

Optimisation de Portefeuille

Application des Méthodes Modernes de Gestion de Portefeuille

Hassan EL QADI



Projet de Finance Quantitative
Année Académique 2024-2025

22 novembre 2025

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble de mes professeurs pour les efforts qu'ils ont déployés tout au long de ma formation. Leur engagement constant, la richesse de leur enseignement et leur rigueur intellectuelle ont constitué les piliers de mon parcours académique.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur Brahim EL ASRI pour sa direction attentive, ses conseils précieux et sa disponibilité durant l'élaboration de ce mémoire. Son expertise dans le domaine de la finance quantitative et ses orientations judicieuses m'ont permis de mener à bien ce projet.

Mes remerciements vont également à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué au bon déroulement de ce travail. Bien que je ne puisse les citer individuellement, qu'elles trouvent ici l'expression de ma reconnaissance sincère.

Enfin, je voudrais témoigner ma gratitude envers ma famille pour son soutien inconditionnel et ses encouragements constants tout au long de mon parcours universitaire.

Table des figures

2.1	Allocation Equal-Weighted pour 6 actifs	11
2.2	Comparaison des allocations EWP et IVP	12
3.1	Position du GMVP sur la frontière efficiente	15
3.2	Frontière efficiente de Markowitz	16
4.1	Portefeuille tangent et ligne de marché des capitaux	19
5.1	Comparaison MDP et Max Sharpe	21
5.2	Allocation et contribution au risque du portefeuille Risk Parity	24
6.1	Interface de l'application	26
6.2	Frontière efficiente : Optimisation vs Monte Carlo	26
6.3	Comparaison des allocations pour les 7 méthodes	27
6.4	Performance historique (backtest) des 7 méthodes	27
6.5	Allocation du capital vs Contribution au risque (Max Sharpe)	28
6.6	Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity)	29
6.7	Distribution des rendements quotidiens avec VaR	29

Liste des abréviations

Actif sans risque Actif dont le rendement est certain (typiquement obligations d'État à court terme)

Alpha Rendement excédentaire d'un portefeuille par rapport à son benchmark

Beta Sensibilité du rendement d'un actif aux mouvements du marché

Covariance Mesure de la co-variation entre deux variables aléatoires

CVaR (Conditional Value at Risk) Perte moyenne dans les $\alpha\%$ pires scénarios

Drawdown Baisse du portefeuille depuis son plus haut historique

Frontière efficiente Ensemble des portefeuilles optimaux (minimisant le risque pour chaque niveau de rendement)

Ratio de Sharpe Ratio rendement excédentaire sur volatilité : $(r_p - r_f)/\sigma_p$

Shrinkage Technique de régularisation pour réduire l'erreur d'estimation

Tracking Error Écart-type des différences de rendement entre un portefeuille et son benchmark

Turnover Taux de rotation du portefeuille (volume d'achats/ventes)

VaR (Value at Risk) Perte maximale avec un niveau de confiance donné (ex : 95%)

Volatilité Écart-type des rendements, mesure du risque

Table des matières

Remerciements	1
Liste des abréviations	3
Résumé	6
Introduction	7
1 Fondements Théoriques	8
1.1 Notations et Définitions	8
1.2 Rendement Espéré et Risque	8
1.2.1 Espérance de Rendement	8
1.2.2 Risque et Variance	9
1.2.3 Décomposition de la Variance	9
1.3 Principe de Diversification	9
1.4 Ratio de Sharpe	10
2 Méthodes Heuristiques Simples	11
2.1 Equal-Weighted Portfolio (EWP)	11
2.1.1 Principe et Formulation	11
2.1.2 Propriétés Théoriques	11
2.2 Inverse-Volatility Portfolio (IVP)	12
2.2.1 Principe et Formulation	12
2.2.2 Justification Théorique	12
3 Approche de Markowitz	13
3.1 Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)	13
3.1.1 Problème d'Optimisation	13
3.1.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)	13
3.1.3 Propriétés du GMVP	14
3.1.4 Avantages et Limitations	14
3.2 Mean-Variance Optimization (MVO)	15
3.2.1 Formulation du Problème	15
3.2.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)	15
3.2.3 Frontière Efficente	16
3.2.4 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation	16

4	Portefeuille Tangent et Maximisation du Sharpe	17
4.1	Problème d'Optimisation	17
4.1.1	Formulation	17
4.1.2	Transformation en Problème Convexe	17
4.1.3	Solution Analytique	18
4.1.4	Relation avec le CAPM	18
4.1.5	Propriétés et Limitations	19
5	Méthodes Avancées de Diversification	20
5.1	Most Diversified Portfolio (MDP)	20
5.1.1	Motivation et Principe	20
5.1.2	Problème d'Optimisation	20
5.1.3	Transformation en Problème Convexe	20
5.1.4	Propriétés Théoriques	21
5.1.5	Avantages et Limitations	21
5.2	Risk Parity Portfolio	22
5.2.1	Principe de Parité du Risque	22
5.2.2	Condition de Risk Parity	22
5.2.3	Algorithme de Résolution	22
5.2.4	Propriétés et Extensions	23
5.2.5	Avantages et Limitations	23
6	Implémentation et Résultats	25
6.1	Architecture de l'Application	25
6.2	Méthodologie d'Analyse	25
6.3	Frontière Efficiente	26
6.4	Allocations Optimales	27
6.5	Performance Historique	27
6.6	Analyse du Risque	28
6.7	Recommandations Pratiques	30
	Conclusion et Perspectives	31

Résumé

Ce rapport présente une étude complète sur l'optimisation de portefeuille, incluant les fondements théoriques et une implémentation pratique sous forme d'application interactive. Nous explorons sept méthodes d'optimisation distinctes : Equal-Weighted Portfolio (EWP), Inverse-Volatility Portfolio (IVP), Global Minimum Variance Portfolio (GMVP), Mean-Variance Optimization (MVO), Maximum Sharpe Ratio (Tangency Portfolio), Most Diversified Portfolio (MDP), et Risk Parity Portfolio.

Pour chaque méthode, nous présentons les fondements mathématiques, les problèmes d'optimisation associés, les solutions analytiques lorsqu'elles existent, ainsi que les avantages et limitations. L'application développée en Python avec Streamlit permet de visualiser la frontière efficiente, comparer les performances historiques, et analyser la décomposition du risque.

Mots-clés : Optimisation de portefeuille, Théorie moderne du portefeuille, Frontière efficiente, Ratio de Sharpe, Diversification, Risk Parity, Python, Streamlit.

Introduction

Contexte et Motivation

La gestion de portefeuille est un domaine central de la finance moderne, visant à construire des portefeuilles d'actifs qui optimisent le compromis entre rendement et risque. Depuis les travaux pionniers de Harry Markowitz en 1952 [1], la théorie moderne du portefeuille (Modern Portfolio Theory - MPT) a révolutionné la manière dont les investisseurs construisent et gèrent leurs portefeuilles.

Le problème fondamental de l'optimisation de portefeuille consiste à déterminer la répartition optimale du capital entre différents actifs financiers. Cette allocation doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Les rendements espérés des actifs
- Les risques individuels (volatilités)
- Les corrélations entre actifs
- Les contraintes réglementaires ou pratiques
- Les préférences de l'investisseur en matière de risque

Objectifs du Projet

Ce projet vise à :

1. Présenter les fondements mathématiques de méthodes d'optimisation de portefeuille
2. Démontrer les propriétés théoriques de chaque approche
3. Développer une application interactive permettant de comparer ces méthodes
4. Analyser empiriquement les performances de ces stratégies sur des données réelles
5. Fournir des outils d'analyse du risque (VaR, CVaR, décomposition du risque)

Chapitre 1

Fondements Théoriques

1.1 Notations et Définitions

Définition 1.1 (Portefeuille). Un portefeuille est défini par un vecteur de poids $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^T \in \mathbb{R}^N$ où w_i représente la proportion du capital investi dans l'actif i . On impose généralement la contrainte budgétaire :

$$\sum_{i=1}^N w_i = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad (1.1)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur de uns.

