînement vs validation).	52
5.8	Prix du modèle vs prix de marché (maturité $\simeq 0.26$ an).	53

Liste des tableaux

3.1	Comparaison des méthodes de pricing pour la calibration du modèle de Heston	33
5.1	Statistiques descriptives des rendements de l'indice SPX (2018)	45
5.2	Statistiques descriptives des données d'options sur SPX (2018)	46
5.3	Paramètres initiaux (forme fermée)	47
5.4	Paramètres calibrés (forme fermée)	47
5.5	Paramètres initiaux (FFT)	48
5.6	Paramètres calibrés (FFT)	48
5.7	Comparaison synthétique des deux méthodes	49
5.8	Caractéristiques du jeu de données synthétiques	50
5.9	Détail de l'architecture du réseau	51
5.10	Hyper-paramètres et métriques obtenues	52
5.11	Paramètres calibrés	53
5.12	Bilan comparatif des trois méthodes	54

Liste des algorithmes

1	Calcul simplifié de la volatilité implicite (Newton-Raphson)	14
2	Descente de Gradient par Lots	40
3	Descente de Gradient Stochastique (SGD)	41
4	Descente de Gradient par Mini-Lots	41
5	Génération de surfaces Heston	50

Liste des sigles et acronymes

BS	<i>Black-Scholes, modèle fondamental d'évaluation d'options à volatilité constante</i>
RMSE	<i>Root Mean Squared Error, racine de l'erreur quadratique moyenne utilisée pour la calibration</i>
DL	<i>Deep Learning, apprentissage profond utilisant des architectures de réseaux de neurones complexes</i>
IV	<i>Implied Volatility, volatilité implicite dérivée des prix d'options observés sur le marché</i>
Heston	<i>Modèle de volatilité stochastique introduit par Steven Heston en 1993</i>
EDS	<i>Équation Différentielle Stochastique, outil mathématique pour modéliser l'évolution aléatoire de variables</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform, algorithme efficace pour la transformée de Fourier discrète</i>
NN	<i>Neural Network, réseau de neurones artificiels pour la modélisation ou la calibration</i>
ED	<i>Évolution Différentielle, algorithme d'optimisation utilisé pour la recherche de minimums globaux dans la calibration des paramètres du modèle</i>
RNA	<i>Réseaux de Neurones Artificiels</i>

Introduction générale

Contexte et importance de la calibration du modèle de Heston

Les produits dérivés représentent aujourd'hui un marché colossal de plusieurs centaines de milliards de dollars, jouant un rôle crucial dans la finance mondiale. Au cœur de ces instruments complexes, les options financières sont des outils stratégiques essentiels pour la gestion des risques, l'optimisation des portefeuilles et l'élaboration de stratégies spéculatives. Une option donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif à un prix fixé d'avance (strike), soit à une date précise (option européenne), soit durant une période donnée (option américaine).

Le modèle de Black-Scholes, bien qu'élégant mathématiquement, se heurte à des limites importantes dans la pratique, notamment l'hypothèse d'une volatilité constante qui contredit clairement ce qu'on observe sur les marchés. Face à ces anomalies, le modèle de Heston (1993) s'est imposé comme une alternative incontournable. En traitant la volatilité comme un processus stochastique corrélé au prix du sous-jacent, ce modèle offre un cadre plus souple capable de reproduire la plupart des caractéristiques observées sur les marchés, notamment les phénomènes de smile et de skew de volatilité.

La calibration du modèle de Heston, bien que largement traitée dans la littérature depuis les années 1990, reste un défi opérationnel majeur. Cette procédure vise à identifier les paramètres du modèle qui minimisent l'écart entre les prix théoriques et les prix observés sur le marché. Si les méthodes traditionnelles de calibration sont bien établies, elles présentent néanmoins des limitations significatives en termes de rapidité d'exécution, de stabilité des résultats et de robustesse face aux données bruitées. Dans l'environnement actuel des marchés financiers ultra-rapides, ces contraintes deviennent particulièrement problématiques.

Problématique et objectifs du projet

Ce projet se concentre sur l'analyse critique des méthodes de calibration du modèle de Heston, en mettant l'accent sur leurs limitations et en proposant des alternatives basées sur Deep Learning. Notre problématique s'articule autour de plusieurs questions fondamentales :

- Quelles sont les limites intrinsèques des méthodes traditionnelles de calibration du

modèle de Heston en termes de stabilité, de sensibilité aux conditions initiales et de temps de calcul ?

- Dans quelle mesure les réseaux de neurones peuvent-ils constituer une alternative viable pour résoudre efficacement le problème inverse de calibration ?
- Comment évaluer rigoureusement les performances comparatives des deux approches selon des critères pertinents pour les applications financières réelles ?

Les objectifs de ce projet sont multiples :

1. Établir un cadre théorique solide pour comprendre les fondements du modèle de Heston et ses avantages par rapport au modèle de Black-Scholes.
2. Implementer et analyser en profondeur les méthodes traditionnelles de calibration, en mettant en évidence leurs limitations.
3. Développer une architecture de réseau de neurones adaptée à la calibration du modèle de Heston, capable d'apprendre la relation inverse entre prix d'options et paramètres du modèle.
4. Comparer les performances des deux approches selon plusieurs dimensions : précision, temps de calcul, robustesse aux données bruitées et capacité à reproduire les surfaces de volatilité.

Méthodologie générale

Notre approche méthodologique se décompose en cinq phases principales :

Premièrement, nous introduisons les fondements théoriques et le contexte financier du projet. Cette phase permet d'établir les bases nécessaires à la compréhension des notions clés liées aux marchés, aux produits dérivés et aux outils mathématiques utilisés.

Deuxièmement, nous présentons le modèle de Heston, en le comparant au modèle de Black-Scholes et en mettant en lumière sa capacité à mieux représenter certains comportements de marché, comme le smile de volatilité.

Troisièmement, nous implémentons des méthodes classiques de calibration et en analysons les principales limites : sensibilité aux conditions initiales, instabilité des paramètres et temps de calcul important.

Quatrièmement, nous développons une approche fondée sur les réseaux de neurones profonds, en concevant une architecture adaptée et en optimisant l'apprentissage sur des données simulées.

Enfin, nous comparons les deux approches à partir de données simulées et réelles, selon des critères de précision, de stabilité et d'efficacité.

Cette démarche permet de dégager des enseignements clairs sur les forces et limites de chaque méthode.

Chapitre 1

Fondements théoriques et contexte financier

1.1 Introduction

Avant d'aborder les aspects pratiques et algorithmiques du projet, il est essentiel de poser le cadre conceptuel dans lequel il s'inscrit. Ce chapitre présente les fondements financiers, mathématiques et technologiques nécessaires à la compréhension du travail mené.

Ce projet s'est déroulé au sein de **Oracle Capital**, une startup spécialisée dans l'application de l'Intelligence Artificielle à l'analyse financière, à la prise de décision en investissement et au trading. Fondée par **Monsieur Anas Nadim**, l'entreprise développe des solutions innovantes basées sur des modèles algorithmiques avancés, adaptées aux besoins des acteurs du marché. Cette immersion dans un environnement combinant finance quantitative et technologies de pointe a constitué un cadre idéal pour l'étude approfondie des méthodes de valorisation d'options et de calibration de modèles stochastiques.

Dans ce chapitre, nous explorons les mécanismes fondamentaux des marchés financiers, les produits dérivés, la notion de volatilité, les risques associés aux actifs financiers, ainsi que les bases probabilistes essentielles pour modéliser ces instruments. Nous introduisons également des outils mathématiques comme la transformée de Fourier, largement utilisés dans les modèles de pricing modernes, et présentons les types de données financières utilisées dans notre travail.

1.2 Les marchés financiers et les produits dérivés

Les marchés financiers offrent un cadre réglementé pour l'échange d'instruments financiers et de produits dérivés, favorisant la gestion des risques et la découverte des prix (Selon [6]).

1.2.1 Structure et fonctionnement des marchés

1.2.1.1 Marché organisé (Bourses)

Un marché organisé, communément appelé bourse, est une plateforme centralisée où acheteurs et vendeurs effectuent des transactions sur des instruments financiers. Les ordres sont transmis par un intermédiaire à un membre officiel de la bourse, garantissant une exécution standardisée. Une chambre de compensation joue un rôle clé en se positionnant comme contrepartie unique pour toutes les transactions : elle agit comme acheteur pour chaque vendeur et comme vendeur pour chaque acheteur. Cette structure élimine le risque de contrepartie et assure la bonne exécution des échanges. En Europe, des entités supervisent le fonctionnement des principales bourses, telles qu'Euronext, garantissant leur stabilité et leur transparence.

Les marchés organisés sont encadrés par une autorité régulatrice et gérés par une entreprise de marché. Ils se caractérisent par :

- Une standardisation des contrats et des procédures.
- Une centralisation des ordres d'achat et de vente.
- Un accès réservé aux membres agréés.
- La présence d'une chambre de compensation, qui élimine le risque de contrepartie en s'interposant entre acheteurs et vendeurs.

Aujourd'hui, ces marchés fonctionnent principalement via des réseaux informatiques, les transactions physiques sur les parquets ayant largement disparu.

1.2.1.2 Marché de gré à gré (OTC)

Le marché de gré à gré, ou *Over-The-Counter* (OTC), est un marché décentralisé où les transactions s'effectuent directement entre un acheteur et un vendeur, sans intermédiation d'une chambre de compensation. Cela implique un risque de contrepartie plus élevé que sur les marchés organisés, car aucune entité centrale ne garantit l'exécution des contrats. Ce marché attire certaines entreprises, notamment celles trop petites pour répondre aux critères d'admission des bourses, ainsi que des acteurs recherchant des contrats personnalisés, comme des instruments de couverture contre le risque de change. Par sa nature bilatérale, le marché OTC est moins transparent et moins standardisé que les marchés organisés.

Les marchés *Over-The-Counter* (OTC) reposent sur des accords bilatéraux, sans autorité centralisée. Ils sont animés par des *market makers*, qui proposent des cotations continues (bid et ask) et s'engagent à échanger une quantité minimale de titres. Leur rémunération provient de l'écart entre les prix d'achat et de vente.

Contrairement aux marchés organisés, les marchés OTC sont souvent fragmentés, avec des prix pouvant varier selon les lieux de négociation. Cette fragmentation peut donner lieu à des stratégies d'arbitrage exploitant les écarts de prix entre différents marchés.

1.2.2 Produits financiers fondamentaux

1.2.2.1 L'Action : Un Fragment de Propriété

L'action, ou part sociale, symbolise une fraction du capital d'une entreprise. En détenant une action, l'investisseur (actionnaire) acquiert un droit potentiel sur les décisions de gestion et une part des bénéfices distribués (dividendes). Ces titres sont émis pour financer l'expansion de l'entreprise via les marchés financiers. Bien que sa valeur initiale soit établie par l'émetteur, son cours fluctue en bourse au gré de l'offre et de la demande.

On distingue principalement deux catégories d'actions : les actions ordinaires, conférant des droits standards, et les actions préférentielles, qui octroient des avantages spécifiques, notamment en matière de dividendes et de priorité en cas de liquidation.

Le prix d'une action est influencé par une multitude de facteurs, allant de la santé financière de l'entreprise aux variations des taux de change, en passant par les annonces économiques et gouvernementales, sans oublier les dynamiques spéculatives. Il est notable qu'un ordre de vente conséquent peut engendrer un mouvement de panique, incitant à des ventes massives d'actions similaires, un phénomène connu sous le nom d'impact sur les prix.

1.2.2.2 L'Indice Boursier : Indicateur de Performance

Un indice boursier est un outil de référence utilisé par les marchés pour évaluer la performance globale d'une économie ou d'un secteur financier. À Paris, le CAC 40, principal indice d'Euronext Paris, suit les 40 plus grandes entreprises françaises. Initialement "Compagnie des Agents de Change", son acronyme signifie désormais "Cotation Assistée en Continu". Sa composition, basée sur la capitalisation boursière pondérée de chaque titre, est révisée trimestriellement, avec des remplacements issus du CAC Next 20 selon des critères de liquidité et de capitalisation. Sa cotation est actualisée toutes les 15 secondes.

Le CAC Next 20 regroupe les 20 valeurs suivant immédiatement le CAC 40 en termes de capitalisation. Le SBF 120, géré par la Société des Bourses Françaises, inclut le CAC 40 et les 80 valeurs les plus liquides parmi les 200 premières capitalisations françaises. Le SBF 250, quant à lui, englobe les 250 premières capitalisations.

Au niveau international, le SP 500 est un indicateur majeur du marché américain, composé des 500 plus grandes entreprises des États-Unis. Des indices dérivés existent, tels que le SP 100, 400 et 600, tous pondérés par la capitalisation boursière. Pour une couverture plus étendue du marché US, on peut se référer aux indices Russell (1000, 2000, 3000) ou au Wilshire 5000.

1.2.2.3 L'Obligation : Un Instrument de Dette

L'obligation est un titre de créance négociable émis par une entité publique ou privée, principalement échangé sur les marchés de gré à gré. Elle est caractérisée par sa date d'émission et d'échéance, son taux d'intérêt (coupon), sa devise d'émission et la fréquence

des versements d'intérêts. Les conditions de remboursement et la rémunération des prêteurs sont contractuellement définies, avec un intérêt qui peut être fixe ou variable, souvent indexé sur un taux de référence. La valeur nominale de l'obligation sert de base au calcul des intérêts (coupon) que l'emprunteur s'engage à verser à des dates prédéterminées.

Le marché obligataire met en évidence le rôle crucial des agences de notation (S&P, Moody's, Fitch) qui évaluent la solvabilité des émetteurs. Les notations s'échelonnent de AAA (très faible risque de défaut) à D (défaut de paiement). Les obligations se classent en quatre catégories principales : les obligations d'État (émises dans leur propre devise), les obligations souveraines (émises par un État dans une devise étrangère), les obligations du secteur public (émises par des entités publiques comme les entreprises publiques ou les collectivités locales) et les obligations du secteur privé (émises par des entreprises ou associations privées).

1.2.2.4 L'Option : Un Droit Conditionnel

Les options les plus courantes sont les options européennes de type *call* (droit d'acheter) et *put* (droit de vendre) un actif sous-jacent à un prix fixé et une date future, en contrepartie du paiement d'une prime. Contrairement aux contrats à terme (*forward* ou *future*), les options confèrent un droit, et non une obligation, d'exécuter le contrat à l'échéance. Ces options standard sont dites "vanilles". Les options exotiques, en revanche, présentent des structures plus complexes et une variété trop étendue pour être exhaustivement listée ici. On peut citer, par exemple, les options américaines (exercice possible à tout moment avant l'échéance), les options bermudas (exercice possible à des dates prédéfinies), les options asiatiques (paiement basé sur le prix moyen de l'actif), les options *lookback* (paiement basé sur le prix maximal atteint par l'actif durant une période) et les options "as-you-like-this" (l'acheteur choisit à l'échéance si l'option sera un *call* ou un *put*).

1.2.3 Le marché des options

1.2.3.1 Historique

Le premier marché d'options moderne est apparu en 1973, c'était le *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE). Remarquons, sans prétendre qu'il y ait un lien entre les deux événements, que le célèbre article de Fisher Black et Myron Scholes, intitulé "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*", a été publié la même année. De l'autre côté de l'Atlantique, le premier marché d'options a été créé à Londres en 1978 : le *London Traded Option Exchange*, aujourd'hui devenu *LIFFE*, qui fait désormais partie du groupe *Euronext*. En France, le *MONEP* (Marché d'Options Négociables de Paris) a ouvert ses portes en 1987.

1.2.3.2 Fonctionnement du marché des options

Le rôle des marchés organisés d'options est tout d'abord d'assurer la liquidité des options, c'est-à-dire la cotation permanente et l'existence d'un prix unique pour une option

donnée. Deuxièmement, l'existence de marchés organisés simplifie la gestion des contrats optionnels en éliminant le risque de contrepartie, car la contrepartie unique de tous les contrats sur un marché organisé est la chambre de compensation de la bourse.

Les différents participants des marchés d'options sont :

- **Les brokers (courtiers)** : Ils exécutent les ordres des investisseurs.
- **Les market makers (teneurs de marché)** : Ils risquent leur propre capital et assurent la liquidité du marché. Les spécialistes affichent en permanence les prix sur les options les plus liquides. Les contrepartistes répondent aux demandes de prix.
- **La chambre de compensation** : Elle sert à éliminer le risque de contrepartie. Elle demande aux vendeurs d'options le versement du dépôt de garantie et des appels de marge.

1.2.3.3 Types d'options

On distingue généralement deux grandes catégories d'options : les options vanilles et les options exotiques.

- **Options vanilles** : Ce sont les options les plus classiques. Elles comprennent :
 - *Option européenne* : Elle ne peut être exercée qu'à la date d'échéance.
 - *Option américaine* : Elle peut être exercée à tout moment entre la date d'émission et la date d'échéance.
- **Options exotiques** : Ces options présentent des caractéristiques plus complexes et spécifiques. Parmi les plus connues, on trouve :
 - *Option à barrière* : Son activation ou sa désactivation dépend du franchissement d'un certain seuil (barrière) par le prix du sous-jacent.
 - *Option lookback* : Le prix d'exercice est déterminé a posteriori, en fonction du minimum (ou maximum) atteint par le sous-jacent sur une période donnée.
 - *Option asiatique* : Le payoff dépend de la moyenne des prix du sous-jacent sur une période donnée, plutôt que d'un prix unique à l'échéance.

