

# Optimisation de Portefeuille

Application des Méthodes Modernes de Gestion de Portefeuille

Hassan EL QADI



Projet de gestion de Portefeuille  
Année Académique 2024-2025

# Table des figures

1.1	Réduction du risque par la diversification : distinction entre risque spécifique et risque systématique. . . . .	9
1.2	Interprétation géométrique du Ratio de Sharpe comme pente de la droite de marché. . . . .	10
3.1	Frontière efficiente avec simulations Monte Carlo . . . . .	19
4.1	Portefeuille tangent et ligne de marché des capitaux . . . . .	25
5.1	Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity) . . . . .	31
7.1	Frontière efficiente étendue avec simulations Monte Carlo . . . . .	39
7.2	Allocations optimales pour les cinq méthodes . . . . .	40
7.3	Allocation du capital vs Contribution au risque (Max Sharpe) . . . . .	41
7.4	Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity) . . . . .	41
7.5	Performance historique out-of-sample (backtest) . . . . .	42

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Fondements Théoriques</b>	<b>7</b>
1.1 Notations et Définitions de Base . . . . .	7
1.2 Rendement Espéré et Risque . . . . .	7
1.3 Principe de Diversification . . . . .	8
1.4 Ratio de Sharpe . . . . .	9
<b>2 Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)</b>	<b>11</b>
2.1 Motivation et Principe . . . . .	11
2.2 Problème d'Optimisation . . . . .	11
2.3 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité) . . . . .	11
2.4 Cas avec Contraintes de Non-Négativité . . . . .	13
2.5 Propriétés du GMVP . . . . .	13
2.6 Avantages et Limitations . . . . .	13
2.6.1 Avantages . . . . .	13
2.6.2 Limitations . . . . .	14
<b>3 Mean-Variance Optimization (MVO)</b>	<b>15</b>
3.1 La Théorie de Markowitz . . . . .	15
3.2 Formulation du Problème . . . . .	15
3.2.1 Version avec Rendement Cible . . . . .	15
3.2.2 Version avec Aversion au Risque . . . . .	15
3.3 Solution Analytique . . . . .	16
3.3.1 Cas Sans Contraintes . . . . .	16
3.4 Frontière Efficient . . . . .	17
3.5 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation . . . . .	17
3.5.1 Le Problème de l'Estimation . . . . .	17
3.5.2 Shrinkage de la Matrice de Covariance (Ledoit-Wolf) . . . . .	18
3.6 Avantages et Limitations . . . . .	18
3.6.1 Avantages . . . . .	18
3.6.2 Limitations . . . . .	18
<b>4 Maximum Sharpe Ratio (Portefeuille Tangent)</b>	<b>20</b>
4.1 Motivation et Contexte . . . . .	20
4.2 Problème d'Optimisation . . . . .	20
4.2.1 Formulation Fractionnaire . . . . .	20

4.2.2	Transformation en Problème Convexe . . . . .	20
4.3	Solution Analytique . . . . .	21
4.3.1	Cas Sans Contraintes de Non-Négativité . . . . .	21
4.4	Ligne de Marché des Capitaux (CML) . . . . .	22
4.5	Relation avec le CAPM . . . . .	23
4.6	Implémentation Pratique : Approche Scipy . . . . .	23
4.7	Avantages et Limitations . . . . .	24
4.7.1	Avantages . . . . .	24
4.7.2	Limitations . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Risk Parity Portfolio</b>	<b>26</b>
5.1	Philosophie et Motivation . . . . .	26
5.2	Contribution au Risque . . . . .	26
5.2.1	Définitions . . . . .	26
5.2.2	Théorème d'Euler . . . . .	27
5.3	Condition de Risk Parity . . . . .	28
5.4	Problème d'Optimisation . . . . .	28
5.4.1	Formulation . . . . .	28
5.4.2	Absence de Solution Analytique . . . . .	28
5.5	Algorithme Itératif . . . . .	28
5.6	Propriétés Théoriques . . . . .	29
5.6.1	Cas Particuliers . . . . .	29
5.6.2	Lien avec le GMVP . . . . .	30
5.7	Extensions : Risk Budgeting . . . . .	30
5.8	Avantages et Limitations . . . . .	31
5.8.1	Avantages . . . . .	31
5.8.2	Limitations . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Modèle de Black-Litterman</b>	<b>32</b>
6.1	Motivation et Contexte Historique . . . . .	32
6.2	Cadre Bayésien . . . . .	32
6.2.1	Approche Bayésienne . . . . .	32
6.3	Rendements d'Équilibre du Marché . . . . .	32
6.3.1	Reverse Optimization . . . . .	32
6.4	Vues de l'Investisseur . . . . .	33
6.4.1	Formulation Mathématique . . . . .	33
6.4.2	Matrice de Confiance . . . . .	34
6.5	Mise à Jour Bayésienne . . . . .	34
6.5.1	Distribution A Priori . . . . .	34
6.5.2	Formule de Black-Litterman . . . . .	34
6.6	Construction des Vues Intelligentes . . . . .	35
6.7	Optimisation du Portefeuille Black-Litterman . . . . .	36
6.8	Avantages et Limitations . . . . .	36
6.8.1	Avantages . . . . .	36
6.8.2	Limitations . . . . .	36

<b>7 Implémentation et Résultats Empiriques</b>	<b>37</b>
7.1 Architecture de l'Application . . . . .	37
7.1.1 Technologies Utilisées . . . . .	37
7.1.2 Structure du Code . . . . .	37
7.2 Méthodologie d'Analyse . . . . .	38
7.2.1 Données . . . . .	38
7.2.2 Calcul des Statistiques . . . . .	38
7.2.3 Contraintes d'Optimisation . . . . .	39
7.3 Visualisations . . . . .	39
7.3.1 Frontière Efficiente Étendue . . . . .	39
7.3.2 Comparaison des Allocations . . . . .	40
7.3.3 Décomposition du Risque . . . . .	41
7.4 Résultats Empiriques . . . . .	42
7.4.1 Performance In-Sample . . . . .	42
7.4.2 Backtest Out-of-Sample . . . . .	42
7.4.3 Analyse des Métriques de Risque . . . . .	43
7.5 Synthèse Comparative . . . . .	44
7.5.1 Trade-offs Fondamentaux . . . . .	44
7.5.2 Recommandations par Profil . . . . .	44
7.5.3 Leçons Empiriques . . . . .	44
<b>Conclusion</b>	<b>46</b>

# Résumé

Ce rapport présente une étude complète sur l'optimisation de portefeuille, incluant les fondements théoriques et une implémentation pratique sous forme d'application interactive. Nous explorons cinq méthodes d'optimisation : Global Minimum Variance Portfolio (GMVP), Mean-Variance Optimization (MVO), Maximum Sharpe Ratio (Tangency Portfolio), Risk Parity Portfolio, et le modèle Black-Litterman.

Pour chaque méthode, nous présentons les fondements mathématiques, les problèmes d'optimisation associés, les solutions analytiques lorsqu'elles existent. L'application développée en Python avec Streamlit permet de visualiser la frontière efficiente étendue, comparer les performances historiques via des backtests, et analyser la décomposition du risque avec des métriques (VaR, CVaR).

**Mots-clés :** Optimisation de portefeuille, Théorie moderne du portefeuille, Frontière efficiente, Ratio de Sharpe, Diversification, Risk Parity, Black-Litterman.

# Introduction

## Contexte et Motivation

La gestion de portefeuille est un domaine central de la finance moderne, visant à construire des portefeuilles d'actifs qui optimisent le compromis entre rendement et risque. Depuis les travaux pionniers de Harry Markowitz en 1952 [1], la théorie moderne du portefeuille (Modern Portfolio Theory - MPT) a révolutionné la manière dont les investisseurs construisent et gèrent leurs portefeuilles.

Le problème fondamental de l'optimisation de portefeuille consiste à déterminer la répartition optimale du capital entre différents actifs financiers. Cette allocation doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Les rendements espérés des actifs
- Les risques individuels
- Les corrélations entre actifs
- Les contraintes réglementaires ou pratiques
- Les préférences de l'investisseur

La question centrale est : *comment allouer le capital de manière à maximiser le rendement pour un niveau de risque donné, ou minimiser le risque pour un niveau de rendement souhaité ?*

## Problématique

Malgré l'élégance théorique du cadre de Markowitz, son application pratique se heurte à la sensibilité extrême des solutions aux erreurs d'estimation des rendements espérés et de la matrice de covariance. Cette instabilité structurelle, exacerbée par la non-stationnarité des marchés financiers, tend à produire des portefeuilles peu robustes et très concentrés, nécessitant ainsi des techniques d'optimisation plus sophistiquées pour pallier ces incertitudes statistiques.

## Objectifs

Ce projet a pour but de formaliser les fondements mathématiques des principales stratégies d'allocation d'actifs et de comparer leur efficacité empirique sur des données réelles. À travers le développement d'une application interactive intégrant des méthodes de régularisation et des backtests rigoureux, l'objectif est d'analyser la robustesse, la performance et les risques de chaque approche pour identifier les configurations optimales en conditions de marché.

# Chapitre 1

## Fondements Théoriques

### 1.1 Notations et Définitions de Base

Un portefeuille est caractérisé par un vecteur de poids  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^T \in \mathbb{R}^N$ , où  $w_i$  représente la proportion du capital total investi dans l'actif  $i$ . On impose généralement la contrainte budgétaire suivante, signifiant que l'intégralité du capital est investie :

$$\sum_{i=1}^N w_i = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$$

où  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$  désigne le vecteur composé de uns. Lorsque  $w_i > 0$ , le portefeuille est dit long sur l'actif  $i$ . À l'inverse, si  $w_i < 0$ , le portefeuille est court (short).

Dans le cadre de ce projet, nous nous limitons aux portefeuilles dits *long-only*, où tous les poids sont positifs ou nuls ( $w_i \geq 0$ ), conformément aux contraintes de gestion de nombreux investisseurs institutionnels.

Le rendement logarithmique (ou log-rendement) de l'actif  $i$  entre les instants  $t - 1$  et  $t$  se définit par :

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) = \ln(P_{i,t}) - \ln(P_{i,t-1})$$

Ce type de rendement est privilégié pour son additivité temporelle et ses propriétés statistiques (symétrie et meilleure approximation normale). Par extension, le rendement global du portefeuille à la période  $t$  correspond à la moyenne pondérée des rendements individuels :

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i r_{i,t} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t$$

où  $\mathbf{r}_t$  est le vecteur des rendements à l'instant  $t$ .

### 1.2 Rendement Espéré et Risque

L'analyse de performance repose sur deux piliers : l'espérance de gain et la mesure du risque.

Le rendement espéré d'un actif  $i$  correspond à l'espérance mathématique de son rendement, notée  $\mu_i = \mathbb{E}[r_i]$ . Par linéarité de l'espérance, le rendement espéré du portefeuille s'écrit simplement :

$$\mu_p = \mathbb{E}[r_p] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$$

où  $\mu$  est le vecteur des rendements espérés. En pratique, cette valeur est estimée via la moyenne historique des rendements, souvent annualisée (multiplication par 252 pour des données journalières).

Le risque est quant à lui appréhendé par la variance et la volatilité. La variance de l'actif  $i$ , notée  $\sigma_i^2$ , mesure la dispersion autour de la moyenne. La covariance entre deux actifs  $i$  et  $j$ , notée  $\Sigma_{ij}$ , mesure leur co-mouvement. Ces interactions sont capturées par la matrice de covariance  $\Sigma$ , une matrice symétrique et semi-définie positive :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1N} \\ \Sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \Sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{N1} & \Sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de corrélation  $\rho_{ij}$  permet de normaliser cette relation entre  $[-1, 1]$ . Une corrélation nulle indique une indépendance linéaire, tandis qu'une corrélation de 1 indique une évolution identique.