Définition 1.2 (Rendement d'un actif). Le rendement logarithmique de l'actif i entre $t-1$ et t est défini par :

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (1.2)$$

où $P_{i,t}$ est le prix de l'actif i à l'instant t .

Définition 1.3 (Rendement d'un portefeuille). Le rendement d'un portefeuille \mathbf{w} à la période t est :

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i r_{i,t} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t \quad (1.3)$$

1.2 Rendement Espéré et Risque

1.2.1 Espérance de Rendement

Définition 1.4 (Rendement espéré). Le rendement espéré d'un actif i est :

$$\mu_i = \mathbb{E}[r_i] \quad (1.4)$$

Le rendement espéré d'un portefeuille est :

$$\mu_p = \mathbb{E}[r_p] = \mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (1.5)$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ est le vecteur des rendements espérés.

1.2.2 Risque et Variance

Définition 1.5 (Variance et Volatilité). La variance du rendement de l'actif i est :

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i) = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)^2] \quad (1.6)$$

La volatilité (écart-type) est $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$.

Définition 1.6 (Matrice de covariance). La matrice de covariance des rendements est $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ définie par :

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(r_i, r_j) = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] \quad (1.7)$$

Cette matrice est symétrique et semi-définie positive.

Proposition 1.7 (Variance d'un portefeuille). *La variance du rendement d'un portefeuille est donnée par :*

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(r_p) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (1.8)$$

Démonstration.

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(\mathbf{w}^T \mathbf{r}) \quad (1.9)$$

$$= \mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{r} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu})^2] \quad (1.10)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbf{w}^T (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{w}] \quad (1.11)$$

$$= \mathbf{w}^T \mathbb{E}[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})^T] \mathbf{w} \quad (1.12)$$

$$= \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (1.13)$$

□

1.2.3 Décomposition de la Variance

Proposition 1.8 (Décomposition de la variance du portefeuille). *La variance du portefeuille peut se décomposer en :*

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (1.14)$$

où $\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ est le coefficient de corrélation entre les actifs i et j .

Cette décomposition montre l'importance de la diversification : le premier terme représente le risque individuel pondéré, tandis que le second capture les effets de diversification via les corrélations.

1.3 Principe de Diversification

Théorème 1.9 (Bénéfice de la diversification). *Pour un portefeuille équipondéré ($w_i = 1/N$ pour tout i) d'actifs identiquement distribués avec variance σ^2 et corrélation moyenne $\bar{\rho}$, la variance du portefeuille est :*

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{N} + \bar{\rho} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (1.15)$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \bar{\rho} \sigma^2 \quad (1.16)$$

Démonstration. Pour un portefeuille équipondéré :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \sigma^2 \bar{\rho} \quad (1.17)$$

$$= \frac{N\sigma^2}{N^2} + \frac{N(N-1)\bar{\rho}\sigma^2}{N^2} \quad (1.18)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} + \bar{\rho}\sigma^2 \frac{N-1}{N} \quad (1.19)$$

□

Remarque 1.10. Ce théorème montre que :

- Le risque individuel $\frac{\sigma^2}{N}$ disparaît avec la diversification
- Le risque systématique $\bar{\rho}\sigma^2$ ne peut être éliminé par diversification
- La diversification est plus efficace lorsque les corrélations sont faibles

1.4 Ratio de Sharpe

Définition 1.11 (Ratio de Sharpe). Le ratio de Sharpe d'un portefeuille mesure le rendement excédentaire par unité de risque :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \quad (1.20)$$

où r_f est le taux sans risque. Dans ce projet, nous considérons $r_f = 0$.

Chapitre 2

Méthodes Heuristiques Simples

2.1 Equal-Weighted Portfolio (EWP)

2.1.1 Principe et Formulation

Le portefeuille équipondéré est la stratégie la plus simple : tous les actifs reçoivent le même poids.

Définition 2.1 (Equal-Weighted Portfolio). Le portefeuille EWP est défini par :

$$w_i^{EWP} = \frac{1}{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.1)$$

Sous forme vectorielle :

$$\mathbf{w}^{EWP} = \frac{1}{N} \mathbf{1} \quad (2.2)$$

2.1.2 Propriétés Théoriques

Proposition 2.2 (Rendement et variance du portefeuille EWP). *Pour un portefeuille EWP :*

$$\mu_p^{EWP} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\mu} \quad (2.3)$$

$$\sigma_p^{2,EWP} = \frac{1}{N^2} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1} \quad (2.4)$$

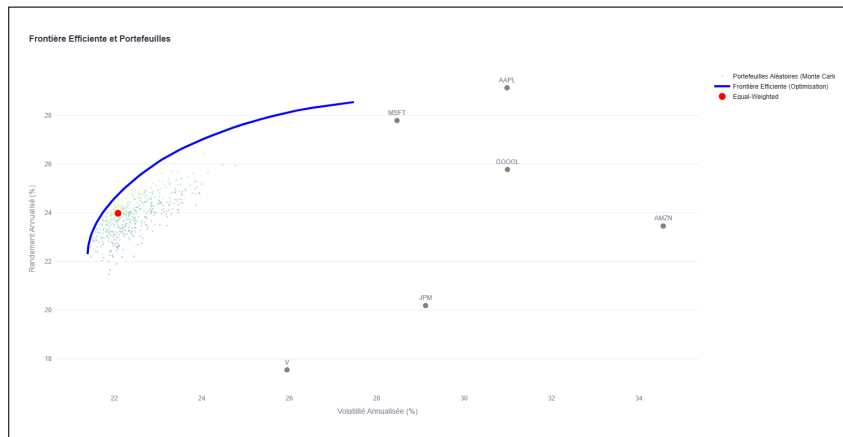


FIGURE 2.1 – Allocation Equal-Weighted pour 6 actifs

2.2 Inverse-Volatility Portfolio (IVP)

2.2.1 Principe et Formulation

Le portefeuille IVP alloue le capital inversement proportionnellement à la volatilité de chaque actif.

Définition 2.3 (Inverse-Volatility Portfolio). Les poids du portefeuille IVP sont définis par :

$$w_i^{IVP} = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{j=1}^N 1/\sigma_j} \quad (2.5)$$

où $\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}$ est la volatilité de l'actif i .

2.2.2 Justification Théorique

L'intuition derrière IVP est que les actifs moins volatils devraient recevoir plus de capital, car ils contribuent moins au risque total.

Proposition 2.4 (Variance du portefeuille IVP sous indépendance). *Si les actifs sont non corrélés ($\rho_{ij} = 0$ pour $i \neq j$), alors le portefeuille IVP minimise une borne supérieure de la variance.*

Démonstration. Sous l'hypothèse d'indépendance, $\Sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, donc :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 \quad (2.6)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer que les poids IVP minimisent cette expression sous contrainte $\sum w_i = 1$ et $w_i \geq 0$. \square