Pour les options européennes, l'exercice est possible uniquement à la maturité T ; le payoff ne dépend que du prix du sous-jacent à la date finale. On a donc :

$$\text{Call : } H_T = (S_T - K)^+$$

$$\text{Put : } H_T = (K - S_T)^+$$

1.2.3.4 Terminologie et notations

Pour assurer une compréhension commune des concepts utilisés dans ce rapport, voici quelques définitions essentielles du jargon des options. Certaines vous sont peut-être déjà familières, d'autres seront approfondies dans les chapitres suivants.

- **Prime** : Montant payé initialement pour l'acquisition du contrat d'option. La méthode de détermination de cette valeur constitue l'objet central de ce projet.
- **Actif sous-jacent** : Instrument financier dont dépend la valeur de l'option. Il est généralement noté S .

- **Prix d'exercice (strike)** : Montant auquel l'actif sous-jacent peut être acheté (dans le cas d'un call) ou vendu (dans le cas d'un put). Il est noté K . Cette définition s'applique principalement aux options classiques ; elle sera généralisée pour les produits dérivés plus complexes abordés ultérieurement.
- **Date d'expiration** : Date à laquelle l'option arrive à échéance, c'est-à-dire qu'elle cesse de conférer des droits à son détenteur. Elle est notée T .
- **Valeur intrinsèque** : Montant que l'option rapporterait si elle était exercée immédiatement, c'est-à-dire en tenant compte du niveau actuel de l'actif sous-jacent.
- **Dans la monnaie (In The Money - ITM)** : Une option est dite dans la monnaie lorsque sa valeur intrinsèque est strictement positive. Par exemple, un call est ITM lorsque $S > K$, tandis qu'un put est ITM lorsque $S < K$.
- **Hors de la monnaie (Out of The Money - OTM)** : Une option est dite hors de la monnaie lorsque sa valeur intrinsèque est nulle. Un call est OTM lorsque $S < K$; un put est OTM lorsque $S > K$.
- **À la monnaie (At The Money - ATM)** : Une option est dite à la monnaie lorsque le prix d'exercice est proche du prix courant de l'actif sous-jacent, soit $K \approx S$.

1.3 Notions de risque et volatilité

1.3.1 Définition et types de risques de marché

1.3.1.1 Définition générale du risque

Le risque en finance désigne la possibilité de résultats variés, souvent défavorables, découlant de choix ou d'événements incertains, il se distingue de l'incertitude, où les probabilités sont inconnues.

1.3.1.2 Définition du risque de marché

Le risque de marché correspond aux pertes potentielles causées par des variations défavorables des prix de marché (taux, actions, devises, etc.). Il est central pour les produits dérivés, dont la valeur dépend des actifs sous-jacents.

1.3.1.3 Les différents types de risque de marché

- **Risque de taux d'intérêt** : pertes dues aux variations des taux.
- **Risque de change** : impact des fluctuations des devises.
- **Risque actions** : variations des prix des actions.
- **Risque de matières premières** : mouvements des prix des commodities.
- **Risque de crédit** : risque de non-respect des engagements par une contrepartie, mesuré par le spread de crédit.
- **Risque de volatilité** : variations de la volatilité, affectant les dérivés comme les options.

1.3.2 La volatilité comme mesure du risque

La volatilité est une mesure clé en finance qui indique à quel point le prix d'un actif change avec le temps. Elle est essentielle pour prévoir les mouvements du marché et gérer les risques. Il existe deux types principaux de volatilité : la volatilité historique et la volatilité implicite.

1.3.2.1 Volatilité historique

Elle est basée sur l'étude de l'historique du prix du sous-jacent. Il faut choisir une période sur laquelle calculer la volatilité, différents horizons temporels peuvent être envisagés en fonction de l'analyse souhaitée. Cette période doit être cohérente avec la maturité des observations. La volatilité historique quantifie les fluctuations passées du sous-jacent, mais ne peut pas anticiper les comportements futurs des investisseurs qui ont une influence considérable sur les prix des actifs financiers, contrairement à la volatilité implicite. C'est pour cette raison que la volatilité implicite et non la volatilité historique est utilisée lors de la valorisation de produits structurés.

1.3.2.2 Volatilité implicite

Elle est déterminée en utilisant les prix des options qui permettent de parier ou de se couvrir sur un scénario extrême. La volatilité implicite est un paramètre essentiel dans l'évaluation des produits dérivés, mais n'est pas observable directement. Il faut donc la déterminer par itération en utilisant la formule de Black & Scholes. La volatilité implicite correcte est celle pour laquelle le prix théorique de l'option, calculé en utilisant le modèle, correspond au prix observé sur le marché. La volatilité implicite peut être interprétée comme un indicateur avancé des mouvements futurs du sous-jacent d'une option. Bloomberg calcule la volatilité implicite et la fournit à ses utilisateurs.

1.4 Concepts Avancés pour l'Analyse des Options

1.4.1 L'univers risque neutre

1.4.1.1 Martingale

Un processus stochastique représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire. On note l'information dont nous disposons à un instant t , \mathcal{F}_t .

Un processus stochastique $(M_t)_{t \geq 0}$ est une **martingale** par rapport à un ensemble d'information $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées (voir [3]) :

1. Le processus (M_t) est adapté à la filtration (\mathcal{F}_t) , c'est-à-dire que M_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \geq 0$.
2. Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ (l'espérance est finie).
3. Pour tout $s < t$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$

Interprétation financière des martingales

En finance, les martingales sont fondamentales car elles modélisent des actifs dont le prix est "équitable". Intuitivement :

- Un processus de prix qui est une martingale signifie que la meilleure estimation du prix futur est le prix actuel - on ne peut pas prédire si le prix montera ou baissera.
- Cette propriété est directement liée au principe d'absence d'opportunité d'arbitrage. Si le prix attendu d'un actif était supérieur à son prix actuel (après actualisation), les investisseurs achèteraient immédiatement cet actif pour réaliser un profit sans risque, faisant monter son prix jusqu'à éliminer cette opportunité.
- De même, si le prix attendu était inférieur au prix actuel, les investisseurs vendraient l'actif, faisant baisser son prix jusqu'à l'équilibre.
- Ainsi, dans un marché efficient, les prix actualisés suivent un processus de martingale sous la mesure de probabilité risque-neutre.

1.4.1.2 Univers risque neutre

L'univers risque neutre est un univers fictif dans lequel le processus de fixation des prix actualisés d'actifs présentant une source de risque commune est une **martingale** sous une unique probabilité appelée « probabilité risque-neutre ».

La martingalité des prix actualisés implique que la meilleure information que l'on peut avoir sur l'évolution future du prix d'un sous-jacent à un temps t est son prix à ce temps t : il n'y a donc aucune opportunité d'arbitrage possible. De plus, l'espérance des prix futurs actualisés est égale aux prix observés en $t = 0$.

L'univers risque-neutre a été introduit dans le but de faciliter la valorisation des produits dérivés. En effet, dans cet univers, il n'y a pas de primes de risque, et le fait que les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque permet de calculer une valeur des options et garanties futures cohérente avec les prix d'options dérivées cotées sur le marché.

1.4.2 Les "Grecques" : indicateurs de sensibilité

Les « grecques » sont des indicateurs de sensibilité qui mesurent l'impact de différents facteurs sur le prix d'un produit financier. Ceux-ci découlent des principaux modèles d'évaluation d'options, tels que le modèle de Black & Scholes. Les facteurs considérés sont :

- le prix du sous-jacent (actif sous-jacent sur lequel l'option est basée) ;
- le prix d'exercice (strike) fixé par l'option ;
- la volatilité implicite (mesure de la variation attendue du prix du sous-jacent) ;
- la date d'expiration de l'option ;
- le taux d'intérêt sans risque.

Les grecques permettent de gérer les différents risques auxquels sont soumis les produits financiers. Dans cette étude, les produits structurés sont indexés sur un indice boursier ou un taux d'intérêt, ce qui les rend sensibles aux variations des taux d'intérêt. Le taux sans risque joue un rôle crucial dans le calcul des flux de trésorerie futurs. La jambe fixe,

qui comprend le taux sans risque et un *spread*, est également sensible aux taux d'intérêt.

Il est donc important de produire des indicateurs de sensibilité aux marchés taux et action afin de mieux comprendre et gérer les risques associés à ces produits structurés.

1.4.3 Transformation de Fourier

La **transformée de Fourier** est une opération qui permet de transformer une fonction f intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction complexe \hat{f} , appelée *transformée de Fourier* de f . Mathématiquement, cela se traduit par :

$$F(f) = \hat{f}$$

Il existe plusieurs définitions de la transformée de Fourier $\hat{f}(u)$ d'une fonction f . Dans le cadre de notre étude, nous utilisons la définition standard de la transformée de Fourier sur \mathbb{R} :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx$$

où $i = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire et u est un paramètre réel. Cette opération transforme une fonction $f(x)$ en une fonction complexe $\hat{f}(u)$, qui est une représentation de $f(x)$ dans l'espace fréquentiel.

En retour, la fonction $f(x)$ peut être récupérée à partir de $\hat{f}(u)$ par la *transformée de Fourier inverse*, donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \hat{f}(u) du$$

Cette relation permet de passer de l'espace fréquentiel à l'espace original, et vice versa.

1.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté les notions essentielles en finance et en mathématiques nécessaires à la suite du projet, notamment le fonctionnement des marchés financiers, les produits dérivés, la volatilité, le risque de marché, ainsi que les outils théoriques comme l'univers risque-neutre, les grecques et la transformée de Fourier. Ces fondations sont indispensables pour aborder les modèles de tarification et les méthodes de calibration développés dans les prochains chapitres.

Chapitre 2

Modèles d'évaluation d'options

2.1 Introduction

L'évaluation rigoureuse des options financières constitue le socle de toute stratégie de gestion des risques et de valorisation des dérivés. Ce chapitre dresse un panorama structuré des principaux cadres théoriques, en partant du modèle de Black-Scholes -référence historique dont l'hypothèse de volatilité constante reste néanmoins restrictive- pour aboutir au modèle de Heston, qui introduit une volatilité stochastique corrélée avec le sous-jacent.

2.2 Le modèle de Black-Scholes et ses limites

2.2.1 Hypothèses et formulation du modèle

Le modèle de Black-Scholes-Merton, formulé en 1973 (Selon [1]), constitue une avancée historique dans la théorie de la tarification des options. Il fournit une solution analytique pour le prix d'une option européenne, en supposant que l'actif sous-jacent suit **un mouvement brownien géométrique**. Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses idéalisées :

- Le marché est **frictionless** : pas de frais de transaction ni d'impôts.
- L'**absence d'arbitrage** est respectée.
- Il est possible d'effectuer une **vente à découvert** sans contrainte.
- Le taux d'intérêt sans risque r est **constant** et connu.
- L'actif sous-jacent ne verse pas de **dividende** pendant la vie de l'option.
- La **volatilité** σ du sous-jacent est constante dans le temps.
- L'actif suit un processus **log-normal** : un mouvement brownien géométrique.

Le modèle, par ses hypothèses, ne correspond pas à la réalité des marchés financiers. Mais l'utilisation de ce modèle se généralise au concept « d'imitation rationnelle ». Il permet d'avoir un moyen de modéliser les changements du marché financier, et peut aider à la prise de décision.

2.2.2 Présentation du modèle

Dans ce modèle, on suppose que S_t (prix de l'action) suit un mouvement brownien géométrique. Plus précisément, sous la probabilité historique \mathbb{P} d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la dynamique de S_t est donnée par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où :

- t : temps, en années ;
- S_t : prix de l'actif sous-jacent S à l'instant t ;
- B_t : un mouvement brownien à l'instant t ;
- μ : drift de S ;
- σ : la volatilité (constante) du sous-jacent.

Notons que σ est le seul paramètre du modèle. D'après un simple calcul stochastique d'intégration, en appliquant la formule d'Itô à l'équation (1), on obtient la représentation explicite de S_t :

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right).$$

On observe également que, puisque $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, S_t suit une distribution log-normale, c'est-à-dire que $\ln S_t$ suit une loi normale.

2.2.3 Volatilité implicite (VI)

La volatilité implicite d'un prix d'option donné est la volatilité du modèle Black-Scholes associée à ce prix, c'est-à-dire que l'on veut trouver la volatilité σ telle que :

$$C_{BS}(t, S_t, K, T, \sigma) = C_{\text{obs}}(t, S_t, K, T),$$

où C_{BS} est le prix donné par le modèle Black-Scholes et C_{obs} est un prix observé sur le marché ou un prix simulé par un modèle donné.

Puisque le prix observé ne change pas à un instant fixe dans le temps, c'est une constante, donc l'équation devient :

$$C_{BS}(t, S_t, K, T, \sigma) - C = 0,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante et la solution σ peut être trouvée en utilisant un algorithme itératif de recherche de racine.

Algorithme de calcul de la volatilité implicite (Newton-Raphson)

Algorithm 1: Calcul simplifié de la volatilité implicite (Newton-Raphson)

Input: Prix observé C , S_0 , K , T , r , tolérance ϵ , itérations max N

Output: Volatilité implicite σ

```

1  $\sigma \leftarrow 0.2$  for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do
2    $C_{BS} \leftarrow \text{BlackScholes}(S_0, K, T, r, \sigma)$ 
3    $\text{vega} \leftarrow \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}$ 
4    $\sigma_{\text{new}} \leftarrow \sigma - \frac{C_{BS} - C}{\text{vega}}$ 
5   if  $|\sigma_{\text{new}} - \sigma| < \epsilon$  then
6     return  $\sigma_{\text{new}}$ 
7   end
8    $\sigma \leftarrow \sigma_{\text{new}}$ 
9 end
10 return Échec de convergence
```

2.2.4 Équation aux dérivées partielles de BS

L'idée centrale du modèle est de construire un portefeuille répliquant une option, composé de Δ actions et d'une position dans l'actif sans risque. En appliquant la formule d'Itô au prix de l'option $C(t, S_t)$ et en annulant le risque en ajustant $\Delta = \partial C / \partial S$, on obtient une **équation aux dérivées partielles** (EDP) de Black-Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Cette EDP est résolue avec la condition terminale :

$$C(T, S) = \max(S - K, 0)$$

pour une option call (et $\max(K - S, 0)$ pour un put).

2.2.5 Formule de Black-Scholes

La solution fermée de l'EDP ci-dessus, obtenue par changement de variables ou via le lemme de Feynman-Kac, donne la célèbre formule :

$$C_{BS}(S_0, K, T, r, \sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et $N(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale standard.

Formule du put et parité call-put

La formule pour le put européen est :

$$P_{BS} = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

On peut aussi la déduire par la relation de parité call-put :

$$C_{BS} - P_{BS} = S_0 - Ke^{-rT}$$

La formule permet une estimation rapide du prix d'une option. Elle est largement utilisée en pratique pour extraire la volatilité implicite à partir des prix observés. Son efficacité repose sur sa simplicité, même si ses hypothèses sont idéalisées.

2.2.6 Limites du modèle de Black-Scholes

2.2.6.1 Hypothèse de volatilité constante

En réalité, la volatilité varie avec le temps et selon le niveau de l'actif. Cela génère des smiles ou skews de volatilité que le modèle ne peut expliquer.

2.2.6.2 Nature européenne des options

Le modèle ne s'applique qu'aux options européennes. Les options américaines, exerçables avant l'échéance, n'y sont pas traitées correctement.

2.2.6.3 Absence de dividendes et hypothèses marchés parfaits

Le modèle suppose l'absence de dividendes, de frictions de marché, de spread bid-ask, de contraintes de liquidité, etc. Il suppose aussi une distribution log-normale des rendements, ignorant les sauts et queues épaisses.

2.2.6.4 Exemples concrets et motivations pour aller plus loin

Un exemple frappant est le **smile de volatilité** observé depuis le krach de 1987. Les marchés montrent une variabilité de la volatilité implicite selon les strikes. Cela motive l'introduction de modèles à volatilité stochastique (Heston) ou d'autres modèles plus sophistiqués.