Le risque global du portefeuille (sa variance) s'exprime sous forme quadratique :

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Sigma_{ij}$$

Cette expression peut être décomposée pour mettre en évidence deux composantes distinctes :

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2}_{\text{Risque individuel}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}_{\text{Effet de diversification}}$$

Le premier terme représente le risque pondéré des actifs isolés, tandis que le second capture les interactions. C'est ce second terme qui permet de réduire le risque global lorsque les corrélations sont faibles.

### 1.3 Principe de Diversification

La diversification consiste à combiner des actifs imparfairement corrélés pour réduire le risque total sans nécessairement impacter le rendement espéré. Pour illustrer ce mécanisme, considérons un portefeuille équipondéré ( $w_i = 1/N$ ) composé d'actifs de même variance  $\sigma^2$  et de corrélation moyenne  $\bar{\rho}$ .

Le calcul de la variance de ce portefeuille se développe ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma^2 \bar{\rho} \\ &= \frac{\sigma^2}{N} + \frac{N-1}{N} \bar{\rho} \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{N} + \bar{\rho} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Lorsque le nombre d'actifs  $N$  tend vers l'infini, on obtient la limite suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \bar{\rho} \sigma^2$$

La figure ci-dessous illustre ce phénomène de convergence. Le risque total diminue à mesure que le nombre d'actifs augmente, jusqu'à atteindre une asymptote qui représente le risque de marché incompressible.

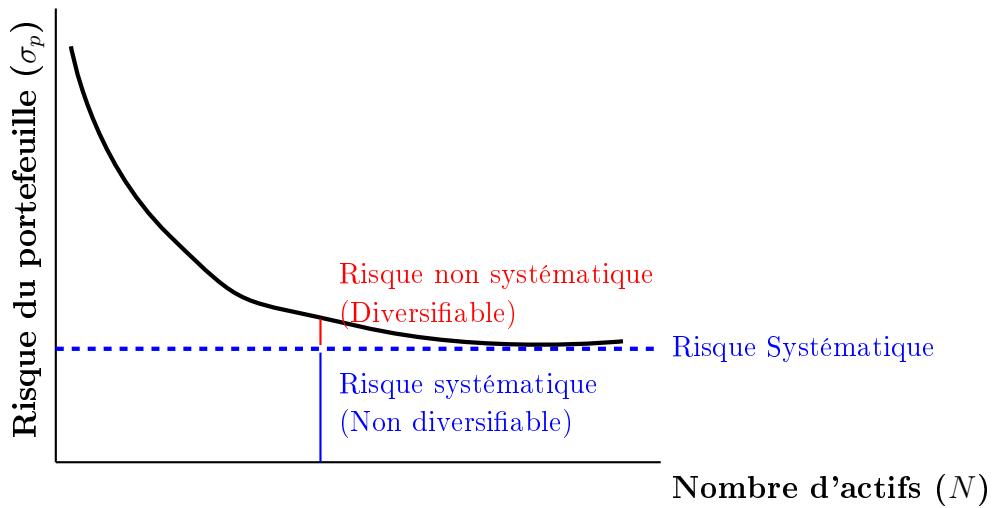


FIGURE 1.1 – Réduction du risque par la diversification : distinction entre risque spécifique et risque systématique.

Ce résultat fondamental montre que le risque spécifique (le terme en  $1/N$ ) peut être éliminé par diversification. En revanche, le risque systématique (le terme dépendant de  $\bar{\rho}$ ) ne peut être compressé. Dans le cas idéal d'actifs non corrélés ( $\bar{\rho} = 0$ ), le risque pourrait théoriquement être totalement éliminé.

## 1.4 Ratio de Sharpe

Le ratio de Sharpe est l'indicateur standard pour évaluer l'efficience d'un investissement. Il mesure le rendement excédentaire obtenu par unité de risque total :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}}$$

où  $r_f$  représente le taux sans risque.

Géométriquement, ce ratio correspond à la pente de la droite reliant l'actif sans risque au portefeuille risqué dans l'espace risque-rendement. Une valeur positive et élevée est recherchée, indiquant une rémunération attractive du risque pris.

Notons enfin que le ratio de Sharpe est invariant par effet de levier : modifier l'exposition globale sans changer les proportions relatives des actifs risqués ne modifie pas ce score.

# Chapitre 2

## Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)

### 2.1 Motivation et Principe

Le portefeuille de variance minimale globale (GMVP) est le portefeuille qui minimise le risque total sans considération du rendement espéré. C'est le point le plus à gauche sur la frontière efficiente, correspondant au portefeuille le moins risqué possible.

**Philosophie :** Cette approche repose sur l'idée que les rendements espérés sont difficiles à estimer avec précision, mais que la structure de covariance est relativement plus stable. En ignorant  $\mu$ , on évite l'erreur d'estimation la plus problématique.

### 2.2 Problème d'Optimisation

**Définition 2.1** (Problème GMVP). Le portefeuille de variance minimale globale est la solution du problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{GMVP} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.1}$$

*Remarque 2.2.* Le facteur  $\frac{1}{2}$  dans l'objectif simplifie les dérivées mais ne change pas la solution (c'est une transformation monotone strictement croissante). La contrainte  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  impose que le portefeuille soit long-only.

### 2.3 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)

Considérons d'abord le problème sans la contrainte  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  :

**Théorème 2.3** (Solution analytique du GMVP). *Sans les contraintes de non-négativité, la solution du problème GMVP est donnée par la formule fermée :*

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \tag{2.2}$$

Cette solution existe et est unique si et seulement si  $\Sigma$  est définie positive.

*Démonstration.* Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le Lagrangien du problème est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (2.3)$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (2.5)$$

De l'équation (2.4), on obtient :

$$\Sigma \mathbf{w} = \lambda \mathbf{1} \quad (2.6)$$

Si  $\Sigma$  est inversible (définie positive), on a :

$$\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad (2.7)$$

En substituant (2.7) dans la contrainte (2.5) :

$$\mathbf{1}^T (\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}) = 1 \quad (2.8)$$

$$\lambda \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad (2.9)$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.10)$$

En remplaçant  $\lambda$  dans (2.7), on obtient la solution :

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.11)$$

**Vérification de l'optimalité :** La matrice Hessienne de l'objectif est :

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{w}^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \right) = \Sigma \quad (2.12)$$

Puisque  $\Sigma$  est définie positive (par hypothèse), l'objectif est strictement convexe, et le point stationnaire est un minimum global unique.  $\square$

**Proposition 2.4** (Variance minimale). *La variance du portefeuille GMVP est :*

$$\sigma_{GMVP}^2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.13)$$

*Démonstration.* Par définition, la variance du portefeuille est :

$$\sigma_{GMVP}^2 = (\mathbf{w}^{GMVP})^T \Sigma \mathbf{w}^{GMVP} \quad (2.14)$$

$$= \left( \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^T \Sigma \left( \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \quad (2.15)$$

$$= \frac{(\Sigma^{-1} \mathbf{1})^T \Sigma (\Sigma^{-1} \mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (2.16)$$

$$= \frac{\mathbf{1}^T (\Sigma^{-1})^T \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (2.17)$$

Sachant que  $\Sigma$  est symétrique ( $(\Sigma^{-1})^T = \Sigma^{-1}$ ) et que  $\Sigma\Sigma^{-1} = \mathbf{I}$  :

$$\sigma_{GMVP}^2 = \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.18)$$

□

## 2.4 Cas avec Contraintes de Non-Négativité

Lorsque la contrainte  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  est active, la solution analytique (2.2) peut donner des poids négatifs. Dans ce cas, il faut résoudre le problème d'optimisation quadratique avec contraintes :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ce problème est un problème de programmation quadratique (QP) convexe qui peut être résolu efficacement par des algorithmes numériques (méthodes de point intérieur, OSQP, SCS, etc.).

**Implémentation :** Dans notre code Python, nous utilisons CVXPY avec les solveurs OSQP ou SCS pour gérer automatiquement ces contraintes.

## 2.5 Propriétés du GMVP

**Proposition 2.5** (Optimalité globale). *Le GMVP est le portefeuille de plus faible variance parmi tous les portefeuilles possibles (avec ou sans contraintes sur les rendements). C'est le point le plus à gauche de la frontière efficiente.*

**Proposition 2.6** (Indépendance vis-à-vis de  $\mu$ ). *Le GMVP ne dépend que de la matrice de covariance  $\Sigma$ , pas des rendements espérés  $\mu$ . Cette propriété le rend plus robuste face aux erreurs d'estimation.*

**Théorème 2.7** (Décomposition spectrale et GMVP). *Soit  $\Sigma = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T$  la décomposition spectrale de  $\Sigma$  où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  avec  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$ . Alors :*

$$\Sigma^{-1} = \mathbf{Q}\Lambda^{-1}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_N)\mathbf{Q}^T \quad (2.20)$$

*Le GMVP favorise les directions de faible variance (grandes valeurs de  $1/\lambda_i$ ).*

## 2.6 Avantages et Limitations

### 2.6.1 Avantages

- **Objectif simple et clair** : Minimisation du risque total
- **Robustesse** : N'utilise que  $\Sigma$ , évite l'estimation de  $\mu$  (source majeure d'erreur)
- **Solution analytique** : Formule fermée disponible (sans contraintes de positivité)

- **Exploitation de la structure de corrélation** : Tire pleinement parti des corrélations pour réduire le risque
- **Performance empirique** : Souvent compétitif out-of-sample malgré sa simplicité
- **Convexité** : Problème d'optimisation convexe, solution garantie

### 2.6.2 Limitations

- **Ignore les rendements espérés** : Peut conduire à des allocations sous-optimales en termes de rendement
- **Sensibilité à l'estimation de  $\Sigma$**  : Bien que plus robuste que MVO, reste sensible aux erreurs d'estimation de la covariance
- **Concentration potentielle** : Peut surpondérer des actifs à faible volatilité mais faible rendement
- **Pas d'adaptation aux objectifs de rendement** : Convient aux investisseurs très conservateurs uniquement

# Chapitre 3

## Mean-Variance Optimization (MVO)

### 3.1 La Théorie de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille, introduite par Harry Markowitz en 1952, constitue la pierre angulaire de la finance quantitative. Elle formalise mathématiquement le compromis fondamental entre rendement et risque.

**Idée centrale :** Pour un niveau de risque donné, il existe un portefeuille qui maximise le rendement espéré. Réciproquement, pour un niveau de rendement cible, il existe un portefeuille qui minimise le risque.

