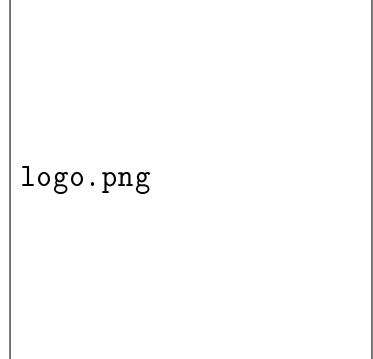


Optimisation de Portefeuille

Application des Méthodes Modernes de Gestion de Portefeuille

Hassan EL QADI



logo.png

Projet de Finance Quantitative
Année Académique 2024-2025

15 novembre 2025

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Résumé | 2 |
| 1 Introduction | 3 |
| 1.1 Contexte et Motivation | 3 |
| 1.2 Objectifs du Projet | 3 |
| 1.3 Structure du Rapport | 3 |
| 2 Fondements Théoriques | 5 |
| 2.1 Notations et Définitions | 5 |
| 2.2 Rendement Espéré et Risque | 5 |
| 2.2.1 Espérance de Rendement | 5 |
| 2.2.2 Risque et Variance | 6 |
| 2.2.3 Décomposition de la Variance | 6 |
| 2.3 Principe de Diversification | 6 |
| 2.4 Ratio de Sharpe | 7 |
| 3 Méthodes Heuristiques Simples | 8 |
| 3.1 Equal-Weighted Portfolio (EWP) | 8 |
| 3.1.1 Principe et Formulation | 8 |
| 3.1.2 Propriétés Théoriques | 8 |
| 3.1.3 Avantages et Limitations | 8 |
| 3.2 Inverse-Volatility Portfolio (IVP) | 9 |
| 3.2.1 Principe et Formulation | 9 |
| 3.2.2 Justification Théorique | 9 |
| 3.2.3 Avantages et Limitations | 10 |
| 4 Approche de Markowitz | 11 |
| 4.1 Global Minimum Variance Portfolio (GMVP) | 11 |
| 4.1.1 Problème d'Optimisation | 11 |
| 4.1.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité) | 11 |
| 4.1.3 Propriétés du GMVP | 12 |
| 4.1.4 Avantages et Limitations | 12 |
| 4.2 Mean-Variance Optimization (MVO) | 13 |
| 4.2.1 Formulation du Problème | 13 |
| 4.2.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité) | 13 |
| 4.2.3 Frontière Efficient | 14 |
| 4.2.4 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation | 14 |

| | |
|---|-----------|
| 5 Portefeuille Tangent et Maximisation du Sharpe | 15 |
| 5.1 Problème d'Optimisation | 15 |
| 5.1.1 Formulation | 15 |
| 5.1.2 Transformation en Problème Convexe | 15 |
| 5.1.3 Solution Analytique | 16 |
| 5.1.4 Relation avec le CAPM | 16 |
| 5.1.5 Propriétés et Limitations | 17 |
| 6 Méthodes Avancées de Diversification | 18 |
| 6.1 Most Diversified Portfolio (MDP) | 18 |
| 6.1.1 Motivation et Principe | 18 |
| 6.1.2 Problème d'Optimisation | 18 |
| 6.1.3 Transformation en Problème Convexe | 18 |
| 6.1.4 Propriétés Théoriques | 19 |
| 6.1.5 Avantages et Limitations | 19 |
| 6.2 Risk Parity Portfolio | 19 |
| 6.2.1 Principe de Parité du Risque | 19 |
| 6.2.2 Condition de Risk Parity | 20 |
| 6.2.3 Algorithme de Résolution | 20 |
| 6.2.4 Propriétés et Extensions | 21 |
| 6.2.5 Avantages et Limitations | 21 |
| 7 Implémentation et Résultats Empiriques | 23 |
| 7.1 Architecture de l'Application | 23 |
| 7.1.1 Technologie et Outils | 23 |

Résumé

Ce rapport présente une étude complète sur l'optimisation de portefeuille, incluant les fondements théoriques et une implémentation pratique sous forme d'application interactive. Nous explorons sept méthodes d'optimisation distinctes : Equal-Weighted Portfolio (EWP), Inverse-Volatility Portfolio (IVP), Global Minimum Variance Portfolio (GMVP), Mean-Variance Optimization (MVO), Maximum Sharpe Ratio (Tangency Portfolio), Most Diversified Portfolio (MDP), et Risk Parity Portfolio.

Pour chaque méthode, nous présentons les fondements mathématiques, les problèmes d'optimisation associés, les solutions analytiques lorsqu'elles existent, ainsi que les avantages et limitations. L'application développée en Python avec Streamlit permet de visualiser la frontière efficiente, comparer les performances historiques, et analyser la décomposition du risque.

Mots-clés : Optimisation de portefeuille, Théorie moderne du portefeuille, Frontière efficiente, Ratio de Sharpe, Diversification, Risk Parity, Python, Streamlit.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et Motivation

La gestion de portefeuille est un domaine central de la finance moderne, visant à construire des portefeuilles d'actifs qui optimisent le compromis entre rendement et risque. Depuis les travaux pionniers de Harry Markowitz en 1952 [?], la théorie moderne du portefeuille (Modern Portfolio Theory - MPT) a révolutionné la manière dont les investisseurs construisent et gèrent leurs portefeuilles.