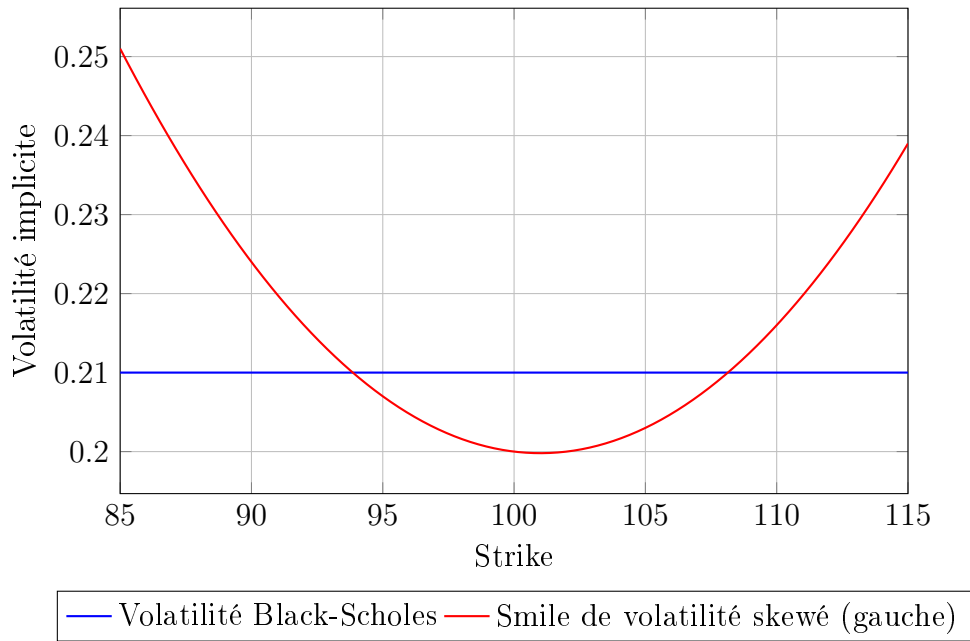


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la volatilité constante (Black-Scholes) et le smile observé sur le marché.

2.3 Le modèle de Heston

Le modèle de Heston, introduit par Steven Heston en 1993, représente une avancée majeure dans la modélisation des options financières. Contrairement au modèle de Black-Scholes qui suppose une volatilité constante, Heston propose un cadre où la volatilité elle-même suit un processus stochastique. Cette innovation permet de mieux refléter les réalités du marché, notamment les phénomènes de smile et de skew de volatilité que nous observons empiriquement.

2.3.1 Dynamique du modèle

Soit S_t le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t et v_t sa variance instantanée (c'est-à-dire σ_t^2). Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le modèle de Heston s'écrit :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \\ dW_t^{(1)}dW_t^{(2)} = \rho dt \end{cases} \quad (2.1)$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, v_t est la variance instantanée (le carré de la volatilité), et $W_{1,t}$ est un mouvement brownien standard et $W_{2,t}$ est un second mouvement brownien avec une corrélation ρ avec $W_{1,t}$.

Le modèle de Heston comprend cinq paramètres principaux, chacun ayant une interprétation financière claire :

2.3.1.1 Volatilité initiale (v_0)

La valeur initiale de la variance v_0 représente le niveau de volatilité du marché au moment de la calibration. Dans la pratique, ce paramètre est souvent déterminé à partir des options à court terme.

2.3.1.2 Vitesse de retour à la moyenne (κ)

Le paramètre κ détermine à quelle vitesse la variance revient vers son niveau d'équilibre θ . Plus κ est élevé, plus rapidement la volatilité retourne à sa valeur moyenne après un choc.

2.3.1.3 Niveau moyen de variance à long terme (θ)

Le paramètre θ représente le niveau de variance vers lequel le processus converge sur le long terme. C'est la volatilité "normale" ou d'équilibre du marché, exprimée en termes de variance annualisée.

2.3.1.4 Volatilité de la volatilité (σ)

Souvent appelée "vol-of-vol", σ mesure l'ampleur des fluctuations aléatoires de la variance. Ce paramètre est crucial pour reproduire les smiles de volatilité observés sur les marchés d'options.

2.3.1.5 Corrélation entre les mouvements browniens (ρ)

Le paramètre $\rho \in [-1, 1]$ capture la corrélation entre les variations du prix du sous-jacent et celles de sa variance. Sur les marchés d'actions, ρ est typiquement négatif, reflétant l'effet de levier.

2.3.2 Conditions de Feller et autres contraintes

2.3.2.1 Condition de Feller (1951)

La condition de Feller garantit que la variance reste strictement positive :

$$2\kappa\theta > \sigma^2$$

Lorsque cette condition est satisfaite, le processus de variance ne peut jamais atteindre zéro. Si elle n'est pas respectée, le processus peut toucher 0, ce qui pose problème pour la racine $\sqrt{v_t}$.

2.3.2.2 Positivité des paramètres

Pour que le modèle soit économiquement sensé, on impose généralement :

$$\begin{aligned}\kappa &> 0 && \text{(retour à la moyenne)} \\ \theta &> 0 && \text{(variance moyenne positive)} \\ \sigma &> 0 && \text{(fluctuations de variance)} \\ v_0 &> 0 && \text{(variance initiale)}\end{aligned}$$

2.3.3 EDP de Heston

La dynamique conjointe du sous-jacent et de sa variance conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) complexe que doit satisfaire le prix de toute option européenne. En suivant une approche de couverture similaire à Black-Scholes mais étendue à deux facteurs de risque (voir Annexe A.3), on obtient l'EDP de Heston :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + rS\frac{\partial U}{\partial S} - [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)]\frac{\partial U}{\partial v} = 0$$

où λ est le prix du marché du risque de volatilité.

2.3.4 Solution semi-analytique par transformée de Fourier

Heston (1993 [4]) a supposé que la forme de la solution serait similaire au modèle Black-Scholes. La formule de la valeur actuelle de Call européenne est illustrée par l'équation ci-dessous :

$$C(S_0, K, T) = S_0P_1 - Ke^{-rT}P_2$$

Ainsi, pour calculer la valeur de Call, il faut trouver à la fois P_1 et P_2 .

Les probabilités données pour P_1 et P_2 peuvent être obtenues par inversion de Fourier (détails en Annexe A.4) :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2$$

Heston (1993) utilise la fonction caractéristique :

$$f_j(\phi) = \exp(i\phi x + C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v)$$

où les paramètres de la fonction caractéristique peuvent être vus dans les équations ci-dessous :

où :

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right]$$

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

avec les paramètres spécifiques pour chaque probabilité :

Pour P_1 (j=1) :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \\ b_1 &= \kappa + \lambda - \rho\sigma \end{aligned}$$

Pour P_2 (j=2) :

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2} \\ b_2 &= \kappa + \lambda \end{aligned}$$

Et les paramètres communs :

$$\begin{aligned} a &= \kappa\theta \\ \tau &= T - t \\ x &= \ln(S_t) \end{aligned}$$

La formule complète pour le calcul du prix d'une option d'achat dans le modèle de Heston nécessite donc :

1. Les paramètres du marché : S_0 (prix actuel de l'actif), K (prix d'exercice), r (taux sans risque), T (maturité).
2. Les paramètres du modèle de Heston : v_0 (volatilité initiale), κ (vitesse de retour à la moyenne), θ (niveau moyen de volatilité à long terme), σ (volatilité de la volatilité), ρ (corrélation).
3. Une méthode d'intégration numérique pour calculer les intégrales dans les expressions de P_1 et P_2 .

2.4 Méthodes numériques pour le pricing d'options avec Heston

Les méthodes numériques jouent un rôle crucial dans l'implémentation pratique du modèle de Heston, notamment pour les options exotiques sans solution analytique.

2.4.1 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une technique numérique largement utilisée pour estimer le prix d'une option lorsque la formule explicite n'est pas disponible ou difficile à évaluer analytiquement, notamment dans le cas d'options exotiques ou de modèles stochastiques complexes.

Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le prix d'une option européenne est donné par l'espérance actualisée du payoff :

$$C(K) = e^{-rT} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

où :

- $C(K)$ est le prix de l'option,
- r est le taux d'intérêt sans risque,
- T est la maturité,
- S_T est le prix du sous-jacent à la date T ,
- K est le prix d'exercice.

Approximation par Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo consiste à approximer cette espérance à l'aide d'une moyenne empirique sur N trajectoires simulées du sous-jacent. Grâce à la **loi forte des grands nombres**, on a :

$$C(K) \approx e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(S_T^{(i)} - K, 0)$$

$$P(K) \approx e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(0, K - S_T^{(i)})$$

où $S_T^{(i)}$ est la i -ème trajectoire simulée du sous-jacent.

Justification théorique

Cette approximation repose sur la loi forte des grands nombres (LGN), qui garantit que, lorsque le nombre de simulations N tend vers l'infini, la moyenne empirique converge presque sûrement vers l'espérance théorique :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S_T^{(i)}) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)]$$

La méthode est donc consistante et permet d'obtenir une approximation arbitrairement précise du prix de l'option, au prix d'un coût computationnel élevé pour de grandes valeurs de N .

2.4.1.1 Schémas de discrétisation

Pour les EDS couplées du modèle de Heston :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases}$$

Plusieurs schémas de discrétisation sont utilisés pour simuler ces dynamiques stochastiques, notamment ceux d'Euler-Maruyama et de Milstein (références [7]). **Schéma d'Euler-Maruyama :**

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &= v_t + \kappa(\theta - v_t^+) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_v \\ S_{t+\Delta t} &= S_t \exp \left(\left(r - \frac{v_t^+}{2} \right) \Delta t + \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_S \right) \end{aligned}$$

Schéma de Milstein (améliore la convergence faible) :

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &= v_t + \kappa(\theta - v_t^+) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_v + \frac{\sigma^2}{4} (Z_v^2 - 1) \Delta t \\ S_{t+\Delta t} &= S_t \exp \left(\left(r - \frac{v_t^+}{2} \right) \Delta t + \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_S + \frac{v_t^+}{4} (Z_S^2 - 1) \Delta t \right) \end{aligned}$$

où Z_S et Z_v sont des gaussiennes corrélées avec $\mathbb{E}[Z_S Z_v] = \rho$.

$$Z_v = \rho Z_S + \sqrt{1 - \rho^2} Z_\perp$$

2.4.1.2 Traitement des valeurs négatives de variance

Les schémas explicites peuvent générer des $v_t < 0$. Pour éviter les variances négatifs, nous pouvons remplacer v_t par v_t^+ :

- **Full truncation scheme** : $v_t^+ = \max(v_t, 0)$
- **Réflexion** : $v_t^+ = |v_t|$

2.4.1.3 Réduction de variance (Variables antithétiques)

Objectif : Réduire la variance en exploitant la symétrie du bruit gaussien.

Méthode : Pour chaque trajectoire basée sur un vecteur gaussien

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, I),$$

on simule également la trajectoire opposée $-Z$. Cela revient à générer deux trajectoires symétriques par rapport à l'origine dans l'espace probabiliste.

Pourquoi ça marche ?

Si le payoff est *monotone* ou *symétrique*, les trajectoires Z et $-Z$ auront des contributions

opposées ou similaires, ce qui tend à stabiliser l'estimateur par effet de compensation partielle.

L'estimateur devient alors :

$$V = \frac{1}{2} (f(Z) + f(-Z))$$

2.4.2 Pricing avec FFT (Méthode de Carr-Madan)

La méthode de Carr & Madan 1999 (référéncé [2]) utilise la transformée de Fourier rapide (FFT) pour calculer rapidement les prix des options avec la fonction caractéristique du modèle de Heston.

2.4.2.1 Formule du prix du call

Le prix d'un call européen $C_T(K)$ avec strike K , maturité T , taux sans risque r , et prix du sous-jacent S_T , est donné par :

$$C_T(K) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{-iuk} \psi_T(u) du \right\}$$

où $k = \log K$, et $\psi_T(u)$ est la transformée de Fourier de $c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(e^k)$.

2.4.2.2 Expression de $\psi_T(u)$

La transformée de Fourier s'écrit :

$$\psi_T(u) = \frac{e^{-rT} \phi_T(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}$$

2.4.2.3 Explication des termes

- $C_T(K)$: Prix du call européen pour un strike K .
- $k = \log K$: Logarithme du strike.
- α : Paramètre de régularisation (positif). Assure l'intégrabilité de $c_T(k)$.
- $\psi_T(u)$: Transformée de Fourier de $c_T(k)$, contient l'information pour $C_T(K)$.
- e^{-rT} : Facteur d'actualisation, avec le taux sans risque r .
- $\phi_T(u - (\alpha + 1)i)$: Fonction caractéristique de $s_T = \log S_T$.

Remarque : Dans le modèle de Heston, $\phi_T(u)$ est connue analytiquement. Le choix de α doit satisfaire $E[S_T^{\alpha+1}] < \infty$.

2.4.2.4 Approximation numérique et FFT

Carr et Madan ont formulé l'expression suivante pour le prix d'un call européen :

$$C(k_u) = \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \kappa(v_j) \eta \cdot \frac{1}{3} [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}]$$

Cette équation est établie en utilisant la **règle de Simpson** pour l'intégration numérique. Elle illustre l'application de la transformée de Fourier rapide (FFT) pour le pricing d'options. Pour utiliser cette formule, les paramètres N (nombre de points) et α (paramètre de régularisation) doivent être choisis avec soin. De plus, le terme $\kappa(v_j)$ dans l'expression renvoie un **vecteur**.

2.5 Limitations du modèle de Heston

2.5.1 Sensibilité aux paramètres du modèle

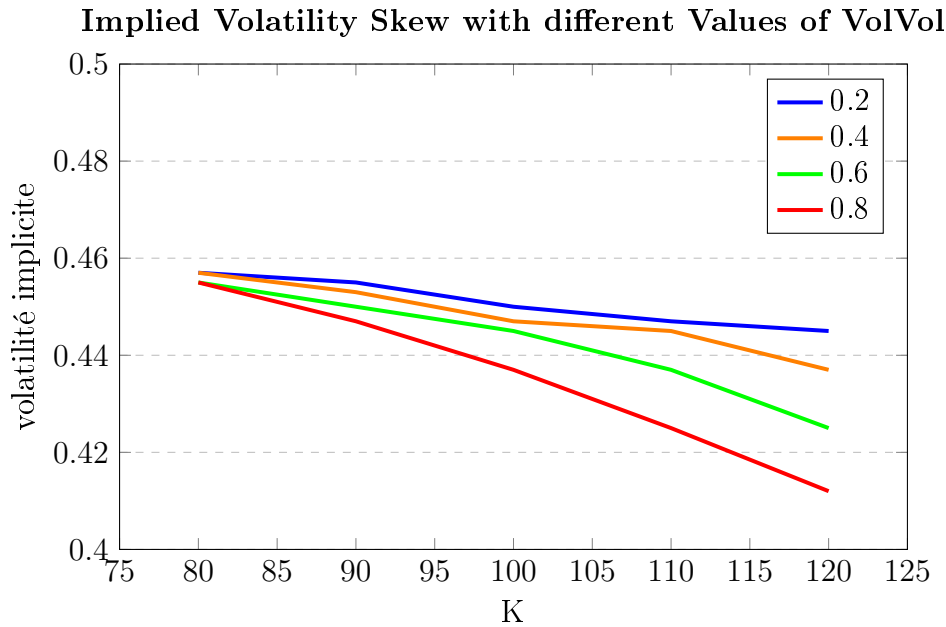


FIGURE 2.2 – Sensibilité de la volatilité implicite à la volatilité de la volatilité (σ).

On observe que l'augmentation de σ accentue la pente du skew de volatilité, montrant une plus grande sensibilité aux strikes éloignés de la monnaie.

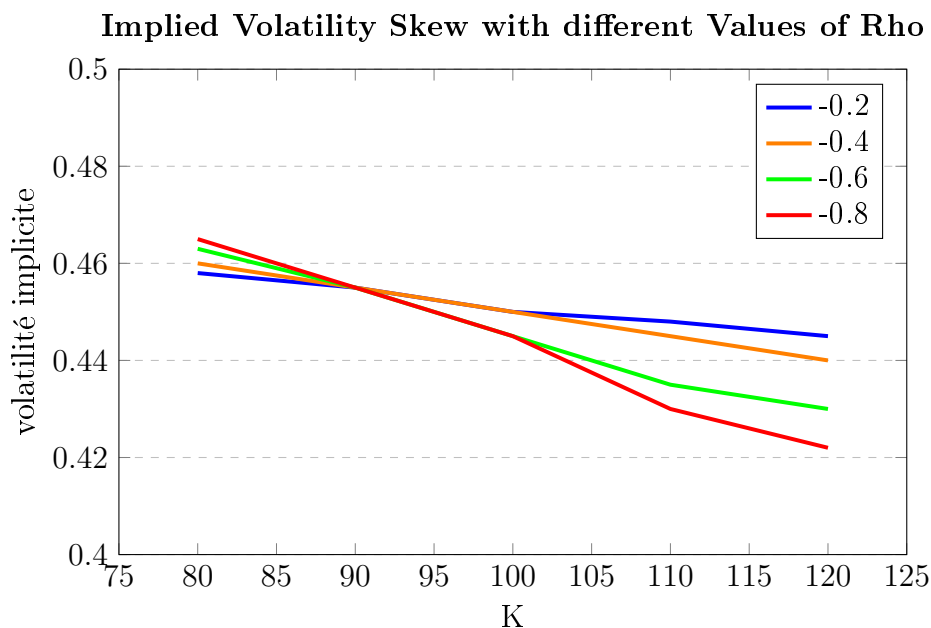


FIGURE 2.3 – Sensibilité de la volatilité implicite au paramètre de corrélation (ρ).