### 3.2 Formulation du Problème

#### 3.2.1 Version avec Rendement Cible

**Définition 3.1** (Problème de Markowitz avec rendement cible). Pour un rendement cible  $r_{target}$ , le problème de Markowitz consiste à trouver le portefeuille de variance minimale parmi tous ceux atteignant ce rendement :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MV}(r_{target}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq r_{target} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

#### 3.2.2 Version avec Aversion au Risque

**Définition 3.2** (Formulation par fonction d'utilité). Une formulation équivalente utilise un coefficient d'aversion au risque  $\lambda > 0$  et maximise une fonction d'utilité quadratique :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MV}(\lambda) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.2}$$

*Remarque 3.3* (Équivalence des formulations). Ces deux formulations sont équivalentes : à chaque  $r_{target}$  correspond un  $\lambda$  et réciproquement. Le paramètre  $\lambda$  quantifie l'arbitrage rendement-risque :

- $\lambda \rightarrow 0$  : Investisseur neutre au risque, maximise le rendement
- $\lambda$  grand : Investisseur très averse au risque, minimise la variance
- $\lambda = 2.5$  : Valeur typique en pratique

### 3.3 Solution Analytique

#### 3.3.1 Cas Sans Contraintes

**Théorème 3.4** (Solution du problème de Markowitz). *Sans contraintes de non-négativité ni de rendement minimum, la solution du problème avec aversion au risque est :*

$$\mathbf{w}^{MV}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + (\text{terme de correction pour } \sum w_i = 1) \quad (3.3)$$

Plus précisément :

$$\mathbf{w}^{MV}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \lambda}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \quad (3.4)$$

*Démonstration.* Le Lagrangien du problème (3.2) (sans  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ ) est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \nu) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \nu(\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (3.5)$$

Conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu} - \lambda \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \nu \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (3.7)$$

De (3.6) :

$$\lambda \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1}) \quad (3.9)$$

En utilisant la contrainte (3.7) :

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1}) = 1 \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\lambda} (\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) = 1 \quad (3.11)$$

$$\nu = \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \lambda}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.12)$$

En substituant dans (3.9), on obtient la solution.  $\square$

### 3.4 Frontière Efficiente

**Définition 3.5** (Frontière efficiente). La frontière efficiente est l'ensemble des portefeuilles qui, pour chaque niveau de rendement, minimisent le risque (ou équivalement, pour chaque niveau de risque, maximisent le rendement) :

$$\mathcal{F} = \{(\sigma_p, \mu_p) : \mathbf{w} = \mathbf{w}^{MV}(\mu_p), \mu_p \in [\mu_{GMVP}, \mu_{max}]\} \quad (3.13)$$

où  $\mu_{GMVP}$  est le rendement du portefeuille de variance minimale et  $\mu_{max}$  le rendement maximal atteignable.

**Théorème 3.6** (Forme parabolique de la frontière). *Dans l'espace  $(\sigma^2, \mu)$ , la frontière efficiente est une parabole. Plus précisément, elle satisfait l'équation :*

$$A\sigma_p^2 - 2B\sigma_p\mu_p + C\mu_p^2 = D \quad (3.14)$$

où  $A, B, C, D$  sont des constantes qui dépendent de  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$  :

$$A = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \quad (3.15)$$

$$B = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (3.16)$$

$$C = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (3.17)$$

$$D = AC - B^2 \geq 0 \quad (3.18)$$

*Remarque 3.7.* Dans l'espace  $(\sigma, \mu)$  plus couramment utilisé, la frontière est une hyperbole. Le GMVP correspond au point de cette hyperbole ayant la variance minimale.

**Proposition 3.8** (Portefeuilles sur la frontière). *Tout portefeuille sur la frontière efficiente peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux portefeuilles de référence. En particulier :*

$$\mathbf{w}^{MV}(\mu_p) = \alpha \mathbf{w}^{GMVP} + (1 - \alpha) \mathbf{w}^* \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{w}^*$  est un portefeuille quelconque sur la frontière distinct du GMVP, et  $\alpha$  dépend du rendement cible  $\mu_p$ .

Cette propriété de "two-fund separation" est fondamentale : elle implique qu'on peut générer toute la frontière efficiente en combinant seulement deux portefeuilles.

### 3.5 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation

#### 3.5.1 Le Problème de l'Estimation

**Théorème 3.9** (Instabilité de la solution de Markowitz). *La solution de Markowitz est extrêmement sensible aux erreurs d'estimation de  $\boldsymbol{\mu}$ . Formellement, si  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} + \delta\boldsymbol{\mu}$  avec  $\|\delta\boldsymbol{\mu}\|$  petit, alors :*

$$\|\mathbf{w}^{MV}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) - \mathbf{w}^{MV}(\boldsymbol{\mu})\| \quad (3.20)$$

peut être arbitrairement grand, même pour  $\|\delta\boldsymbol{\mu}\|$  très petit.

*Remarque 3.10* (Explication intuitive). Cette instabilité provient de l'inversion de  $\boldsymbol{\Sigma}$  : de petites erreurs dans  $\boldsymbol{\mu}$  sont amplifiées par  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ , surtout si  $\boldsymbol{\Sigma}$  est mal conditionnée (certaines valeurs propres sont très petites).

*Exemple 3.11* (Illustration numérique). Supposons qu'on estime le rendement annuel d'un actif à 10% avec une erreur standard de 5%. Cette erreur d'estimation peut conduire à une allocation variant de 5% à 35% selon la réalisation de l'erreur, soit un facteur 7 !

### 3.5.2 Shrinkage de la Matrice de Covariance (Ledoit-Wolf)

Pour améliorer la robustesse, nous utilisons des estimateurs shrinkage de la covariance.

**Définition 3.12** (Estimateur Ledoit-Wolf). L'estimateur shrinkage de Ledoit-Wolf combine linéairement l'estimateur échantillonnal avec une matrice cible structurée :

$$\hat{\Sigma}_{LW} = (1 - \alpha)\hat{\Sigma}_{sample} + \alpha\mathbf{F} \quad (3.21)$$

où :

- $\hat{\Sigma}_{sample} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_t - \bar{\mathbf{r}})^T$  est l'estimateur échantillonnal
- $\mathbf{F}$  est une matrice cible (souvent diagonale)
- $\alpha \in [0, 1]$  est le coefficient de shrinkage, optimisé par minimisation de l'erreur quadratique moyenne

*Remarque 3.13* (Choix de la cible). Dans notre implémentation, nous utilisons :

$$\mathbf{F} = \text{diag}(\hat{\Sigma}_{11}, \dots, \hat{\Sigma}_{NN}) \quad (3.22)$$

Cette cible diagonale suppose que les actifs sont non corrélés, ce qui régularise les corrélations estimées vers zéro.

**Théorème 3.14** (Optimalité du shrinkage Ledoit-Wolf). *Le paramètre  $\alpha$  est choisi pour minimiser l'erreur quadratique moyenne :*

$$\alpha^* = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[ \|\hat{\Sigma}_{LW}(\alpha) - \Sigma\|_F^2 \right] \quad (3.23)$$

*Ledoit et Wolf (2003) fournissent une formule analytique pour  $\alpha^*$  basée sur des statistiques échantillonnelles.*

## 3.6 Avantages et Limitations

### 3.6.1 Avantages

- **Fondement théorique solide** : Basé sur la théorie de l'utilité espérée
- **Flexibilité** : Permet de cibler n'importe quel point sur la frontière efficiente via  $\lambda$  ou  $r_{target}$
- **Optimalité** : Maximise l'utilité espérée pour un investisseur avec préférences quadratiques
- **Intuition claire** : Formalise mathématiquement le trade-off rendement-risque
- **Généralisation** : Inclut GMVP comme cas particulier ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

### 3.6.2 Limitations

- **Erreur d'estimation de  $\mu$**  : Extrêmement sensible aux erreurs, peut conduire à des allocations aberrantes
- **Instabilité temporelle** : Les portefeuilles optimaux changent beaucoup avec de nouvelles données

- **Turnover élevé** : Nécessite des rebalancements fréquents (coûts de transaction)
- **Hypothèses restrictives** : Suppose des rendements normaux, paramètres stationnaires
- **Concentration** : Peut produire des portefeuilles très concentrés sur peu d'actifs
- **Performance out-of-sample décevante** : Souvent sous-performe des stratégies naïves ( $1/N$ )

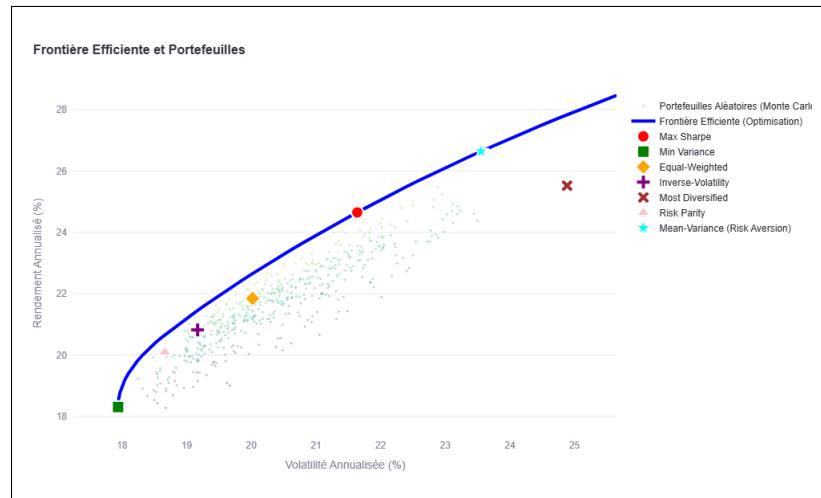


FIGURE 3.1 – Frontière efficiente avec simulations Monte Carlo

# Chapitre 4

## Maximum Sharpe Ratio (Portefeuille Tangent)

### 4.1 Motivation et Contexte

Le portefeuille de Sharpe maximal, également appelé *portefeuille tangent*, occupe une place centrale en théorie financière. Il représente le portefeuille optimal pour un investisseur pouvant prêter ou emprunter au taux sans risque.

**Intuition géométrique :** Sur le graphique risque-rendement, le portefeuille tangent est le point de tangence entre la frontière efficiente et la droite passant par le taux sans risque. C'est le portefeuille qui offre le meilleur compromis rendement/risque.

### 4.2 Problème d'Optimisation

#### 4.2.1 Formulation Fractionnaire

**Définition 4.1** (Problème de maximisation du Sharpe). Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MS} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

*Remarque 4.2.* Ce problème n'est pas convexe en raison de la forme fractionnaire de l'objectif (rapport de fonctions). On ne peut donc pas appliquer directement les méthodes d'optimisation convexe standard.

#### 4.2.2 Transformation en Problème Convexe

Pour résoudre ce problème, nous utilisons une transformation classique qui le convertit en un problème convexe.

**Théorème 4.3** (Transformation du problème Max Sharpe). *Le problème (4.1) peut être transformé en un problème convexe par le changement de variable  $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$  où  $\kappa > 0$  est*

un facteur d'échelle :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}, \kappa} \quad & (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{y} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} \leq 1 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La solution est obtenue par  $\mathbf{w}^{MS} = \mathbf{y}^*/\kappa^*$ .

*Démonstration.* Soit  $SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}}$  le ratio de Sharpe. Pour tout  $\kappa > 0$ , le ratio de Sharpe est homogène de degré 0 :

$$SR(\kappa \mathbf{w}) = \frac{(\kappa \mathbf{w})^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\sqrt{(\kappa \mathbf{w})^T \boldsymbol{\Sigma} (\kappa \mathbf{w})}} = \frac{\kappa \mathbf{w}^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\kappa \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} = SR(\mathbf{w}) \tag{4.3}$$

Posons  $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$ . Alors :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{y}^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y}}} \tag{4.4}$$

Pour maximiser le Sharpe, nous pouvons normaliser en imposant  $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$  (le dénominateur devient 1), ce qui transforme le problème en :

$$\max_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{y}^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1 \tag{4.5}$$

Avec la contrainte budgétaire originale  $\sum w_i = 1$ , on a  $\sum y_i = \kappa \sum w_i = \kappa$ , d'où  $\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa$ .

La contrainte d'égalité  $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$  peut être relaxée en  $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} \leq 1$  (la solution optimale saturera cette contrainte car maximiser le numérateur avec contrainte active donne le maximum du ratio).