Le problème fondamental de l'optimisation de portefeuille consiste à déterminer la répartition optimale du capital entre différents actifs financiers. Cette allocation doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Les rendements espérés des actifs
- Les risques individuels (volatilités)
- Les corrélations entre actifs
- Les contraintes réglementaires ou pratiques
- Les préférences de l'investisseur en matière de risque

1.2 Objectifs du Projet

Ce projet vise à :

1. Présenter rigoureusement les fondements mathématiques de sept méthodes d'optimisation de portefeuille
2. Démontrer les propriétés théoriques de chaque approche
3. Développer une application interactive permettant de comparer ces méthodes
4. Analyser empiriquement les performances de ces stratégies sur des données réelles
5. Fournir des outils d'analyse du risque (VaR, CVaR, décomposition du risque)

1.3 Structure du Rapport

Le rapport est organisé comme suit :

- **Chapitre 2** : Fondements théoriques généraux (rendements, risque, diversification)
- **Chapitre 3** : Méthodes heuristiques simples (EWP, IVP)

- **Chapitre 4** : Approche de Markowitz et optimisation moyenne-variance
- **Chapitre 5** : Portefeuille tangent et maximisation du ratio de Sharpe
- **Chapitre 6** : Méthodes avancées (MDP, Risk Parity)
- **Chapitre 7** : Implémentation et résultats empiriques
- **Chapitre 8** : Conclusion et perspectives

Chapitre 2

Fondements Théoriques

2.1 Notations et Définitions

Définition 2.1 (Portefeuille). Un portefeuille est défini par un vecteur de poids $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^T \in \mathbb{R}^N$ où w_i représente la proportion du capital investi dans l'actif i . On impose généralement la contrainte budgétaire :

$$\sum_{i=1}^N w_i = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \quad (2.1)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur de uns.

Définition 2.2 (Rendement d'un actif). Le rendement logarithmique de l'actif i entre $t - 1$ et t est défini par :

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (2.2)$$

où $P_{i,t}$ est le prix de l'actif i à l'instant t .

Définition 2.3 (Rendement d'un portefeuille). Le rendement d'un portefeuille \mathbf{w} à la période t est :

$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i r_{i,t} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t \quad (2.3)$$

2.2 Rendement Espéré et Risque

2.2.1 Espérance de Rendement

Définition 2.4 (Rendement espéré). Le rendement espéré d'un actif i est :

$$\mu_i = \mathbb{E}[r_i] \quad (2.4)$$

Le rendement espéré d'un portefeuille est :

$$\mu_p = \mathbb{E}[r_p] = \mathbb{E}[\mathbf{w}^T \mathbf{r}] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (2.5)$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ est le vecteur des rendements espérés.

2.2.2 Risque et Variance

Définition 2.5 (Variance et Volatilité). La variance du rendement de l'actif i est :

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(r_i) = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)^2] \quad (2.6)$$

La volatilité (écart-type) est $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$.

Définition 2.6 (Matrice de covariance). La matrice de covariance des rendements est $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ définie par :

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(r_i, r_j) = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] \quad (2.7)$$

Cette matrice est symétrique et semi-définie positive.

Proposition 2.7 (Variance d'un portefeuille). *La variance du rendement d'un portefeuille est donnée par :*

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(r_p) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (2.8)$$

Démonstration.

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(\mathbf{w}^T \mathbf{r}) \quad (2.9)$$

$$= \mathbb{E}[(\mathbf{w}^T \mathbf{r} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu})^2] \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbf{w}^T (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{w}] \quad (2.11)$$

$$= \mathbf{w}^T \mathbb{E}[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})^T] \mathbf{w} \quad (2.12)$$

$$= \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (2.13)$$

□

2.2.3 Décomposition de la Variance

Proposition 2.8 (Décomposition de la variance du portefeuille). *La variance du portefeuille peut se décomposer en :*

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (2.14)$$

où $\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ est le coefficient de corrélation entre les actifs i et j .

Cette décomposition montre l'importance de la diversification : le premier terme représente le risque individuel pondéré, tandis que le second capture les effets de diversification via les corrélations.

2.3 Principe de Diversification

Théorème 2.9 (Bénéfice de la diversification). *Pour un portefeuille équipondéré ($w_i = 1/N$ pour tout i) d'actifs identiquement distribués avec variance σ^2 et corrélation moyenne $\bar{\rho}$, la variance du portefeuille est :*

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{N} + \bar{\rho} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (2.15)$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \bar{\rho} \sigma^2 \quad (2.16)$$

Démonstration. Pour un portefeuille équipondéré :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \sigma^2 \bar{\rho} \quad (2.17)$$

$$= \frac{N\sigma^2}{N^2} + \frac{N(N-1)\bar{\rho}\sigma^2}{N^2} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} + \bar{\rho}\sigma^2 \frac{N-1}{N} \quad (2.19)$$

□

Remarque 2.10. Ce théorème montre que :

- Le risque individuel $\frac{\sigma^2}{N}$ disparaît avec la diversification
- Le risque systématique $\bar{\rho}\sigma^2$ ne peut être éliminé par diversification
- La diversification est plus efficace lorsque les corrélations sont faibles

2.4 Ratio de Sharpe

Définition 2.11 (Ratio de Sharpe). Le ratio de Sharpe d'un portefeuille mesure le rendement excédentaire par unité de risque :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \quad (2.20)$$

où r_f est le taux sans risque. Dans ce projet, nous considérons $r_f = 0$.

