

Finance et Ingénierie Décisionnelle

Rapport de projet

Pricing des options européennes :

Modèle de Black Scholes et Modèle de Heston

Présenté par :
EL QADI Hassan

Encadré par :
M. Brahim El Asri

02/05/2025

Résumé

Ce projet présente une interface interactive dédiée au pricing des options européennes, offrant une approche comparative entre différents modèles et méthodes numériques. Nous implémentons le modèle de Black-Scholes sous sa forme analytique fermée ainsi qu'avec une approche Monte Carlo utilisant le schéma d'Euler-Maruyama. En parallèle, nous développons une implémentation complète du modèle de Heston, incluant à la fois un module de calibration et deux méthodes de pricing : la méthode semi-analytique par fonctions caractéristiques et l'approche Monte Carlo avec schéma d'Euler-Maruyama. L'interface permet aux utilisateurs de comparer directement les performances et précisions des différentes approches, d'explorer l'impact des paramètres sur la valorisation des options, et de visualiser les résultats à travers des graphiques dynamiques. Cette plateforme constitue un outil pédagogique et professionnel permettant d'approfondir la compréhension des modèles à volatilité constante et stochastique, tout en offrant des capacités de pricing en temps réel avec des données de marché réelles.

Mots clés : Options européennes, modèle de Black-Scholes, modèle de Heston, pricing d'options, volatilité stochastique, méthode semi-analytique, simulation Monte Carlo, schéma d'Euler-Maruyama, calibration, interface interactive

Abstract

This project presents an interactive interface dedicated to the pricing of European options, offering a comparative approach between different models and numerical methods. We implement the Black-Scholes model in its closed-form analytical solution as well as with a Monte Carlo approach using the Euler-Maruyama scheme. In parallel, we develop a complete implementation of the Heston model, including both a calibration module and two pricing methods : the semi-analytical method using characteristic functions and the Monte Carlo approach with Euler-Maruyama scheme. The interface allows users to directly compare the performance and accuracy of different approaches, explore the impact of parameters on option valuation, and visualize results through dynamic graphs. This platform serves as both an educational and professional tool for deepening the understanding of constant and stochastic volatility models, while offering real-time pricing capabilities with actual market data.

Keywords : European options, Black-Scholes model, Heston model, option pricing, stochastic volatility, semi-analytical method, Monte Carlo simulation, Euler-Maruyama scheme, calibration, interactive interface

Table des matières

Résumé	I
Abstract	II
Liste des algorithmes	V
Introduction générale	1
1 Fondements théoriques et contexte financier	4
1.1 Marchés financiers et produits dérivés	4
1.1.1 Structure et fonctionnement des marchés	4
1.1.2 Le marché des options	5
1.2 Risque et volatilité	6
1.2.1 Définition et types de risques de marché	6
1.2.2 La volatilité comme mesure du risque	6
1.3 Concepts avancés pour l'analyse des options	6
1.3.1 Univers risque neutre	6
1.3.2 Les "Grecques" : indicateurs de sensibilité	7
1.3.3 Les données de marché	7
2 Modèles d'évaluation d'options	8
2.1 Le modèle de Black-Scholes	8
2.1.1 Fondements et hypothèses	8
2.1.2 Formulation mathématique	8
2.1.3 Équation aux dérivées partielles et solution analytique	9
2.1.4 Formules fermées de valorisation	9
2.1.5 Volatilité implicite	9
2.1.6 Approche par simulation Monte Carlo	10
2.1.7 Limites du modèle et phénomènes de marché	11
2.2 Le modèle de Heston	11
2.2.1 Dynamique du modèle	12
2.2.2 Interprétation des paramètres	12
2.2.3 Conditions de Feller et contraintes de positivité	13
2.2.4 Équation aux dérivées partielles de Heston	13
2.2.5 Solution semi-analytique par transformée de Fourier	13
2.2.6 Méthode de Monte Carlo	14
2.3 Conclusion	16

3	Calibration du modèle de Heston	17
3.1	Principes de la calibration	17
3.1.1	Définition du problème de calibration inverse	17
3.1.2	Choix de la fonction objectif	18
3.1.3	Contraintes et espace des paramètres	18
3.2	Méthodes d'optimisation classiques	19
3.2.1	Optimisation locale sous contraintes : Programmation Quadratique Séquentielle	19
3.2.2	Optimisation globale stochastique : Algorithme d'évolution différentielle	20
3.2.3	Stratégie hybride de calibration	22
3.3	Conclusion	22
4	Conception et Développement de la Plateforme	23
4.1	Présentation Générale du Projet	23
4.2	Architecture du Projet	23
4.3	Parcours Utilisateur et Fonctionnalités Clés	24
4.3.1	Configuration de l'Option	24
4.3.2	Recherche et Chargement des Données de Marché	24
4.3.3	Sélection d'un Contrat d'Option	25
4.3.4	Remplissage Automatique des Paramètres	25
4.3.5	Choix de la Méthode de Pricing et Paramétrage du Modèle de Heston	26
4.4	Affichage des Résultats	27
4.4.1	Résumé des Paramètres	27
4.4.2	Résultats du Pricing	27
4.4.3	Visualisation du Payoff et du Profit	27
4.5	Conclusion	28
	Conclusion et perspectives	29
A	Démonstrations de Black-Scholes	31
B	Démonstrations de Heston	34

Introduction générale

Contexte et importance du pricing d'options

Les produits dérivés représentent aujourd'hui un marché colossal de plusieurs centaines de milliards de dollars, jouant un rôle crucial dans la finance mondiale. Au cur de ces instruments complexes, les options financières sont des outils stratégiques essentiels pour la gestion des risques, l'optimisation des portefeuilles et l'élaboration de stratégies spéculatives. Une option donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif à un prix fixé d'avance (strike), soit à une date précise (option européenne), soit durant une période donnée (option américaine).

Le modèle de Black-Scholes, bien qu'élégant mathématiquement, se heurte à des limites importantes dans la pratique, notamment l'hypothèse d'une volatilité constante qui contredit clairement les observations empiriques des marchés. Face à ces anomalies, le modèle de Heston (1993) s'est imposé comme une alternative incontournable. En traitant la volatilité comme un processus stochastique corrélé au prix du sous-jacent, ce modèle offre un cadre plus souple capable de reproduire la plupart des caractéristiques observées sur les marchés, notamment les phénomènes de smile et de skew de volatilité.

Dans le contexte actuel des marchés financiers dynamiques, disposer d'outils efficaces et précis pour valoriser les options et visualiser l'impact des différents paramètres devient essentiel. Cependant, la complexité des modèles avancés comme celui de Heston et les différentes méthodes numériques disponibles peuvent rendre leur utilisation difficile pour les praticiens. Une interface interactive centralisant ces fonctionnalités tout en permettant une comparaison directe entre les approches représente donc une contribution significative tant pour la formation que pour la pratique professionnelle.

Problématique et objectifs du projet

Ce projet se concentre sur le développement d'une interface interactive pour le pricing des options européennes, en mettant l'accent sur la comparaison entre différents modèles et méthodes numériques. Notre problématique s'articule autour de plusieurs questions fondamentales :

- Comment implémenter efficacement et comparer les modèles de Black-Scholes et de Heston pour la valorisation d'options européennes ?
- Quelles sont les différences de performance et de précision entre les méthodes analytiques et les approches Monte Carlo basées sur le schéma d'Euler-Maruyama ?

- Comment optimiser le processus de calibration du modèle de Heston pour garantir une reproduction fidèle des prix observés sur le marché ?
- De quelle manière concevoir une interface utilisateur intuitive permettant d’explorer l’impact des différents paramètres sur la valorisation des options ?

Les objectifs de ce projet sont multiples :

1. Développer un outil interactif complet pour le pricing d’options européennes, intégrant les modèles de Black-Scholes et de Heston.
2. Implémenter et comparer différentes méthodes de pricing : solution analytique fermée (Black-Scholes), approche semi-analytique par fonctions caractéristiques (Heston) et simulations Monte Carlo avec schéma d’Euler-Maruyama (pour les deux modèles).
3. Intégrer un module de calibration pour le modèle de Heston permettant d’ajuster les paramètres du modèle aux données de marché.
4. Concevoir une interface graphique intuitive permettant aux utilisateurs de visualiser les résultats et d’explorer l’impact des paramètres sur les prix et les grecques des options.
5. Offrir la possibilité d’utiliser des données de marché réelles pour enrichir l’expérience utilisateur et faciliter l’application pratique de l’outil.

Méthodologie générale

Notre approche méthodologique s’articule en quatre phases principales :

Premièrement, nous établissons les fondements théoriques nécessaires à la compréhension des modèles de pricing d’options, en expliquant les concepts fondamentaux du calcul stochastique et de la valorisation risque-neutre.

Deuxièmement, nous implémentons les modèles de Black-Scholes et de Heston, en détaillant leurs formulations mathématiques et leurs propriétés. Pour chaque modèle, nous développons à la fois des méthodes analytiques ou semi-analytiques et des approches par simulation Monte Carlo.