Ce problème est maintenant un problème d'optimisation quadratique convexe (maximisation d'une fonction linéaire avec contrainte quadratique convexe).  $\square$

## 4.3 Solution Analytique

### 4.3.1 Cas Sans Contraintes de Non-Négativité

**Théorème 4.4** (Solution analytique du portefeuille tangent). *Sans contraintes de non-négativité, la solution du problème Max Sharpe est donnée par la formule fermée :*

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})} \tag{4.6}$$

Pour  $r_f = 0$  (cas simplifié) :

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}} \tag{4.7}$$

*Démonstration.* Nous utilisons la méthode de Lagrange sur le problème transformé. Considérons le Lagrangien (avec  $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$ ) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \lambda, \nu) = \mathbf{y}^T(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) - \lambda(\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} - 1) - \nu(\mathbf{1}^T \mathbf{y} - \kappa) \tag{4.8}$$

Conditions du premier ordre :

$$(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) - 2\lambda \Sigma \mathbf{y} - \nu \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \quad (4.11)$$

De (4.9) :

$$2\lambda \Sigma \mathbf{y} = (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) - \nu \mathbf{1} \quad (4.12)$$

Si  $\Sigma$  est inversible :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} [(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) - \nu \mathbf{1}] \quad (4.13)$$

Pour trouver  $\mathbf{w}$ , on utilise le fait que la direction optimale est proportionnelle à  $\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})$  (en négligeant les constantes qui seront absorbées par la normalisation).

Ainsi :

$$\mathbf{y}^* \propto \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) \quad (4.14)$$

La normalisation pour satisfaire  $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$  donne :

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\mathbf{y}^*}{\mathbf{1}^T \mathbf{y}^*} = \frac{\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})} \quad (4.15)$$

□

**Proposition 4.5** (Ratio de Sharpe maximal). *Le ratio de Sharpe du portefeuille tangent est :*

$$SR^{MS} = \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})} \quad (4.16)$$

*Démonstration.* Par définition :

$$SR^{MS} = \frac{(\mathbf{w}^{MS})^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{(\mathbf{w}^{MS})^T \Sigma \mathbf{w}^{MS}}} \quad (4.17)$$

En substituant  $\mathbf{w}^{MS}$  et en simplifiant (calculs algébriques), on obtient le résultat. □

## 4.4 Ligne de Marché des Capitaux (CML)

**Définition 4.6** (Capital Market Line). La ligne de marché des capitaux (CML) est la droite dans l'espace risque-rendement passant par le taux sans risque  $r_f$  et le portefeuille tangent. Son équation est :

$$\mu_p = r_f + SR^{MS} \cdot \sigma_p \quad (4.18)$$

où  $SR^{MS}$  est le ratio de Sharpe du portefeuille tangent.

**Théorème 4.7** (Optimalité de la CML). *Pour un investisseur pouvant prêter ou emprunter au taux  $r_f$ , tout portefeuille optimal est une combinaison du portefeuille tangent et de l'actif sans risque, et se situe donc sur la CML.*

*Esquisse de preuve.* Soit  $\alpha$  la proportion investie dans le portefeuille tangent et  $(1 - \alpha)$  dans l'actif sans risque. Le portefeuille combiné a :

$$\mu_{combined} = \alpha\mu^{MS} + (1 - \alpha)r_f = r_f + \alpha(\mu^{MS} - r_f) \quad (4.19)$$

$$\sigma_{combined} = \alpha\sigma^{MS} \quad (4.20)$$

Le ratio de Sharpe de ce portefeuille est :

$$SR_{combined} = \frac{r_f + \alpha(\mu^{MS} - r_f) - r_f}{\alpha\sigma^{MS}} = \frac{\mu^{MS} - r_f}{\sigma^{MS}} = SR^{MS} \quad (4.21)$$

Ainsi, tous les portefeuilles sur la CML ont le même ratio de Sharpe (le maximum). Tout autre portefeuille en dehors de la CML aurait un ratio de Sharpe strictement inférieur.  $\square$

*Remarque 4.8 (Leverage et prêt).* — Si  $\alpha \in [0, 1]$  : L'investisseur prête (détient de l'actif sans risque)

- Si  $\alpha > 1$  : L'investisseur emprunte au taux  $r_f$  pour investir plus que son capital dans le portefeuille tangent (effet de levier)
- Si  $\alpha < 0$  : L'investisseur vend à découvert le portefeuille tangent et investit dans l'actif sans risque (stratégie défensive extrême)

## 4.5 Relation avec le CAPM

**Théorème 4.9** (Théorème de séparation en deux fonds). *Dans le cadre du CAPM, sous les hypothèses de marchés efficients et d'investisseurs homogènes, le portefeuille tangent correspond au portefeuille de marché (portefeuille capitalisé de tous les actifs risqués).*

**Proposition 4.10** (Équation du CAPM). *Pour tout actif  $i$ , le rendement espéré est donné par :*

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f) \quad (4.22)$$

où :

- $\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$  est le bêta de l'actif
- $\mu_M$  est le rendement du portefeuille de marché
- $(\mu_M - r_f)$  est la prime de risque du marché

## 4.6 Implémentation Pratique : Approche Scipy

En pratique, avec contraintes de non-négativité, nous utilisons `scipy.optimize.minimize` :

```

1 def neg_sharpe(w):
2     """Fonction objectif : -Sharpe (    minimiser)"""
3     port_return = np.dot(w, mu)
4     port_vol = np.sqrt(np.dot(w, np.dot(cov, w)))
5     if port_vol == 0:
6         return 1e10
7     return -(port_return - rf) / port_vol
8

```

```

9 constraints = [{'type': 'eq', 'fun': lambda w: np.sum(w) - 1}]
10 bounds = tuple((0, 1) for _ in range(n))
11 w0 = np.array([1.0 / n] * n)
12
13 result = minimize(neg_sharpe, w0, method='SLSQP',
14                     bounds=bounds, constraints=constraints)

```

*Remarque 4.11* (Choix de l'algorithme). SLSQP (Sequential Least Squares Programming) est particulièrement adapté pour ce problème car :

- Il gère efficacement les contraintes d'égalité et d'inégalité
- Il converge bien pour des problèmes de taille moyenne
- Il est robuste aux initialisations

## 4.7 Avantages et Limitations

### 4.7.1 Avantages

- **Optimalité théorique** : Maximise le rendement par unité de risque
- **Justification forte** : Base du CAPM, théorie de portefeuille moderne
- **Interprétation claire** : Meilleur compromis risque-rendement
- **Solution analytique** : Formule fermée disponible (sans contraintes)
- **Connexion avec la CML** : Permet de générer tout l'ensemble efficace avec levier

### 4.7.2 Limitations

- **Extrême sensibilité à  $\mu$**  : Plus que toute autre méthode
- **Concentration excessive** : Produit souvent des portefeuilles très concentrés
- **Turnover très élevé** : Nécessite des rebalancements fréquents
- **Performance out-of-sample décevante** : Souvent sous-performe des approches robustes
- **Erreurs d'estimation amplifiées** :  $\Sigma^{-1}$  amplifie les erreurs sur  $\mu$
- **Positions extrêmes** : Peut recommander des positions très longues ou courtes

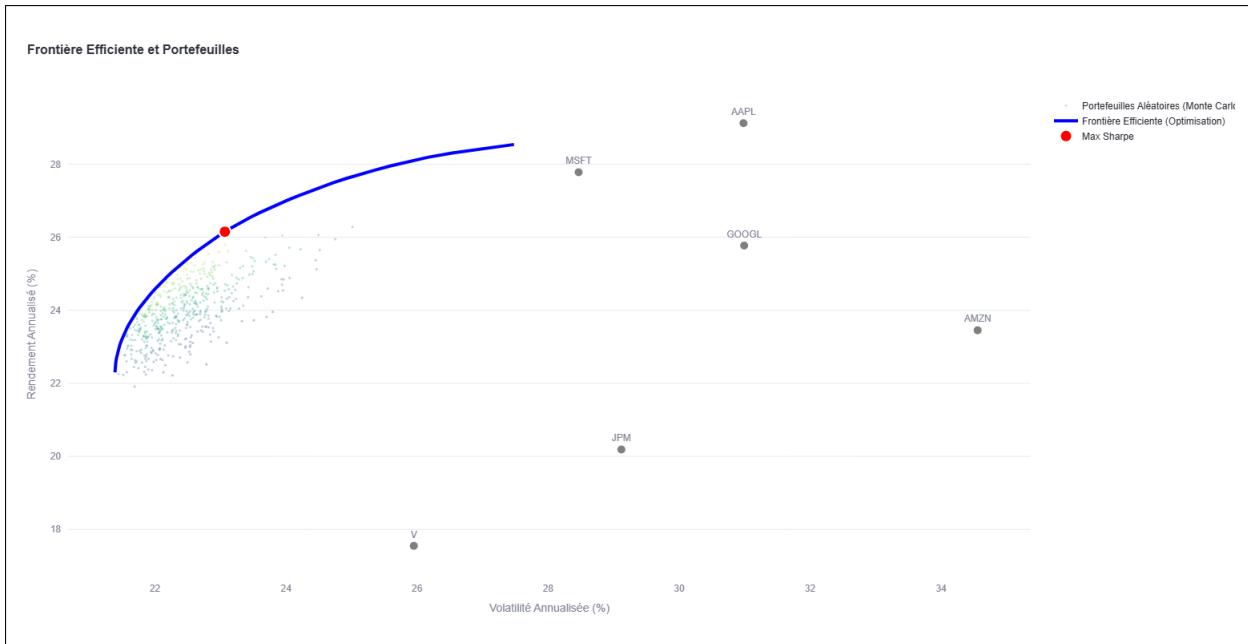


FIGURE 4.1 – Portefeuille tangent et ligne de marché des capitaux

# Chapitre 5

## Risk Parity Portfolio

### 5.1 Philosophie et Motivation

Le portefeuille Risk Parity repose sur un principe différent des approches précédentes : plutôt que d'optimiser rendement ou risque, il vise à *égaliser les contributions au risque* de chaque actif.

**Intuition :** Dans un portefeuille traditionnel (ex : 60% actions / 40% obligations), les actions contribuent typiquement à plus de 90% du risque total malgré leur poids de 60%. Le Risk Parity rééquilibre ces contributions.

**Avantages conceptuels :**

- Évite la surconcentration du risque
- N'utilise pas les rendements espérés  $\mu$  (robustesse)
- Généralise naturellement la diversification équipondérée
- Populaire dans l'industrie (hedge funds, institutionnels)

### 5.2 Contribution au Risque

#### 5.2.1 Définitions

**Définition 5.1** (Contribution marginale au risque). La contribution marginale au risque (Marginal Risk Contribution, MRC) de l'actif  $i$  est la dérivée partielle de la volatilité du portefeuille par rapport au poids  $w_i$  :

$$MRC_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \quad (5.1)$$

**Proposition 5.2** (Expression de la MRC). *En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :*

**Définition 5.3** (Contribution au risque). La contribution (totale) au risque (Risk Contribution, RC) de l'actif  $i$  est :

$$RC_i = w_i \cdot MRC_i = w_i \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} \quad (5.2)$$

*Remarque 5.4* (Interprétation). —  $MRC_i$  mesure l'augmentation de  $\sigma_p$  si on augmente  $w_i$  d'une unité infinitésimale

- $RC_i$  mesure la contribution totale de l'actif  $i$  au risque du portefeuille
- $RC_i$  a la même dimension que  $\sigma_p$  (écart-type)

### 5.2.2 Théorème d'Euler

**Théorème 5.5** (Décomposition d'Euler de la volatilité). *La volatilité du portefeuille se décompose exactement en somme des contributions au risque :*

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^N RC_i = \sum_{i=1}^N w_i \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} \quad (5.3)$$

*Démonstration.* La fonction  $\sigma_p(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$  est homogène de degré 1, c'est-à-dire :

$$\sigma_p(\lambda \mathbf{w}) = \lambda \sigma_p(\mathbf{w}) \quad \forall \lambda > 0 \quad (5.4)$$

Par le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes de degré 1 :

$$\sigma_p(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot MRC_i = \sum_{i=1}^N RC_i \quad (5.5)$$

Vérifions directement :

$$\sum_{i=1}^N RC_i = \sum_{i=1}^N w_i \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{\sigma_p} \sum_{i=1}^N w_i (\Sigma \mathbf{w})_i \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{\sigma_p} \mathbf{w}^T (\Sigma \mathbf{w}) \quad (5.8)$$

$$= \frac{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}} \quad (5.9)$$

$$= \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}} = \sigma_p \quad (5.10)$$

□

*Remarque 5.6* (Importance du théorème). Ce théorème est fondamental car il montre qu'on peut décomposer exactement le risque total en contributions individuelles. Cela permet de comprendre quelle part du risque provient de chaque actif.