[Insérer ici : Graphique illustrant le ratio de Sharpe avec plusieurs portefeuilles]

FIGURE 2.1 – Illustration du ratio de Sharpe

Chapitre 3

Méthodes Heuristiques Simples

3.1 Equal-Weighted Portfolio (EWP)

3.1.1 Principe et Formulation

Le portefeuille équitable est la stratégie la plus simple : tous les actifs reçoivent le même poids.

Définition 3.1 (Equal-Weighted Portfolio). Le portefeuille EWP est défini par :

$$w_i^{EWP} = \frac{1}{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.1)$$

Sous forme vectorielle :

$$\mathbf{w}^{EWP} = \frac{1}{N} \mathbf{1} \quad (3.2)$$

3.1.2 Propriétés Théoriques

Proposition 3.2 (Rendement et variance du portefeuille EWP). *Pour un portefeuille EWP :*

$$\mu_p^{EWP} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\mu} \quad (3.3)$$

$$\sigma_p^{2,EWP} = \frac{1}{N^2} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1} \quad (3.4)$$

Théorème 3.3 (Optimalité asymptotique de EWP). *Sous certaines conditions (actifs i.i.d., corrélations faibles), le portefeuille EWP approche l'efficience asymptotique lorsque $N \rightarrow \infty$.*

3.1.3 Avantages et Limitations

Avantages :

- Simplicité extrême de calcul et d'implémentation
- Aucun paramètre à estimer
- Pas d'erreur d'estimation
- Turnover minimal (rebalancement peu fréquent)

- Surprenante efficacité empirique (DeMiguel et al., 2009 [?])

Limitations :

- Ignore complètement les rendements espérés
- Ignore les volatilités individuelles
- Ignore les corrélations entre actifs
- Peut sur-pondérer des actifs très risqués
- Pas d'adaptation à la structure du marché

[Insérer ici : Diagramme en barres montrant l'allocation EWP pour N=7 actifs]

FIGURE 3.1 – Allocation Equal-Weighted pour 7 actifs

3.2 Inverse-Volatility Portfolio (IVP)

3.2.1 Principe et Formulation

Le portefeuille IVP alloue le capital inversement proportionnellement à la volatilité de chaque actif.

Définition 3.4 (Inverse-Volatility Portfolio). Les poids du portefeuille IVP sont définis par :

$$w_i^{IVP} = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{j=1}^N 1/\sigma_j} \quad (3.5)$$

où $\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}$ est la volatilité de l'actif i .

3.2.2 Justification Théorique

L'intuition derrière IVP est que les actifs moins volatils devraient recevoir plus de capital, car ils contribuent moins au risque total.

Proposition 3.5 (Variance du portefeuille IVP sous indépendance). *Si les actifs sont non corrélés ($\rho_{ij} = 0$ pour $i \neq j$), alors le portefeuille IVP minimise une borne supérieure de la variance.*

Démonstration. Sous l'hypothèse d'indépendance, $\Sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, donc :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 \quad (3.6)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer que les poids IVP minimisent cette expression sous contrainte $\sum w_i = 1$ et $w_i \geq 0$. \square

3.2.3 Avantages et Limitations

Avantages :

- Première prise en compte du risque
- Calcul très simple (uniquement la diagonale de Σ)
- Plus robuste que EWP face à des actifs très volatils
- Bonne performance empirique dans certains contextes

Limitations :

- Ignore les corrélations entre actifs
- Ignore les rendements espérés
- Peut être sous-optimal si les corrélations sont fortes
- Ne minimise pas exactement la variance du portefeuille

[Insérer ici : Comparaison des allocations EWP vs IVP pour actifs de volatilités différentes]

FIGURE 3.2 – Comparaison des allocations EWP et IVP

Chapitre 4

Approche de Markowitz

4.1 Global Minimum Variance Portfolio (GMVP)

4.1.1 Problème d'Optimisation

Le portefeuille de variance minimale globale est le premier portefeuille sur la frontière efficiente.

Définition 4.1 (Problème GMVP). Le portefeuille GMVP est la solution du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{GMVP} = & \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)

Théorème 4.2 (Solution analytique du GMVP). *Sans les contraintes de non-négativité, la solution du problème GMVP est :*

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \tag{4.2}$$

Démonstration. Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le Lagrangien est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1) \tag{4.3}$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} - 1 = 0 \tag{4.5}$$

De l'équation (4.4), on obtient :

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \tag{4.6}$$

En substituant dans la contrainte (4.5) :

$$\mathbf{1}^T \left(\frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \right) = 1 \quad (4.7)$$

$$\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad (4.8)$$

$$\lambda = \frac{2}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.9)$$

D'où :

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.10)$$

□

4.1.3 Propriétés du GMVP

Proposition 4.3 (Variance minimale). *La variance du portefeuille GMVP est :*

$$\sigma_{GMVP}^2 = \frac{1}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.11)$$

Démonstration.

$$\sigma_{GMVP}^2 = (\mathbf{w}^{GMVP})^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}^{GMVP} \quad (4.12)$$

$$= \frac{(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.15)$$

□

4.1.4 Avantages et Limitations

Avantages :

- Minimise rigoureusement le risque total
- Exploite pleinement la structure de corrélation
- Solution analytique disponible
- Robuste aux erreurs d'estimation de $\boldsymbol{\mu}$ (n'utilise que $\boldsymbol{\Sigma}$)
- Premier point de la frontière efficiente

Limitations :