La corrélation négative plus forte (de -0.2 à -0.8) amplifie l'asymétrie du skew, reflétant l'effet de levier (leverage effect) où les baisses de prix d'actif sont associées à des hausses de volatilité.

2.6 Conclusion

L'exploration des modèles d'évaluation montre une tension permanente entre simplicité analytique et réalisme de marché. Black-Scholes offre une solution élégante mais ignore les sourires de volatilité, tandis que Heston en reproduit les principales caractéristiques au prix d'une complexité accrue. Les algorithmes numériques deviennent alors incontournables pour le pricing et ouvrent la voie à la problématique centrale : comment ajuster rapidement et de façon fiable les paramètres d'un modèle riche comme Heston ? Cette question, pivot des applications industrielles, justifie le passage au prochain chapitre consacré à la calibration classique du modèle de Heston.

Chapitre 3

Calibration traditionnelle du modèle de Heston

3.1 Introduction

Pour qu'un modèle de volatilité stochastique soit opérationnel, il doit être calibré sur des données de marché. La calibration traditionnelle du modèle de Heston s'appuie sur la résolution d'un problème inverse : trouver le quintuplet $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$ qui minimise l'écart entre prix théoriques et observés.

3.2 Principes de la calibration

La calibration d'un modèle financier est une étape cruciale qui consiste à déterminer les paramètres optimaux permettant de reproduire au mieux les prix observés sur le marché. Dans le cas du modèle de Heston, cette calibration représente un défi particulier en raison de la complexité du modèle et du nombre important de paramètres à estimer simultanément.

3.2.1 Définition du problème de calibration inverse

Le problème de calibration inverse du modèle de Heston peut être formulé comme suit : étant donné un ensemble d'options observées sur le marché avec leurs prix P_i^{market} (où $i = 1, \dots, N$ représente les différentes options avec différents strikes et maturités), nous cherchons le vecteur de paramètres $\theta = (\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$ qui minimise l'écart entre les prix théoriques du modèle de Heston $P_i^{model}(\theta)$ et les prix observés sur le marché.

Formellement, nous pouvons exprimer ce problème d'optimisation comme :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^N w_i (P_i^{model}(\theta) - P_i^{market})^2$$

où Θ représente l'espace des paramètres admissibles et w_i sont des poids permettant

d'ajuster l'importance relative des différentes options dans le processus de calibration.

Il est important de distinguer deux approches fondamentalement différentes pour déterminer les paramètres d'un modèle financier :

- **Estimation statistique** : Cette approche utilise des séries temporelles historiques du sous-jacent pour estimer les paramètres par des méthodes comme le maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. L'objectif est de capturer au mieux la dynamique historique du processus.
- **Calibration aux prix d'options** : Cette approche, que nous utilisons ici, cherche à reproduire les prix d'options observés sur le marché à un instant donné. L'objectif est de trouver un modèle cohérent avec les anticipations du marché reflétées dans les prix des options.

Ces deux approches conduisent généralement à des valeurs de paramètres différentes, car elles répondent à des objectifs distincts. La calibration aux prix d'options est généralement préférée pour le pricing et la couverture d'instruments dérivés, car elle assure une cohérence avec le marché actuel.

3.2.2 Choix de la fonction objectif

Le choix de la fonction objectif est déterminant pour la qualité de la calibration. Différentes fonctions objectif mettent l'accent sur différents aspects des données de marché.

3.2.2.1 Erreur quadratique moyenne sur les prix

La fonction objectif la plus simple et la plus intuitive est l'erreur quadratique moyenne (MSE) sur les prix :

$$MSE_{prix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i^{model}(\boldsymbol{\theta}) - P_i^{market})^2$$

Cette fonction est facile à implémenter et à différencier, ce qui la rend attractive pour les algorithmes d'optimisation. Cependant, elle tend à donner plus d'importance aux options dont les prix sont plus élevés (typiquement les options ATM et à longue maturité), ce qui peut conduire à une calibration médiocre pour les options OTM à courte maturité.

3.2.2.2 Erreur relative sur les volatilités implicites

Une alternative couramment utilisée est de minimiser l'erreur relative sur les volatilités implicites :

$$MRAE_{vol} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sigma_i^{impl,model}(\boldsymbol{\theta}) - \sigma_i^{impl,market}}{\sigma_i^{impl,market}} \right|$$

où $\sigma_i^{impl,model}$ et $\sigma_i^{impl,market}$ sont respectivement les volatilités implicites théoriques et observées pour l'option i .

Cette approche présente l'avantage de normaliser l'importance des différentes options et de se concentrer sur la mesure la plus couramment utilisée par les praticiens : la surface de volatilité implicite.

3.2.3 Contraintes et espace des paramètres

L'espace des paramètres admissibles Θ est défini par des contraintes qui garantissent la cohérence du modèle. Ces contraintes sont essentielles pour assurer que le modèle de Heston reste mathématiquement valide et économiquement pertinent.

3.2.3.1 Contraintes de positivité et bornes

Les paramètres du modèle de Heston doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}\kappa &> 0 && \text{(vitesse de retour à la moyenne)} \\ \theta &> 0 && \text{(niveau moyen de la variance à long terme)} \\ \sigma &> 0 && \text{(volatilité de la volatilité)} \\ -1 &\leq \rho \leq 1 && \text{(corrélation)} \\ v_0 &> 0 && \text{(variance initiale)}\end{aligned}$$

Ces contraintes découlent directement de l'interprétation financière des paramètres. Par exemple, la corrélation ρ doit être comprise entre -1 et 1 par définition, tandis que les autres paramètres doivent être strictement positifs pour garantir le fonctionnement du modèle.

3.2.3.2 Condition de Feller

Elle assure que le processus de variance reste strictement positif :

$$2\kappa\theta > \sigma^2$$

3.3 Méthodes d'optimisation classiques

La calibration du modèle de Heston représente un défi numérique important en raison de plusieurs facteurs : non-linéarité de la fonction objectif, présence de multiples minima locaux, et coût computationnel élevé du pricing d'options. Dans cette section, nous explorons les principales méthodes numériques utilisées pour résoudre ce problème d'optimisation complexe.

3.3.1 Algorithmes d'optimisation globale vs locale

Les algorithmes d'optimisation pour la calibration du modèle de Heston peuvent être classés en deux catégories principales : les méthodes d'optimisation locale et les méthodes

d'optimisation globale.

Méthodes d'optimisation locale :

Ces méthodes, comme la descente de gradient, la méthode de Newton ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt, convergent vers un minimum local à partir d'un point initial. Elles sont généralement rapides et efficaces lorsque le point initial est proche de la solution optimale, mais peuvent échouer à trouver le minimum global si la fonction objectif présente de nombreux minima locaux.

Avantages :

- Convergence rapide vers un minimum local
- Faible complexité computationnelle
- Possibilité d'exploiter la structure du problème (gradient, hessien)

Inconvénients :

- Sensibilité au point initial
- Risque de convergence vers un minimum local sous-optimal
- Difficulté à explorer efficacement l'espace des paramètres

Méthodes d'optimisation globale :

Ces méthodes, comme les algorithmes génétiques, le recuit simulé ou la recherche par essaim particulaire, visent à explorer plus largement l'espace des paramètres pour trouver le minimum global.

Avantages :

- Exploration plus complète de l'espace des paramètres
- Moins sensible au point initial
- Plus robuste face aux minima locaux

Inconvénients :

- Convergence plus lente
- Coût computationnel élevé
- Difficulté à atteindre une précision élevée

3.3.1.1 Problèmes de minima locaux

Le problème de calibration du modèle de Heston est notoirement difficile en raison de la présence de nombreux minima locaux dans la fonction objectif. Cette caractéristique s'explique par plusieurs facteurs :

- **Non-linéarité** : La relation entre les paramètres de Heston et les prix d'options est hautement non-linéaire.
- **Interactions complexes** : Les paramètres du modèle interagissent de manière complexe, créant des compensations qui peuvent produire des ajustements similaires avec des paramètres différents.
- **Sensibilité variable** : Certains paramètres (comme ρ et σ) ont un impact plus prononcé sur certaines régions de la surface de volatilité que d'autres.

Des études empiriques ont montré que différentes combinaisons de paramètres peuvent produire des surfaces de volatilité très similaires, rendant le problème mal posé. Cette caractéristique, connue sous le nom de "non-unicité de la solution", complique considérablement la calibration et l'interprétation des paramètres obtenus.

3.3.1.2 Stratégies multi-start

Pour atténuer le problème des minima locaux tout en conservant l'efficacité des algorithmes d'optimisation locale, une approche hybride couramment utilisée est la stratégie multi-start. Cette approche consiste à :

1. Générer plusieurs points initiaux $\theta_0^1, \theta_0^2, \dots, \theta_0^m$ dans l'espace des paramètres, soit de manière aléatoire, soit selon une grille prédéfinie.
2. Exécuter un algorithme d'optimisation locale à partir de chaque point initial pour obtenir les solutions correspondantes $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$.
3. Sélectionner la meilleure solution parmi les m solutions obtenues, c'est-à-dire celle qui minimise la fonction objectif.

Cette approche combine la capacité d'exploration des méthodes globales avec l'efficacité et la précision des méthodes locales. Son efficacité dépend du nombre de points initiaux et de leur distribution dans l'espace des paramètres.

- **Grid search** : Utiliser une grille régulière pour explorer systématiquement l'espace des paramètres.
- **Latin Hypercube Sampling** : Générer des points initiaux de manière à couvrir uniformément l'espace des paramètres.
- **Adaptive multi-start** : Concentrer les points initiaux dans les régions prometteuses identifiées lors des itérations précédentes.

3.3.2 Descente de gradient

La méthode de descente de gradient est l'une des approches les plus fondamentales pour l'optimisation numérique. Elle repose sur l'idée intuitive de "descendre" dans la direction opposée au gradient de la fonction objectif.

Dans le contexte de la calibration du modèle de Heston, l'algorithme de descente de gradient peut être formulé comme suit :

1. Initialiser les paramètres $\theta_0 = (\kappa_0, \theta_0, \sigma_0, \rho_0, v_{0,0})$.
2. À chaque itération k , calculer le gradient de la fonction objectif $\nabla f(\theta_k)$.
3. Mettre à jour les paramètres selon la règle :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k \nabla f(\theta_k)$$

où $\alpha_k > 0$ est le pas d'apprentissage à l'itération k .

4. Répéter les étapes 2-3 jusqu'à convergence (lorsque $\|\nabla f(\theta_k)\| < \epsilon$ ou un autre critère d'arrêt est satisfait).

Le calcul du gradient $\nabla f(\theta)$ peut être effectué de plusieurs manières :

- **Différences finies** : Approximer les dérivées partielles par des différences finies, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} \approx \frac{f(\kappa + h, \theta, \sigma, \rho, v_0) - f(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)}{h}$$

avec h petit.

- **Méthodes analytiques** : Calculer les dérivées analytiques des prix d'options par rapport aux paramètres, lorsque cela est possible.
- **Différentiation automatique** : Utiliser des techniques de différentiation automatique pour calculer le gradient de manière exacte et efficace.

Une variante importante est la descente de gradient stochastique, où à chaque itération, seul un sous-ensemble aléatoire des données (options) est utilisé pour calculer le gradient. Cette approche peut accélérer considérablement la convergence lorsque le nombre d'options est grand.

Malgré sa simplicité conceptuelle, la descente de gradient présente plusieurs limitations pour la calibration du modèle de Heston :

- Convergence lente près de l'optimum, en particulier lorsque la fonction objectif est mal conditionnée.
- Difficulté à gérer les contraintes sur les paramètres (comme la condition de Feller).
- Sensibilité au choix du pas d'apprentissage α_k .

3.3.3 Maximum de vraisemblance

La méthode d'estimation par maximum de vraisemblance (MLE) vise à optimiser les paramètres d'un modèle afin que les données observées soient les plus probables. Pour estimer les paramètres $r, k, \theta, \sigma, \rho$, nous suivons un processus structuré.

Tout d'abord, nous définissons la fonction de vraisemblance, qui est le produit des fonctions de densité de probabilité conjointes $f(Q_{t+1}, V_{t+1}|r, k, \theta, \sigma, \rho)$ pour chaque observation $t = 1, \dots, n$. Elle s'exprime comme :

$$L(r, k, \theta, \sigma, \rho) = \prod_{t=1}^n f(Q_{t+1}, V_{t+1}|r, k, \theta, \sigma, \rho)$$

Pour simplifier les calculs, nous utilisons la fonction de log-vraisemblance, équivalente à optimiser L , définie par :

$$\ell(r, k, \theta, \sigma, \rho) = \sum_{t=1}^n \log(f(Q_{t+1}, V_{t+1}|r, k, \theta, \sigma, \rho))$$

Pour déterminer la fonction de densité conjointe $f(Q_{t+1}, V_{t+1})$, nous nous basons sur les propriétés des variables Q_{t+1} et V_{t+1} . En supposant que $Q_{t+1} \sim \mathcal{N}(1 + r, V_t)$, $V_{t+1} \sim$

$\mathcal{N}(V_t + k(\theta - V_t), \sigma^2 V_t)$, et que leur corrélation est ρ , la densité conjointe est donnée par :

$$f(Q_{t+1}, V_{t+1}) = \frac{1}{2\pi\sigma V_t \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2V_t(1-\rho^2)} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)}{V_t\sigma(1-\rho^2)} - \frac{(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)^2}{2\sigma^2 V_t(1-\rho^2)} \right\}$$

La fonction de log-vraisemblance devient alors :

$$\ell(r, k, \theta, \sigma, \rho) = \sum_{t=1}^n \left[-\log(2\pi) - \log(\sigma) - \log(V_t) - \frac{1}{2} \log(1-\rho^2) - \frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2V_t(1-\rho^2)} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)}{V_t\sigma(1-\rho^2)} - \frac{(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)^2}{2\sigma^2 V_t(1-\rho^2)} \right]$$

Pour optimiser les paramètres, nous calculons les dérivées partielles de ℓ par rapport à chaque paramètre $(r, k, \theta, \sigma, \rho)$, les mettons égales à zéro, et résolvons pour obtenir les estimations MLE, notées $\hat{\alpha}_{\text{MLE}}$. Les contraintes sur les paramètres sont : $r \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $\theta \geq 0$, $\sigma \geq 0$, et $-1 \leq \rho \leq 1$.

En pratique, pour de grands ensembles de données, il est recommandé d'utiliser un logiciel d'optimisation numérique. Dans R, la fonction `nlminb` peut être utilisée pour minimiser le négatif de la fonction de log-vraisemblance (car `nlminb` minimise plutôt que maximise), en respectant les contraintes mentionnées. Ce processus permet d'obtenir des estimations précises et robustes des paramètres du modèle.

3.4 Limitations des approches classiques

Malgré les avancées significatives dans les méthodes de calibration du modèle de Heston, plusieurs limitations et défis persistent, remettant parfois en question l'efficacité et la fiabilité des approches traditionnelles.

3.4.1 Sensibilité aux conditions initiales

La calibration du modèle de Heston présente une forte sensibilité aux conditions initiales, ce qui constitue un obstacle majeur à l'obtention de résultats cohérents et fiables.

3.4.1.1 Problème de multimodalité

La fonction objectif utilisée dans la calibration du modèle de Heston est généralement non convexe et présente plusieurs minima locaux. Cette caractéristique rend le processus d'optimisation particulièrement sensible au choix des valeurs initiales des paramètres.

$$\theta_1^* \neq \theta_2^* \text{ pour différentes initialisations } \theta_0^1 \neq \theta_0^2$$

Cette multimodalité implique que différentes initialisations peuvent conduire à des ensembles de paramètres significativement différents, tout en produisant des ajustements de qualité similaire aux données de marché.

3.4.1.2 Non-unicité des solutions

Un défi fondamental de la calibration est la non-unicité potentielle des solutions. Plusieurs ensembles de paramètres peuvent produire des surfaces de volatilité presque identiques, rendant difficile la détermination d'un ensemble "optimal" unique de paramètres.

3.4.2 Temps de calcul et complexité

La complexité computationnelle associée à la calibration du modèle de Heston constitue un obstacle significatif, particulièrement dans des environnements nécessitant des recalibrations fréquentes ou en temps réel.

3.4.2.1 Analyse de la complexité

Le temps de calcul nécessaire pour la calibration du modèle de Heston dépend de plusieurs facteurs :

- **Évaluation de la fonction objectif** : Chaque évaluation nécessite le calcul des prix théoriques pour toutes les options considérées, généralement via l'intégration numérique de fonctions complexes.
- **Nombre d'itérations** : Les algorithmes d'optimisation peuvent nécessiter un nombre important d'itérations pour converger, en particulier dans les régions plates de la surface d'erreur.
- **Calcul des gradients** : Certains algorithmes nécessitent le calcul des dérivées partielles de la fonction objectif par rapport aux paramètres, ce qui peut être coûteux numériquement.

La complexité totale peut être estimée approximativement par :

$$\text{Temps de calcul} \approx O(N_{\text{options}} \times N_{\text{itérations}} \times C_{\text{évaluation}})$$

où $C_{\text{évaluation}}$ est le coût d'une évaluation du modèle de Heston pour une option, qui dépend de la méthode numérique utilisée.