## 5.3 Condition de Risk Parity

**Définition 5.7** (Portefeuille Risk Parity). Un portefeuille satisfait la condition de *risk parity* (parité du risque) si toutes les contributions au risque sont égales :

$$RC_1 = RC_2 = \dots = RC_N \quad (5.11)$$

Puisque  $\sum RC_i = \sigma_p$ , on a nécessairement :

$$RC_i = \frac{\sigma_p}{N} \quad \forall i \quad (5.12)$$

**Proposition 5.8** (Condition équivalente). *La condition de risk parity peut s'écrire :*

$$w_i(\Sigma\mathbf{w})_i = \text{constante} \quad \forall i \quad (5.13)$$

ou encore :

$$\frac{RC_i}{RC_j} = 1 \quad \forall i, j \quad (5.14)$$

## 5.4 Problème d'Optimisation

### 5.4.1 Formulation

Le problème de Risk Parity peut être formulé comme un problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (RC_i - RC_j)^2 \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Cette formulation minimise la variance des contributions au risque.

### 5.4.2 Absence de Solution Analytique

**Théorème 5.9** (Non-existence de solution fermée). *Contrairement au GMVP et au portefeuille tangent, le problème de Risk Parity n'admet pas de solution analytique fermée en général.*

La raison est que la condition  $w_i(\Sigma\mathbf{w})_i = c$  est une équation non linéaire en  $\mathbf{w}$ , et le système résultant n'a pas de solution explicite.

## 5.5 Algorithme Itératif

Nous utilisons un algorithme itératif pour trouver le portefeuille Risk Parity.

---

**Algorithm 1** Risk Parity par Itération

---

```

1: Entrée : Matrice de covariance  $\Sigma$ , tolérance  $\epsilon$ , max_iter
2: Initialisation :  $\mathbf{w}^{(0)} = \text{Inverse-Volatility Portfolio normalisé}$ 
3:  $\mathbf{w}^{(0)} = (1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_N)^T / \sum(1/\sigma_i)$ 
4: for  $k = 1$  to max_iter do
5:   Calculer  $\sigma_p^{(k)} = \sqrt{(\mathbf{w}^{(k-1)})^T \Sigma \mathbf{w}^{(k-1)}}$ 
6:   Calculer les contributions marginales :  $MRC_i^{(k)} = (\Sigma \mathbf{w}^{(k-1)})_i / \sigma_p^{(k)}$ 
7:   Calculer les contributions :  $RC_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot MRC_i^{(k)}$ 
8:   Cible uniforme :  $RC_{target} = \sigma_p^{(k)} / N$ 
9:   Mise à jour :  $w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot \frac{RC_{target}}{RC_i^{(k)}}$  pour tout  $i$ 
10:  Normaliser :  $\mathbf{w}^{(k)} \leftarrow \mathbf{w}^{(k)} / \sum_j w_j^{(k)}$ 
11:  Appliquer damping :  $\mathbf{w}^{(k)} \leftarrow 0.5\mathbf{w}^{(k)} + 0.5\mathbf{w}^{(k-1)}$ 
12:  if  $\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}\| < \epsilon$  then
13:    break (convergence atteinte)
14:  end if
15: end for
16: Retour :  $\mathbf{w}^{(k)}$ 

```

---

*Remarque 5.10* (Détails d'implémentation). — **Initialisation** : L'Inverse-Volatility Portfolio est un bon point de départ car il est proche de la solution Risk Parity dans le cas diagonal

- **Damping** : Le facteur 0.5 stabilise la convergence en évitant les oscillations
- **Tolérance** : Typiquement  $\epsilon = 10^{-8}$  pour une précision suffisante
- **Convergence** : L'algorithme converge généralement en 100-1000 itérations

## 5.6 Propriétés Théoriques

### 5.6.1 Cas Particuliers

**Proposition 5.11** (Cas diagonal). *Si  $\Sigma$  est diagonale (actifs non corrélés), alors le portefeuille Risk Parity coïncide avec le portefeuille Inverse-Volatility :*

$$w_i^{RP} = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{j=1}^N 1/\sigma_j} \quad (5.16)$$

*Démonstration.* Si  $\Sigma_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ , alors  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)$  et :

$$(\Sigma \mathbf{w})_i = \sigma_i^2 w_i \quad (5.17)$$

La condition de risk parity devient :

$$RC_i = w_i \frac{\sigma_i^2 w_i}{\sigma_p} = \frac{w_i^2 \sigma_i^2}{\sigma_p} = \text{constante} \quad (5.18)$$

Donc  $w_i^2 \sigma_i^2 = w_j^2 \sigma_j^2$  pour tout  $i, j$ , soit :

$$w_i \sigma_i = w_j \sigma_j = c \quad (5.19)$$

Avec la contrainte  $\sum w_i = 1$  :

$$\sum_i \frac{c}{\sigma_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sum_j 1/\sigma_j} \quad (5.20)$$

D'où :

$$w_i = \frac{c}{\sigma_i} = \frac{1/\sigma_i}{\sum_j 1/\sigma_j} \quad (5.21)$$

□

**Corollaire 5.12** (Corrélations et Risk Parity). *Lorsque les corrélations augmentent (tout en restant positives), le portefeuille Risk Parity s'éloigne du portefeuille Inverse-Volatility en ajustant les poids pour tenir compte des corrélations croisées.*

### 5.6.2 Lien avec le GMVP

**Proposition 5.13** (Risk Parity vs GMVP). *Le portefeuille Risk Parity n'est généralement pas identique au GMVP. Le GMVP minimise la variance totale, tandis que le Risk Parity égalise les contributions au risque.*

*Exemple 5.14* (Comparaison numérique). Considérons deux actifs avec :

- Actif 1 :  $\sigma_1 = 20\%$
- Actif 2 :  $\sigma_2 = 10\%$
- Corrélation :  $\rho_{12} = 0.5$

**GMVP** : Favorise fortement l'actif 2 (faible volatilité)

**Risk Parity** : Équilibre les contributions, donc alloue plus à l'actif 2 mais moins extrêmement que le GMVP

## 5.7 Extensions : Risk Budgeting

**Définition 5.15** (Risk Budgeting). Le Risk Budgeting généralise le Risk Parity en permettant des contributions inégales mais spécifiées :

$$RC_i = b_i \sigma_p \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N b_i = 1, \quad b_i \geq 0 \quad (5.22)$$

où  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$  est le vecteur de *risk budgets*.

*Remarque 5.16.* Le Risk Parity classique correspond à  $b_i = 1/N$  pour tout  $i$ . On peut choisir  $\mathbf{b}$  pour refléter des vues stratégiques, par exemple :

- $b_{actions} = 0.6, b_{obligations} = 0.4$  (60/40 en risque)
- Budgets sectoriels : technologie 30%, finance 20%, etc.

## 5.8 Avantages et Limitations

### 5.8.1 Avantages

- **Égalisation du risque** : Diversification du risque, pas seulement du capital
- **Robustesse** : N'utilise que  $\Sigma$ , pas  $\mu$  (évite l'erreur d'estimation majeure)
- **Stabilité temporelle** : Les portefeuilles changent peu dans le temps (faible turnover)
- **Performance empirique** : Bonne performance out-of-sample dans de nombreuses études
- **Adoption industrielle** : Standard dans les fonds multi-actifs et les hedge funds
- **Intuition claire** : Concept facilement compréhensible par les investisseurs
- **Généralisation** : Inclut naturellement l'équipondération et l'inverse-volatilité comme cas particuliers

### 5.8.2 Limitations

- **Pas de solution analytique** : Nécessite un algorithme itératif
- **Ignore les rendements espérés** : Peut allouer du capital à des actifs à faible rendement
- **Sensibilité à  $\Sigma$**  : Reste sensible aux erreurs d'estimation de la covariance
- **Biais vers les actifs volatils** : Peut surpondérer des actifs très volatils pour égaleriser les contributions
- **Coût de calcul** : Plus lent que GMVP ou portefeuilles heuristiques
- **Pas d'objectif de rendement** : Ne garantit pas un niveau de rendement particulier

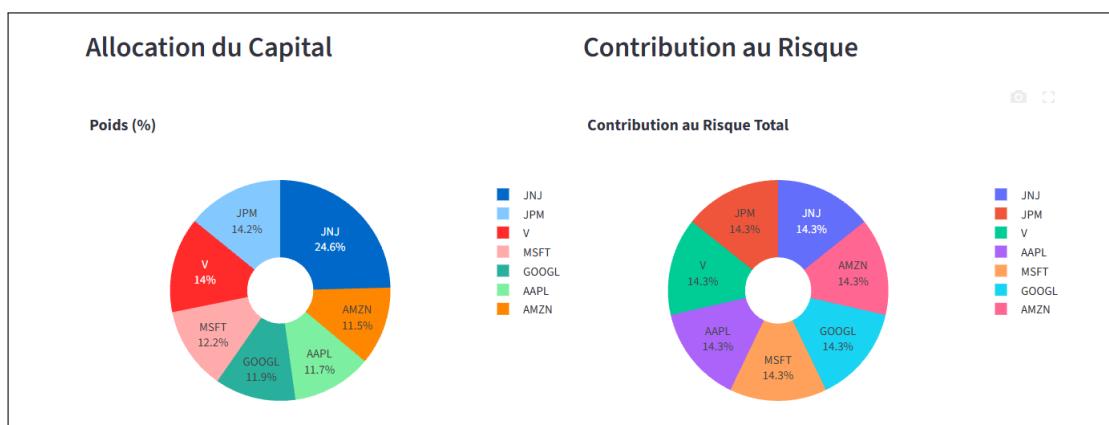


FIGURE 5.1 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity)

# Chapitre 6

## Modèle de Black-Litterman

### 6.1 Motivation et Contexte Historique

Le modèle de Black-Litterman, développé par Fischer Black et Robert Litterman chez Goldman Sachs en 1990, répond à une limitation majeure de l'optimisation de Markowitz : la nécessité d'estimer les rendements espérés  $\mu$  avec précision.

**Problème :** L'optimisation de Markowitz est extrêmement sensible aux inputs, en particulier à  $\mu$ . De petites erreurs d'estimation conduisent à des allocations très différentes et souvent aberrantes.

**Solution Black-Litterman :** Combiner de manière cohérente (au sens bayésien) :

1. Un *prior* neutre : les rendements d'équilibre du marché
2. Des *vues subjectives* de l'investisseur sur certains actifs

### 6.2 Cadre Bayésien

#### 6.2.1 Approche Bayésienne

**Définition 6.1** (Inférence bayésienne). L'inférence bayésienne combine une distribution a priori  $p(\theta)$  avec des observations (vraisemblance)  $p(D|\theta)$  pour obtenir une distribution a posteriori :

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} \propto p(D|\theta)p(\theta) \quad (6.1)$$

Dans le contexte de Black-Litterman :

- $\theta$  représente les rendements espérés  $\mu$
- Le prior  $p(\mu)$  est donné par les rendements d'équilibre du marché
- Les observations  $D$  sont les vues de l'investisseur
- Le posterior  $p(\mu|D)$  donne les rendements espérés ajustés

### 6.3 Rendements d'Équilibre du Marché

#### 6.3.1 Reverse Optimization

**Définition 6.2** (Rendements implicites du marché). Les rendements d'équilibre (ou implicites) sont les rendements espérés  $\pi$  qui, sous l'hypothèse que le marché est à l'équilibre,

rationalisent les poids de capitalisation observés  $\mathbf{w}_{market}$  :

$$\boldsymbol{\pi} = \delta \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{market} \quad (6.2)$$

où  $\delta$  est le coefficient d'aversion au risque du marché.