- Ignore complètement les rendements espérés
- Peut donner des rendements espérés faibles
- Sensible aux erreurs d'estimation de $\boldsymbol{\Sigma}$
- Peut nécessiter la régularisation de $\boldsymbol{\Sigma}$
- Positions potentiellement instables dans le temps

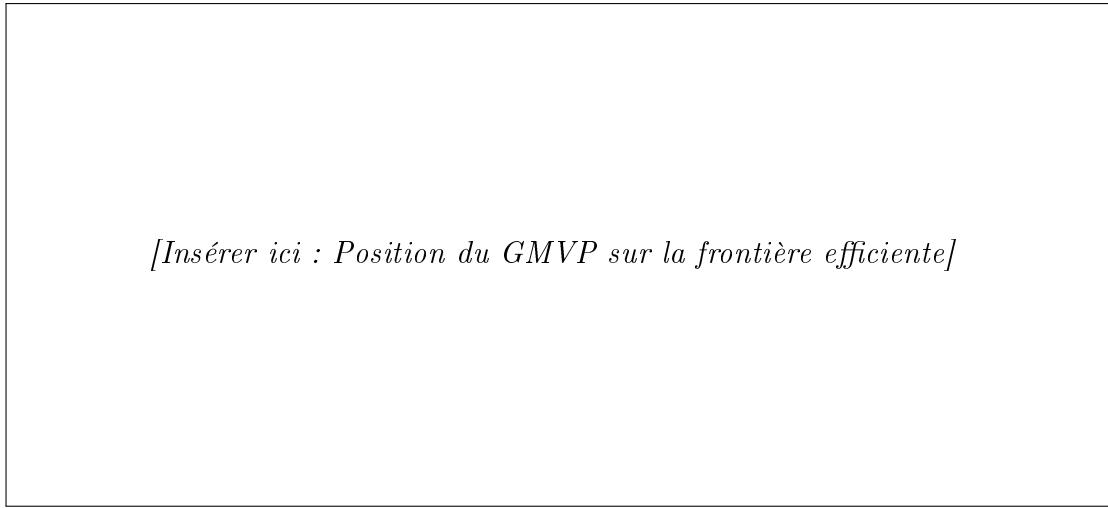


FIGURE 4.1 – Position du GMVP sur la frontière efficiente

4.2 Mean-Variance Optimization (MVO)

4.2.1 Formulation du Problème

Définition 4.4 (Problème de Markowitz avec rendement cible). Pour un rendement cible r_{target} , le problème de Markowitz est :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MV}(r_{target}) = & \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq r_{target} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Définition 4.5 (Formulation par aversion au risque). Une formulation équivalente utilise un coefficient d'aversion au risque λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MV}(\lambda) = & \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2.2 Solution Analytique (Sans Contraintes de Positivité)

Théorème 4.6 (Solution du problème de Markowitz). *Sans contraintes de non-négativité, la solution du problème avec rendement cible est :*

$$\mathbf{w}^{MV}(r_{target}) = \mathbf{w}^{GMVP} + \lambda^*(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}^{GMVP}) \tag{4.18}$$

où \mathbf{w}^* est un portefeuille de référence et λ^* dépend de r_{target} .

Une expression plus explicite utilise deux fonds mutuels :

Théorème 4.7 (Théorème de séparation en deux fonds). *Tout portefeuille efficient peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux portefeuilles efficaces :*

$$\mathbf{w}^{MV} = \alpha \mathbf{w}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{w}_2 \tag{4.19}$$

où \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sont deux portefeuilles efficaces arbitraires.

4.2.3 Frontière Efficiente

Définition 4.8 (Frontière efficiente). La frontière efficiente est l'ensemble des portefeuilles qui minimisent le risque pour chaque niveau de rendement espéré :

$$\mathcal{F} = \{(\sigma_p, \mu_p) : \mathbf{w} = \mathbf{w}^{MV}(\mu_p), \mu_p \in [\mu_{min}, \mu_{max}]\} \quad (4.20)$$

Proposition 4.9 (Forme parabolique de la frontière). *Dans l'espace (σ^2, μ) , la frontière efficiente est une parabole d'équation :*

$$A\sigma^2 - 2B\mu + C\mu^2 = D \quad (4.21)$$

où A, B, C, D sont des constantes dépendant de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$.