Troisièmement, nous nous concentrons sur la calibration du modèle de Heston, en implémentant des méthodes d’optimisation permettant d’ajuster les cinq paramètres du modèle (vitesse de retour à la moyenne, niveau moyen de variance à long terme, volatilité de la volatilité, corrélation, et variance initiale) aux prix d’options observés sur le marché.

Enfin, nous concevons l’architecture de l’interface utilisateur et implémentons les fonctionnalités de visualisation et d’interaction, en veillant à offrir une expérience intuitive qui facilite la comparaison entre les modèles et les méthodes.

Cette méthodologie structurée nous permet de développer un outil complet qui conjugue rigueur théorique et accessibilité pratique, tout en offrant une flexibilité pour différents cas d’utilisation, de l’enseignement à l’application professionnelle.

Structure du mémoire

Ce mémoire s'organise en cinq chapitres :

Le présent chapitre d'introduction présente le contexte, les objectifs et la méthodologie générale du projet.

Le **Chapitre 1** expose les fondements théoriques nécessaires à la compréhension des modèles de pricing d'options. Il aborde les concepts essentiels comme le mouvement brownien, le calcul stochastique d'Itô, et les principes de valorisation risque-neutre, constituant la base mathématique des modèles plus avancés.

Le **Chapitre 2** détaille les modèles de pricing implémentés dans notre interface : le modèle de Black-Scholes et le modèle de Heston. Pour chaque modèle, nous présentons les hypothèses, les équations différentielles stochastiques sous-jacentes, et les solutions analytiques ou semi-analytiques pour la valorisation des options européennes.

Le **Chapitre 3** se concentre sur la calibration du modèle de Heston, une étape cruciale pour son utilisation pratique. Nous y présentons les méthodes d'optimisation implémentées, les défis spécifiques liés à la calibration de ce modèle à cinq paramètres, et les stratégies pour garantir la stabilité et la pertinence des résultats.

Le **Chapitre 4** décrit l'implémentation technique de l'interface interactive, incluant l'architecture logicielle, les choix technologiques, les algorithmes de pricing et de calibration, ainsi que les fonctionnalités de visualisation et d'interaction avec l'utilisateur.

Enfin, la **Conclusion** synthétise les contributions du projet, discute des avantages et des limitations de l'approche adoptée, et présente des perspectives d'amélioration et d'extension de l'interface développée.

Chapitre 1

Fondements théoriques et contexte financier

Ce chapitre présente les concepts financiers et mathématiques fondamentaux nécessaires à la compréhension de ce projet. Ces connaissances constituent le socle théorique des modèles de valorisation des options ainsi que des méthodes numériques utilisées.

1.1 Marchés financiers et produits dérivés

1.1.1 Structure et fonctionnement des marchés

Marchés organisés (Bourses)

Un marché organisé, ou bourse, est une plateforme centralisée où acheteurs et vendeurs effectuent des transactions sur des instruments financiers normalisés. Les ordres sont transmis via des intermédiaires à des membres officiels de la bourse. Une chambre de compensation intervient comme contrepartie unique, garantissant ainsi l'exécution des transactions et éliminant le risque de contrepartie.

Les principales caractéristiques des marchés organisés sont :

- Standardisation des contrats et procédures,
- Centralisation des ordres d'achat et de vente,
- Accès réservé aux membres agréés,
- Présence d'une chambre de compensation.

Aujourd'hui, les échanges s'effectuent principalement de manière électronique, remplaçant progressivement les transactions physiques sur les parquets.

Marchés de gré à gré (OTC)

Les marchés de gré à gré (Over-The-Counter, OTC) sont décentralisés : les transactions s'effectuent directement entre deux contreparties, sans chambre de compensation. Cette configuration implique un risque de contrepartie plus élevé et une moindre transparence.

Les marchés OTC sont animés par des *market makers* qui fournissent en continu des cotations (bid et ask). La fragmentation de ces marchés peut entraîner des écarts de prix, exploitables par des stratégies d'arbitrage.

1.1.2 Le marché des options

Historique

Le premier marché moderne d'options a été créé en 1973 au *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE), parallèlement à la publication de l'article fondateur de Black et Scholes : "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*". En Europe, le *London Traded Option Exchange* a ouvert en 1978, suivi en 1987 par le *MONEP* à Paris.

Fonctionnement du marché des options

Les marchés organisés d'options assurent :

- Une liquidité continue,
- Une transparence des prix,
- Une gestion du risque de contrepartie via la chambre de compensation.

Les acteurs principaux sont :

- **Brokers** : exécutent les ordres pour le compte des investisseurs,
- **Market makers** : assurent la liquidité par des cotations permanentes,
- **Chambres de compensation** : garantissent les transactions en demandant des dépôts de garantie et des appels de marge.

Types d'options

On distingue :

- **Options vanilles** :
 - *Européennes* : exerçables uniquement à maturité,
 - *Américaines* : exerçables à tout moment jusqu'à l'échéance.
- **Options exotiques** : à barrière, lookback, asiatiques, etc.

Le payoff pour une option européenne est donné par :

$$\text{Call : } H_T = (S_T - K)^+$$

$$\text{Put : } H_T = (K - S_T)^+$$

Terminologie essentielle

Quelques termes clés :

- **Prime** : coût initial pour acquérir l'option,
- **Sous-jacent** (S) : actif lié à l'option,

- **Prix d'exercice** (K) : prix convenu pour l'achat ou la vente,
- **Échéance** (T) : date limite d'exercice,
- **Valeur intrinsèque** : gain immédiat si l'option est exercée,
- **In The Money (ITM)** : option avec valeur intrinsèque positive,
- **Out of The Money (OTM)** : option avec valeur intrinsèque nulle,
- **At The Money (ATM)** : prix du sous-jacent proche du prix d'exercice.

1.2 Risque et volatilité

1.2.1 Définition et types de risques de marché

En finance, le risque est la possibilité de variations imprévues dans les résultats financiers.

Les principaux risques de marché sont :

- Risque de taux d'intérêt,
- Risque de change,
- Risque actions,
- Risque sur matières premières,
- Risque de crédit,
- Risque de volatilité.

1.2.2 La volatilité comme mesure du risque

Volatilité historique : Basée sur les fluctuations passées du sous-jacent, la volatilité historique est utile pour l'analyse rétrospective, mais limitée pour prévoir les comportements futurs.

Volatilité implicite : La volatilité implicite est extraite du prix des options observées sur le marché en utilisant, par exemple, le modèle de Black-Scholes. Elle traduit les anticipations du marché quant aux variations futures de l'actif sous-jacent.

1.3 Concepts avancés pour l'analyse des options

1.3.1 Univers risque neutre

Martingale

Un processus stochastique $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à l'information \mathcal{F}_t si :

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s, \quad \forall s < t$$

Cela signifie que, compte tenu de l'information à l'instant s , la meilleure estimation de M_t est M_s .

Univers risque neutre

Dans un univers risque neutre, les prix actualisés des actifs sont des martingales sous une probabilité risque-neutre. Cela facilite la valorisation des produits dérivés sans nécessiter de primes de risque.

1.3.2 Les "Grecques" : indicateurs de sensibilité

Les « grecques » mesurent la sensibilité du prix d'une option aux facteurs de marché :

- Delta : variation par rapport au sous-jacent,
- Gamma : variation du Delta,
- Vega : variation par rapport à la volatilité,
- Theta : variation par rapport au temps,
- Rho : variation par rapport aux taux d'intérêt.

Ces indicateurs permettent une gestion efficace des risques.

1.3.3 Les données de marché

Yahoo Finance fournit des données de marché essentielles telles que les prix des actifs, les nappes de volatilité implicite et les courbes de taux d'intérêt utilisées pour la calibration et la valorisation des options.

Chapitre 2

Modèles d'évaluation d'options

2.1 Le modèle de Black-Scholes

2.1.1 Fondements et hypothèses

Le modèle de Black-Scholes-Merton, développé en 1973, constitue une révolution dans la théorie financière et représente la pierre angulaire de l'évaluation moderne des options. Il propose une solution analytique élégante pour le prix d'une option européenne, sous l'hypothèse que l'actif sous-jacent suit un **mouvement brownien géométrique**. Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Marché **sans friction** : absence de frais de transaction et d'impôts,
- Respect du principe d'**absence d'opportunité d'arbitrage**,
- Possibilité d'effectuer des **ventes à découvert** sans restriction,
- **Taux d'intérêt** sans risque r constant et connu,
- Absence de **dividendes** pendant la durée de vie de l'option,
- **Volatilité** σ du sous-jacent constante,
- Prix de l'actif suivant une distribution **log-normale**.

Bien que ces hypothèses soient restrictives, le modèle offre un cadre théorique puissant qui sert de base à de nombreuses extensions.

2.1.2 Formulation mathématique

Dans le cadre de Black-Scholes, le prix du sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique. Sous la probabilité historique \mathbb{P} , la dynamique de S_t est donnée par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (2.1)$$

où :

- S_t est le prix de l'actif à l'instant t ,
- B_t est un mouvement brownien standard,
- μ est le taux de drift,
- σ est la volatilité constante.