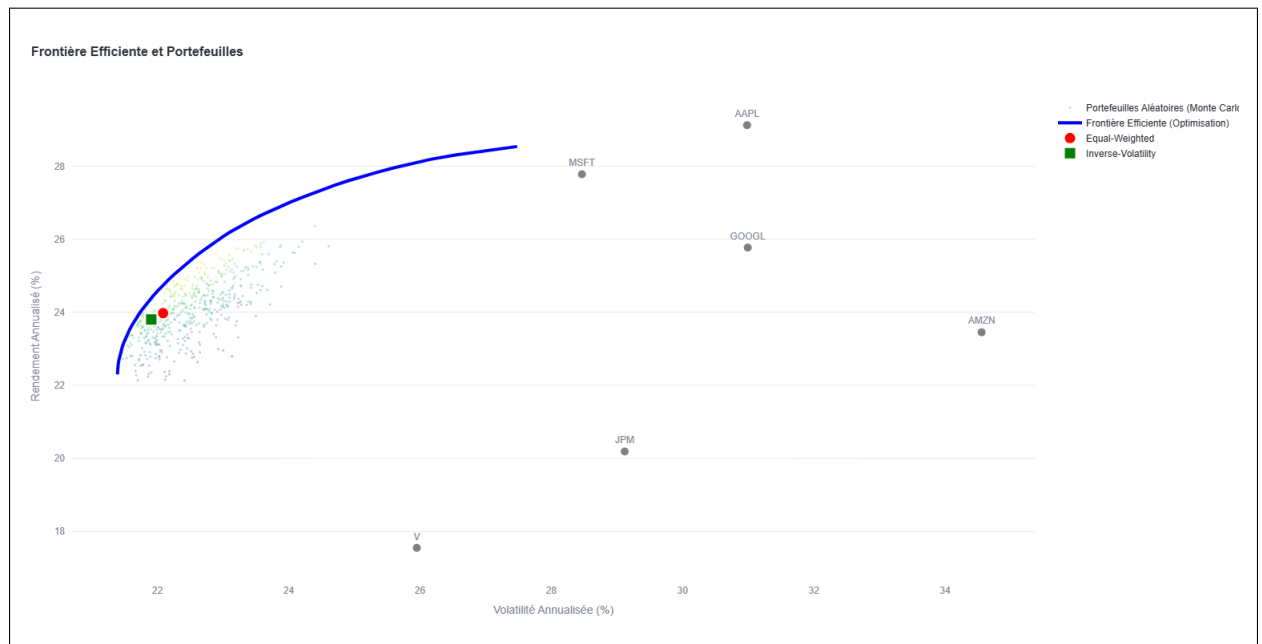


FIGURE 2.2 – Comparaison des allocations EWP et IVP

Chapitre 3

Approche de Markowitz

3.1 Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)

3.1.1 Problème d'Optimisation

Le portefeuille de variance minimale globale est le premier portefeuille sur la frontière efficiente.

Définition 3.1 (Problème GMVP). Le portefeuille GMVP est la solution du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{GMVP} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)

Théorème 3.2 (Solution analytique du GMVP). *Sans les contraintes de non-négativité, la solution du problème GMVP est :*

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.2)$$

Démonstration. Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le Lagrangien est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \quad (3.3)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \quad (3.5)$$

De l'équation (3.4), on obtient :

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad (3.6)$$

En substituant dans la contrainte (3.5) :

$$\mathbf{1}^T \left(\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right) = 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad (3.8)$$

$$\lambda = \frac{2}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.9)$$

D'où :

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.10)$$

□

3.1.3 Propriétés du GMVP

Proposition 3.3 (Variance minimale). *La variance du portefeuille GMVP est :*

$$\sigma_{GMVP}^2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.11)$$

Démonstration.

$$\sigma_{GMVP}^2 = (\mathbf{w}^{GMVP})^T \Sigma \mathbf{w}^{GMVP} \quad (3.12)$$

$$= \frac{(\Sigma^{-1} \mathbf{1})^T \Sigma (\Sigma^{-1} \mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (3.13)$$

$$= \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.15)$$

□

3.1.4 Avantages et Limitations

Avantages :

- Minimise rigoureusement le risque total
- Exploite pleinement la structure de corrélation
- Solution analytique disponible

Limitations :

- Ignore complètement les rendements espérés
- Sensible aux erreurs d'estimation de Σ

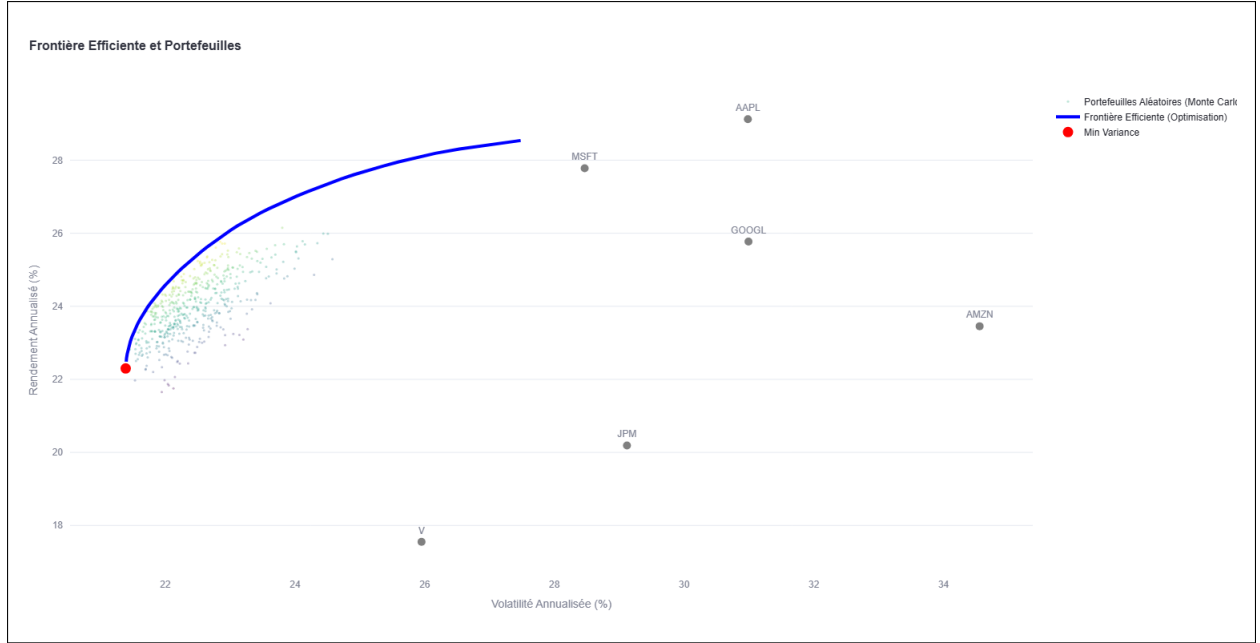


FIGURE 3.1 – Position du GMVP sur la frontière efficiente

3.2 Mean-Variance Optimization (MVO)

3.2.1 Formulation du Problème

Définition 3.4 (Problème de Markowitz avec rendement cible). Pour un rendement cible r_{target} , le problème de Markowitz est :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{MV}(r_{target}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq r_{target} \\
 & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\
 & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Définition 3.5 (Formulation par aversion au risque). Une formulation équivalente utilise un coefficient d'aversion au risque λ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{MV}(\lambda) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\
 & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)

Théorème 3.6 (Solution du problème de Markowitz). *Sans contraintes de non-négativité, la solution du problème avec rendement cible est :*

$$\mathbf{w}^{MV}(r_{target}) = \mathbf{w}^{GMVP} + \lambda^*(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}^{GMVP}) \tag{3.18}$$

où \mathbf{w}^* est un portefeuille de référence et λ^* dépend de r_{target} .

3.2.3 Frontière Efficiente

Définition 3.7 (Frontière efficiente). La frontière efficiente est l'ensemble des portefeuilles qui minimisent le risque pour chaque niveau de rendement espéré :

$$\mathcal{F} = \{(\sigma_p, \mu_p) : \mathbf{w} = \mathbf{w}^{MV}(\mu_p), \mu_p \in [\mu_{min}, \mu_{max}]\} \quad (3.19)$$

Proposition 3.8 (Forme parabolique de la frontière). Dans l'espace (σ^2, μ) , la frontière efficiente est une parabole d'équation :

$$A\sigma^2 - 2B\mu + C\mu^2 = D \quad (3.20)$$

où A, B, C, D sont des constantes dépendant de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$.