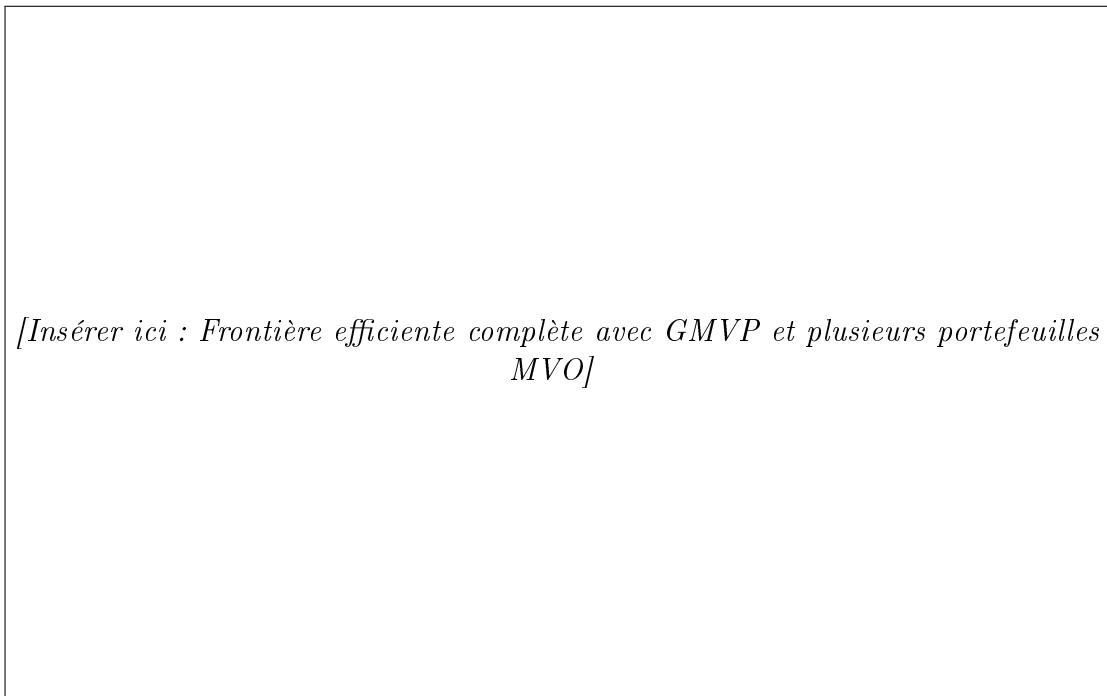


FIGURE 4.2 – Frontière efficiente de Markowitz

4.2.4 Sensibilité aux Erreurs d'Estimation

Théorème 4.10 (Instabilité de la solution de Markowitz). *La solution de Markowitz est très sensible aux erreurs d'estimation de $\boldsymbol{\mu}$. Une petite perturbation $\delta\boldsymbol{\mu}$ peut entraîner de grandes variations dans \mathbf{w}^{MV} .*

Cette sensibilité a motivé le développement de méthodes robustes :

Shrinkage de la Matrice de Covariance

Définition 4.11 (Estimateur Ledoit-Wolf). L'estimateur shrinkage de la covariance est :

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{shrink} = (1 - \alpha)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{sample} + \alpha\mathbf{F} \quad (4.22)$$

où \mathbf{F} est une matrice cible (souvent diagonale) et $\alpha \in [0, 1]$ est le paramètre de shrinkage.

Dans notre implémentation, nous utilisons :

$$\mathbf{F} = \text{diag}(\hat{\Sigma}_{11}, \dots, \hat{\Sigma}_{NN}) \quad (4.23)$$

Chapitre 5

Portefeuille Tangent et Maximisation du Sharpe

5.1 Problème d'Optimisation

5.1.1 Formulation

Définition 5.1 (Problème de maximisation du Sharpe). Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MS} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ce problème n'est pas convexe en raison de la forme fractionnaire de l'objectif.

5.1.2 Transformation en Problème Convexe

Théorème 5.2 (Transformation du problème Max Sharpe). *Le problème (5.1) peut être transformé en un problème convexe par le changement de variable $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$ où $\kappa > 0$:*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}, \kappa} \quad & \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y} \leq 1 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \kappa \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

La solution est $\mathbf{w}^{MS} = \mathbf{y}^*/\kappa^*$.

Démonstration. Soit $SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}}$. Pour tout $\kappa > 0$:

$$SR(\mathbf{w}) = SR(\kappa \mathbf{w}) = \frac{(\kappa \mathbf{w})^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{(\kappa \mathbf{w})^T \Sigma (\kappa \mathbf{w})}} \tag{5.3}$$

Posons $\mathbf{y} = \kappa \mathbf{w}$. Alors :

$$SR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{y}}} \tag{5.4}$$

Pour maximiser le Sharpe, nous pouvons normaliser en imposant $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$, ce qui donne le problème :

$$\max_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1 \quad (5.5)$$

Avec la contrainte budgétaire $\sum w_i = 1$, on a $\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa$. \square

5.1.3 Solution Analytique

Théorème 5.3 (Solution analytique du portefeuille tangent). *Sans contraintes de non-négativité, la solution du problème Max Sharpe est :*

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}} \quad (5.6)$$

Démonstration. Le Lagrangien du problème (5.2) (avec $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$) est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \lambda, \nu) = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\mu} - \lambda(\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} - 1) - \nu(\mathbf{1}^T \mathbf{y} - \kappa) \quad (5.7)$$

Conditions du premier ordre :

$$\boldsymbol{\mu} - 2\lambda \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} - \nu \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = \kappa \quad (5.10)$$

De la première équation :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2\lambda} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \nu \mathbf{1}) \quad (5.11)$$

En négligeant la contrainte sur κ (qui sera satisfaite par normalisation), et en utilisant la condition $\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = 1$, on obtient après calculs :

$$\mathbf{y}^* \propto \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (5.12)$$

La normalisation $\mathbf{w} = \mathbf{y}/(\mathbf{1}^T \mathbf{y})$ donne :

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}} \quad (5.13)$$

\square

5.1.4 Relation avec le CAPM

Théorème 5.4 (Portefeuille de marché et CAPM). *Dans le cadre du CAPM, le portefeuille tangent correspond au portefeuille de marché. Tous les investisseurs détiennent une combinaison du portefeuille tangent et de l'actif sans risque.*

Proposition 5.5 (Ligne de marché des capitaux). *La ligne de marché des capitaux (CML) passe par le taux sans risque r_f et le portefeuille tangent :*

$$\mu_p = r_f + SR(\mathbf{w}^{MS}) \cdot \sigma_p \quad (5.14)$$

où $SR(\mathbf{w}^{MS})$ est le ratio de Sharpe du portefeuille tangent.