En appliquant la formule d'Itô, on obtient la solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right). \quad (2.2)$$

Ainsi, $\ln S_t$ suit une loi normale de moyenne $\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$ et de variance $\sigma^2 t$.

2.1.3 Équation aux dérivées partielles et solution analytique

Le modèle repose sur la construction d'un portefeuille autofinancé composé d'une position Δ dans l'actif et d'une position en actif sans risque. En appliquant la formule d'Itô et en neutralisant le risque, on obtient l'équation de Black-Scholes (Demonstration A.1) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (2.3)$$

avec la condition terminale pour un call :

$$C(T, S) = \max(S - K, 0). \quad (2.4)$$

2.1.4 Formules fermées de valorisation

La solution analytique donne le prix d'un call européen (Demonstration A.2) :

$$C_{BS}(S_0, K, T, r, \sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (2.5)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}, \quad (2.6)$$

où $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le prix d'un put européen est :

$$P_{BS}(S_0, K, T, r, \sigma) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (2.7)$$

Ces formules satisfont la relation de parité call-put :

$$C_{BS} - P_{BS} = S_0 - K e^{-rT}. \quad (2.8)$$

2.1.5 Volatilité implicite

La **volatilité implicite** (VI) est la volatilité qui, insérée dans la formule de Black-Scholes, reproduit le prix observé du marché :

$$C_{BS}(S_0, K, T, r, \sigma) = C_{obs}. \quad (2.9)$$

La recherche de σ est réalisée numériquement, notamment via la méthode de Newton-Raphson.

La volatilité implicite constitue un indicateur clé des anticipations du marché.

2.1.6 Approche par simulation Monte Carlo

Principes de la méthode Monte Carlo

La méthode Monte Carlo repose sur la simulation de nombreux chemins du prix du sous-jacent pour approximer la valeur de l'option. Le prix est estimé par :

$$V_0 \approx e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(S_T^{(i)}), \quad (2.10)$$

où $h(S_T^{(i)})$ est le payoff simulé et N est le nombre de simulations.

Discrétisation d'Euler-Maruyama pour Black-Scholes

Sous la mesure risque-neutre, la dynamique est :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (2.11)$$

En discrétisant par pas de temps $\Delta t = T/M$, on obtient :

$$S_{t_{j+1}} = S_{t_j} + rS_{t_j} \Delta t + \sigma S_{t_j} \sqrt{\Delta t} Z_j, \quad (2.12)$$

où $Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Algorithm 1 Pricing d'option européenne par Monte Carlo avec schéma d'Euler-Maruyama

```

1 : Entrées :  $S_0, K, r, \sigma, T, N$  (simulations),  $M$  (pas de temps)
2 : Initialisation :  $\Delta t = T/M$ , somme_payoffs = 0
3 : for  $i = 1$  to  $N$  do
4 :    $S \leftarrow S_0$ 
5 :   for  $j = 1$  to  $M$  do
6 :     Générer  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 
7 :      $S \leftarrow S + rS\Delta t + \sigma S\sqrt{\Delta t}Z$ 
8 :   end for
9 :   Calculer le payoff
10 :  somme_payoffs  $\leftarrow$  somme_payoffs + payoff
11 : end for
12 : Retour :  $e^{-rT} \times \text{somme\_payoffs} / N$ 

```

2.1.7 Limites du modèle et phénomènes de marché

Problème de volatilité constante

La volatilité n'est pas constante en pratique ; elle dépend du strike et de la maturité, formant des **smiles** et **skews** de volatilité.

Caractéristiques empiriques des rendements

Les rendements observés présentent des **queues épaisses** et de l'**asymétrie**, contrairement à l'hypothèse de normalité du modèle.

Frictions de marché

En réalité, il existe des coûts de transaction, des restrictions de vente à découvert et des taux d'intérêt variables.

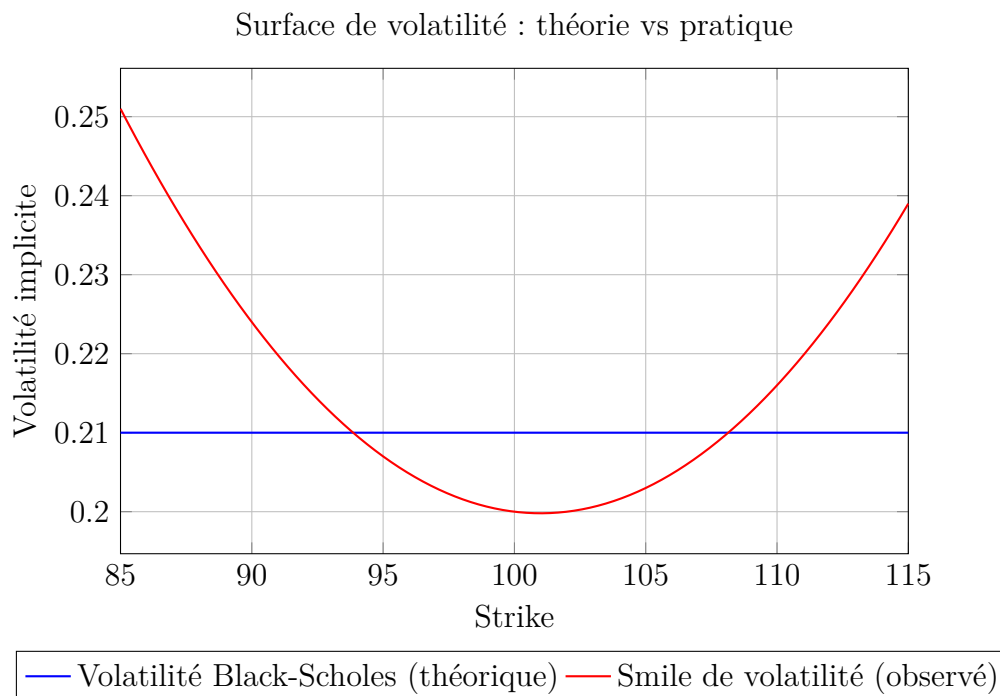


FIGURE 2.1 – Contraste entre la volatilité constante de Black-Scholes et le smile observé en pratique.

Ces limitations motivent l'étude de modèles plus réalistes, notamment le modèle de Heston que nous aborderons au prochain chapitre.

2.2 Le modèle de Heston

Le modèle de Heston, introduit par Steven Heston en 1993, constitue une avancée majeure dans la modélisation des options financières. Contrairement au modèle de Black-

Scholes qui suppose une volatilité constante, Heston propose un cadre où la volatilité elle-même suit un processus stochastique. Cette approche permet de mieux refléter les réalités observées sur les marchés financiers, notamment les phénomènes de smile et de skew de volatilité.

2.2.1 Dynamique du modèle

Soit S_t le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t et v_t sa variance instantanée ($v_t = \sigma_t^2$). Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , la dynamique du modèle de Heston est donnée par :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \\ dW_t^{(1)}dW_t^{(2)} = \rho dt \end{cases} \quad (2.13)$$

où :

- r est le taux d'intérêt sans risque,
- $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens corrélés avec coefficient ρ ,
- κ est la vitesse de retour vers la moyenne,
- θ est la variance à long terme,
- σ est la volatilité de la variance (vol-of-vol).

2.2.2 Interprétation des paramètres

Le modèle de Heston comporte cinq paramètres principaux, chacun ayant une interprétation financière :

Volatilité initiale (v_0) : Il s'agit de la valeur initiale de la variance instantanée. Elle représente la perception immédiate de la volatilité du marché.

Vitesse de retour à la moyenne (κ) : Le paramètre κ contrôle la rapidité avec laquelle v_t revient vers le niveau moyen θ après un choc.

Niveau moyen de variance à long terme (θ) : Ce paramètre indique la moyenne à long terme autour de laquelle la variance v_t fluctue.

Volatilité de la volatilité (σ) : La vol-of-vol mesure l'ampleur des variations aléatoires de la variance v_t .

Corrélation (ρ) : ρ est la corrélation instantanée entre les variations du prix du sous-jacent et celles de sa variance. En pratique, sur les marchés actions, ρ est souvent négatif (effet de levier).

2.2.3 Conditions de Feller et contraintes de positivité

Condition de Feller

La condition de Feller garantit la positivité de v_t :

$$2\kappa\theta > \sigma^2 \quad (2.14)$$

Si elle est satisfaite, le processus de variance évite d'atteindre zéro, ce qui assure la stabilité du modèle.

Contraintes sur les paramètres

Pour garantir le réalisme du modèle, on impose :

$$\begin{aligned} \kappa &> 0 && \text{(vitesse de retour positive)} \\ \theta &> 0 && \text{(niveau moyen positif)} \\ \sigma &> 0 && \text{(volatilité positive)} \\ v_0 &> 0 && \text{(variance initiale positive)} \end{aligned}$$

2.2.4 Équation aux dérivées partielles de Heston

En utilisant une approche similaire à celle de Black-Scholes mais en prenant en compte la stochastique de la variance, on obtient l'EDP suivante (Demonstration B.1) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + (\kappa(\theta - v) - \lambda)\frac{\partial U}{\partial v} - rU = 0 \quad (2.15)$$

où λ représente la prime de risque de volatilité.