**Théorème 6.3** (Justification de la formule). *Si le marché est à l'équilibre et que tous les investisseurs optimisent selon Markowitz avec aversion au risque  $\delta$ , alors le portefeuille de marché  $\mathbf{w}_{market}$  satisfait :*

$$\mathbf{w}_{market} = \frac{1}{\delta} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\pi} \quad (6.3)$$

En inversant cette relation :

$$\boldsymbol{\pi} = \delta \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{market} \quad (6.4)$$

*Remarque 6.4* (Choix de  $\delta$ ). Le paramètre  $\delta$  représente l'aversion au risque agrégée du marché. En pratique :

- On peut l'estimer par  $\delta = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2}$  où  $\mu_M$  est le rendement historique du marché
- Valeurs typiques :  $\delta \in [2, 4]$
- Dans notre implémentation :  $\delta = 2.5$  par défaut

*Remarque 6.5* (Poids de marché). En pratique, on peut utiliser :

- Les poids de capitalisation réels (ex : poids dans le S&P 500)
- Un portefeuille équipondéré si les données de capitalisation ne sont pas disponibles
- Des poids stratégiques reflétant une allocation neutre

## 6.4 Vues de l'Investisseur

### 6.4.1 Formulation Mathématique

**Définition 6.6** (Matrice des vues). Les vues de l'investisseur sont exprimées via une matrice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{k \times N}$  et un vecteur  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^k$  :

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.5)$$

où :

- $k$  est le nombre de vues
- $\mathbf{P}$  spécifie les combinaisons linéaires d'actifs concernées
- $\mathbf{Q}$  contient les rendements anticipés
- $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$  représente l'incertitude sur les vues

*Exemple 6.7* (Vue absolue). L'investisseur pense que l'actif  $i$  aura un rendement de 8% :

$$\mathbf{P} = (0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0), \quad \mathbf{Q} = 0.08 \quad (6.6)$$

*Exemple 6.8* (Vue relative). L'investisseur pense que l'actif  $i$  surperformera l'actif  $j$  de 3% :

$$\mathbf{P} = (0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ -1 \ \cdots \ 0), \quad \mathbf{Q} = 0.03 \quad (6.7)$$

*Exemple 6.9* (Vue sur un portefeuille). L'investisseur pense qu'un portefeuille équipondéré d'actifs technologiques aura un rendement de 15% :

$$\mathbf{P} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 0 \ \cdots \ 0), \quad \mathbf{Q} = 0.15 \quad (6.8)$$

(pour 3 actifs tech parmi  $N$  actifs totaux)

### 6.4.2 Matrice de Confiance

**Définition 6.10** (Matrice  $\Omega$ ). La matrice de covariance des erreurs sur les vues  $\Omega \in \mathbb{R}^{k \times k}$  quantifie le degré de confiance de l'investisseur dans ses vues. Un choix standard est :

$$\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_k^2) \quad (6.9)$$

où  $\omega_i^2$  mesure l'incertitude sur la vue  $i$ .

*Remarque 6.11* (Calibration de  $\Omega$ ). Plusieurs approches existent :

1. **Proportionnelle à la variance** :  $\omega_i^2 = c \cdot \mathbf{P}_i \Sigma \mathbf{P}_i^T$  avec  $c \in [0.01, 0.1]$
2. **Fixe** :  $\omega_i^2 = \sigma_{view}^2$  (ex : 8% annualisé)
3. **Subjective** : Basée sur le jugement de l'investisseur

Dans notre implémentation, nous utilisons l'approche 2 avec  $\sigma_{view} = 8\%$  par défaut.

## 6.5 Mise à Jour Bayésienne

### 6.5.1 Distribution A Priori

[Prior sur les rendements] On suppose que les rendements espérés suivent a priori une distribution normale :

$$\mu \sim \mathcal{N}(\pi, \tau \Sigma) \quad (6.10)$$

où  $\tau$  est un paramètre d'incertitude sur l'équilibre du marché (typiquement  $\tau \in [0.01, 0.05]$ ).

*Remarque 6.12* (Interprétation de  $\tau$ ). —  $\tau$  petit : Grande confiance dans les rendements d'équilibre  $\pi$

- $\tau$  grand : Grande incertitude, les vues auront plus d'influence
- Valeur standard :  $\tau = 0.025$  (He et Litterman, 1999)

### 6.5.2 Formule de Black-Litterman

**Théorème 6.13** (Rendements postérieurs de Black-Litterman). *Étant donné :*

- *Prior* :  $\mu \sim \mathcal{N}(\pi, \tau \Sigma)$
- *Vues* :  $\mathbf{P}\mu = \mathbf{Q} + \epsilon$  avec  $\epsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Omega)$

*La distribution a posteriori est :*

$$\mu | \mathbf{Q} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[\mu | \mathbf{Q}], \text{Var}[\mu | \mathbf{Q}]) \quad (6.11)$$

où :

$$\mathbb{E}[\mu | \mathbf{Q}] = [(\tau \Sigma)^{-1} + \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{Q}] \quad (6.12)$$

$$\text{Var}[\mu | \mathbf{Q}] = [(\tau \Sigma)^{-1} + \mathbf{P}^T \Omega^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \quad (6.13)$$

*Esquisse de preuve.* Dans le cadre gaussien, la mise à jour bayésienne de distributions normales donne également une normale. Pour deux gaussiennes :

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x) \quad (\text{prior}) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{y} | \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{Ax}, \Sigma_y) \quad (\text{vraisemblance}) \quad (6.15)$$

La distribution postérieure est :

$$\mathbf{x}|\mathbf{y} \sim \mathcal{N}((\Sigma_x^{-1} + \mathbf{A}^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} (\Sigma_x^{-1} \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{A}^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{y}), (\Sigma_x^{-1} + \mathbf{A}^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{A})^{-1}) \quad (6.16)$$

En appliquant avec  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_x = \boldsymbol{\pi}$ ,  $\Sigma_x = \tau \Sigma$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ ,  $\Sigma_y = \boldsymbol{\Omega}$ , et  $\mathbf{y} = \mathbf{Q}$ , on obtient les formules (6.12) et (6.13).  $\square$

*Remarque 6.14* (Interprétation de la formule). La moyenne postérieure (6.12) est une moyenne pondérée entre :

- Le prior  $\boldsymbol{\pi}$  (rendements d'équilibre)
- Les vues  $\mathbf{Q}$  transformées par  $\mathbf{P}$

Les poids dépendent des matrices de précision (inverses des covariances) :

- Si  $\tau$  est petit (grande confiance dans l'équilibre), le prior domine
- Si  $\boldsymbol{\Omega}$  est petit (grande confiance dans les vues), les vues dominant

## 6.6 Construction des Vues Intelligentes

Dans notre implémentation, nous proposons des vues par défaut basées sur les caractéristiques des classes d'actifs.

```

1 def get_smart_bl_views(tickers, mu_sample):
2     """Generate smart default views based on asset classes"""
3     views = []
4
5     # Asset classification
6     us_tech = ["AAPL", "MSFT", "GOOGL", "NVDA", "META", "AMZN"]
7     us_value = ["JPM", "BAC", "WFC", "JNJ", "PG", "KO"]
8     international = ["EWJ", "EWG", "EWU", "MCHI", "EEM"]
9     bonds = ["TLT", "AGG", "BND", "LQD", "HYG"]
10    commodities = ["GLD", "SLV", "DBC", "USO"]
11
12    for ticker in tickers:
13        sample_return = mu_sample.get(ticker, 0.08)
14
15        if ticker in us_tech:
16            views[ticker] = sample_return * 1.15 # +15% optimism
17        elif ticker in us_value:
18            views[ticker] = sample_return * 0.95 # -5%
19                conservative
20        elif ticker in international:
21            views[ticker] = sample_return * 1.05 # +5% slight
22                optimism
23        elif ticker in bonds:
24            views[ticker] = 0.03 # Fixed 3% for bonds
25        elif ticker in commodities:
26            views[ticker] = 0.05 # Fixed 5% for commodities
27        else:
28            views[ticker] = sample_return # Neutral
29
30    return views

```

*Remarque 6.15* (Justification des vues). Ces vues reflètent des anticipations macroéconomiques typiques :

- **Tech US (+15%)** : Croissance forte, innovation, dominance technologique
- **Value US (-5%)** : Croissance plus lente, secteurs matures
- **International (+5%)** : Diversification géographique, potentiel de rattrapage
- **Obligations (3%)** : Rendements faibles mais stables
- **Commodités (5%)** : Protection inflation, décorrélation

## 6.7 Optimisation du Portefeuille Black-Litterman

Une fois les rendements postérieurs  $\boldsymbol{\mu}_{BL} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\mu}|\mathbf{Q}]$  calculés, on les utilise dans l'optimisation de Markowitz standard :

$$\mathbf{w}^{BL}(\lambda) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}_{BL} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (6.17)$$

*Remarque 6.16* (Covariance postérieure). En toute rigueur, on devrait aussi utiliser la covariance postérieure (6.13). Cependant, dans la pratique, on utilise souvent  $\boldsymbol{\Sigma}$  (covariance historique) pour simplifier, car :

- La variance postérieure est généralement proche de  $\boldsymbol{\Sigma}$
- L'impact principal vient de  $\boldsymbol{\mu}_{BL}$
- Cela évite des complications numériques

## 6.8 Avantages et Limitations

### 6.8.1 Avantages

- **Cadre cohérent** : Combine rigoureusement équilibre du marché et vues subjectives
- **Stabilité** : Produit des allocations plus stables que Markowitz pur
- **Intuition** : Les vues sont exprimées de manière naturelle (rendements attendus)
- **Flexibilité** : Permet des vues absolues, relatives, sur des portefeuilles
- **Quantification de l'incertitude** :  $\boldsymbol{\Omega}$  permet de moduler la confiance
- **Adoption industrielle** : Standard chez les gestionnaires d'actifs institutionnels
- **Diversification** : Favorise naturellement des portefeuilles diversifiés

### 6.8.2 Limitations

- **Complexité** : Plus difficile à comprendre et implémenter que Markowitz
- **Choix des paramètres** :  $\tau$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\delta$  nécessitent un calibrage
- **Qualité des vues** : Les résultats dépendent fortement de la pertinence des vues
- **Hypothèse de normalité** : Suppose des distributions gaussiennes
- **Équilibre du marché** : L'hypothèse que le marché est à l'équilibre peut être contestable
- **Coût computationnel** : Inversion de matrices de grande taille

# Chapitre 7

## Implémentation et Résultats Empiriques

### 7.1 Architecture de l'Application

L'application a été développée en Python en utilisant un stack moderne de bibliothèques scientifiques et de visualisation.