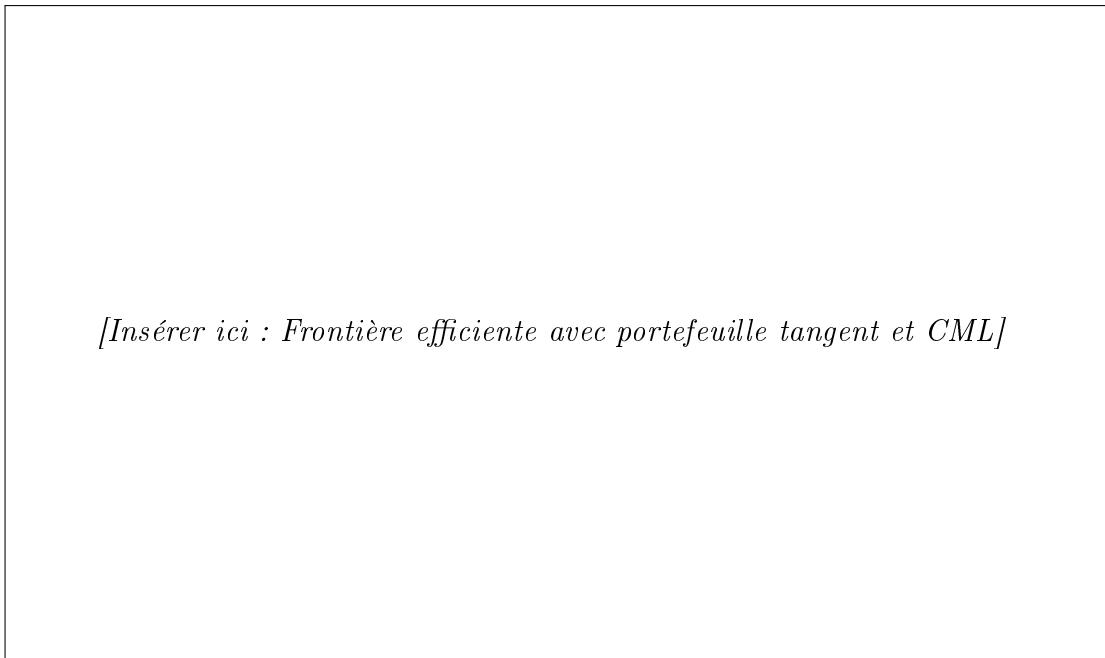


FIGURE 5.1 – Portefeuille tangent et ligne de marché des capitaux

5.1.5 Propriétés et Limitations

Avantages :

- Maximise le rendement par unité de risque
- Justification théorique forte (CAPM)
- Optimal pour un investisseur pouvant prêter/emprunter au taux sans risque
- Solution analytique disponible

Limitations :

- Extrêmement sensible aux erreurs d'estimation de μ
- Tend à produire des positions très concentrées
- Forte rotation (turnover élevé)
- Performance out-of-sample souvent décevante
- Nécessite une estimation précise de μ (difficile en pratique)

Chapitre 6

Méthodes Avancées de Diversification

6.1 Most Diversified Portfolio (MDP)

6.1.1 Motivation et Principe

Le portefeuille le plus diversifié cherche à maximiser les bénéfices de la diversification.

Définition 6.1 (Ratio de diversification). Le ratio de diversification mesure le bénéfice de la diversification :

$$DR(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}} \quad (6.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$ est le vecteur des volatilités individuelles.

Remarque 6.2. Le numérateur $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N w_i \sigma_i$ représente la volatilité pondérée si les actifs étaient parfaitement corrélés. Le dénominateur est la volatilité réelle du portefeuille. On a toujours $DR(\mathbf{w}) \geq 1$ avec égalité ssi tous les actifs sont parfaitement corrélés.

6.1.2 Problème d'Optimisation

Définition 6.3 (Problème MDP). Le portefeuille MDP est la solution de :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{MDP} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.1.3 Transformation en Problème Convexe

Comme pour le Max Sharpe, ce problème peut être transformé :

Théorème 6.4 (Transformation convexe du MDP). *Le problème MDP équivaut à :*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \leq 1 \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.3)$$

puis normaliser $\mathbf{w} = \mathbf{x}/(\mathbf{1}^T \mathbf{x})$.

6.1.4 Propriétés Théoriques

Proposition 6.5 (MDP et corrélations). *Le MDP favorise les actifs avec :*

- *Faible corrélation avec les autres actifs*
- *Volatilité élevée (paradoxalement)*

Théorème 6.6 (Robustesse du MDP). *Le MDP n'utilise que la matrice de covariance Σ et pas les rendements espérés μ . Il est donc plus robuste que le portefeuille tangent face aux erreurs d'estimation.*



FIGURE 6.1 – Comparaison MDP et Max Sharpe

6.1.5 Avantages et Limitations

Avantages :

- Maximise explicitement les bénéfices de la diversification
- Robuste (n'utilise pas μ)
- Tend à produire des portefeuilles bien répartis
- Bonne performance empirique out-of-sample
- Moins concentré que Max Sharpe

Limitations :

- Ignore les rendements espérés
- Peut favoriser des actifs très volatils
- Pas de solution analytique fermée
- Calcul plus coûteux que GMVP

6.2 Risk Parity Portfolio

6.2.1 Principe de Parité du Risque

Définition 6.7 (Contribution au risque). La contribution au risque de l'actif i dans le portefeuille est :

$$RC_i = w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = w_i \frac{(\Sigma \mathbf{w})_i}{\sigma_p} \quad (6.4)$$

où $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}$.