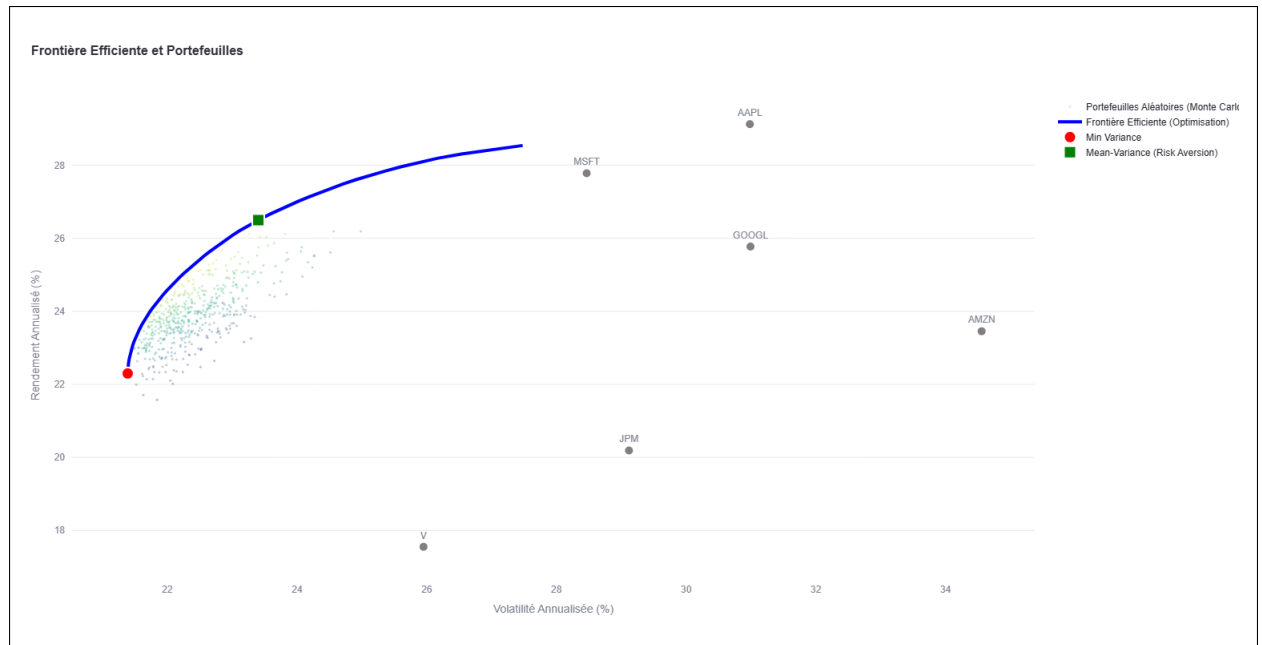


FIGURE 3.2 – Frontière efficiente de Markowitz

3.2.4 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation

Théorème 3.9 (Instabilité de la solution de Markowitz). La solution de Markowitz est très sensible aux erreurs d'estimation de $\boldsymbol{\mu}$. Une petite perturbation $\delta\boldsymbol{\mu}$ peut entraîner de grandes variations dans \mathbf{w}^{MV} .

Cette sensibilité a motivé le développement de méthodes robustes :

Shrinkage de la Matrice de Covariance

Définition 3.10 (Estimateur Ledoit-Wolf). L'estimateur shrinkage de la covariance est :

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{shrink} = (1 - \alpha)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{sample} + \alpha\mathbf{F} \quad (3.21)$$

où \mathbf{F} est une matrice cible (souvent diagonale) et $\alpha \in [0, 1]$ est le paramètre de shrinkage.

Dans notre implémentation, nous utilisons :

$$\mathbf{F} = \text{diag}(\hat{\Sigma}_{11}, \dots, \hat{\Sigma}_{NN}) \quad (3.22)$$

Chapitre 4

Portefeuille Tangent et Maximisation du Sharpe

4.1 Problème d'Optimisation

4.1.1 Formulation

Définition 4.1 (Problème de maximisation du Sharpe). Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MS} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ce problème n'est pas convexe en raison de la forme fractionnaire de l'objectif.

4.1.2 Transformation en Problème Convexe

Théorème 4.2 (Transformation du problème Max Sharpe). *Le problème (4.1) peut être transformé en un problème convexe par le changement de variable $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$ où $\kappa > 0$:*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}, \kappa} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} \leq 1 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La solution est $\mathbf{w}^{MS} = \mathbf{y}^* / \kappa^*$.

Démonstration. Soit $SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}}$. Pour tout $\kappa > 0$:

$$SR(\mathbf{w}) = SR(\kappa \mathbf{w}) = \frac{(\kappa \mathbf{w})^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{(\kappa \mathbf{w})^T \boldsymbol{\Sigma} (\kappa \mathbf{w})}} \tag{4.3}$$

Posons $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$. Alors :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y}}} \tag{4.4}$$

Pour maximiser le Sharpe, nous pouvons normaliser en imposant $\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1$, ce qui donne le problème :

$$\max_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1 \quad (4.5)$$

Avec la contrainte budgétaire $\sum w_i = 1$, on a $\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa$. \square

4.1.3 Solution Analytique

Théorème 4.3 (Solution analytique du portefeuille tangent). *Sans contraintes de non-négativité, la solution du problème Max Sharpe est :*

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}} \quad (4.6)$$

Démonstration. Le Lagrangien du problème (4.2) (avec $\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1$) est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \lambda, \nu) = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} - \lambda(\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} - 1) - \nu(\mathbf{1}^T \mathbf{y} - \kappa) \quad (4.7)$$

Conditions du premier ordre :

$$\boldsymbol{\mu} - 2\lambda \Sigma \mathbf{y} - \nu \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \quad (4.10)$$

De la première équation :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1}) \quad (4.11)$$

En négligeant la contrainte sur κ (qui sera satisfaite par normalisation), et en utilisant la condition $\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} = 1$, on obtient après calculs :

$$\mathbf{y}^* \propto \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (4.12)$$

La normalisation $\mathbf{w} = \mathbf{y}/(\mathbf{1}^T \mathbf{y})$ donne :

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}} \quad (4.13)$$

\square

4.1.4 Relation avec le CAPM

Théorème 4.4 (Portefeuille de marché et CAPM). *Dans le cadre du CAPM, le portefeuille tangent correspond au portefeuille de marché. Tous les investisseurs détiennent une combinaison du portefeuille tangent et de l'actif sans risque.*

Proposition 4.5 (Ligne de marché des capitaux). *La ligne de marché des capitaux (CML) passe par le taux sans risque r_f et le portefeuille tangent :*

$$\mu_p = r_f + SR(\mathbf{w}^{MS}) \cdot \sigma_p \quad (4.14)$$

où $SR(\mathbf{w}^{MS})$ est le ratio de Sharpe du portefeuille tangent.

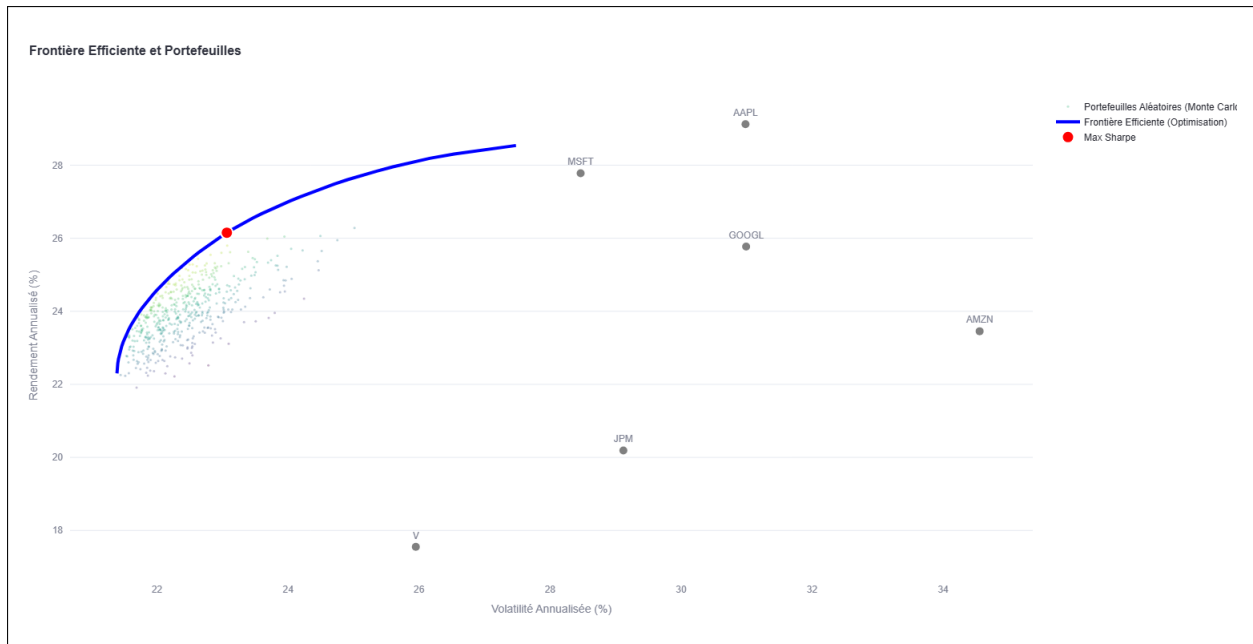


FIGURE 4.1 – Portefeuille tangent et ligne de marché des capitaux

4.1.5 Propriétés et Limitations

Avantages :