3.4.2.2 Comparaison des méthodes numériques

Différentes approches numériques présentent des compromis distincts en termes de précision et d'efficacité computationnelle :

Méthode	Précision	Vitesse	Complexité d'implémentation
Formule semi-analytique	Élevée	Modérée	Élevée
Monte Carlo	Ajustable	Faible	Faible
FFT (Carr-Madan)	Élevée	Élevée	Modérée

TABLE 3.1 – Comparaison des méthodes de pricing pour la calibration du modèle de Heston

3.4.3 Difficultés à capturer certaines dynamiques de marché

Malgré sa sophistication, le modèle de Heston présente des limitations intrinsèques dans sa capacité à reproduire fidèlement certaines caractéristiques observées sur les marchés d'options.

3.4.3.1 Limites dans la reproduction de la surface de volatilité

Le modèle de Heston, bien que plus flexible que le modèle de Black-Scholes, peut rencontrer des difficultés à reproduire simultanément certaines configurations de la surface de volatilité :

- **Smile de volatilité prononcé** pour les options à courte maturité
- **Skew asymétrique** pour différentes maturités
- **Structure par terme** de la volatilité implicite, particulièrement en périodes de stress

Ces limitations sont inhérentes à la structure du modèle et à ses hypothèses fondamentales, notamment l'hypothèse d'un processus de variance suivant une dynamique de retour à la moyenne.

3.4.3.2 Inadéquation en périodes de stress de marché

Les périodes de stress de marché représentent un défi particulier pour le modèle de Heston. Durant ces périodes, les marchés présentent souvent des caractéristiques que le modèle peine à reproduire :

- **Sauts de prix** soudains et importants
- **Changements de régime** dans la dynamique de la volatilité
- **Corrélations extrêmes** entre le prix du sous-jacent et sa volatilité

Ces phénomènes suggèrent la nécessité d'extensions du modèle, comme l'incorporation de processus de sauts ou de changements de régime, pour mieux capturer les dynamiques complexes observées empiriquement.

3.5 Conclusion

Les méthodes classiques parviennent généralement à reproduire les surfaces de volatilité, mais au prix d'une forte dépendance aux points de départ, d'une convergence parfois lente et d'une stabilité fragile lorsque le marché évolue brutalement. Ces limites soulignent la nécessité d'approches plus robustes et rapides. L'analyse critique menée ici sert donc de tremplin à l'exploration d'une alternative fondée sur les réseaux de neurones profonds, où Deep Learning promet de réduire drastiquement les temps de calibration tout en améliorant la résilience face au bruit des données.

Chapitre 4

Calibration par les réseaux de neurones artificiels

4.1 Introduction

Le *machine learning* (ML) s'impose comme une technologie pivot pour résoudre des problèmes complexes inaccessibles aux algorithmes traditionnels. Contrairement à ces derniers, reposant sur des règles prédéfinies, le ML déduit des modèles prédictifs à partir de données massives. Ses modèles se structurent autour de deux axes : l'**apprentissage supervisé** et **non supervisé**, appliqués à des tâches de **régression** (variables continues) ou de **classification** (variables discrètes).

Parmi les outils du ML, les **réseaux de neurones artificiels** (RNA) se distinguent par leur capacité à modéliser des relations non linéaires complexes. Depuis le perceptron initial jusqu'aux architectures profondes (MLP, CNN), leur évolution, portée par des avancées comme la rétropropagation, en fait des candidats idéaux pour des problèmes financiers exigeants, tels que la calibration de modèles stochastiques.

Ce chapitre propose une méthodologie hybride pour la calibration du **modèle de Heston** par les réseaux de neurones artificiels, largement utilisé en pricing d'options. Une première étape utilise un RNA pour approximer la fonction de pricing, tandis qu'une optimisation par équations différentielles stochastiques (ED) ajuste les paramètres du modèle (volatilité stochastique, vitesse de retour à la moyenne, etc.). Cette approche vise à surmonter les limites des méthodes classiques en combinant la flexibilité des RNA et la rigueur des algorithmes d'optimisation globale.

4.2 Principe des Réseaux de Neurones Artificiels (RNA)

Les réseaux de neurones artificiels s'inspirent du fonctionnement des neurones biologiques du cerveau et cherchent à en reproduire le mécanisme de manière mathématique. En intégrant une multitude de données d'entrée qu'ils acheminent à travers plusieurs couches neuronales, ils apprennent « par expérience » à établir une correspondance entre les informations reçues et les résultats souhaités.

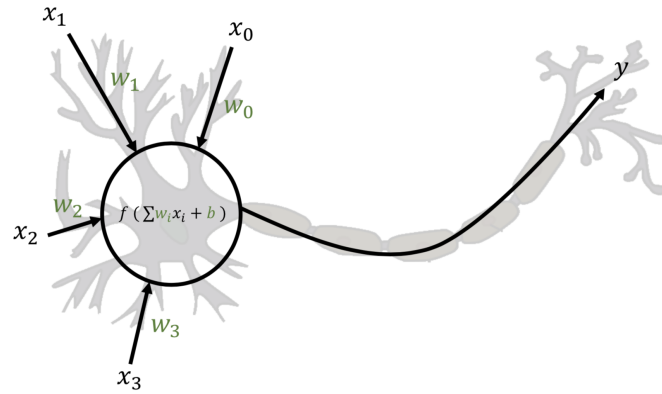


FIGURE 4.1 – neurone biologique

4.2.1 Architecture d'un neurone artificiel

Un réseau de neurones feed forward (FFNN) est une fonction paramétrée $f(\cdot; \theta) : \mathbb{R}^{N_0} \rightarrow \mathbb{R}^{N_L}$ définie par :

$$f(\cdot; \theta) := F^{(L)} \circ F^{(L-1)} \circ \dots \circ F^{(1)}, \quad \text{où } F^{(l)} : \mathbb{R}^{N_{l-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_l}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \sigma_l(\mathbf{W}^{(l)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(l)})$$

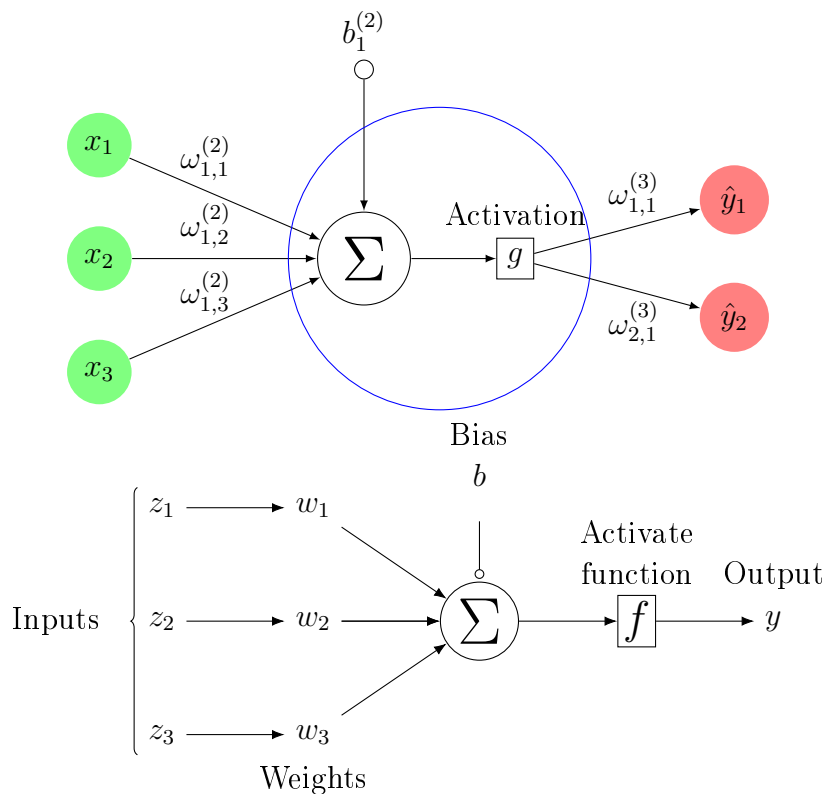


FIGURE 4.2 – Schéma fonctionnel d'un neurone dans un réseau de neurones

avec :

- N_0 : dimension de la couche d'entrée,
- N_L : dimension de la couche de sortie,
- L : Nombre total de couches,
- $L - 1$: Nombre de couches cachées,
- $\sigma_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Fonction d'activation non linéaire (appliquée élément par élément),
- $\mathbf{W}^{(l)} \in \mathcal{M}_{N_l, N_{l-1}}(\mathbb{R})$: Matrice de poids de la couche l ,
- $\mathbf{b}^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_l}$: Biais de la couche l ,
- $\theta \in \mathbb{R}^q$: Paramètres regroupant poids et biais.

Il s'agit d'une régression non linéaire. Les données circulent unidirectionnellement à travers des couches interconnectées :

- Couche d'entrée : Dimensions fixes (\mathbb{R}^{N_0}),
- Couches cachées : Chaque neurone reçoit toutes les sorties de la couche précédente,
- Couche de sortie : Peut être unidimensionnelle (ex : prix d'option) ou multidimensionnelle (ex : surface de volatilité).

4.2.1.1 Fonctions d'activation courantes

Les modules de deep learning comme PyTorch¹ et TensorFlow² implémentent notamment :

- **Sigmoïde** : $h(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ (probabilités/normalisation)
- **ReLU** (Rectified Linear Unit) : $h(x) = \max(x, 0)$ (gradient nul pour $x < 0$)
- **Leaky ReLU** : $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha x & \text{sinon} \end{cases}, \alpha > 0$

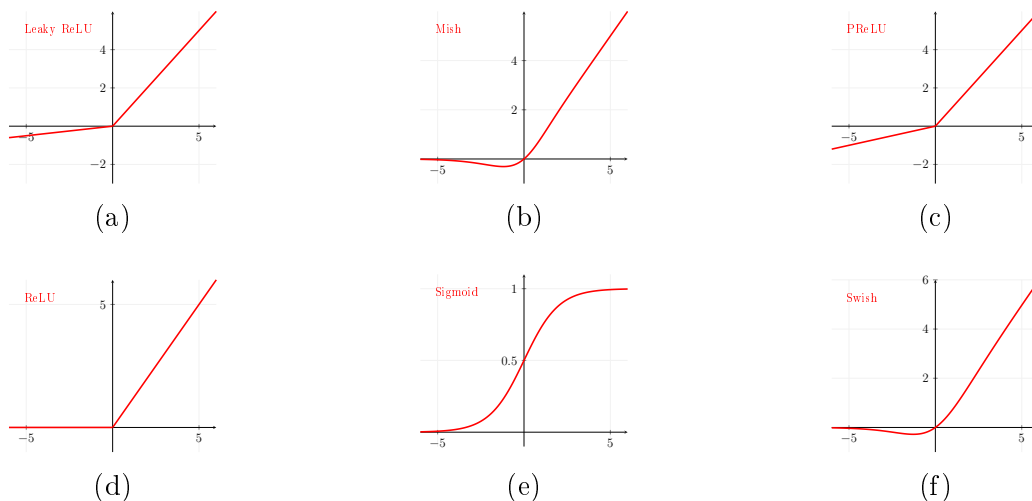


FIGURE 4.3 – Exemples de fonctions d'activation : Leaky ReLU, Mish, PReLU, ReLU, Sigmoid, Swish.

1. <https://pytorch.org>
2. <https://www.tensorflow.org>

4.2.2 Types de réseaux de neurones pour la calibration

4.2.2.1 Réseaux *Feed Forward*

Un réseau *Feed Forward* est un RNA où les informations circulent de l'entrée vers la sortie sans boucle. Chaque couche est pleinement connectée à la suivante, et les poids sont ajustés pour minimiser une fonction de coût via des algorithmes comme la descente de gradient.

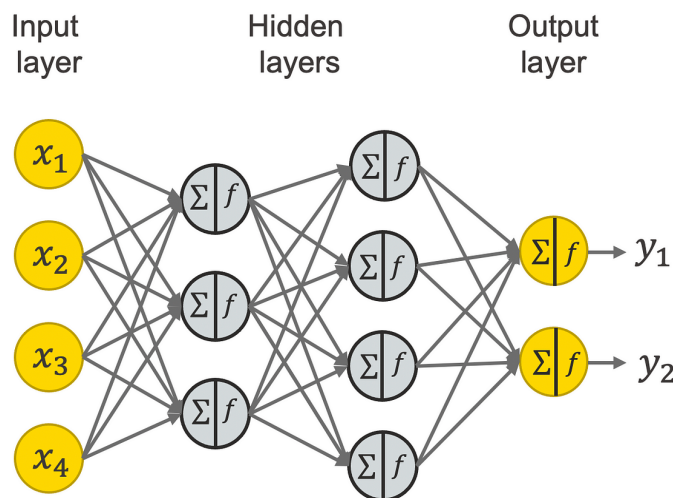


FIGURE 4.4 – Architecture d'un réseau de neurones *Feed Forward*.

Dans le contexte de la calibration du modèle de Heston, ces réseaux sont particulièrement adaptés pour capturer les relations non linéaires entre les paramètres du modèle et les volatilités implicites ou les prix d'options. Leur architecture relativement simple permet un entraînement rapide et une mise en œuvre aisée.

4.2.2.2 Réseaux convolutifs (CNN)

Les réseaux convolutifs (CNN) sont conçus pour traiter des données structurées comme les images. Les CNN utilisent des couches de convolution et de *pooling*, ce qui réduit le nombre de paramètres tout en capturant des caractéristiques locales.

Pour la calibration du modèle de Heston, les CNN peuvent être particulièrement efficaces lorsqu'il s'agit de traiter des surfaces de volatilité complètes, où les relations spatiales entre les strikes et les maturités peuvent être exploitées comme des patterns bidimensionnels.

4.2.3 Fonction de perte

En apprentissage supervisé, une **fonction de perte** mesure l'écart entre les prédictions d'un modèle ($\hat{y}_i = F(x_i|\theta)$) et les vraies valeurs ($y_i = f(x_i)$). Pour n exemples, la fonction

de perte générale s'écrit :

$$L(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, \hat{y}_i),$$

où $\ell(y_i, \hat{y}_i)$ est une mesure d'erreur spécifique. L'objectif est de minimiser $L(\theta)$ pour trouver les paramètres optimaux :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} L(\theta).$$

4.2.3.1 Erreur Quadratique Moyenne Racine (RMSE)

L'erreur quadratique moyenne racine mesure la racine carrée de la moyenne des écarts quadratiques. Elle est utilisée pour les problèmes de régression :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

4.2.3.2 Erreur Quadratique Relative Moyenne Racine (RMSRE)

L'erreur quadratique relative moyenne racine mesure les écarts relatifs au carré, normalisés par les prédictions :

$$\text{RMSRE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{y}_i} \right)^2}.$$

4.2.3.3 Erreur Absolue Moyenne (MAE)

L'erreur absolue moyenne calcule la moyenne des écarts absolus, robuste aux valeurs aberrantes :

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|.$$

4.2.3.4 Erreur Absolue Relative Moyenne (MARE)

L'erreur absolue relative moyenne mesure les écarts absolus relatifs, normalisés par les vraies valeurs :

$$\text{MARE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}.$$

4.2.4 Optimisation

L'objectif de l'entraînement d'un modèle d'apprentissage est de minimiser l'erreur globale, appelée erreur de généralisation. Pour cela, on utilise l'algorithme de **descente de gradient**, une méthode qui ajuste les paramètres du modèle pour réduire l'erreur.

Cette méthode calcule le gradient de la fonction de perte par rapport aux paramètres et les met à jour dans la direction qui minimise l'erreur.

La mise à jour des paramètres θ suit la règle suivante :

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \cdot \nabla J(\theta_t)$$

où η est le **taux d'apprentissage**, un hyperparamètre clé qui contrôle l'ampleur des mises à jour. Un η trop grand peut provoquer un dépassement du minimum (surapprentissage), tandis qu'un η trop petit ralentit la convergence.

4.2.4.1 Variantes de la descente de gradient

Il existe trois principales variantes de la descente de gradient, qui diffèrent par la quantité de données utilisée pour calculer le gradient :

1. **Descente de gradient par lots (Batch Gradient Descent)** : Cette méthode calcule le gradient en utilisant l'ensemble des données d'entraînement avant chaque mise à jour des paramètres. Elle est stable mais consomme beaucoup de mémoire et peut être lente, surtout pour de grands ensembles de données.

Algorithm 2: Descente de Gradient par Lots

Input: Taux d'apprentissage $\eta > 0$, données d'entraînement (X, Y)

1 Initialisation aléatoire de θ

2 **repeat**

3 Calculer le gradient complet :

$$g \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \nabla_{\theta} L(x^{(i)}, y^{(i)}; \theta)$$

4 Mise à jour :

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot g$$

5 **until** *Convergence*

2. **Descente de gradient stochastique (Stochastic Gradient Descent - SGD)** : Ici, les paramètres sont mis à jour après chaque exemple d'entraînement individuel. Cette approche permet un suivi précis de l'évolution de l'erreur, mais elle est plus coûteuse en calculs et peut introduire du bruit dans les mises à jour.