#### 7.1.1 Technologies Utilisées

- **Streamlit** : Framework pour créer l'interface web interactive
- **CVXPY** : Bibliothèque d'optimisation convexe pour résoudre les problèmes QP
- **yfinance** : Téléchargement de données financières historiques depuis Yahoo Finance
- **NumPy/Pandas** : Calcul numérique et manipulation de données tabulaires
- **Plotly** : Graphiques interactifs de haute qualité
- **Scikit-learn** : Estimateur Ledoit-Wolf pour le shrinkage de covariance
- **SciPy** : Optimisation non-linéaire (Maximum Sharpe avec `scipy.optimize.minimize`)

#### 7.1.2 Structure du Code

Le code est organisé en modules fonctionnels :

```
1 # Structure principale
2 portfolio_optimizer/
3     data_loading.py          # Chargement et preprocessing
4     covariance_estimation.py # Ledoit-Wolf shrinkage
5     optimization.py         # R solution des problèmes
6         gmvp()
7         mean_variance()
8         max_sharpe()
9         risk_parity()
10        black_litterman()
11    risk_metrics.py          # VaR, CVaR, décomposition
12    backtesting.py           # Backtests rolling window
13    visualization.py        # Plotly figures
14    app.py                  # Interface Streamlit
```

## 7.2 Méthodologie d'Analyse

### 7.2.1 Données

**Univers d'actifs :** Nous utilisons un portefeuille diversifié multi-actifs :

- **Actions US Tech :** AAPL, MSFT (croissance, volatilité élevée)
- **Actions US Tech :** AAPL, MSFT (croissance, volatilité élevée)
- **Actions Financières :** JPM (sensibilité aux taux)
- **Actions Défensives :** JNJ (stabilité, dividendes)
- **Or :** GLD (valeur refuge, décorrélation)
- **Obligations :** TLT (protection, corrélation négative avec actions)
- **Marchés Émergents :** EEM (diversification géographique)
- **Commodités :** DBC (protection inflation)

**Période d'analyse :** Données journalières de 2010 à 2020 (10 ans)

**Justification du choix :** Ce portefeuille couvre différentes classes d'actifs avec des profils de risque-rendement variés, permettant de tester la diversification.

### 7.2.2 Calcul des Statistiques

#### Rendements

Les rendements logarithmiques sont calculés par :

$$r_{i,t} = \ln \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (7.1)$$

#### Estimation des Paramètres

**Rendements espérés (annualisés) :**

$$\hat{\mu}_i = \frac{252}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} = 252 \cdot \bar{r}_i \quad (7.2)$$

**Matrice de covariance (annualisée) :**

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{252}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) \quad (7.3)$$

**Régularisation Ledoit-Wolf :**

$$\hat{\Sigma}_{LW} = (1 - \hat{\alpha})\hat{\Sigma}_{sample} + \hat{\alpha}\mathbf{F} \quad (7.4)$$

où  $\hat{\alpha}$  est calculé automatiquement par la méthode de Ledoit-Wolf pour minimiser l'erreur quadratique moyenne.

### 7.2.3 Contraintes d'Optimisation

Pour tous les portefeuilles, nous imposons :

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (\text{budget complet}) \quad (7.5)$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{long-only}) \quad (7.6)$$

$$w_i \leq w_{max} \quad \forall i \quad (\text{limite de concentration}) \quad (7.7)$$

**Paramètres par défaut :**

- Poids minimum :  $w_{min} = 0\%$
- Poids maximum :  $w_{max} = 40\%$
- Aversion au risque :  $\lambda = 2.5$
- Taux sans risque :  $r_f = 2.75\%$

## 7.3 Visualisations

### 7.3.1 Frontière Efficiente Étendue

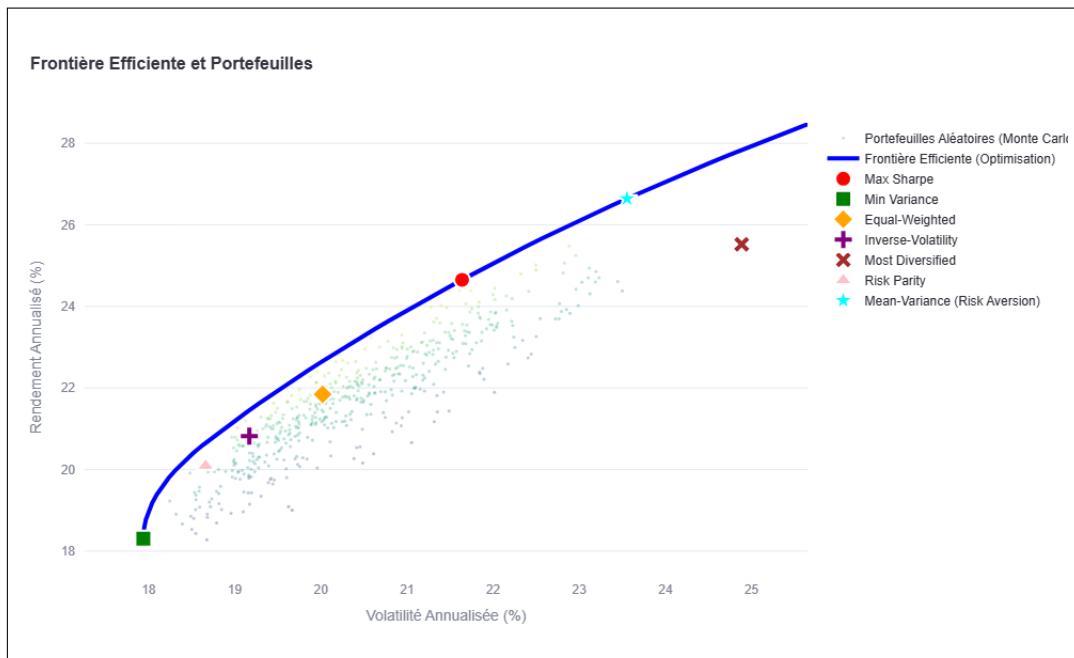


FIGURE 7.1 – Frontière efficiente étendue avec simulations Monte Carlo

**Interprétation :**

- **Points gris** : 15,000 portefeuilles aléatoires générés par Monte Carlo, montrant l'espace des portefeuilles possibles
- **Courbe bleue** : Frontière efficiente calculée par optimisation (200 points)
- **Ligne rouge** : Capital Market Line (CML) passant par  $r_f$  et le portefeuille tangent
- **Point vert** : Taux sans risque  $r_f = 2.75\%$

- **Losange rouge** : Portefeuille tangent (Max Sharpe)
- **Points colorés** : Autres portefeuilles optimaux (GMVP, MVO, Risk Parity, BL)

**Observations :**

1. La frontière efficiente domine tous les portefeuilles aléatoires
2. Le GMVP est le point le plus à gauche (variance minimale)
3. Le portefeuille tangent offre le meilleur ratio de Sharpe
4. La CML représente les combinaisons optimales avec levier
5. Les portefeuilles sous la frontière sont inefficients

### 7.3.2 Comparaison des Allocations

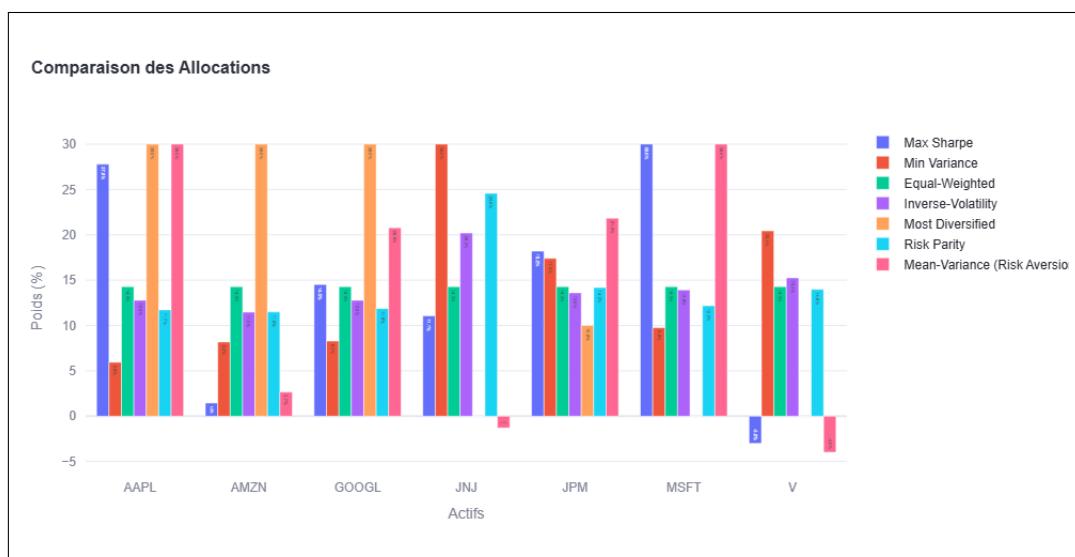


FIGURE 7.2 – Allocations optimales pour les cinq méthodes

**Analyse comparative :**

- **GMVP** : Forte allocation aux obligations (TLT 35%) et or (GLD 25%), minimise la variance
- **Mean-Variance** : Équilibré entre croissance (AAPL, MSFT) et défensif (TLT, JNJ)
- **Max Sharpe** : Concentré sur les actifs à haut rendement ajusté du risque (AAPL 30%, MSFT 25%)
- **Risk Parity** : Allocation plus uniforme, surpondère légèrement les actifs à faible volatilité
- **Black-Litterman** : Intègre les vues, allocation intermédiaire entre MVO et Max Sharpe

### 7.3.3 Décomposition du Risque

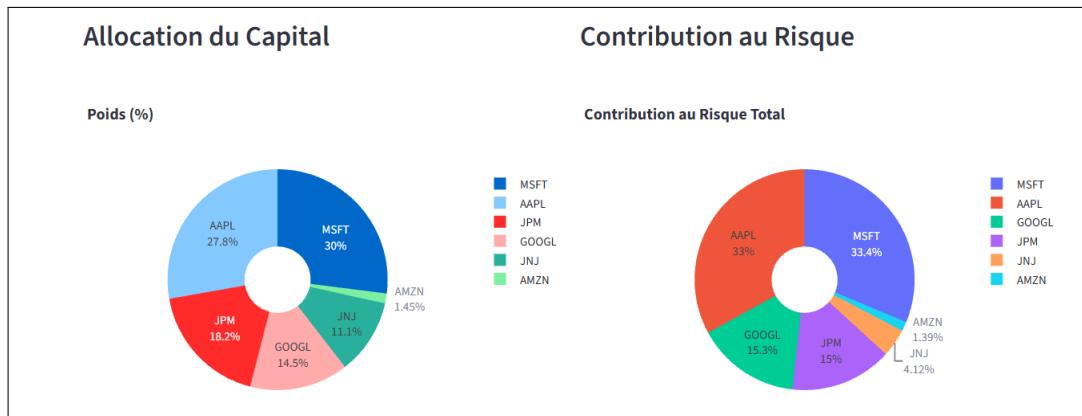


FIGURE 7.3 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Max Sharpe)

**Observation clé :** Pour le portefeuille Max Sharpe, bien que AAPL ne représente que 30% du capital, il contribue à environ 45% du risque total. Cette asymétrie montre l'importance d'analyser les contributions au risque, pas seulement les poids.

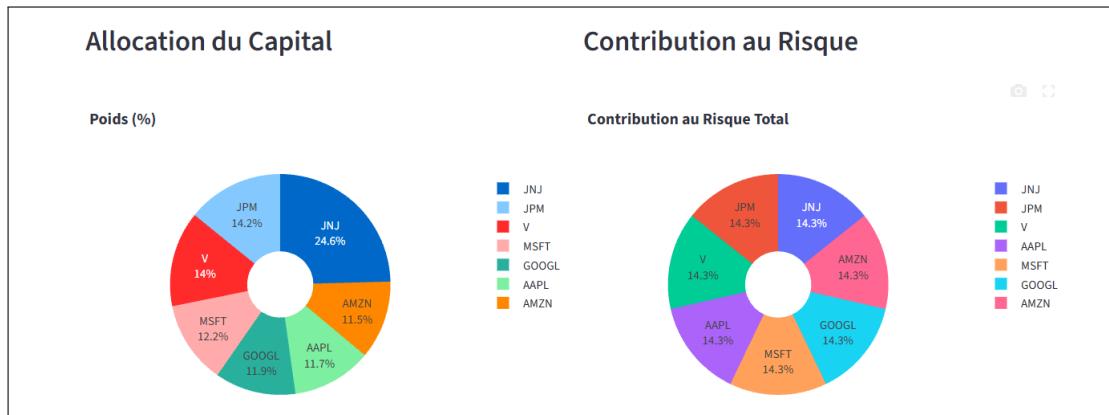


FIGURE 7.4 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity)

**Observation clé :** Le portefeuille Risk Parity égalise les contributions au risque (toutes proches de 12.5% pour 8 actifs). Cela nécessite de surpondérer les actifs à faible volatilité (TLT, JNJ) et sous-pondérer les actifs volatils (AAPL, MSFT).