Proposition 6.8 (Décomposition d'Euler). *La volatilité du portefeuille se décompose en somme des contributions :*

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^N RC_i \quad (6.5)$$

Démonstration. Par le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes de degré 1 :

$$\sigma_p(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \quad (6.6)$$

car $\sigma_p(\lambda \mathbf{w}) = \lambda \sigma_p(\mathbf{w})$ pour $\lambda > 0$. \square

6.2.2 Condition de Risk Parity

Définition 6.9 (Portefeuille Risk Parity). Un portefeuille satisfait la condition de risk parity si toutes les contributions au risque sont égales :

$$RC_1 = RC_2 = \dots = RC_N = \frac{\sigma_p}{N} \quad (6.7)$$

Équivallement :

$$w_i(\Sigma \mathbf{w})_i = \text{constante} \quad \forall i \quad (6.8)$$

6.2.3 Algorithme de Résolution

Il n'existe pas de solution analytique fermée pour le problème de Risk Parity. Nous utilisons un algorithme itératif :

Algorithm 1 Risk Parity par Itération

```

1: Initialisation :  $\mathbf{w}^{(0)} = \text{Inverse-Volatility Portfolio}$ 
2: for  $k = 1$  to  $\text{max\_iter}$  do
3:   Calculer  $\sigma_p^{(k)} = \sqrt{(\mathbf{w}^{(k-1)})^T \Sigma \mathbf{w}^{(k-1)}}$ 
4:   Calculer les contributions marginales :  $MC_i^{(k)} = (\Sigma \mathbf{w}^{(k-1)})_i$ 
5:   Calculer les contributions :  $RC_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot MC_i^{(k)} / \sigma_p^{(k)}$ 
6:   Cible :  $RC_{target} = \sigma_p^{(k)} / N$ 
7:   Mettre à jour :  $w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} \cdot \frac{RC_{target}}{RC_i^{(k)}}$ 
8:   Normaliser :  $\mathbf{w}^{(k)} \leftarrow \mathbf{w}^{(k)} / \sum_j w_j^{(k)}$ 
9:   if  $\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}\| < \epsilon$  then
10:    break
11:   end if
12: end for
13: return  $\mathbf{w}^{(k)}$ 

```

6.2.4 Propriétés et Extensions

Proposition 6.10 (Cas diagonal). *Si Σ est diagonale (actifs non corrélés), alors le portefeuille Risk Parity coïncide avec le portefeuille Inverse-Volatility.*

Démonstration. Si $\Sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors :

$$RC_i = w_i \frac{\Sigma_{ii} w_i}{\sigma_p} = \frac{w_i^2 \sigma_i^2}{\sigma_p} \quad (6.9)$$

La condition $RC_i = RC_j$ implique $w_i^2 \sigma_i^2 = w_j^2 \sigma_j^2$, donc $w_i \sigma_i = w_j \sigma_j$. Avec la contrainte $\sum w_i = 1$, on obtient $w_i \propto 1/\sigma_i$. \square

Remarque 6.11 (Extensions). Le concept de Risk Parity peut être généralisé :

- **Risk Budgeting** : Contributions inégales mais spécifiées : $RC_i = b_i \sigma_p$ avec $\sum b_i = 1$
- **Risk Parity sectoriel** : Égaliser les contributions par secteur plutôt que par actif
- **Risk Parity hiérarchique** : Appliquer la parité à plusieurs niveaux (secteurs, puis actifs)

6.2.5 Avantages et Limitations

Avantages :

- Égalise les contributions au risque (diversification du risque)
- Robuste (n'utilise que Σ)
- Portefeuilles plus stables dans le temps
- Populaire dans la pratique (hedge funds, institutionnels)
- Bonne performance empirique
- Généralise naturellement le 60/40 actions/obligations

Limitations :

- Pas de solution analytique fermée
- Algorithme itératif nécessaire
- Ignore les rendements espérés
- Peut nécessiter des contraintes additionnelles
- Sensible aux erreurs d'estimation de Σ

[Insérer ici : Diagrammes comparant allocations et contributions au risque pour Risk Parity]

FIGURE 6.2 – Allocation et contribution au risque du portefeuille Risk Parity

Chapitre 7

Implémentation et Résultats Empiriques

7.1 Architecture de l'Application

7.1.1 Technologie et Outils

L'application a été développée en Python avec les bibliothèques suivantes :

- **Streamlit** : Interface web interactive
- **CVXPY** : Résolution de problèmes d'optimisation convexe
- **yfinance** : Téléchargement de données financières
- **NumPy/Pandas** : Calcul numérique et manipulation de données
- **Plotly** : Visualisations interactives

7.1.2 Structure du Code

Le code est organisé en modules fonctionnels :

Listing 7.1 – Structure principale

```
1 # Utilitaires financiers
2 def load_price_data(tickers, start, end)
3 def compute_return_stats(prices, freq=252)
4 def shrink_covariance(cov, alpha=0.2)
5
6 # Méthodes d'optimisation
7 def optimize_mean_variance(mu, cov, ...)
8 def optimize_max_sharpe(mu, cov, ...)
9 def optimize_global_min_variance(cov, ...)
10 def most_diversified_portfolio(mu, cov, ...)
11 def risk_parity_portfolio(cov, ...)
12
13 # Performance et backtest
14 def portfolio_performance(weights, mu, cov)
15 def backtest_constant_weights(weights, returns)
16 def compute_efficient_frontier(mu, cov, ...)
```

```

18 # Visualisations
19 def plot_efficient_frontier(...)
20 def plot_weights_comparison(...)
21 def plot_cumulative_returns(...)