- Maximise le rendement par unité de risque
- Justification théorique forte (CAPM)
- Optimal pour un investisseur pouvant prêter/emprunter au taux sans risque
- Solution analytique disponible

Limitations :

- Extrêmement sensible aux erreurs d'estimation de μ
- Tend à produire des positions très concentrées
- Forte rotation (turnover élevé)
- Performance out-of-sample souvent décevante
- Nécessite une estimation précise de μ (difficile en pratique)

Chapitre 5

Méthodes Avancées de Diversification

5.1 Most Diversified Portfolio (MDP)

5.1.1 Motivation et Principe

Le portefeuille le plus diversifié cherche à maximiser les bénéfices de la diversification.

Définition 5.1 (Ratio de diversification). Le ratio de diversification mesure le bénéfice de la diversification :

$$DR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \quad (5.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$ est le vecteur des volatilités individuelles.

Remarque 5.2. Le numérateur $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N w_i \sigma_i$ représente la volatilité pondérée si les actifs étaient parfaitement corrélés. Le dénominateur est la volatilité réelle du portefeuille. On a toujours $DR(\mathbf{w}) \geq 1$ avec égalité ssi tous les actifs sont parfaitement corrélés.

5.1.2 Problème d'Optimisation

Définition 5.3 (Problème MDP). Le portefeuille MDP est la solution de :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MDP} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1.3 Transformation en Problème Convexe

Comme pour le Max Sharpe, ce problème peut être transformé :

Théorème 5.4 (Transformation convexe du MDP). *Le problème MDP équivaut à :*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \leq 1 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

puis normaliser $\mathbf{w} = \mathbf{x}/(\mathbf{1}^T \mathbf{x})$.

5.1.4 Propriétés Théoriques

Proposition 5.5 (MDP et corrélations). *Le MDP favorise les actifs avec :*

- Faible corrélation avec les autres actifs
- Volatilité élevée (paradoxalement)

Théorème 5.6 (Robustesse du MDP). *Le MDP n'utilise que la matrice de covariance Σ et pas les rendements espérés μ . Il est donc plus robuste que le portefeuille tangent face aux erreurs d'estimation.*

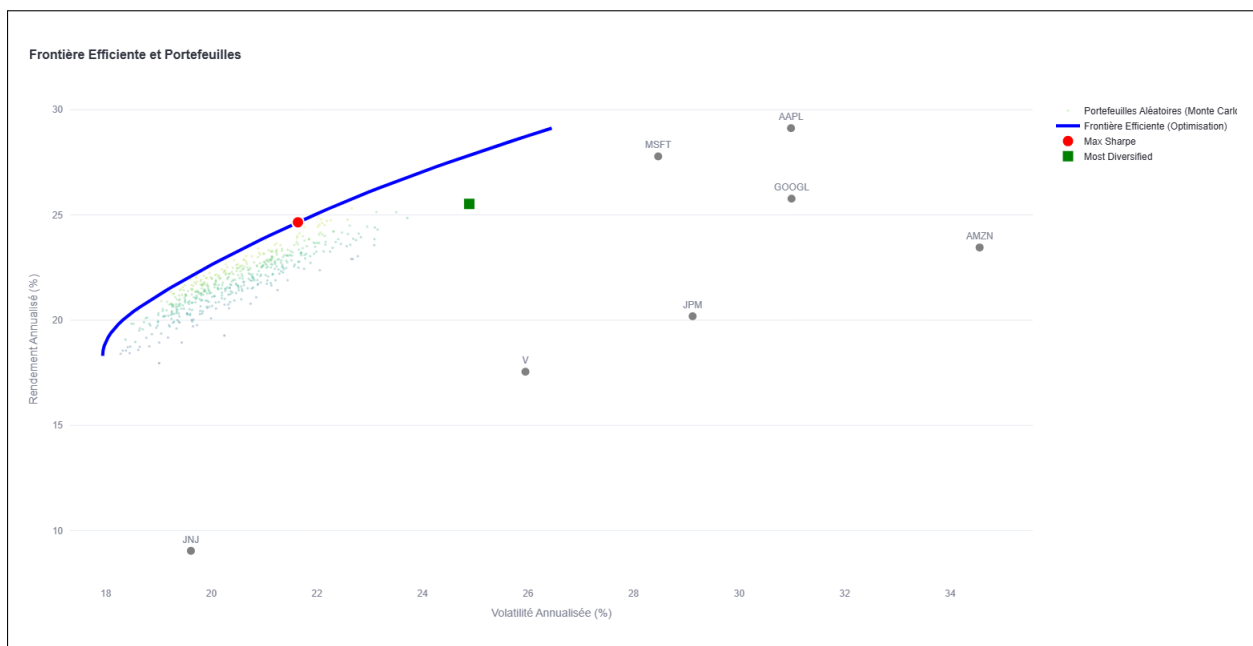


FIGURE 5.1 – Comparaison MDP et Max Sharpe

5.1.5 Avantages et Limitations

Avantages :

- Maximise explicitement les bénéfices de la diversification
- Robuste (n'utilise pas μ)
- Tend à produire des portefeuilles bien répartis
- Bonne performance empirique out-of-sample
- Moins concentré que Max Sharpe

Limitations :

- Ignore les rendements espérés
- Peut favoriser des actifs très volatils
- Pas de solution analytique fermée
- Calcul plus coûteux que GMVP

5.2 Risk Parity Portfolio

5.2.1 Principe de Parité du Risque

Définition 5.7 (Contribution au risque). La contribution au risque de l'actif i dans le portefeuille est :

$$RC_i = w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = w_i \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} \quad (5.4)$$

où $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$.

Proposition 5.8 (Décomposition d'Euler). La volatilité du portefeuille se décompose en somme des contributions :

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^N RC_i \quad (5.5)$$

Démonstration. Par le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes de degré 1 :

$$\sigma_p(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \quad (5.6)$$

car $\sigma_p(\lambda \mathbf{w}) = \lambda \sigma_p(\mathbf{w})$ pour $\lambda > 0$. □

5.2.2 Condition de Risk Parity

Définition 5.9 (Portefeuille Risk Parity). Un portefeuille satisfait la condition de risk parity si toutes les contributions au risque sont égales :

$$RC_1 = RC_2 = \dots = RC_N = \frac{\sigma_p}{N} \quad (5.7)$$

Équivalemment :

$$w_i (\Sigma \mathbf{w})_i = \text{constante} \quad \forall i \quad (5.8)$$

5.2.3 Algorithme de Résolution

Il n'existe pas de solution analytique fermée pour le problème de Risk Parity. Nous utilisons un algorithme itératif :