2.2.5 Solution semi-analytique par transformée de Fourier

Heston propose une solution semi-analytique basée sur la transformée de Fourier (**Demonstration B.2**). Le prix d'un call européen est exprimé comme :

$$C(S_0, K, T) = S_0P_1 - Ke^{-rT}P_2 \quad (2.16)$$

où P_1 et P_2 sont calculés par intégration de la fonction caractéristique :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad j = 1, 2 \quad (2.17)$$

La fonction caractéristique $f_j(\phi)$ est donnée par :

$$f_j(\phi) = \exp(i\phi x + C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_0) \quad (2.18)$$

avec :

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)} \quad (2.19)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} \quad (2.20)$$

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right) \quad (2.22)$$

où :

$$a = \kappa\theta, \quad \tau = T - t, \quad x = \ln(S_0)$$

et

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \kappa + \lambda$$

2.2.6 Méthode de Monte Carlo

Principe général

La méthode de Monte Carlo simule de nombreuses trajectoires du couple (S_t, v_t) pour estimer le prix d'une option européenne. Pour un call :

$$C(K) \approx e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(S_T^{(i)} - K, 0) \quad (2.23)$$

où N est le nombre de simulations, $S_T^{(i)}$ le sous-jacent à maturité pour la i^e simulation, K le strike, et r le taux sans risque.

Schéma de discrétisation d'Euler-Maruyama

Le modèle de Heston est donné par le système stochastique suivant :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t (r dt + \sqrt{v_t} dW_t^S) \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^v \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec dW_t^S et dW_t^v deux mouvements browniens corrélés : $dW_t^v = \rho dW_t^S + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t$, où dZ_t est un brownien indépendant.

On applique alors une discrétisation par le schéma d'Euler-Maruyama, avec $\Delta t = T/M$ (où M est le nombre de pas de temps) :

$$\begin{aligned} v_{t+\Delta t} &= v_t + \kappa(\theta - v_t^+) \Delta t + \sigma \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_v \\ S_{t+\Delta t} &= S_t \exp \left[\left(r - \frac{v_t^+}{2} \right) \Delta t + \sqrt{v_t^+} \sqrt{\Delta t} Z_S \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $Z_S \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Z_v = \rho Z_S + \sqrt{1 - \rho^2} Z_\perp$, avec $Z_\perp \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendant de Z_S .

Traitement des variances négatives

Pour éviter que v_t devienne négatif :

- **Full truncation** : $v_t^+ = \max(v_t, 0)$
- **Réflexion** : $v_t^+ = |v_t|$

La méthode *full truncation* est la plus stable.

Réduction de variance

La méthode des variables antithétiques améliore la précision. Pour chaque vecteur Z , on simule aussi $-Z$:

$$V = \frac{1}{2} (f(Z) + f(-Z))$$

Cette méthode permet de réduire la variance de l'estimateur.

Algorithme de simulation

Algorithm 2 Pricing d'option européenne par Monte Carlo avec schéma d'Euler-Maruyama (Heston)

```

1 : Entrées :  $S_0, v_0, K, r, T, \kappa, \theta, \sigma, \rho, N$  (simulations),  $M$  (pas de temps)
2 : Initialisation :  $\Delta t = T/M$ , somme_payoffs = 0
3 : for  $i = 1$  to  $N$  do
4 :    $S \leftarrow S_0, v \leftarrow v_0$ 
5 :   for  $j = 1$  to  $M$  do
6 :     Générer  $Z_S \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Z_\perp \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 
7 :      $Z_v \leftarrow \rho Z_S + \sqrt{1 - \rho^2} Z_\perp$ 
8 :      $v \leftarrow v + \kappa(\theta - \max(v, 0)) \Delta t + \sigma \sqrt{\max(v, 0)} \sqrt{\Delta t} Z_v$ 
9 :      $S \leftarrow S \cdot \exp \left[ \left( r - \frac{\max(v, 0)}{2} \right) \Delta t + \sqrt{\max(v, 0)} \sqrt{\Delta t} Z_S \right]$ 
10 :   end for
11 :    $\text{payoff} \leftarrow \max(S - K, 0)$ 
12 :   somme_payoffs  $\leftarrow$  somme_payoffs + payoff
13 : end for
14 : Retour :  $C \leftarrow e^{-rT} \cdot \text{somme\_payoffs} / N$ 
```

Avantages et limites

- **Avantages :**
 - Méthode flexible applicable à différents types d'options (barrières, lookback, etc.)
 - Facilité de mise en œuvre dans des modèles complexes comme Heston
- **Limites :**
 - Convergence lente : $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$
 - Nécessite beaucoup de simulations pour obtenir des résultats précis
 - Coûteux en temps de calcul, surtout dans des modèles à plusieurs facteurs

2.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté deux modèles majeurs de valorisation des options : Black-Scholes et Heston.

Le modèle de Black-Scholes, bien que fondamental, suppose une volatilité constante, ce qui limite sa capacité à reproduire les phénomènes observés sur les marchés, tels que les smiles et skews.

Le modèle de Heston corrige cette limite en introduisant une volatilité stochastique suivant un processus CIR corrélé au sous-jacent. Nous en avons détaillé la structure, les conditions de validité (comme celle de Feller) ainsi que les méthodes de pricing associées : formule semi-fermée et Monte Carlo.

Plus flexible et réaliste, le modèle de Heston reste suffisamment tractable pour des applications pratiques. Il constituera la base de notre étude de calibration aux données de marché, sujet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Calibration du modèle de Heston

3.1 Principes de la calibration

La calibration d'un modèle financier est une étape cruciale consistant à déterminer les paramètres optimaux permettant de reproduire au mieux les prix observés sur le marché. Dans le cas du modèle de Heston, cette calibration représente un défi particulier en raison de la complexité de la dynamique stochastique de la volatilité et du nombre important de paramètres à estimer simultanément.

3.1.1 Définition du problème de calibration inverse

Le problème de calibration inverse du modèle de Heston peut être formulé ainsi : étant donné un ensemble d'options observées sur le marché, avec leurs prix P_i^{market} pour $i = 1, \dots, N$, nous cherchons le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$ qui minimise l'écart entre les prix théoriques du modèle de Heston $P_i^{model}(\boldsymbol{\theta})$ et les prix observés.

Formellement, le problème d'optimisation s'exprime par :

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \sum_{i=1}^N (P_i^{model}(\boldsymbol{\theta}) - P_i^{market})^2 \quad (3.1)$$

où Θ est l'espace des paramètres admissibles.

Il est important de distinguer deux approches différentes pour estimer les paramètres :

- **Estimation statistique** : basée sur l'analyse de séries temporelles historiques du sous-jacent, par maximum de vraisemblance ou méthode des moments.
- **Calibration aux prix d'options** : ajustement direct des paramètres pour reproduire les prix observés des options à un instant donné.

Dans ce projet, nous nous concentrons sur la seconde approche, privilégiée pour assurer la cohérence avec les conditions de marché actuelles, notamment pour le pricing et la couverture dynamique.

3.1.2 Choix de la fonction objectif

Le choix de la fonction objectif est déterminant pour obtenir une calibration fiable. Plusieurs critères peuvent être envisagés :

Erreur quadratique moyenne (MSE)

La fonction objectif classique consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les prix du modèle et les prix du marché :

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i^{model}(\boldsymbol{\theta}) - P_i^{market})^2 \quad (3.2)$$

Elle est simple et favorise les options dont le prix est élevé, souvent celles proches du money ou de maturité longue.

Racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE)

Une variante consiste à prendre la racine carrée du MSE pour ramener l'unité de l'erreur à celle du prix :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i^{model}(\boldsymbol{\theta}) - P_i^{market})^2} \quad (3.3)$$

Cette mesure est plus directement interprétable car elle conserve l'échelle des prix.

Erreur quadratique relative normalisée (Relative RMSE)

Pour neutraliser l'effet d'échelle des prix d'options (notamment entre options ITM et OTM), on peut utiliser une version relative :

$$RRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_i^{model}(\boldsymbol{\theta}) - P_i^{market}}{\overline{P^{market}}} \right)^2} \quad (3.4)$$

où $\overline{P^{market}}$ désigne le prix moyen des options observées sur le marché.

3.1.3 Contraintes et espace des paramètres

La calibration du modèle de Heston est sujette à plusieurs contraintes visant à assurer la viabilité mathématique et l'interprétation financière des paramètres.

Contraintes de positivité et bornes naturelles

Les contraintes de base sont :

$$\kappa > 0 \quad (\text{vitesse de retour vers la moyenne}) \quad (3.5)$$

$$\theta > 0 \quad (\text{niveau moyen de variance positif}) \quad (3.6)$$

$$\sigma > 0 \quad (\text{volatilité de la variance positive}) \quad (3.7)$$

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (\text{corrélation bornée}) \quad (3.8)$$

$$v_0 > 0 \quad (\text{variance initiale positive}) \quad (3.9)$$

Ces restrictions garantissent notamment que la variance est toujours positive et que la corrélation est mathématiquement valable.