Algorithm 3: Descente de Gradient Stochastique (SGD)

Input: Taux d'apprentissage $\eta > 0$, données (X, Y)

```

1 Initialisation aléatoire de  $\theta$ 
2 repeat
3   Mélanger aléatoirement les données
4   for chaque  $(x^{(i)}, y^{(i)}) \in (X, Y)$  do
5     Calculer le gradient individuel :
                                     
$$g_i \leftarrow \nabla_{\theta} L(x^{(i)}, y^{(i)}; \theta)$$

6     Mise à jour immédiate :
                                     
$$\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot g_i$$

7   end
8 until Convergence

```

3. **Descente de gradient par mini-lots (Mini-Batch Gradient Descent)** : Cette variante calcule le gradient sur de petits sous-ensembles de données (mini-lots), généralement de 32 à 512 exemples. Elle offre un bon compromis entre efficacité computationnelle et stabilité, ce qui en fait la méthode la plus couramment utilisée.

Algorithm 4: Descente de Gradient par Mini-Lots

Input: Taux d'apprentissage $\eta > 0$, taille de batch m , données (X, Y)

```

1 Initialisation aléatoire de  $\theta$ 
2 repeat
3   Mélanger les données
4   Partitionner les données en batches de taille  $m$ 
5   for chaque batch  $\mathcal{B}_k$  do
6     Calculer le gradient moyen :
                                     
$$g_k \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{(x^{(i)}, y^{(i)}) \in \mathcal{B}_k} \nabla_{\theta} L(x^{(i)}, y^{(i)}; \theta)$$

7     Mise à jour :
                                     
$$\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot g_k$$

8   end
9 until Convergence

```

4.3 Structure et Conception des RNA pour Calibration d'Options

Les réseaux de neurones artificiels (RNA) offrent une solution puissante pour le pricing et la calibration des options financières, notamment dans le cadre du modèle de Heston. Cette section décrit une approche en deux étapes : une *étape forward* où un RNA est entraîné pour prédire les volatilités implicites, et une *étape backward* où les paramètres du modèle sont calibrés à l'aide de l'évolution différentielle.

4.3.1 Approches pour la calibration par RNA

Deux approches principales existent pour la calibration des paramètres du modèle de Heston à l'aide des RNA :

1. **Approche directe (première méthode)** : Un RNA est entraîné pour prédire directement les paramètres du modèle ($\rho, \kappa, \gamma, v, v_0$) à partir des paramètres de marché (prix de l'actif S , prix d'exercice K , taux sans risque r , maturité T). Cependant, cette méthode est inefficace en raison de la non-convexité et du caractère stochastique de la fonction objectif.
2. **Approche en deux étapes (deuxième méthode [5])** : Cette méthode sépare le processus en deux phases :
 - *Étape forward* : Un RNA est entraîné pour approximer la fonction de pricing, c'est-à-dire prédire les volatilités implicites à partir des paramètres du modèle.
 - *Étape backward* : Un algorithme d'optimisation, ici l'évolution différentielle (ED), ajuste les paramètres pour minimiser l'écart entre les volatilités prédites et celles observées sur le marché.

Cette approche, plus robuste, est privilégiée dans ce rapport.

4.3.2 Étape forward : RNA de pricing

L'*étape forward* constitue la première phase cruciale de notre approche de calibration du modèle de Heston. Cette étape consiste essentiellement à entraîner un réseau de neurones artificiels pour remplacer la méthode traditionnelle de pricing d'options.

Dans cette phase :

- Le RNA apprend à approximer la relation entre les paramètres du modèle de Heston et les volatilités implicites correspondantes
- Les entrées du réseau sont les paramètres du modèle de Heston ($\rho, \kappa, \gamma, v, v_0$) et les caractéristiques des options (moneyness, maturité)
- La sortie est la volatilité implicite selon Black-Scholes pour chaque option
- L'entraînement utilise des données synthétiques générées par la méthode semi-analytique de Heston

L'avantage principal de cette approche est la vitesse : une fois entraîné, le RNA peut calculer les volatilités implicites instantanément, contrairement aux méthodes numériques

traditionnelles qui sont beaucoup plus lentes. Cette rapidité est essentielle pour l'étape suivante qui nécessite de nombreuses évaluations.

4.3.3 Étape backward : optimisation par Évolution Différentielle

L'étape *backward* utilise le RNA entraîné comme substitut rapide au modèle de Heston pour calibrer efficacement ses paramètres. Cette étape consiste à trouver les paramètres optimaux qui minimisent l'écart entre les volatilités implicites prédites et celles observées sur le marché.

Le processus peut être résumé comme suit :

- L'Évolution Différentielle (ED) est utilisée comme algorithme d'optimisation en raison de sa robustesse face aux problèmes non-convexes
- L'algorithme génère et évalue plusieurs ensembles de paramètres candidats simultanément
- Pour chaque ensemble de paramètres, le RNA prédit rapidement les volatilités implicites correspondantes
- La fonction objectif mesure l'écart quadratique entre ces prédictions et les valeurs de marché
- À travers un processus évolutif (mutation, croisement, sélection), l'algorithme converge vers les paramètres optimaux

L'avantage principal de cette approche est qu'elle contourne la lenteur traditionnelle de la calibration du modèle de Heston. En remplaçant les calculs coûteux par des évaluations rapides du RNA, l'algorithme d'optimisation peut explorer efficacement l'espace des paramètres et converger plus rapidement vers une solution optimale.

Cette méthodologie en deux étapes combine ainsi les avantages des réseaux de neurones (approximation rapide) et des algorithmes évolutionnaires (optimisation robuste) pour surmonter les limitations connues de la calibration classique du modèle de Heston.

4.4 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode hybride innovante pour calibrer le modèle de Heston en combinant réseaux de neurones et algorithmes évolutionnaires. L'approche en deux temps (forward-backward) offre une solution efficace : d'abord un RNA approxime rapidement la fonction de pricing, puis l'évolution différentielle optimise les paramètres en minimisant l'écart avec les données de marché. Cette méthode surmonte les limites des méthodes traditionnelles en réduisant considérablement le temps de calcul, en améliorant la robustesse face aux problèmes non-convexes, et en s'adaptant à diverses conditions de marché.

Chapitre 5

Implémentation empirique et comparaison sur l'indice SPX

5.1 Introduction du cas d'étude

Cette étude utilise l'indice S&P 500 (SPX) comme support d'analyse. Ce choix s'explique par la liquidité importante du marché et la grande variété d'options disponibles. L'indice SPX permet d'accéder à un large éventail de strikes et de maturités, offrant ainsi une vision complète de la surface de volatilité.

La période d'étude s'étend de janvier à décembre 2018, fournissant environ 250 jours de trading. Cette fenêtre temporelle inclut plusieurs régimes de volatilité, ce qui permet de tester la robustesse des méthodes de calibration dans différentes conditions de marché.

5.2 Collecte et préparation des données

5.2.1 Sous-jacent

Les données de prix de clôture quotidiens de l'indice SPX ont été téléchargées depuis YahooFinance pour l'année 2018. Ces prix servent de référence pour calculer la moneyness des options et pour l'évaluation des performances des modèles.

L'indice a connu une volatilité significative durant cette période, avec notamment une correction importante au dernier trimestre 2018. Cette variabilité offre un cadre pertinent pour tester la capacité des modèles à s'adapter à différentes conditions de marché. La figure 5.1 illustre l'évolution du prix de l'indice durant la période d'étude.



FIGURE 5.1 – Série temporelle des prix de l'indice SPX (janvier - décembre 2018)

TABLE 5.1 – Statistiques descriptives des rendements de l'indice SPX (2018)

Statistique	Valeur
Moyenne des rendements	- 6.75 %
Écart-type (annualisé)	17.08 %
Skewness	-0.4117
Kurtosis	3.1403
Rendement minimum	-4.1 %
Rendement maximum	4.96 %

5.2.2 Les données d'options

Les données d'options sur l'indice SPX couvrent la période de janvier à décembre 2018 et ont été extraites de la base Wharton Research Data Services. Pour chaque option, nous disposons des informations suivantes :

- Maturité
- Prix d'exercice (strike)
- Volatilité implicite
- Prix de l'option (meilleur Ask de clôture)
- Sensibilités (vega)
- Taux d'intérêt sans risque correspondant
- Prix du sous-jacent (spot)

Pour simplifier l'analyse, nous avons sélectionné les options d'achat (calls) ayant une maturité d'environ trois mois, plus précisément entre 89 et 94 jours. Cette approche permet de concentrer l'évaluation des performances des modèles sur leur capacité à reproduire la structure par strike de la volatilité implicite.

L'échantillon final comprend 98 jours de données avec environ 91 strikes différents par

jour, soit près de 9000 options d'achat au total. Cette richesse de données permet une analyse approfondie de la structure du smile de volatilité.

5.2.3 Analyse descriptive de la volatilité

L'analyse de la structure de volatilité implicite constitue une étape essentielle pour comprendre les caractéristiques du marché des options sur SPX. La figure 5.2 illustre la surface de volatilité typique observée durant notre période d'étude.

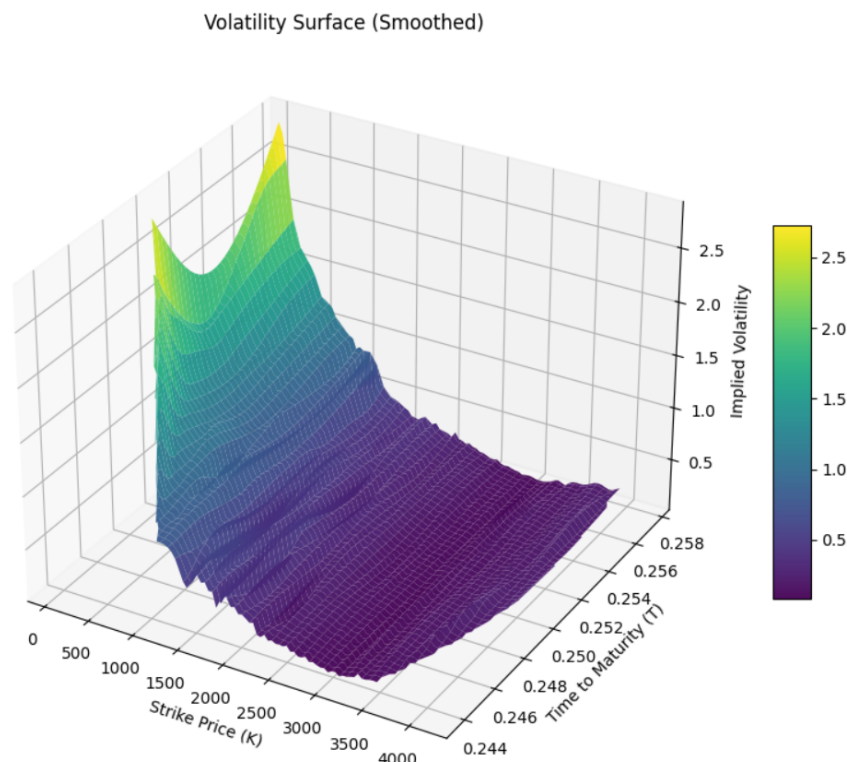


FIGURE 5.2 – Surface de volatilité implicite (maturité \times Strike) pour l'indice SPX

TABLE 5.2 – Statistiques descriptives des données d'options sur SPX (2018)

Caractéristique	Valeur
Nombre total d'options	8963
Nombre moyen d'options par jour	91
Maturités (jours)	89-94
Plage de moneyness (K/S)	0.03 - 1.58
Volatilité implicite moyenne	21.51 %
Skew moyen	-0.5864

On observe clairement le phénomène de skew, caractéristique des marchés d'options sur indices, avec une volatilité implicite plus élevée pour les options out-of-the-money (OTM) que pour les options in-the-money (ITM). Cette structure reflète la perception du risque baissier par les investisseurs.

5.3 Résultats de calibration

5.3.1 Méthode par forme fermée

Pour calibrer le modèle de Heston par forme fermée, nous avons utilisé la méthode de minimisation de la différence quadratique des prix sur un ensemble de 545 points de données issus du premier mois d'observation, provenant de huit jours de trading différents.

TABLE 5.3 – Paramètres initiaux (forme fermée)

Paramètre	Valeur
κ	1.5
ρ	-0.4
σ	0.6
θ	0.03
V_0	0.014

TABLE 5.4 – Paramètres calibrés (forme fermée)

Paramètre	Valeur
κ	0.7035
ρ	-0.6751
σ	0.9728
θ	0.2879
V_0	0.000

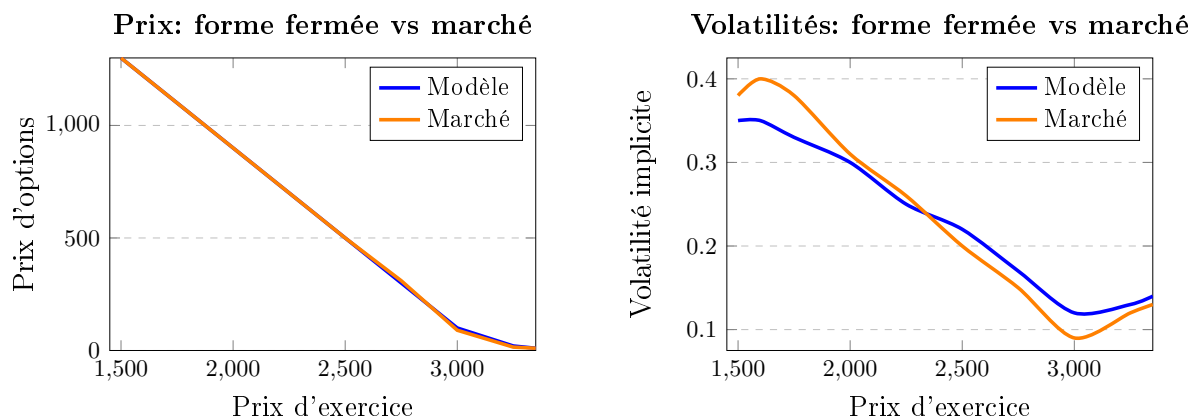


FIGURE 5.3 – Comparaison entre le modèle de Heston calibré par forme fermée et les données de marché

Les résultats montrent une bonne correspondance entre le modèle calibré et les données de marché. La corrélation négative ($\rho = -0.6574$) confirme l'effet de levier observé sur les marchés d'actions. Le modèle reproduit efficacement le smile de volatilité, avec quelques écarts mineurs aux extrémités des strikes.

5.3.2 Méthode par transformation de Fourier rapide (FFT)

Pour notre deuxième approche, nous avons calibré le modèle en utilisant la méthode FFT, qui permet de calculer simultanément les prix d'options pour différents strikes, offrant un avantage computationnel significatif par rapport à la méthode par forme fermée.

TABLE 5.5 – Paramètres initiaux (FFT)

Paramètre	Valeur
κ	1.5
ρ	-0.4
σ	0.6
θ	0.03
V_0	0.014

TABLE 5.6 – Paramètres calibrés (FFT)

Paramètre	Valeur
κ	125.5309
ρ	-0.7103
σ	29.9473
θ	0.0440
V_0	0.0553

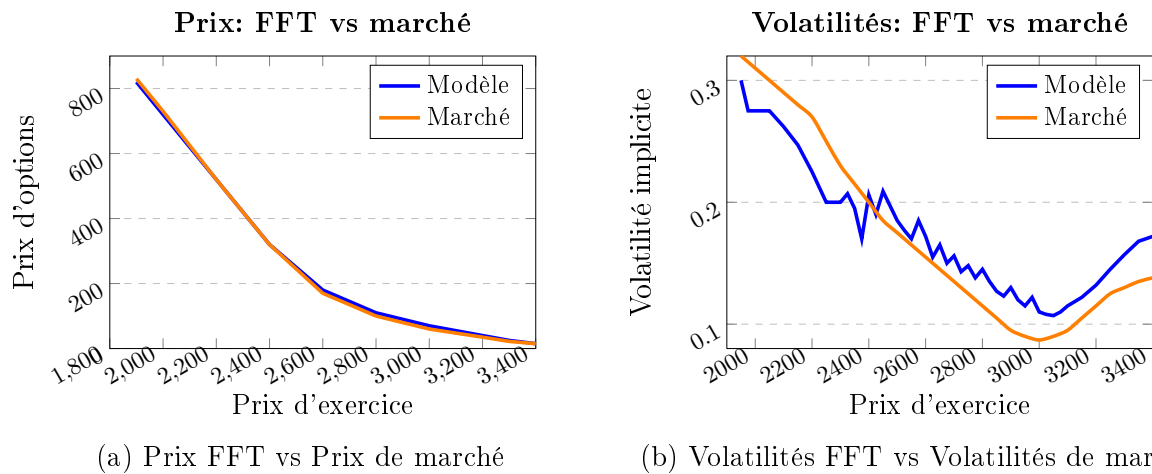


FIGURE 5.4 – Comparaison entre le modèle de Heston calibré par FFT et les données de marché

Les résultats de la calibration par FFT démontrent une excellente correspondance avec les données de marché. Pour les volatilités implicites, on observe une bonne capture du smile de volatilité, avec des oscillations caractéristiques dans la région centrale des strikes qui sont attribuables aux propriétés numériques de la transformation de Fourier rapide. Cette méthode présente l'avantage supplémentaire de générer la surface de prix complète en une seule opération, ce qui la rend particulièrement efficace pour les applications nécessitant une recalibration fréquente.