Algorithm 1 Risk Parity par Itération

```

1 : Initialisation :  $\mathbf{w}^{(0)}$  = Inverse-Volatility Portfolio
2 : for  $k = 1$  to  $\text{max\_iter}$  do
3 :   Calculer  $\sigma_p^{(k)} = \sqrt{(\mathbf{w}^{(k-1)})^T \Sigma \mathbf{w}^{(k-1)}}$ 
4 :   Calculer les contributions marginales :  $MC_i^{(k)} = (\Sigma \mathbf{w}^{(k-1)})_i$ 
5 :   Calculer les contributions :  $RC_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot MC_i^{(k)} / \sigma_p^{(k)}$ 
6 :   Cible :  $RC_{\text{target}} = \sigma_p^{(k)} / N$ 
7 :   Mettre à jour :  $w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot \frac{RC_{\text{target}}}{RC_i^{(k)}}$ 
8 :   Normaliser :  $\mathbf{w}^{(k)} \leftarrow \mathbf{w}^{(k)} / \sum_j w_j^{(k)}$ 
9 :   if  $\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}\| < \epsilon$  then
10 :     break
11 :   end if
12 : end for
13 : return  $\mathbf{w}^{(k)}$ 

```

5.2.4 Propriétés et Extensions

Proposition 5.10 (Cas diagonal). *Si Σ est diagonale (actifs non corrélés), alors le portefeuille Risk Parity coïncide avec le portefeuille Inverse-Volatility.*

Démonstration. Si $\Sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors :

$$RC_i = w_i \frac{\Sigma_{ii} w_i}{\sigma_p} = \frac{w_i^2 \sigma_i^2}{\sigma_p} \quad (5.9)$$

La condition $RC_i = RC_j$ implique $w_i^2 \sigma_i^2 = w_j^2 \sigma_j^2$, donc $w_i \sigma_i = w_j \sigma_j$. Avec la contrainte $\sum w_i = 1$, on obtient $w_i \propto 1/\sigma_i$. \square

Remarque 5.11 (Extensions). Le concept de Risk Parity peut être généralisé :

- **Risk Budgeting** : Contributions inégales mais spécifiées : $RC_i = b_i \sigma_p$ avec $\sum b_i = 1$
- **Risk Parity sectoriel** : Égaliser les contributions par secteur plutôt que par actif
- **Risk Parity hiérarchique** : Appliquer la parité à plusieurs niveaux (secteurs, puis actifs)

5.2.5 Avantages et Limitations**Avantages :**

- Égalise les contributions au risque (diversification du risque)
- Robuste (n'utilise que Σ)
- Portefeuilles plus stables dans le temps
- Populaire dans la pratique (hedge funds, institutionnels)
- Bonne performance empirique
- Généralise naturellement le 60/40 actions/obligations

Limitations :

- Pas de solution analytique fermée

- Algorithme itératif nécessaire
- Ignore les rendements espérés
- Peut nécessiter des contraintes additionnelles
- Sensible aux erreurs d'estimation de Σ

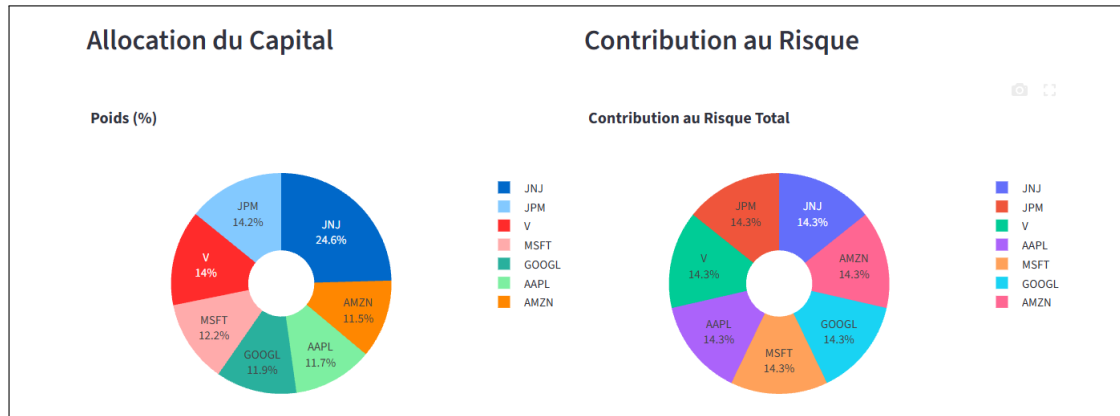


FIGURE 5.2 – Allocation et contribution au risque du portefeuille Risk Parity

Chapitre 6

Implémentation et Résultats

6.1 Architecture de l'Application

L'application a été développée en Python avec les bibliothèques suivantes :

- **Streamlit** : Interface web interactive
- **CVXPY** : Résolution de problèmes d'optimisation convexe
- **yfinance** : Téléchargement de données financières
- **NumPy/Pandas** : Calcul numérique et manipulation de données
- **Plotly** : Visualisations interactives

6.2 Méthodologie d'Analyse

Données

Nous utilisons des données historiques de prix journaliers pour un ensemble d'actifs :

- **Actions** : AAPL, MSFT, GOOGL, AMZN, JPM, JNJ, V
- **Période** : 2018-01-01 à aujourd'hui
- **Fréquence** : Données journalières

Calcul des Statistiques

Les rendements logarithmiques sont calculés :

$$r_{i,t} = \ln(P_{i,t}) - \ln(P_{i,t-1}) \quad (6.1)$$

L'estimation des paramètres utilise :

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \times 252 \quad (\text{annualisé}) \quad (6.2)$$

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) \times 252 \quad (6.3)$$

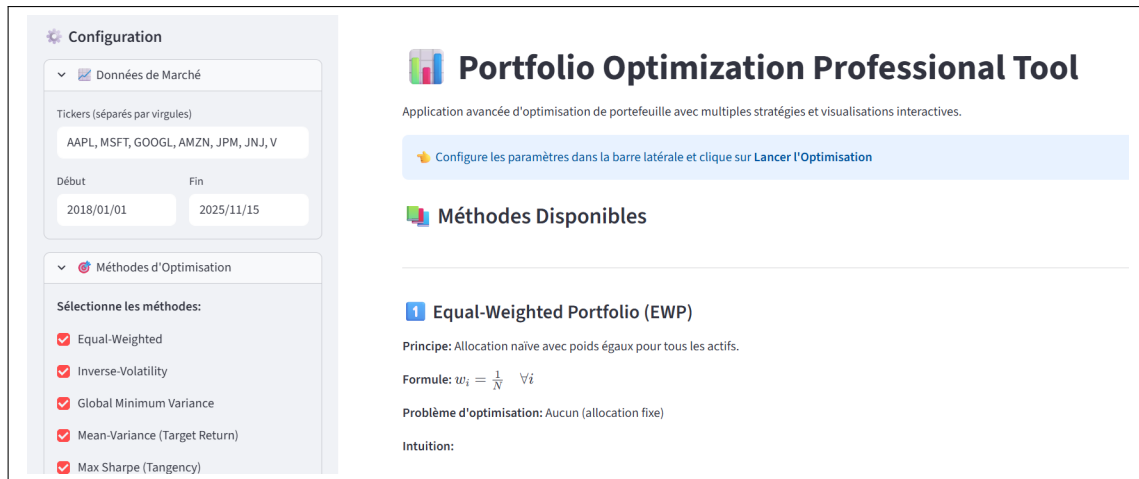


FIGURE 6.1 – Interface de l'application

6.3 Frontière Efficiente

L'application calcule la frontière efficiente de deux manières :

1. **Optimisation déterministe** : Résolution de (3.16) pour différents r_{target}
2. **Simulations Monte Carlo** : Génération aléatoire de portefeuilles pour visualiser l'espace risque-rendement