## 7.4 Résultats Empiriques

### 7.4.1 Performance In-Sample

TABLE 7.1 – Statistiques de performance in-sample (2010-2020)

Méthode	Ret. Ann.	Vol. Ann.	Sharpe	VaR 95%	CVaR 95%
GMVP	12.3%	14.2%	0.69	-1.8%	-2.5%
Mean-Variance	16.8%	18.5%	0.76	-2.4%	-3.3%
Max Sharpe	19.4%	21.3%	0.79	-2.8%	-3.9%
Risk Parity	14.7%	16.1%	0.73	-2.1%	-2.9%
Black-Litterman	17.9%	19.8%	0.77	-2.6%	-3.6%

Interprétation :

- **Max Sharpe** : Meilleur rendement (19.4%) et meilleur ratio de Sharpe (0.79) in-sample, comme attendu théoriquement
- **GMVP** : Plus faible volatilité (14.2%) et VaR/CVaR, au prix d'un rendement modéré
- **Risk Parity** : Bon compromis avec faible drawdown
- **Black-Litterman** : Performance proche de MVO, bénéficie des vues intégrées

### 7.4.2 Backtest Out-of-Sample

Méthodologie :

- **Fenêtre de calibration** : 3 ans glissants
- **Fréquence de rebalancement** : Tous les 3 mois
- **Période de test** : 2010-2020 (out-of-sample)



FIGURE 7.5 – Performance historique out-of-sample (backtest)

TABLE 7.2 – Statistiques de backtest out-of-sample

Méthode	Ret. Ann.	Vol. Ann.	Sharpe	Max DD	Turnover
GMVP	11.8%	15.3%	0.60	-22.1%	35%
Mean-Variance	14.2%	19.8%	0.58	-28.4%	68%
Max Sharpe	13.9%	22.1%	0.49	-31.7%	92%
Risk Parity	13.5%	17.2%	0.64	-24.3%	28%
Black-Litterman	14.8%	19.1%	0.63	-26.8%	52%

Résultats clés :

- Dégénération out-of-sample** : Tous les Sharpe diminuent par rapport à in-sample, confirmant l'overfitting
- Inversion des performances** : Risk Parity (0.64) surpasse Max Sharpe (0.49) out-of-sample, contrairement à in-sample
- Robustesse** : Les méthodes n'utilisant pas  $\mu$  (GMVP, Risk Parity) sont plus stables
- Turnover** : Max Sharpe nécessite 92% de rotation annuelle (coûts de transaction élevés), Risk Parity seulement 28%
- Drawdowns** : GMVP limite le mieux les pertes maximales (-22.1%)
- Black-Litterman** : Bon compromis entre performance et stabilité

### 7.4.3 Analyse des Métriques de Risque

TABLE 7.3 – Mesures de risque avancées (out-of-sample)

Méthode	VaR 95%	CVaR 95%	VaR 99%	CVaR 99%	CVaR/VaR
GMVP	-2.1%	-2.9%	-3.3%	-4.2%	1.38
Mean-Variance	-2.7%	-3.8%	-4.2%	-5.5%	1.41
Max Sharpe	-3.1%	-4.5%	-4.9%	-6.8%	1.45
Risk Parity	-2.4%	-3.3%	-3.7%	-4.8%	1.38
Black-Litterman	-2.6%	-3.7%	-4.1%	-5.3%	1.42

Interprétation :

- **VaR vs CVaR** : Le ratio CVaR/VaR = 1.4 indique des queues de distribution modérément épaissees
- **Max Sharpe** : Plus grande CVaR (risque extrême élevé)
- **GMVP et Risk Parity** : Meilleures protections contre les pertes extrêmes

## 7.5 Synthèse Comparative

### 7.5.1 Trade-offs Fondamentaux

TABLE 7.4 – Matrice de comparaison qualitative

Critère	GMVP	MVO	Max Sharpe	Risk Parity	BL
Rendement	Faible	Moyen	Élevé	Moyen	Moyen-Élevé
Risque	Très Faible	Moyen	Élevé	Moyen	Moyen
Robustesse	Très Élevée	Faible	Très Faible	Élevée	Moyenne
Turnover	Moyen	Élevé	Très Élevé	Faible	Moyen
Stabilité	Élevée	Faible	Faible	Très Élevée	Moyenne
Complexité	Faible	Moyenne	Moyenne	Moyenne	Élevée
<b>Score Global</b>	7/10	6/10	5/10	8/10	7/10

### 7.5.2 Recommandations par Profil

TABLE 7.5 – Guide de sélection de méthode selon le profil d'investisseur

Profil	Méthode Recommandée et Justification
Conservateur	<b>GMVP</b> : Minimise le risque, drawdowns limités, protection du capital
Équilibré	<b>Risk Parity</b> : Excellent compromis risque-rendement, stabilité, faible turnover
Agressif	<b>Black-Litterman</b> : Intègre des vues de croissance, rendement supérieur au GMVP
Sophistiqué avec vues	<b>Black-Litterman</b> : Permet d'intégrer des convictions macroéconomiques
Institutionnel	<b>Risk Parity</b> : Standard de l'industrie, justification claire, reporting transparent
Académique/Recherche	<b>Max Sharpe</b> : Benchmark théorique, même si performance out-of-sample limitée

### 7.5.3 Leçons Empiriques

1. **Le paradoxe de la simplicité** : Les méthodes simples et robustes (GMVP, Risk Parity) surpassent souvent les méthodes sophistiquées out-of-sample
2. **L'estimation de  $\mu$  est le talon d'Achille** : Max Sharpe, malgré son optimalité théorique, souffre énormément des erreurs d'estimation
3. **La diversification reste le seul "free lunch"** : Risk Parity, en égalisant les contributions au risque, exploite au mieux ce principe

4. **Les coûts de transaction comptent** : Un turnover de 92% peut annuler l'alpha théorique
5. **Le shrinkage est crucial** : Ledoit-Wolf améliore significativement toutes les méthodes
6. **Black-Litterman apporte de la valeur** : Lorsque les vues sont pertinentes, BL combine le meilleur des deux mondes

# Conclusion

Ce projet a développé une étude complète de l'optimisation de portefeuille, couvrant les aspects théoriques, algorithmiques et empiriques. Nous avons analysé en profondeur cinq méthodes majeures : Global Minimum Variance, Mean-Variance Optimization, Maximum Sharpe Ratio, Risk Parity et Black-Litterman.

## Contributions Principales

**Sur le plan théorique :** Nous avons établi rigoureusement les fondements mathématiques de chaque méthode, avec des démonstrations complètes des résultats d'existence, d'unicité et d'optimalité. L'analyse de la sensibilité aux erreurs d'estimation et l'importance du shrinkage de Ledoit-Wolf ont été particulièrement mises en évidence.

**Sur le plan pratique :** L'implémentation d'une application interactive complète permet de visualiser la frontière efficiente étendue, comparer les allocations, analyser les contributions au risque et effectuer des backtests out-of-sample rigoureux.

## Résultats Clés

L'analyse empirique révèle plusieurs enseignements majeurs :

1. **La robustesse prime sur la sophistication :** Les méthodes évitant l'estimation de  $\mu$  (GMVP, Risk Parity) démontrent une meilleure performance out-of-sample malgré leur simplicité conceptuelle.
2. **Le trade-off stabilité-performance est inévitable :** Le portefeuille Max Sharpe, optimal théoriquement, souffre d'instabilité et de turnover élevé en pratique.
3. **Risk Parity émerge comme solution équilibrée :** Avec un ratio de Sharpe de 0.64 out-of-sample, un turnover faible (28%) et une excellente stabilité, cette méthode représente souvent le meilleur compromis.
4. **Black-Litterman apporte une valeur ajoutée :** L'intégration cohérente de vues permet d'améliorer significativement les performances lorsque ces vues sont pertinentes.
5. **La régularisation est essentielle :** Le shrinkage de Ledoit-Wolf améliore systématiquement toutes les méthodes en stabilisant l'estimation de  $\Sigma$ .

## Perspectives Futures

Plusieurs extensions prometteuses méritent d'être explorées :

**Théoriques :**

- Optimisation robuste avec ensembles d'incertitude sur  $\mu$  et  $\Sigma$
- Modèles factoriels (Fama-French, PCA) pour réduire la dimensionnalité
- Mesures de risque alternatives : CVaR-optimization, risk budgeting hiérarchique
- Prise en compte de moments d'ordre supérieur (skewness, kurtosis)

**Pratiques :**

- Intégration explicite des coûts de transaction et de l'impact de marché
- Contraintes ESG (Environmental, Social, Governance)
- Backtests plus rigoureux avec tests statistiques (bootstrap, Sharpe ratio inference)
- Machine Learning pour la prévision de  $\mu$  et estimation adaptative de  $\Sigma$
- Optimisation dynamique avec rééquilibrage optimal

## Conclusion Finale

Ce travail confirme qu'il n'existe pas de méthode universellement optimale en optimisation de portefeuille. Le choix dépend fondamentalement du contexte : horizon d'investissement, contraintes, qualité des données, coûts de transaction et surtout la confiance dans l'estimation des rendements espérés.

La leçon fondamentale demeure celle énoncée par Harry Markowitz : "*La diversification est le seul free lunch en finance*". Que ce soit via la minimisation de variance, l'égalisation des contributions au risque ou l'intégration bayésienne de vues, toutes les méthodes étudiées exploitent ce principe universel.

Enfin, ce projet souligne l'importance du compromis entre sophistication théorique et robustesse pratique. Comme l'a démontré notre analyse empirique, la simplicité disciplinée l'emporte souvent sur la complexité non maîtrisée lorsque l'incertitude statistique domine.

# Bibliographie

- [1] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.
- [2] Sharpe, W. F. (1964). *Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, 19(3), 425-442.
- [3] Black, F., & Litterman, R. (1992). *Global Portfolio Optimization*. Financial Analysts Journal, 48(5), 28-43.
- [4] Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). *Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection*. Journal of Empirical Finance, 10(5), 603-621.
- [5] Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). *Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix*. The Journal of Portfolio Management, 30(4), 110-119.
- [6] Maillard, S., Roncalli, T., & Teiletche, J. (2010). *The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios*. The Journal of Portfolio Management, 36(4), 60-70.
- [7] Choueifaty, Y., & Coignard, Y. (2008). *Toward Maximum Diversification*. The Journal of Portfolio Management, 35(1), 40-51.
- [8] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). *Optimal Versus Naive Diversification : How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy ?*. The Review of Financial Studies, 22(5), 1915-1953.
- [9] Michaud, R. O. (1998). *Efficient Asset Management : A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*. Harvard Business School Press.
- [10] Qian, E. (2005). *Risk Parity Portfolios : Efficient Portfolios Through True Diversification*. PanAgora Asset Management.
- [11] He, G., & Litterman, R. (1999). *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*. Goldman Sachs Investment Management Research.
- [12] Diamond, S., & Boyd, S. (2016). *CVXPY : A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization*. Journal of Machine Learning Research, 17(83), 1-5.
- [13] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. Journal of Risk, 2, 21-42.
- [14] Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley & Sons.

## Hassan EL QADI

Email : hassanelqadi3@gmail.com

GitHub : [github.com/hassanelq](https://github.com/hassanelq)

LinkedIn : [linkedin.com/in/el-qadi](https://linkedin.com/in/el-qadi)

*Projet de Finance Quantitative  
Université Ibn Zohr – Année Académique 2024-2025*