Condition de Feller

Pour assurer que la variance v_t reste strictement positive (et éviter les valeurs nulles ou négatives qui poseraient problème dans $\sqrt{v_t}$), la condition de Feller doit être respectée :

$$2\kappa\theta > \sigma^2 \quad (3.10)$$

Le non-respect de cette condition peut rendre la simulation du processus délicate et compromettre la stabilité numérique.

3.2 Méthodes d'optimisation classiques

La résolution du problème de calibration du modèle de Heston, du fait de sa nature non linéaire et fortement non convexe, nécessite l'emploi de techniques d'optimisation adaptées à la fois à la complexité du paysage de la fonction objectif et à la présence de contraintes fortes sur les paramètres. Deux classes de méthodes complémentaires ont été utilisées dans ce travail : une méthode déterministe locale sous contraintes et une méthode stochastique globale. Chacune est présentée ci-dessous en détail.

3.2.1 Optimisation locale sous contraintes : Programmation Quadratique Séquentielle

La méthode de programmation quadratique séquentielle (PQS, ou SQP pour *Sequential Quadratic Programming*) est une technique classique pour résoudre des problèmes d'optimisation non linéaire sous contraintes d'égalité et d'inégalité. Elle repose sur l'idée de résoudre, à chaque itération, un sous-problème quadratique qui approxime localement le problème initial.

Plus précisément, à l'itération k , on approxime la fonction objectif par un développement quadratique, et on linéarise les contraintes autour de la solution courante. Cela conduit au problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{d} \\ \text{sous} \quad & c_j(\boldsymbol{\theta}_k) + \nabla c_j(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{d} = 0 \quad (\text{égalités}) \\ & c_j(\boldsymbol{\theta}_k) + \nabla c_j(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{d} \geq 0 \quad (\text{inégalités}) \end{aligned}$$

où \mathbf{H}_k est une approximation de la Hessienne du Lagrangien associé au problème. Le vecteur de paramètres est ensuite mis à jour par $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{d}$.

Cette méthode est particulièrement performante lorsqu'on dispose d'un bon point de départ. Elle permet de prendre en compte naturellement les contraintes, comme les bornes de positivité des paramètres ou la condition de Feller, sans nécessiter de pénalisation explicite.

En termes de performance, la programmation quadratique séquentielle se révèle rapide et précise à proximité du minimum global, et bien adaptée à la phase de raffinement de la solution. Toutefois, elle est sensible à l'initialisation, car elle peut facilement converger vers un minimum local non optimal. Elle est également moins robuste dans les cas où la fonction objectif est bruitée, non différentiable, ou présente des discontinuités.

Algorithm 3 Optimisation locale par Programmation Quadratique Séquentielle (PQS)

- 1 : **Entrée** : fonction objectif f , contraintes c_j , initialisation $\boldsymbol{\theta}_0$
- 2 : Initialiser $k \leftarrow 0$
- 3 : **repeat**
- 4 : Calculer le gradient $\nabla f(\boldsymbol{\theta}_k)$ et les jacobiens $\nabla c_j(\boldsymbol{\theta}_k)$
- 5 : Construire une approximation de la hessienne du Lagrangien : \mathbf{H}_k
- 6 : Résoudre le sous-problème quadratique :

$$\min_{\mathbf{d}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + \nabla f(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{d}$$

$$\text{sous : } c_j(\boldsymbol{\theta}_k) + \nabla c_j(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{d} = 0 \text{ (égalités), } \geq 0 \text{ (inégalités)}$$

- 7 : Mettre à jour : $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{d}$
 - 8 : $k \leftarrow k + 1$
 - 9 : **until** convergence
 - 10 : **Retour** : $\boldsymbol{\theta}_k$
-

3.2.2 Optimisation globale stochastique : Algorithme d'évolution différentielle

L'évolution différentielle est une méthode d'optimisation inspirée des processus de sélection naturelle. Contrairement aux approches locales, elle n'a pas besoin de dérivées et explore l'espace des paramètres de façon globale, ce qui la rend bien adaptée aux problèmes hautement non convexes comme la calibration du modèle de Heston.

Elle fonctionne en maintenant une population de vecteurs de paramètres $\{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_M\}$. À chaque génération, un nouveau vecteur candidat est généré pour chaque individu via trois étapes :

1. Mutation : un vecteur mutant est construit à partir de trois individus distincts choisis aléatoirement dans la population :

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\theta}_{r_1} + F \cdot (\boldsymbol{\theta}_{r_2} - \boldsymbol{\theta}_{r_3})$$

2. Recombinaison : le vecteur mutant est mélangé avec l'individu courant pour produire un candidat :

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{si } rand_j \leq C_r \text{ ou } j = j_{\text{rand}} \\ \theta_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Sélection : le meilleur entre l'individu courant et le candidat est conservé dans la population suivante :

$$\boldsymbol{\theta}_i^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{si } f(\mathbf{u}_i) < f(\boldsymbol{\theta}_i) \\ \boldsymbol{\theta}_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce processus assure une exploration étendue de l'espace de recherche, et permet d'échapper aux minima locaux. En théorie, l'algorithme converge vers un minimum global sous des hypothèses raisonnables sur la diversité de la population et les choix des paramètres de mutation F et de recombinaison C_r .

L'évolution différentielle est particulièrement robuste aux irrégularités de la fonction objectif. Elle ne nécessite ni gradient ni connaissance précise du problème. Toutefois, cette robustesse a un coût : la méthode exige un grand nombre d'évaluations de la fonction, ce qui peut être prohibitif si le pricing est lent. Elle converge aussi plus lentement dans la phase finale d'optimisation, et sa performance dépend fortement des hyperparamètres choisis.

Algorithm 4 Optimisation globale par Évolution Différentielle (DE)

```

1 : Entrée : fonction objectif  $f$ , bornes sur  $\boldsymbol{\theta}$ , population initiale  $\{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_M\}$ , paramètres  $F, C_r$ 
2 : repeat
3 :   for  $i = 1$  à  $M$  do
4 :     Sélectionner trois indices  $r_1, r_2, r_3 \neq i$ 
5 :      $\mathbf{v}_i \leftarrow \boldsymbol{\theta}_{r_1} + F \cdot (\boldsymbol{\theta}_{r_2} - \boldsymbol{\theta}_{r_3})$ 
6 :     Recombinaison : pour chaque composante  $j$ 

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{si } rand_j \leq C_r \text{ ou } j = j_{\text{rand}} \\ \theta_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

7 :     Sélection :

$$\boldsymbol{\theta}_i^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{si } f(\mathbf{u}_i) < f(\boldsymbol{\theta}_i) \\ \boldsymbol{\theta}_i & \text{sinon} \end{cases}$$

8 :   end for
9 : until critère de convergence atteint
10 : Retour : meilleur  $\boldsymbol{\theta}_i$ 

```

3.2.3 Stratégie hybride de calibration

Pour tirer parti des forces respectives des deux approches, une stratégie hybride est adoptée. L'optimisation commence par une phase d'exploration globale via l'algorithme d'évolution différentielle, afin d'éviter les minima locaux et localiser une région prometteuse de l'espace des paramètres. Ensuite, cette solution initiale est raffinée à l'aide de la méthode de programmation quadratique séquentielle, qui exploite la structure locale du problème pour accélérer la convergence et améliorer la précision.

Ce couplage permet de concilier la robustesse d'une méthode globale avec la rapidité d'une méthode locale. Il s'avère particulièrement adapté à la calibration du modèle de Heston, qui présente une topologie complexe et un fort enchevêtrement entre ses paramètres.

Algorithm 5 Stratégie hybride de calibration : Évolution Différentielle + SQP

- 1 : **Étape 1 (Globale)** : appliquer l'algorithme d'Évolution Différentielle pour approximer la zone du minimum global
 - 2 : **Étape 2 (Locale)** : utiliser le meilleur individu de DE comme point initial θ_0 pour la méthode SQP
 - 3 : **Étape 3** : exécuter l'algorithme de Programmation Quadratique Séquentielle à partir de θ_0
 - 4 : **Retour** : θ^* , paramètres calibrés du modèle de Heston
-

3.3 Conclusion

L'optimisation des paramètres du modèle de Heston est un problème difficile du fait de sa nature non convexe, du nombre de contraintes et du coût élevé de chaque évaluation de la fonction. Les méthodes locales sous contraintes sont rapides et précises, mais fortement dépendantes de l'initialisation. Les méthodes globales comme l'évolution différentielle, bien que coûteuses, apportent une robustesse cruciale pour éviter les minima locaux. En combinant ces deux types d'approches, on construit une stratégie hybride à la fois efficace et fiable, adaptée à la complexité intrinsèque du problème de calibration.