5.3.3 Comparaison des temps de calibration

Pour comparer l'efficacité des deux méthodes, nous avons mesuré le temps nécessaire à la calibration avec différentes quantités de données (par incréments de 85 options).

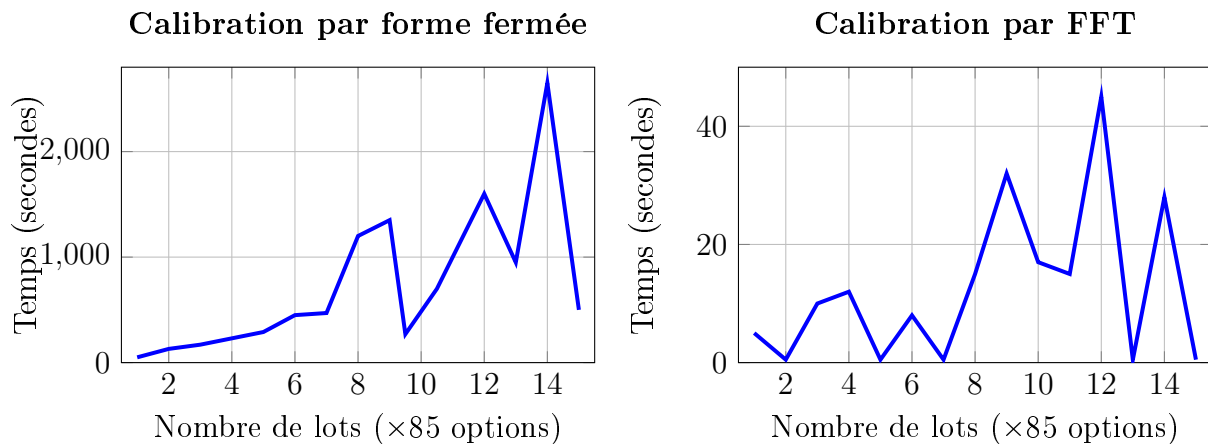


FIGURE 5.5 – Temps de calibration des deux méthodes

La différence d'échelle entre les deux graphiques est révélatrice : la méthode par forme fermée peut prendre jusqu'à 2650 secondes (environ 45 minutes) pour calibrer, tandis que la méthode FFT ne dépasse jamais 45 secondes. Cette efficacité computationnelle rend la méthode FFT nettement plus adaptée aux applications professionnelles nécessitant des recalibrations fréquentes.

5.3.4 Interprétation des résultats

Les paramètres obtenus par les deux méthodes présentent des différences significatives qui méritent d'être analysées :

- **Vitesse de retour à la moyenne (κ)** : La valeur extrêmement élevée obtenue par la méthode FFT (125,5309 contre 0,7035 pour la forme fermée) indique que la FFT modélise un retour à la moyenne presque instantané. Cela suggère que la FFT interprète les dynamiques du marché comme ayant des périodes de volatilité très courtes suivies de retours rapides à l'équilibre.
- **Volatilité de la volatilité (σ)** : La valeur exceptionnellement élevée obtenue par la FFT (29,9473 contre 0,9728) compense l'effet du κ élevé, permettant des mouvements brusques mais courts de la volatilité. Cette caractéristique permet à la FFT de capturer les événements extrêmes du marché.
- **Corrélation (ρ)** : Les deux méthodes produisent des valeurs similaires et négatives ($-0,6751$ et $-0,7103$), confirmant l'effet de levier bien connu sur les marchés d'actions (quand les prix baissent, la volatilité augmente).

L'analyse des deux méthodes révèle des compromis importants :

TABLE 5.7 – Comparaison synthétique des deux méthodes

Critère	Forme fermée	FFT
Précision globale	Excellente	Bonne
Reproduction du smile	Meilleure aux extrémités	Oscillations au centre
Temps de calcul	Jusqu'à 45 minutes	Maximum 45 secondes
Adaptabilité	Options individuelles	Grille complète de strikes

5.3.5 Calibration par apprentissage profond

5.3.5.1 Génération des données synthétiques

L'objectif est de fournir au réseau un échantillon riche et varié de surfaces de volatilité implicite, tout en s'assurant qu'elles proviennent de paramètres physiquement admissibles.

Algorithm 5: Génération de surfaces Heston

Input: Bornes des paramètres Heston données

Output: Vecteur de 100 caractéristiques représentant une surface de volatilité implicite