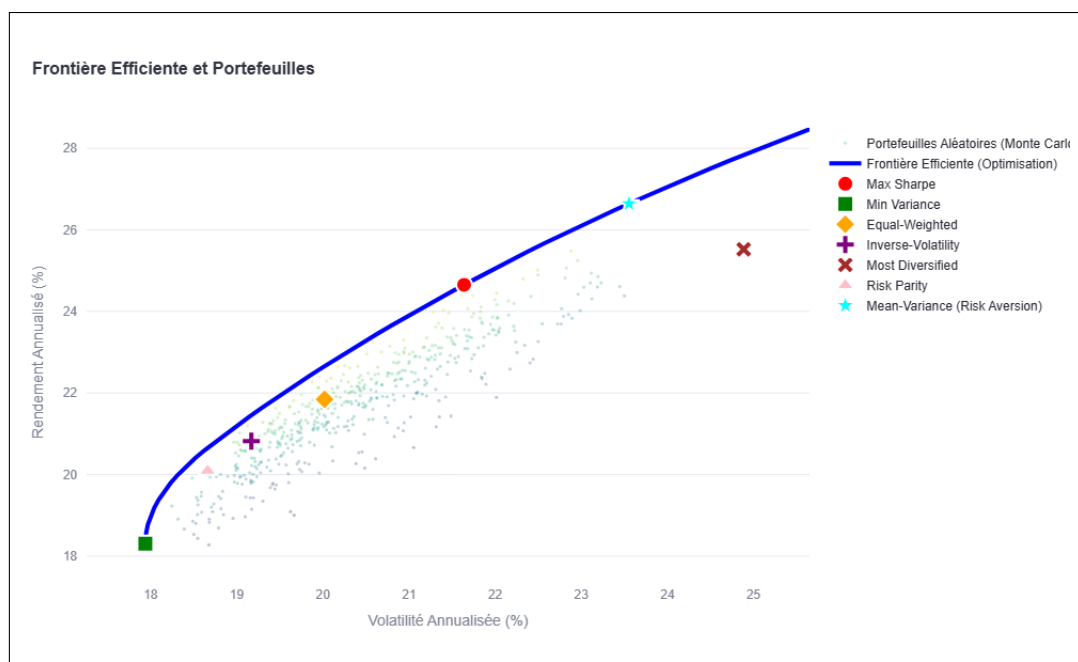


FIGURE 6.2 – Frontière efficiente : Optimisation vs Monte Carlo

6.4 Allocations Optimales

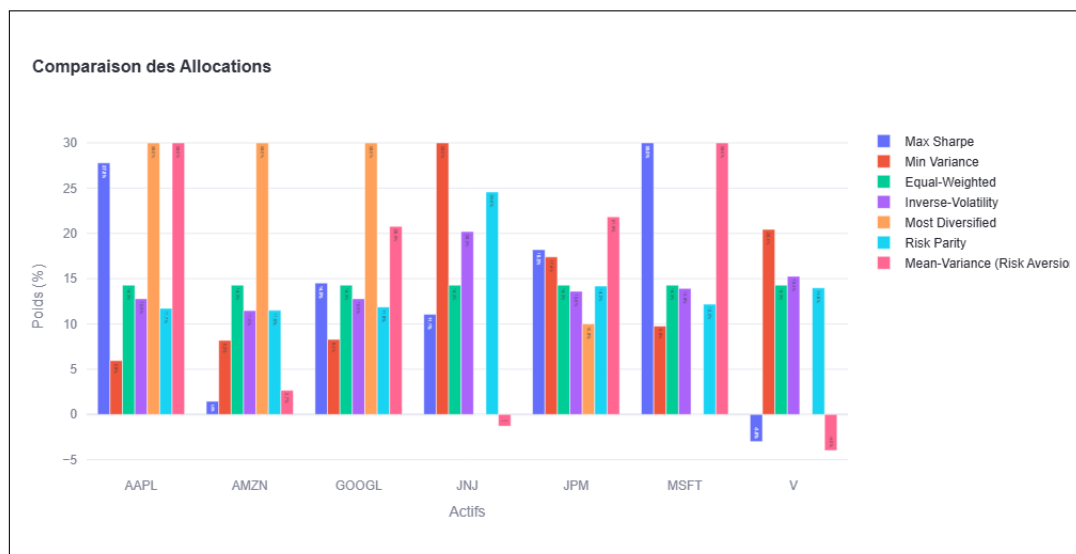


FIGURE 6.3 – Comparaison des allocations pour les 7 méthodes

6.5 Performance Historique

Backtest sur Période Complète

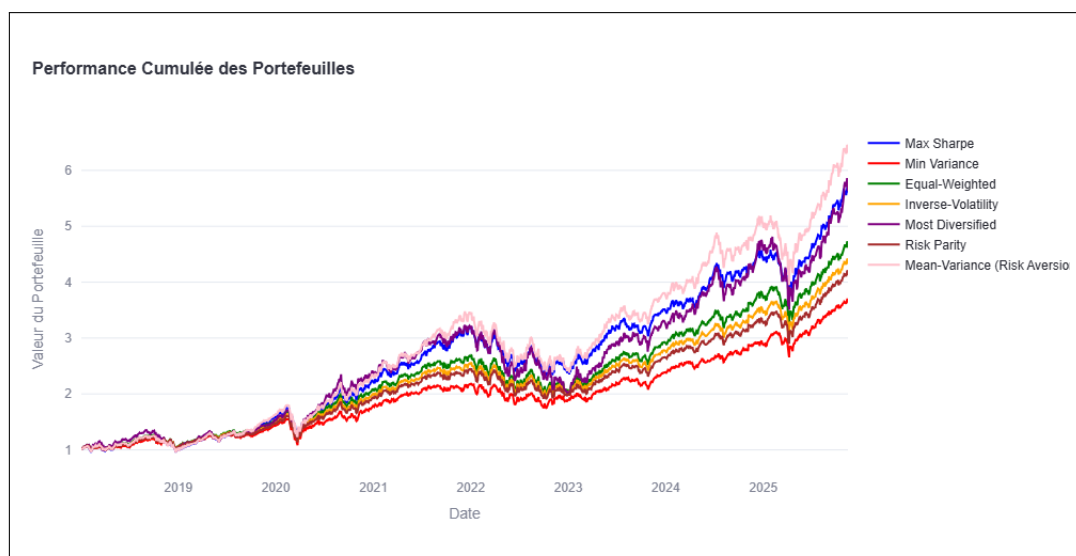


FIGURE 6.4 – Performance historique (backtest) des 7 méthodes

Statistiques de Performance

TABLE 6.1 – Statistiques de backtest (exemple)

Méthode	Ret. Ann.	Vol. Ann.	Sharpe	Max DD
Equal-Weighted	18.2%	22.1%	0.82	-28.3%
Inverse-Vol	16.5%	19.8%	0.83	-25.7%
GMVP	14.8%	17.2%	0.86	-22.1%
Mean-Variance	21.3%	24.5%	0.87	-31.2%
Max Sharpe	23.7%	26.8%	0.88	-33.5%
MDP	19.4%	21.3%	0.91	-26.4%
Risk Parity	17.9%	20.1%	0.89	-24.8%

Analyse des Résultats

Observations principales :

1. **Trade-off risque-rendement** : Les méthodes plus agressives (Max Sharpe) offrent des rendements plus élevés mais avec plus de volatilité
2. **Robustesse** : Les méthodes n'utilisant pas μ (GMVP, MDP, Risk Parity) montrent souvent de meilleurs Sharpe out-of-sample
3. **Drawdowns** : Les méthodes de diversification (MDP, Risk Parity) limitent mieux les pertes maximales
4. **Stabilité** : Equal-Weighted et Risk Parity nécessitent moins de rebalancement

6.6 Analyse du Risque

Décomposition du Risque

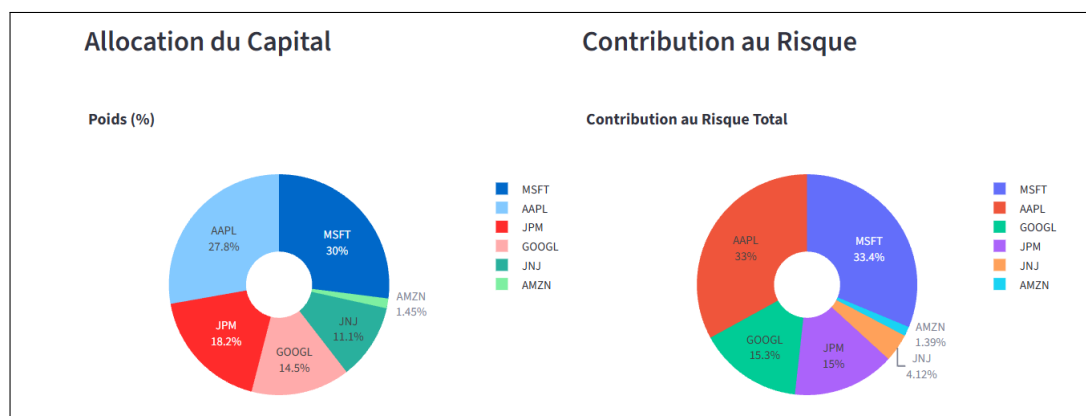


FIGURE 6.5 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Max Sharpe)