Chapitre 4

Conception et Développement de la Plateforme

4.1 Présentation Générale du Projet

Dans le cadre de ce projet, nous avons développé une plateforme web interactive dédiée au **pricing d'options européennes**, permettant de comparer différentes méthodes de valorisation sur des données réelles du marché. L'application est accessible à l'adresse suivante :

<https://options-price.vercel.app/>

Le projet repose sur une architecture **full-stack moderne** :

- **Frontend** : développé en **Next.js**, un framework React, et déployé sur **Vercel**.
- **Backend** : construit avec **FastAPI**, framework Python pour des APIs rapides, hébergé sur un serveur dédié.
- **Dépôt GitHub du projet** :

<https://github.com/hassanelq/Options-pricing>

La plateforme propose notamment : la sélection de modèles de pricing, la récupération automatique de données de marché, la calibration de modèles stochastiques, et la visualisation intuitive des résultats.

4.2 Architecture du Projet

Le projet est organisé en deux principales parties :

- **Client (Frontend)** : situé dans `client/`, développé sous `Next.js`.
- **Server (Backend)** : situé dans `server/`, développé sous `FastAPI`.

Client (Next.js)

- `app/Components` : composants de l'interface utilisateur.

- `app/Options-pricing` : logique métier liée au pricing d'options.
- `app/methodology` et `app/documentation` : contenu méthodologique et explicatif.

Server (FastAPI)

- `models/` : implémentation des modèles Black-Scholes et Heston.
- `utils/` : modules utilitaires de calibration, de fetching des données, et tests.
- `routes/` : définition des API REST.
- `main.py` : point d'entrée principal.

4.3 Parcours Utilisateur et Fonctionnalités Clés

4.3.1 Configuration de l'Option

L'utilisateur commence par configurer les paramètres de base :

- Style de l'option (européenne uniquement),
- Modèle de pricing (Black-Scholes ou Heston),
- Type d'actif (ETFs, indices, actions).

The screenshot shows a 'Configuration' interface with a 'Reset' button in the top right. It contains three numbered steps:

- 1 Select Option Style**: A green button with a checkmark and the text 'European' is selected.
- 2 Pricing Model**: Two radio buttons are shown. 'Black-Scholes (Vanilla)' is selected with a green circle, and 'Heston (Stochastic Vol)' is unselected with a grey circle.
- 3 Choose Asset Type**: Three buttons are shown. 'ETFs' is selected with a green background and a checkmark. 'Indices' and 'Stocks' are unselected with grey backgrounds.

FIGURE 4.1 – Configuration de l'option : style, modèle, et type d'actif

4.3.2 Recherche et Chargement des Données de Marché

L'utilisateur recherche un actif (par ex., *SPY*) et importe les données d'options disponibles en temps réel :

4 Input Key Parameters

ETFs Symbol

Search Symbol

SPY

Search and select a ticker symbol to get market data

Fetch Options Data

FIGURE 4.2 – Recherche du symbole et importation des données

4.3.3 Sélection d'un Contrat d'Option

Une liste d'options est affichée (calls et puts) avec les strikes, prix, volatilités implicites, volumes et échéances. L'utilisateur peut sélectionner un contrat spécifique via un bouton Auto-Fill.

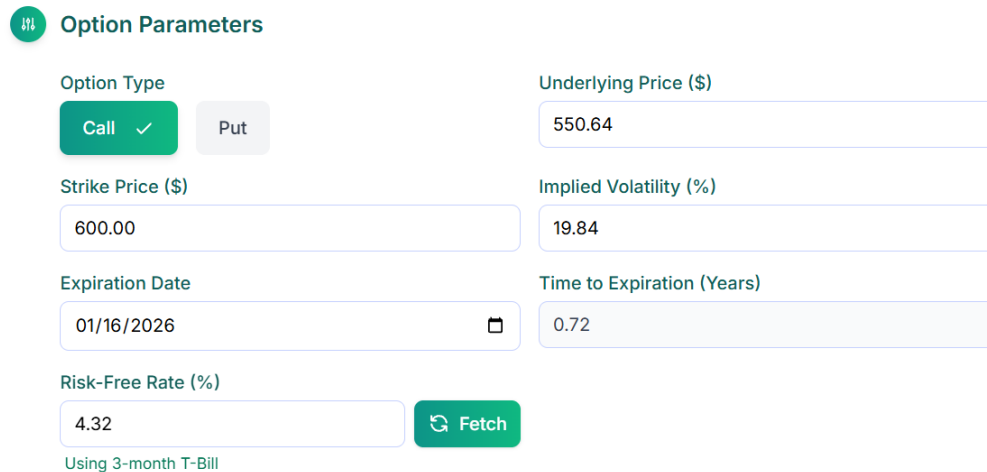
Available Options (SPY) 12 contracts

Type	Strike	Underlying	Expiration	Volume	IV (%)	Price	Action
call	\$550.00	\$550.64	4/28/2025	91594	28.98%	\$3.6	Auto-Fill
call	\$570.00	\$550.64	5/6/2025	2967	20.07%	\$1.2	Auto-Fill
call	\$600.00	\$550.64	5/30/2025	3206	17.20%	\$0.58	Auto-Fill
call	\$700.00	\$550.64	8/15/2025	1059	17.48%	\$0.11	Auto-Fill
call	\$600.00	\$550.64	1/16/2026	1481	19.84%	\$18.43	Auto-Fill
call	\$850.00	\$550.64	12/17/2027	501	15.95%	\$3.42	Auto-Fill
put	\$545.00	\$550.64	4/28/2025	74788	29.20%	\$1.25	Auto-Fill

FIGURE 4.3 – Liste d'options disponibles pour l'actif sélectionné

4.3.4 Remplissage Automatique des Paramètres

Après sélection, les informations critiques sont automatiquement remplies : strike, spot, volatilité implicite, temps jusqu'à maturité, taux sans risque.




Option Parameters

Option Type: Call ✓ Put

Underlying Price (\$): 550.64

Strike Price (\$): 600.00

Implied Volatility (%): 19.84

Expiration Date: 01/16/2026 

Time to Expiration (Years): 0.72

Risk-Free Rate (%): 4.32 Fetch

Using 3-month T-Bill

FIGURE 4.4 – Pré-remplissage des paramètres de l’option sélectionnée

4.3.5 Choix de la Méthode de Pricing et Paramétrage du Modèle de Heston

Pour le modèle de Heston, les utilisateurs peuvent :

- Soit saisir manuellement les paramètres $(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)$,
- Soit lancer une **calibration automatique** en cliquant sur **Calibrate Parameters**.

Deux méthodes de pricing sont proposées :

- Solution semi-analytique par transformée de Fourier,
- Simulation Monte Carlo pour payoffs plus complexes.



Choose Solution Method

Heston semi-closed form solution
(Very Fast, Exact in Fourier Space) Monte Carlo Simulation
(Slow, Suitable for Complex Payoffs)

Heston Model Parameters

Mean Reversion (κ): 1.5

Long-term Variance (θ): 0.04

Vol of Vol (ξ): 0.3

Correlation (ρ): -0.7

Initial Variance (v_0): 0.04

Calibrate Parameters

FIGURE 4.5 – Saisie manuelle ou calibration automatique des paramètres du modèle de Heston

4.4 Affichage des Résultats

4.4.1 Résumé des Paramètres

Un tableau récapitule tous les paramètres saisis ou calibrés : prix spot, strike, volatilité, taux sans risque, méthode de solution, type d'option, etc.

Pricing Summary			
Option Style:	European	Underlying Price:	\$550.64
Pricing Model:	Heston	Strike Price:	\$600.00
Asset Type:	ETFs	Time to Expiration:	0.72
Solution Method:	characteristicFunction	Risk-Free Rate:	4.32%
Symbol:	SPY	Volatility:	19.84%
Option Type:	Call	Market Price:	\$18.43
Heston Parameters			
Mean Reversion (κ):	1.50		
Long-term Variance (θ):	0.0400		
Vol of Vol (ξ):	0.300		
Correlation (ρ):	-0.70		

Calculate Option Price

Compare Methods

FIGURE 4.6 – Résumé des paramètres d'entrée pour le pricing

4.4.2 Résultats du Pricing

Le prix de l'option est affiché ainsi que l'écart relatif par rapport au prix de marché, accompagné du temps de calcul.

Option Pricing Result		Market Price: \$18.43
Black-Scholes Closed-Form		\$24.47 +32.78%
Performance	Details	Greeks
Calculation Time:	1.62642 ms	
Error vs Market:	+32.78%	

FIGURE 4.7 – Résultat du pricing (prix, temps de calcul, erreur)

4.4.3 Visualisation du Payoff et du Profit

Deux diagrammes sont générés automatiquement pour représenter :

- Le payoff et le profit du call acheté (Long Call),
- Le payoff et le profit du call vendu (Short Call).