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $N$  do
2   Tirer  $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$  uniformément dans les bornes
3   if  $2\kappa\theta \leq \sigma^2$  then
4     rejeter l'échantillon et reprendre
5   Calculer les prix d'options sur la grille
6    $T = \{0.24, 0.245, 0.25, 0.255, 0.26\}$  et  $K = [1200, 3000]$ 
7   Convertir chaque prix en volatilité implicite (méthode de bisection)
8   Stocker  $(\text{surface}, \kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$  dans le dataset

```

Le tableau 5.8 synthétise le résultat. Les surfaces couvrent l'espace des paramètres de façon homogène et garantissent la condition de Feller, ce qui stabilise l'entraînement en évitant des exemples numériquement pathologiques.

TABLE 5.8 – Caractéristiques du jeu de données synthétiques

Quantité	Valeur	Commentaire
Nombre total de surfaces	10 000	Diversité suffisante
Répartition train / val	80 % / 20 %	8000 / 2000 surfaces
Condition de Feller	100 %	Filtrage strict
Temps de génération	1.5 h	

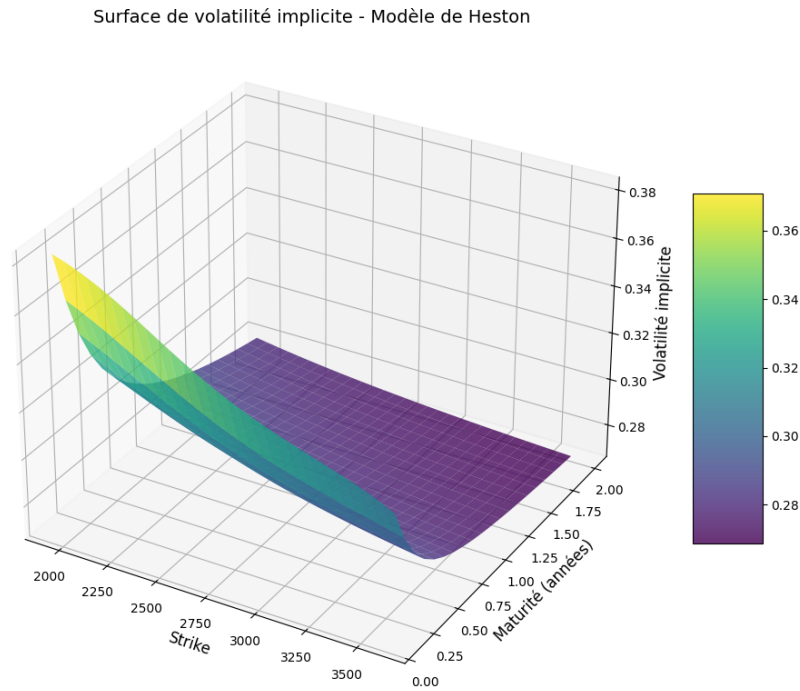


FIGURE 5.6 – Exemple d’une surface de volatilité implicite simulée pour l’entraînement.

5.3.5.2 Architecture du réseau

Le réseau est un perceptron multicouche profond recevant un vecteur (1×100) et renvoyant cinq paramètres ramenés dans les bornes physiques au moyen d’une couche **Lambda** et d’une activation sigmoïde. Chaque couche cachée utilise l’activation ELU, efficace pour des entrées normalisées autour de zéro.

TABLE 5.9 – Détail de l’architecture du réseau

#	Couche	Unités	Activation	Shape sortie	Paramètres
0	Input	100	–	(None,100)	0
1	Dense	60	ELU	(None,60)	6 060
2	Dense	50	ELU	(None,50)	3 050
3	Dense	40	ELU	(None,40)	2 040
4	Dense	30	ELU	(None,30)	1 230
5	Dense	20	ELU	(None,20)	620
6	Dense	10	ELU	(None,10)	210
7	Dense	5	lin.	(None,5)	55
8	Lambda	5	Sigm.	(None,5)	0
Total paramètres					13 265

Chaque neurone de la dernière couche produit d'abord un nombre non borné. La transformation sigmoïde + affine force ensuite le résultat dans l'intervalle désiré, ce qui élimine le besoin de post-traitement et facilite le respect de la condition de Feller dans la fonction de perte.

5.3.5.3 Entraînement et validation

Le réseau est optimisé avec Adam ($\eta = 10^{-3}$), un *early-stopping* (patience 20) et un batch de 32 exemples. La fonction de perte est :

$$\mathcal{L} = \text{MSE}(\hat{y}, y) + 10 [\sigma^2 - 2\kappa\theta]_+,$$

où le terme entre crochets punit les sorties violant la condition de Feller.

TABLE 5.10 – Hyper-paramètres et métriques obtenues

Hyper-paramètre	Valeur
Optimiseur	Adam
Taux d'apprentissage	1×10^{-3}
Batch size	32
Patience <i>early-stopping</i>	20
Époques maximum	150
Durée d'entraînement	58 s
MSE test finale	1.14

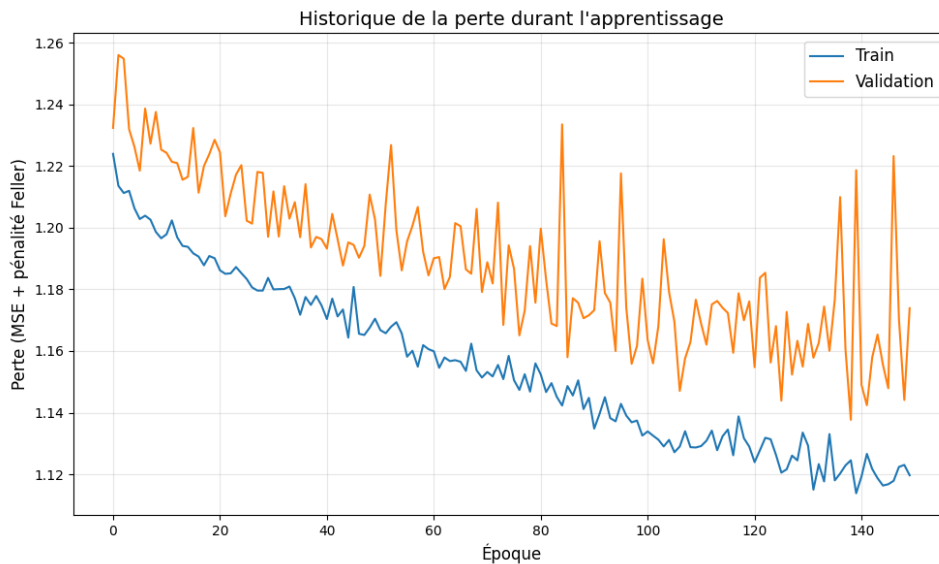


FIGURE 5.7 – Historique de la fonction de perte (ensemble entraînement vs validation).

5.3.5.4 Calibration sur données SPX

Après apprentissage, la projection d'une surface SPX dans le réseau renvoie les paramètres de tableau 5.11, la condition de Feller est respectée.

TABLE 5.11 – Paramètres calibrés

κ	θ	σ	ρ	v_0	Feller
8.8368	0.0714	0.3513	-0.5557	0.1440	✓

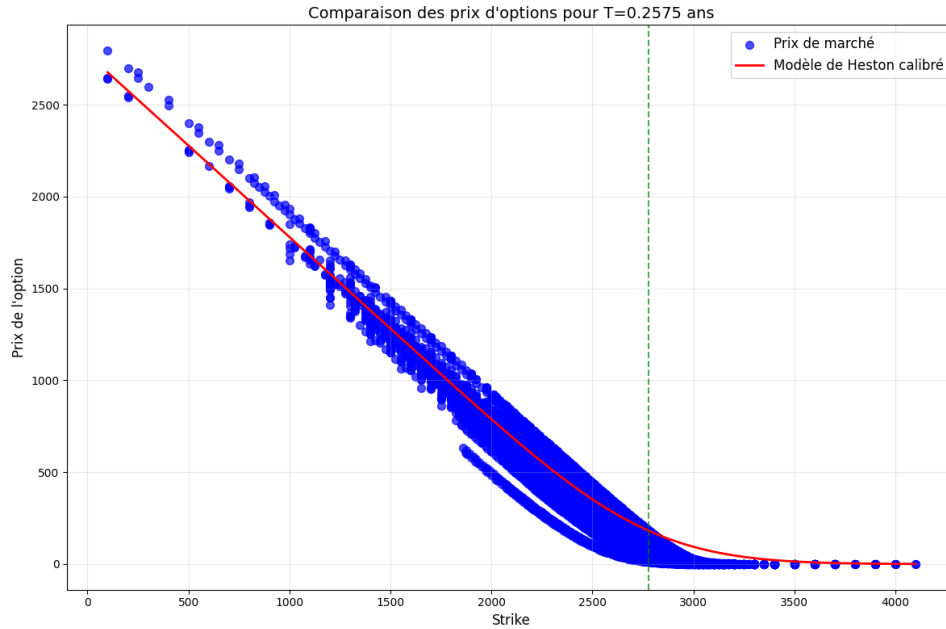


FIGURE 5.8 – Prix du modèle vs prix de marché (maturité $\simeq 0.26$ an).

5.4 Conclusion

Les trois techniques explorées : forme fermée, FFT et apprentissage profond apportent des réponses complémentaires au problème de calibration du modèle de Heston.

1. **Forme fermée** : la référence historique. Excellente reproduction des extrémités du smile, mais **temps de calcul** allant jusqu'à 45 min, ce qui limite les recalibrations intraday.
2. **FFT** : la solution numérique la plus rapide sans phase d'apprentissage. Calibration complète en 45 s, adaptée aux desks de trading où l'environnement de marché évolue rapidement.
3. **Apprentissage profond** : elle fournit une calibration en 0.12 s tout en imposant la contrainte de Feller. Idéale pour les architectures temps-réel (gestion du risque intraday, market-making haute fréquence).

TABLE 5.12 – Bilan comparatif des trois méthodes

Critère	Forme fermée	FFT	Deep Learning
Précision globale	✓	✓	✓
Smile aux extrémités	✓	✗	✓
Temps de calibration	2650 s	45 s	0.12 s
Stabilité numérique	✓	✓	✓

Conclusion et perspectives

Ce projet a porté sur la calibration du modèle de Heston, mettant en avant sa supériorité par rapport au modèle classique de Black-Scholes grâce à la prise en compte de la volatilité stochastique, qui reflète mieux les fluctuations des marchés financiers via ses paramètres clés : vitesse de réversion (κ), niveau moyen de la variance (θ), volatilité de la volatilité (σ) et corrélation prix-volatilité (ρ). L'étude s'est appuyée sur des méthodes semi-analytiques et la Transformée de Fourier Rapide (FFT), comme la méthode de Carr-Madan, offrant une meilleure précision et rapidité par rapport aux approches traditionnelles, ainsi que sur des techniques innovantes combinant réseaux de neurones artificiels et l'algorithme d'évolution différentielle pour optimiser les paramètres. Cependant, le modèle de Heston présente des limites, notamment son hypothèse de corrélation constante et son incapacité à intégrer les sauts de prix lors d'événements soudains. Ce travail donne plusieurs idées pour de futures recherches, comme explorer des modèles plus avancés tels que SABR, pour une corrélation variable, ou Merton, pour inclure les sauts, afin de pallier ces faiblesses. Optimiser les architectures des réseaux de neurones pourrait améliorer la précision des prédictions, tandis que des tests sur divers actifs (actions, obligations, devises) et conditions de marché (haussier, baissier, volatil) évalueraient la robustesse de l'approche. Enfin, ces méthodes pourraient être adaptées en outils pratiques pour l'industrie financière, notamment pour la gestion des risques et la tarification de produits dérivés complexes, comme les options exotiques, contribuant ainsi à l'intersection des mathématiques financières et de l'intelligence artificielle.

Bibliographie

- [1] Fischer BLACK et Myron SCHOLÉS. « The pricing of options and corporate liabilities ». In : *Journal of political economy* 81.3 (1973), p. 637-654.
- [2] Peter CARR et Dilip MADAN. « Option valuation using the fast fourier transform ». In : *Journal of Computational Finance* 2 (1999), p. 61-73.
- [3] Brahim EL ASRI. *Calcul stochastique pour la finance*. Cours, ENSA Agadir. 2024.
- [4] Steven L. HESTON. « A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options ». In : *Review of Financial Studies* 6.2 (1993), p. 327-343.
- [5] Blanka HORVATH, Aitor MUGURUZA et Mehdi TOMAS. « Deep Learning Volatility ». In : *arXiv preprint arXiv :1901.09647* (2019).
- [6] Ghizlane LAKHNATI. *Introduction aux marchés financiers*. Cours, ENSA Agadir. 2023.
- [7] Fabrice Douglas ROUAH. « Euler and milstein discretization ». In : *Documento de trabajo, Sapient Global Markets, Estados Unidos. Recuperado de www.frouah.com* 87 (2011), p. 88.

Webliographie

1. Andrei Cozma, Cornelis W. Oosterlee, *A Fourier-Cosine Method for Bermudan and Barrier Options under Stochastic Volatility*, De Gruyter Brill, 2017. Disponible à : <https://www.degruyterbrill.com/document/doi/10.1515/math-2017-0058/html> (consulté le 28 mars 2025).
2. Quant Stack Exchange, *Heston stochastic volatility, Girsanov theorem*. Disponible à : <https://quant.stackexchange.com/questions/61927/heston-stochastic-volatility-girsanov-theorem/61931#61931> (consulté le 3 avril 2025).
3. Jean-François Chassagneux, *Numerical methods for stochastic differential equations in finance*, HAL Sorbonne Université. Disponible à : <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-02273889/document> (consulté le 1er avril 2025).
4. Nassim Frouah, *Euler and Milstein Discretization*. Disponible à : <https://frouah.com/finance%20notes/Euler%20and%20Milstein%20Discretization.pdf> (consulté le 24 mars 2025).
5. Marcus Wänstedt, *Calibration of the Heston model using Neural Networks*, University of Gothenburg, 2020. Disponible à : https://gupea.ub.gu.se/bitstream/handle/2077/65464/gupea_2077_65464_1.pdf?sequence=1 (consulté le 2 avril 2025).
6. Canopée Group, *Deep Learning pour la calibration du modèle de Heston*, 2023. Disponible à : <https://www.canopee-group.com/wp-content/uploads/2023/12/DeepLearningpourelcalibrationdumodeleHeston.pdf> (consulté le 4 avril 2025).
7. S. A. Koubi, *Calibration du modèle de Heston via réseaux de neurones*, DUMAS, 2023. Disponible à : <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03945488v1/document> (consulté le 30 mars 2025).

Annexe A

Démonstrations mathématiques

A.1 Démonstration de l'équation différentielle partielle de Black-Scholes

La démonstration de l'équation de Black-Scholes, exposée notamment dans [rouah2013four], repose sur l'application du lemme d'Itô.

Soit $X_t = f(t, S_t)$, où $(S_t)_{t \geq 0}$ suit l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

En appliquant le lemme d'Itô, nous avons :

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2.$$

Utilisant la relation $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$, on obtient :

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} dW_t. \end{aligned}$$

Considérons un produit dérivé dont le payoff à l'échéance T est donné par $V(T, S_T)$. Supposons que sa valeur en un instant $t < T$ soit une fonction $V(t, S)$.

Considérons un portefeuille formé par l'achat d'une unité du produit dérivé et la vente à découvert de a unités de l'actif sous-jacent. La valeur du portefeuille est :

$$\Pi_t = V(t, S_t) - aS_t.$$

Son évolution infinitésimale est donnée par :

$$d\Pi_t = dV_t - a dS_t.$$

En utilisant l'équation obtenue précédemment :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t.$$

Ainsi, on a :

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - a \mu S_t \right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - a \sigma S_t \right) dW_t.$$

Pour éliminer le terme stochastique, on impose :

$$a = \frac{\partial V}{\partial S_t}.$$

Ainsi, la variation du portefeuille devient :

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt.$$

Puisque le portefeuille est sans risque, son rendement doit être égal au taux sans risque r :

$$d\Pi_t = r \Pi_t dt = r \left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dt.$$

En égalisant les deux expressions de $d\Pi_t$, on obtient l'équation de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0.$$

A.2 Démonstration de la formule Black-Scholes

Sous la mesure risque-neutre Q :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dB_t^Q \quad (\text{Mouvement brownien géométrique})$$

Solution via le lemme d'Itô :

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B_T^Q \right)$$

Payoff actualisé :

$$C = e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(S_T - K)^+]$$

Décomposition de l'espérance :

$$\mathbb{E}^Q [(S_T - K)^+] = \underbrace{\mathbb{E}^Q [S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}]}_{\text{Terme 1}} - K \underbrace{Q(S_T > K)}_{\text{Terme 2}}$$

Terme 1 (Changement de mesure via Girsanov) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q [S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}] &= S_0 e^{rT} N(d_1) \\ d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \end{aligned}$$

Terme 2 (Probabilité risque-neutre) :

$$\begin{aligned} Q(S_T > K) &= N(d_2) \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T} \end{aligned}$$

Formule finale

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

- $N(\cdot)$: Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- S_0 : Prix spot, K : Prix d'exercice
- T : Maturité, r : Taux sans risque
- σ : Volatilité du sous-jacent

A.3 Démonstration de l'équation différentielle partielle de Heston

Dans le cas de Black-Scholes, la seule source d'incertitude vient du prix du stock, qui peut se couvrir avec le stock. Dans le cas de Heston, il faut aussi couvrir l'incertitude venant du caractère stochastique de la volatilité pour créer un portefeuille sans risque. Imaginons ainsi un portefeuille Π contenant l'option dont on cherche à déterminer le prix noté $V(S, v, t)$, la quantité Δ de stock et la quantité Δ_1 d'un autre actif, de valeur V_1 dépendant de la volatilité. On a ainsi :

$$\Pi = V + \Delta S + \Delta_1 V_1$$

Nous obtenons, grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \\ & + \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\ & + \left\{ \frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta \right\} dS + \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} \right\} dv \end{aligned}$$

Pour que le portefeuille soit sans risque, il est nécessaire d'éliminer les termes en dS et dv , ce qui donne :

$$\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} = 0$$

d'où l'on tire les quantités :

$$\Delta_1 = - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}$$

$$\Delta = - \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} \right)$$

Le rendement d'un portefeuille sans risque devant être égal au taux sans risque r (supposé constant), sans quoi il y aurait une opportunité d'arbitrage, nous avons :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

car les termes dS et dv ne sont plus :

$$d\Pi = r(V + \Delta S + \Delta_1 V_1) dt$$

En utilisant (A.3), la dernière équation peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V \right\} dt \\ &= \frac{1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} + r S \frac{\partial V_1}{\partial S} - r V_1 \right\} dt \end{aligned}$$

Le membre de gauche de l'équation précédente ne dépend que de V , tandis que celui de droite ne dépend que de V_1 . Cela implique que les deux membres peuvent être écrits sous la forme d'une fonction $f(S, v, t)$. En suivant Heston, nous spécifions cette fonction comme suit :

$$f(S, v, t) = \kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t),$$

où $\lambda(S, v, t)$ représente le prix du risque de volatilité.

L'équation de Heston sous forme de PDE en fonction du prix S :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ & - rU + rS \frac{\partial V}{\partial S} - [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)] \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

L'EDP en termes du Log Prix :

Soit $x = \ln S$, et exprimons l'EDP en termes de x , t et v au lieu de S , t et v . Cette transformation conduit à une forme plus simple de l'EDP. Nous avons besoin des dérivées suivantes, qui sont simples à établir :

$$\frac{\partial V}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

En remplaçant ces expressions dans l'EDP de Heston (A.2), tous les termes en S s'annulent, et nous obtenons l'EDP de Heston en termes du log prix $x = \ln S$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x} \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + (\kappa(\theta - v) - \lambda v) \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

où, comme dans le modèle de Heston, nous avons exprimé le prix du risque de marché comme une fonction linéaire de la volatilité, de sorte que $\lambda(S, v, t) = \lambda v$.

Cette transformation simplifie l'équation, la rendant plus adaptée aux solutions numériques et analytiques.

A.4 Démonstration de la Solution Semi-Analytique de Heston

Dans cette section, nous présentons une dérivation complète et rigoureuse de la solution du modèle de Heston, en suivant l'approche montrée dans les images.

A.4.1 Le Prix d'une Option d'Achat

Le prix d'une option d'achat est de la forme

$$\begin{aligned} C_T(K) &= e^{-r\tau} E[(S_T - K)^+] \\ &= e^{x_t} P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(x, v, \tau) \end{aligned}$$

Dans cette expression, $P_j(x, v, \tau)$ représente chacune la probabilité que l'option expire dans la monnaie, conditionnellement à la valeur $x_t = \ln S_t$ de l'action et à la valeur v_t de la volatilité au temps t , où $\tau = T - t$ est le temps jusqu'à l'expiration.

A.4.2 L'EDP pour P_1 et P_2

Le prix de l'option d'achat C suit l'EDP :

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial C}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$

Les dérivées de C s'expriment en termes de P_1 et P_2 . En substituant ces dérivées dans l'EDP et en regroupant les termes, nous obtenons les EDPs pour P_1 et P_2 . Pour la commodité de notation, nous combinons les EDPs pour P_1 et P_2 en une seule expression :

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0$$

pour $j = 1, 2$ et où $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, et $b_2 = \kappa + \lambda$.

A.4.3 Obtention des Fonctions Caractéristiques

Heston suppose que les fonctions caractéristiques pour le logarithme du prix terminal de l'action, $x = \ln S_T$, sont de la forme

$$f_j(\phi; x, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_0 + i\phi x)$$

où C_j et D_j sont des coefficients et $\tau = T - t$ est le temps jusqu'à la maturité. Les fonctions caractéristiques f_j suivront l'EDP :

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0.$$

Pour évaluer cette EDP pour la fonction caractéristique, nous avons besoin des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial \tau} &= f_j \left(-\frac{\partial C_j}{\partial \tau} - \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v \right) \\ \frac{\partial f_j}{\partial x} &= i\phi f_j \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} &= -\phi^2 f_j \\ \frac{\partial f_j}{\partial v} &= D_j f_j \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} &= D_j^2 f_j \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} &= i\phi D_j f_j \end{aligned}$$

En substituant ces dérivées dans l'EDP, en supprimant les termes f_j et en réarrangeant, nous obtenons deux équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_j}{\partial \tau} &= \rho \sigma i\phi D_j - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} &= r i\phi + a D_j \end{aligned}$$

Ce sont les équations (A7) dans Heston [2]. Heston spécifie les conditions initiales $D_j(0, \phi) = 0$ et $C_j(0, \phi) = 0$. La première équation est une équation de Riccati en D_j tandis que la seconde est une EDO pour C_j qui peut être résolue par intégration directe une fois que D_j est obtenu.

A.4.4 Résolution de l'Équation de Riccati de Heston

À partir de ce qui précède, l'équation de Riccati de Heston est

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2$$

où nous identifions $P_j = u_j i\phi - \frac{1}{2} \phi^2$, $Q_j = b_j - \rho \sigma i\phi$, et $R = \frac{1}{2} \sigma^2$.

L'EDO du second ordre correspondante est

$$w'' + Q_j w' + P_j R = 0$$

La solution de l'équation de Riccati de Heston est donc

$$D_j = -\frac{1}{R} \left(\frac{K\alpha e^{\alpha\tau} + \beta e^{\beta\tau}}{K e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}} \right)$$

En utilisant la condition initiale $D_j(0, \phi) = 0$, nous obtenons la solution pour D_j :

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right)$$

où

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

La solution pour C_j est trouvée en intégrant la seconde équation dans notre système :

$$C_j = \int_0^\tau r i\phi dy + a \left(\frac{Q_j + d_j}{2R} \right) \int_0^\tau \left(\frac{1 - e^{d_j y}}{1 - g_j e^{d_j y}} \right) dy + K_1$$

où K_1 est une constante. En intégrant et en appliquant la condition initiale $C_j(0, \phi) = 0$, et en substituant pour d_j , Q_j , et g_j , nous obtenons la solution pour C_j :

$$C_j = r i\phi \tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right]$$

où $a = \kappa\theta$.

A.4.5 Forme Finale de la Fonction Caractéristique

En combinant nos résultats, la fonction caractéristique pour le modèle de Heston est :

$$f_j(\phi) = \exp(i\phi x + C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v)$$

où C_j et D_j sont tels que dérivés ci-dessus.

A.4.6 Calcul du Prix d'Option

Le prix de l'option d'achat est donné par :

$$C(S_0, K, T) = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2$$

où les probabilités P_1 et P_2 sont calculées en utilisant :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2$$

A.5 Démonstration du Pricing avec FFT (Méthode de Carr-Madan)

L'idée d'utiliser la transformée de Fourier rapide (FFT) pour évaluer les options financières provient des travaux de Carr et Madan, publiés en 1999 (référéncé [2]). Dans leur article, ils ont développé une nouvelle technique qui exploite la FFT pour valoriser les options de manière plus efficace. Leur méthode repose sur l'utilisation de la fonction caractéristique de la densité sous la mesure neutre au risque, comme le supposaient les techniques antérieures. Ensuite, ils établissent une expression pour la transformée de Fourier du prix de l'option. Enfin, ils utilisent un algorithme de transformée de Fourier inverse pour résoudre numériquement le prix de l'option.

Les définitions de base de la transformée de Fourier et de son inverse sont données ci-dessous dans les équations (A.5) et (A.5), respectivement :

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} f(x) dx = F(\phi)$$
$$F^{-1}(F(\phi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi x} F(\phi) d\phi = f(x)$$

Dans ces équations, $f(x)$ représente la fonction de densité des rendements logarithmiques et $F(\phi)$ représente la fonction caractéristique. Carr et Madan (1999) ont développé des expressions analytiques pour la transformée de Fourier du prix d'une option. Ainsi, comme dans leur article, si nous choisissons k comme le logarithme du prix d'exercice K et $C_T(k)$ comme la valeur d'une option d'achat à maturité T avec un prix d'exercice e^k , la densité neutre au risque du logarithme du prix s_T étant $q_T(s)$, la fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds$$

Ensuite, $C_T(k)$ peut être exprimée comme :

$$C_T(k) = \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds$$

À ce stade, comme $C_T(k)$ n'est pas intégrable au carré, le prix de l'option d'achat est modifié pour devenir intégrable au carré, comme indiqué dans l'équation (A.5) :

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad \text{pour } \alpha > 0$$

Après cette modification, $c_T(k)$ est maintenant intégrable au carré sur la droite réelle. Ainsi, nous pouvons calculer la transformée de Fourier et son inverse pour $c_T(k)$, comme montré dans les équations (A.5) et (A.5) :

$$F(c_T)(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi k} c_T(k) dk$$

$$c_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi k} F(c_T)(\phi) d\phi$$

En substituant la transformée de Fourier inverse de $c_T(k)$ (équation (A.5)) dans l'équation (A.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-\alpha k} c_T(k) \\ &= e^{-\alpha k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi k} F(c_T)(\phi) d\phi \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\phi k} F(c_T)(\phi) d\phi \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de $F(c_T)(\phi)$ est déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} F(c_T)(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha k} e^{i\phi k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{x_T} - e^k) f_T(x_T) dx_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x_T) e^{-rT} \int_{-\infty}^{x_T} (e^{x_T+\alpha k} - e^{(\alpha+1)k}) e^{i\phi k} dk dx_T \\ &= \frac{e^{-rT}}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+1+i\phi)x_T} f_T(x_T) dx_T \\ &= \frac{e^{-rT}}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\alpha i - i + \phi i)x_T} f_T(x_T) dx_T \\ &= \frac{e^{-rT} F(c_T)(\phi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi} \end{aligned}$$

Ainsi, après avoir déterminé $F(c_T)(\phi)$, cette fonction peut être utilisée dans l'équation (A.5), et la FFT peut être appliquée pour calculer la valeur de l'option d'achat.

Carr et Madan ont également examiné l'optimisation de α dans leur étude. Ils ont constaté que l'équation (A.5) doit être intégrable, ce qui implique que $F(c_T)(0)$ doit être fini. Pour cela, $\phi_T(-(\alpha + 1)i)$ doit être fini, et la condition suivante doit être satisfaite :

$$E[S_T^{\alpha+1}] < \infty$$

Ainsi, α peut être déterminé en respectant ces contraintes. Carr et Madan (1999) ont également étendu la transformée de Fourier aux options hors-la-monnaie, qui n'ont pas de valeur intrinsèque. Cependant, ce type d'options n'est pas considéré dans cet article.

La FFT sous forme discrète est donnée par l'équation suivante :

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N$$

où N est de l'ordre de 2. En utilisant cette forme, Carr et Madan ont formulé l'expression suivante :

$$C(k_u) = \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \kappa(v_j) \eta^3 [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}]$$

Cette équation pour le prix de l'option d'achat est écrite sous l'hypothèse de la règle de Simpson. Ainsi, l'équation (A.5) dans Carr et Madan illustre l'application de la FFT pour la valorisation des options. Pour utiliser cette formule, les valeurs de η et α doivent être choisies correctement. De plus, notez que le terme correspondant à $x(j)$ dans l'équation (A.5) dans l'équation (A.5) retourne un vecteur.