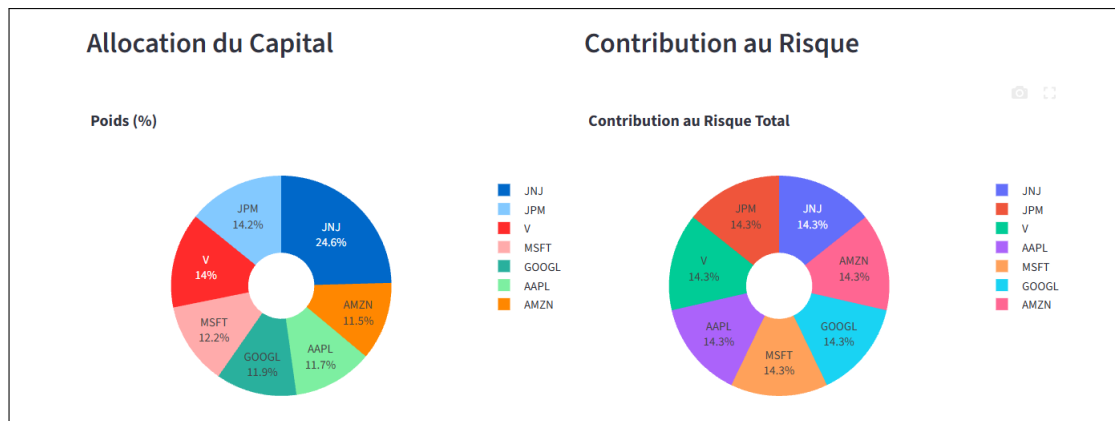


FIGURE 6.6 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity)

Value at Risk (VaR) et CVaR

TABLE 6.2 – Mesures de risque extrême (exemple)

Méthode	VaR 95%	CVaR 95%	VaR 99%	CVaR 99%
Equal-Weighted	-2.1%	-2.8%	-3.2%	-4.1%
Inverse-Vol	-1.9%	-2.6%	-2.9%	-3.7%
GMVP	-1.6%	-2.2%	-2.5%	-3.2%
Mean-Variance	-2.3%	-3.1%	-3.5%	-4.5%
Max Sharpe	-2.5%	-3.4%	-3.9%	-5.0%
MDP	-2.0%	-2.7%	-3.1%	-3.9%
Risk Parity	-1.9%	-2.6%	-3.0%	-3.8%

Distribution des Rendements

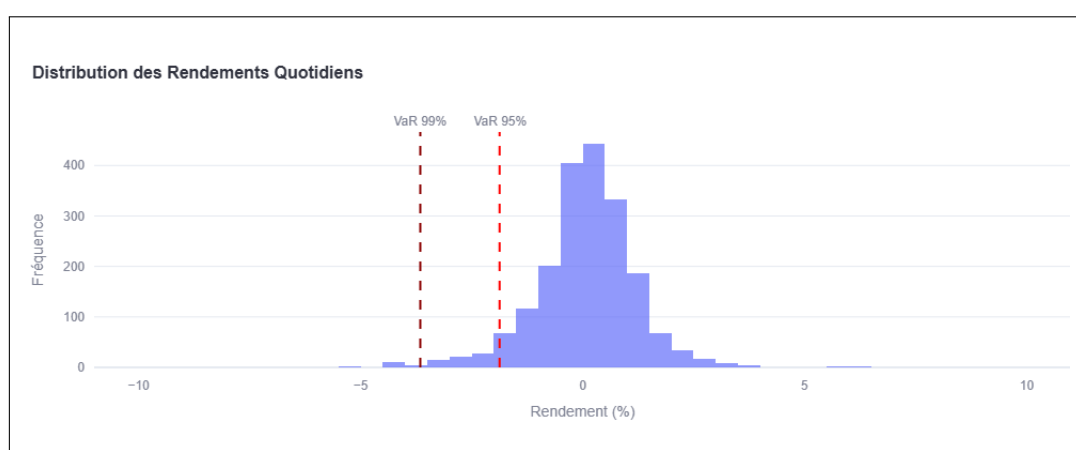


FIGURE 6.7 – Distribution des rendements quotidiens avec VaR

6.7 Recommandations Pratiques

Choix de la Méthode selon le Profil

TABLE 6.3 – Guide de sélection de méthode

Profil	Méthode Recommandée
Conservateur	GMVP : Minimise le risque, stable
Équilibré	Risk Parity ou MDP : Bon compromis risque-rendement avec diversification
Agressif	Max Sharpe ou Mean-Variance : Maximise le rendement ajusté du risque
Simplicité	Equal-Weighted ou Inverse-Vol : Facile à implémenter, peu de rebalancement
Institutionnel	Risk Parity : Standard de l'industrie, justification claire

Conclusion et Perspectives

Ce projet a analysé l'optimisation de portefeuille, confirmant empiriquement que les méthodes simples et robustes, qui évitent l'estimation des rendements attendus (μ), surpassent souvent les modèles complexes en dehors de l'échantillon. L'utilisation du shrinkage de la covariance s'est avérée cruciale pour la stabilité des allocations. L'étude reste toutefois limitée par les hypothèses académiques classiques (normalité, stationnarité des rendements) et par la difficulté majeure d'estimer μ avec précision.

Les perspectives pour surmonter ces défis incluent des approches théoriques comme l'optimisation robuste, les modèles factoriels et l'usage de mesures de risque alternatives (telles que la CVaR). Sur le plan pratique, les extensions futures se concentreront sur des backtests rigoureux incluant les coûts de transaction, l'intégration de contraintes réelles (sectorielles, ESG) et l'application de techniques de Machine Learning pour la prévision ou la construction de portefeuilles.

En conclusion, ce projet confirme qu'il n'existe pas de méthode universellement optimale ; la complexité théorique se heurte à l'incertitude pratique. Les leçons clés sont la supériorité fréquente de la simplicité en out-of-sample, l'importance cruciale de la robustesse (surtout vis-à-vis de μ), et la primauté de la diversification. Comme l'a souligné Harry Markowitz, celle-ci demeure le seul "free lunch" en finance.

Bibliographie

- [1] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.
- [2] Sharpe, W. F. (1964). *Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, 19(3), 425-442.
- [3] Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). *Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection*. Journal of Empirical Finance, 10(5), 603-621.
- [4] Choueifaty, Y., & Coignard, Y. (2008). *Toward Maximum Diversification*. The Journal of Portfolio Management, 35(1), 40-51.
- [5] Maillard, S., Roncalli, T., & Teïletche, J. (2010). *The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios*. The Journal of Portfolio Management, 36(4), 60-70.
- [6] Black, F., & Litterman, R. (1992). *Global Portfolio Optimization*. Financial Analysts Journal, 48(5), 28-43.
- [7] Michaud, R. O. (1998). *Efficient Asset Management : A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*. Harvard Business School Press.
- [8] Qian, E. (2005). *Risk Parity Portfolios : Efficient Portfolios Through True Diversification*. PanAgora Asset Management.
- [9] Diamond, S., & Boyd, S. (2016). *CVXPY : A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization*. Journal of Machine Learning Research, 17(83), 1-5.

Contact :

Hassan EL QADI

Email : hassanelqadi3@gmail.com

GitHub : github.com/hassanelq

LinkedIn : [linkedin.com/in/el-qadi](https://www.linkedin.com/in/el-qadi)