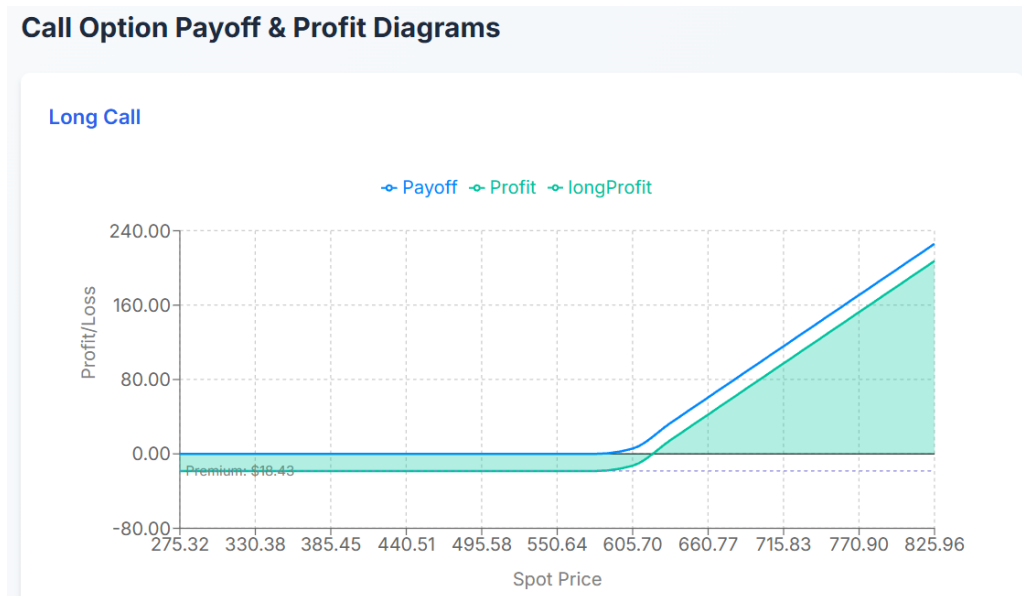


FIGURE 4.8 – Diagramme de profit pour un long call

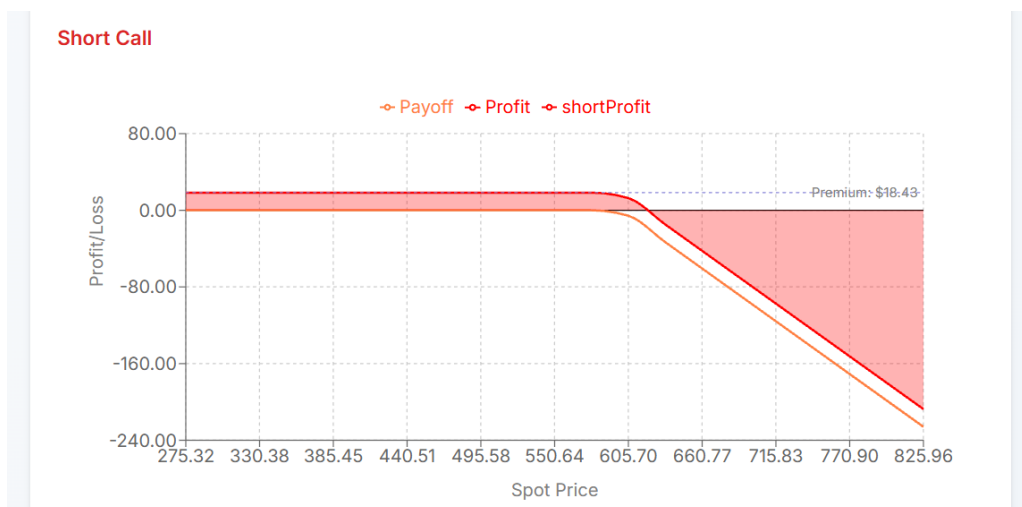


FIGURE 4.9 – Diagramme de profit pour un short call

4.5 Conclusion

La plateforme développée fournit une solution complète, rapide et intuitive pour l'analyse du prix d'options européennes en utilisant à la fois des modèles classiques (Black-Scholes) et avancés (Heston). En combinant les dernières technologies web (Next.js, FastAPI) avec des méthodes quantitatives de pointe, elle offre une expérience utilisateur fluide tout en restant rigoureuse sur le plan financier.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

Ce projet a permis de concevoir et de réaliser une plateforme web avancée dédiée à l'évaluation et à l'analyse d'options européennes, combinant rigueur théorique et efficacité technologique. L'intégration de deux modèles financiers majeurs – le modèle de Black-Scholes et le modèle de Heston – a fourni une base solide pour aborder à la fois les hypothèses classiques et les dynamiques plus réalistes de volatilité stochastique.

Sur le plan quantitatif, des méthodes numériques sophistiquées ont été développées, notamment l'utilisation de la transformée de Fourier pour le pricing semi-analytique dans le modèle de Heston, ainsi que des simulations Monte Carlo adaptées pour la validation croisée et le calcul des sensibilités (Greeks). Le problème complexe de calibration inverse a été traité à l'aide d'une stratégie hybride combinant des algorithmes d'optimisation globale stochastique et locale sous contraintes, assurant à la fois robustesse et précision dans l'ajustement aux prix de marché. La prise en compte de contraintes structurelles comme la condition de Feller garantit également la cohérence théorique des paramètres calibrés.

Sur le plan technique, l'architecture full-stack mise en œuvre – basée sur Next.js pour le frontend et FastAPI pour le backend – a permis de construire une interface réactive et accessible, adaptée aussi bien à des usages pédagogiques qu'à des scénarios professionnels. L'intégration de flux de données réelles, la visualisation interactive des courbes de profit, et la modularité du système rendent l'application évolutive et prête à accueillir de nouvelles fonctionnalités.

Perspectives

Ce travail ouvre de nombreuses pistes d'approfondissement, à la fois sur les plans méthodologique et applicatif :

- **Approfondissement théorique** : étendre l'approche à d'autres modèles stochastiques tels que SABR, Heston avec sauts (modèle de Bates), ou les modèles à volatilité locale, permettant une meilleure adaptation aux structures de volatilité implicite observées sur les marchés.
- **Optimisation numérique** : améliorer la phase de calibration par des techniques plus avancées telles que la différentiation automatique, les algorithmes évolutionnaires adaptatifs, ou encore les stratégies bayésiennes pour la recherche globale.
- **Extension produit** : élargir le périmètre aux options exotiques (barrières, look-

- back), aux produits à maturité variable, voire aux produits dérivés de taux d'intérêt.
- **Performance et scalabilité** : optimiser le backend via la parallélisation (notamment pour les Monte Carlo) et envisager l'exploitation des GPU pour les traitements intensifs, afin de réduire significativement les temps de réponse.
 - **Renforcement de l'interface** : proposer des outils d'analyse plus poussés (surface de volatilité implicite, analyse de stress, backtesting de stratégies), tout en maintenant une ergonomie claire et intuitive.
 - **Déploiement et ouverture** : intégrer des technologies de conteneurisation (Docker, Kubernetes) pour faciliter le déploiement et la montée en charge, et envisager l'exposition d'une API publique à destination d'acteurs tiers (établissements financiers, institutions académiques, fintechs).

En résumé, ce projet établit une convergence réussie entre finance quantitative et ingénierie logicielle, en posant les fondations d'un outil complet pour le pricing, la calibration et l'analyse des produits dérivés. L'évolution future du projet pourra capitaliser sur ces deux piliers pour en faire une solution à la fois rigoureuse sur le plan mathématique et performante dans son implémentation technique.

Annexe A

Démonstrations de Black-Scholes

A.1 Démonstration de l'équation différentielle partielle de Black-Scholes

Soit $X_t = f(t, S_t)$, où $(S_t)_{t \geq 0}$ suit l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (\text{A.1})$$

En appliquant le lemme d'Itô, nous avons :

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2. \quad (\text{A.2})$$

Utilisant la relation $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$, on obtient :

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt \quad (\text{A.3})$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} dW_t. \quad (\text{A.4})$$

Considérons un produit dérivé dont le payoff à l'échéance T est donné par $V(T, S_T)$. Supposons que sa valeur en un instant $t < T$ soit une fonction $V(t, S)$.

Considérons un portefeuille formé par l'achat d'une unité du produit dérivé et la vente à découvert de a unités de l'actif sous-jacent. La valeur du portefeuille est :

$$\Pi_t = V(t, S_t) - a S_t. \quad (\text{A.5})$$

Son évolution infinitésimale est donnée par :

$$d\Pi_t = dV_t - a dS_t. \quad (\text{A.6})$$

En utilisant l'équation obtenue précédemment :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t. \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, on a :

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - a \mu S_t \right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - a \sigma S_t \right) dW_t. \quad (\text{A.8})$$

Pour éliminer le terme stochastique, on impose :

$$a = \frac{\partial V}{\partial S_t}. \quad (\text{A.9})$$

Ainsi, la variation du portefeuille devient :

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (\text{A.10})$$

Puisque le portefeuille est sans risque, son rendement doit être égal au taux sans risque r :

$$d\Pi_t = r \Pi_t dt = r \left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dt. \quad (\text{A.11})$$

En égalisant les deux expressions de $d\Pi_t$, on obtient l'équation de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Démonstration de la formule Black-Scholes

Sous la mesure risque-neutre Q :

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dB_t^Q \quad (\text{Mouvement brownien géométrique}) \quad (\text{A.13})$$

Solution via le lemme d'Itô :

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B_T^Q \right) \quad (\text{A.14})$$

Payoff actualisé :

$$C = e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(S_T - K)^+] \quad (\text{A.15})$$

Décomposition de l'espérance :

$$\mathbb{E}^Q [(S_T - K)^+] = \underbrace{\mathbb{E}^Q [S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}]}_{\text{Terme 1}} - K \underbrace{Q(S_T > K)}_{\text{Terme 2}} \quad (\text{A.16})$$

Terme 1 (Changement de mesure via Girsanov) :

$$\mathbb{E}^Q [S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}] = S_0 e^{rT} N(d_1) \quad (\text{A.17})$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (\text{A.18})$$

Terme 2 (Probabilité risque-neutre) :

$$Q(S_T > K) = N(d_2) \quad (\text{A.19})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (\text{A.20})$$

Formule finale

$$\boxed{C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)} \quad (\text{A.21})$$

- $N(\cdot)$: Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- S_0 : Prix spot, K : Prix d'exercice
- T : Maturité, r : Taux sans risque
- σ : Volatilité du sous-jacent

Annexe B

Démonstrations de Heston

B.1 Démonstration de l'équation différentielle partielle de Heston

Dans le cas de Black-Scholes, la seule source d'incertitude vient du prix du stock, qui peut se couvrir avec le stock. Dans le cas de Heston, il faut aussi couvrir l'incertitude venant du caractère stochastique de la volatilité pour créer un portefeuille sans risque. Imaginons ainsi un portefeuille Π contenant l'option dont on cherche à déterminer le prix noté $V(S, v, t)$, la quantité Δ de stock et la quantité Δ_1 d'un autre actif, de valeur V_1 dépendant de la volatilité. On a ainsi :

$$\Pi = V + \Delta S + \Delta_1 V_1$$

Nous obtenons, grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right\} dt \\ & + \Delta_1 \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho \sigma v S(t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} \right\} dt \\ & + \left\{ \frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta \right\} dS + \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} \right\} dv \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Pour que le portefeuille soit sans risque, il est nécessaire d'éliminer les termes en dS et dv , ce qui donne :

$$\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial v} = 0$$

doù lon tire les quantités :

$$\Delta_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}$$

$$\Delta = -\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S}\right)$$

Le rendement dun portefeuille sans risque devant être égal au taux sans risque r (supposé constant), sans quoi il y aurait une opportunité darbitrage, nous avons :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

car les termes dS et dv ne sont plus :

$$d\Pi = r(V + \Delta S + \Delta_1 V_1)dt$$

En utilisant (B.1), la dernière équation peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \right\} dt \\ &= \frac{1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma vS(t)\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 \right\} dt \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Le membre de gauche de l'équation précédente ne dépend que de V , tandis que celui de droite ne dépend que de V_1 . Cela implique que les deux membres peuvent être écrits sous la forme d'une fonction $f(S, v, t)$. En suivant Heston, nous spécifions cette fonction comme suit :

$$f(S, v, t) = \kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t), \quad (\text{B.3})$$

où $\lambda(S, v, t)$ représente le prix du risque de volatilité.

L'équation de Heston sous forme de PDE en fonction du prix S :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ & - rU + rS\frac{\partial V}{\partial S} - [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)]\frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

L'EDP en termes du Log Prix :

Soit $x = \ln S$, et exprimons l'EDP en termes de x , t et v au lieu de S , t et v . Cette transformation conduit à une forme plus simple de l'EDP. Nous avons besoin des dérivées suivantes, qui sont simples à établir :

$$\frac{\partial V}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial v\partial S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (\text{B.5})$$

En remplaçant ces expressions dans l'EDP de Heston (A.2), tous les termes en S s'annulent, et nous obtenons l'EDP de Heston en termes du log prix $x = \ln S$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial V}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x} \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + (\kappa(\theta - v) - \lambda v) \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où, comme dans le modèle de Heston, nous avons exprimé le prix du risque de marché comme une fonction linéaire de la volatilité, de sorte que $\lambda(S, v, t) = \lambda v$.

Cette transformation simplifie l'équation, la rendant plus adaptée aux solutions numériques et analytiques.

B.2 Démonstration de la Solution Semi-Analytique de Heston

Dans cette section, nous présentons une dérivation complète et rigoureuse de la solution du modèle de Heston, en suivant l'approche montrée dans les images.

B.2.1 Le Prix d'une Option d'Achat

Le prix d'une option d'achat est de la forme

$$\begin{aligned} C_T(K) &= e^{-r\tau} E[(S_T - K)^+] \\ &= e^{x_t} P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(x, v, \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dans cette expression, $P_j(x, v, \tau)$ représente chacune la probabilité que l'option expire dans la monnaie, conditionnellement à la valeur $x_t = \ln S_t$ de l'action et à la valeur v_t de la volatilité au temps t , où $\tau = T - t$ est le temps jusqu'à l'expiration.

B.2.2 L'EDP pour P_1 et P_2

Le prix de l'option d'achat C suit l'EDP :

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial C}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} - rC + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Les dérivées de C s'expriment en termes de P_1 et P_2 . En substituant ces dérivées dans l'EDP et en regroupant les termes, nous obtenons les EDPs pour P_1 et P_2 . Pour la commodité de notation, nous combinons les EDPs pour P_1 et P_2 en une seule expression :

$$-\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0 \quad (\text{B.9})$$

pour $j = 1, 2$ et où $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, et $b_2 = \kappa + \lambda$.

B.2.3 Obtention des Fonctions Caractéristiques

Heston suppose que les fonctions caractéristiques pour le logarithme du prix terminal de l'action, $x = \ln S_T$, sont de la forme

$$f_j(\phi; x, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_0 + i\phi x) \quad (\text{B.10})$$

où C_j et D_j sont des coefficients et $\tau = T - t$ est le temps jusqu'à la maturité. Les fonctions caractéristiques f_j suivront l'EDP :

$$-\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Pour évaluer cette EDP pour la fonction caractéristique, nous avons besoin des dérivées suivantes :

$$\frac{\partial f_j}{\partial \tau} = f_j \left(-\frac{\partial C_j}{\partial \tau} - \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x} = i\phi f_j \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} = -\phi^2 f_j \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial v} = D_j f_j \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} = D_j^2 f_j \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial v} = i\phi D_j f_j \quad (\text{B.17})$$

En substituant ces dérivées dans l'EDP, en supprimant les termes f_j et en réarrangeant, nous obtenons deux équations différentielles :

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = r i\phi + a D_j \quad (\text{B.19})$$

Ce sont les équations (A7) dans Heston [2]. Heston spécifie les conditions initiales $D_j(0, \phi) = 0$ et $C_j(0, \phi) = 0$. La première équation est une équation de Riccati en D_j tandis que la seconde est une EDO pour C_j qui peut être résolue par intégration directe une fois que D_j est obtenu.

B.2.4 Résolution de l'Équation de Riccati de Heston

À partir de ce qui précède, l'équation de Riccati de Heston est

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2 \quad (\text{B.20})$$

où nous identifions $P_j = u_j i\phi - \frac{1}{2}\phi^2$, $Q_j = b_j - \rho\sigma i\phi$, et $R = \frac{1}{2}\sigma^2$.

L'EDO du second ordre correspondante est

$$w'' + Q_j w' + P_j R = 0 \quad (\text{B.21})$$

La solution de l'équation de Riccati de Heston est donc

$$D_j = -\frac{1}{R} \left(\frac{K\alpha e^{\alpha\tau} + \beta e^{\beta\tau}}{K e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}} \right) \quad (\text{B.22})$$

En utilisant la condition initiale $D_j(0, \phi) = 0$, nous obtenons la solution pour D_j :

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \quad (\text{B.23})$$

où

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)} \quad (\text{B.24})$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} \quad (\text{B.25})$$

La solution pour C_j est trouvée en intégrant la seconde équation dans notre système :

$$C_j = \int_0^\tau r i\phi dy + a \left(\frac{Q_j + d_j}{2R} \right) \int_0^\tau \left(\frac{1 - e^{d_j y}}{1 - g_j e^{d_j y}} \right) dy + K_1 \quad (\text{B.26})$$

où K_1 est une constante. En intégrant et en appliquant la condition initiale $C_j(0, \phi) = 0$, et en substituant pour d_j , Q_j , et g_j , nous obtenons la solution pour C_j :

$$C_j = r i\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (\text{B.27})$$

où $a = \kappa\theta$.

B.2.5 Forme Finale de la Fonction Caractéristique

En combinant nos résultats, la fonction caractéristique pour le modèle de Heston est :

$$f_j(\phi) = \exp(i\phi x + C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v) \quad (\text{B.28})$$

où C_j et D_j sont tels que dérivés ci-dessus.

B.2.6 Calcul du Prix d'Option

Le prix de l'option d'achat est donné par :

$$C(S_0, K, T) = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2 \quad (\text{B.29})$$

où les probabilités P_1 et P_2 sont calculées en utilisant :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(\phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j = 1, 2 \quad (\text{B.30})$$