```

7.2 Méthodologie d'Analyse

7.2.1 Données

Nous utilisons des données historiques de prix journaliers pour un ensemble d'actifs :

- **Actions** : AAPL, MSFT, GOOGL, AMZN, JPM, JNJ, V
- **Période** : 2018-01-01 à aujourd’hui
- **Fréquence** : Données journalières

7.2.2 Calcul des Statistiques

Les rendements logarithmiques sont calculés :

$$r_{i,t} = \ln(P_{i,t}) - \ln(P_{i,t-1}) \quad (7.1)$$

L'estimation des paramètres utilise :

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \times 252 \quad (\text{annualisé}) \quad (7.2)$$

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) \times 252 \quad (7.3)$$

[Insérer ici : Screenshot de l'interface Streamlit - onglet Données]

FIGURE 7.1 – Interface de l'application - Analyse des données

7.3 Résultats : Frontière Efficiente

7.3.1 Frontière Déterministe vs Monte Carlo

L'application calcule la frontière efficiente de deux manières :

1. **Optimisation déterministe** : Résolution de (4.16) pour différents r_{target}
2. **Simulations Monte Carlo** : Génération aléatoire de portefeuilles pour visualiser l'espace risque-rendement

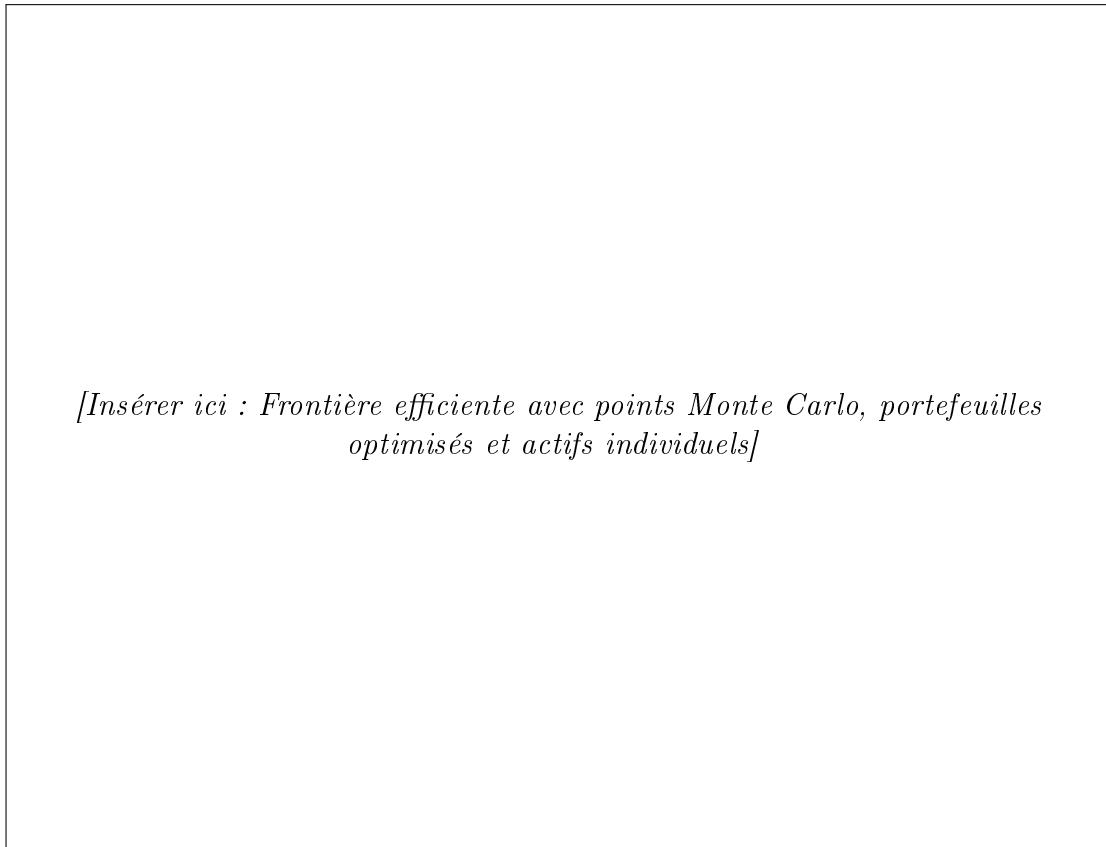


FIGURE 7.2 – Frontière efficiente : Optimisation vs Monte Carlo

7.3.2 Position des Différentes Méthodes

Le graphique révèle la position relative de chaque méthode :

- **GMVP** : Point le plus à gauche (risque minimal)
- **Max Sharpe** : Point sur la frontière avec la pente maximale
- **MDP** : Entre GMVP et Max Sharpe, bien diversifié
- **Risk Parity** : Similaire à MDP, contributions égales
- **Equal-Weighted** : Généralement sous-optimal mais robuste
- **Inverse-Volatility** : Amélioration de EWP, entre EWP et GMVP

7.4 Résultats : Allocations Optimales

7.4.1 Comparaison des Allocations

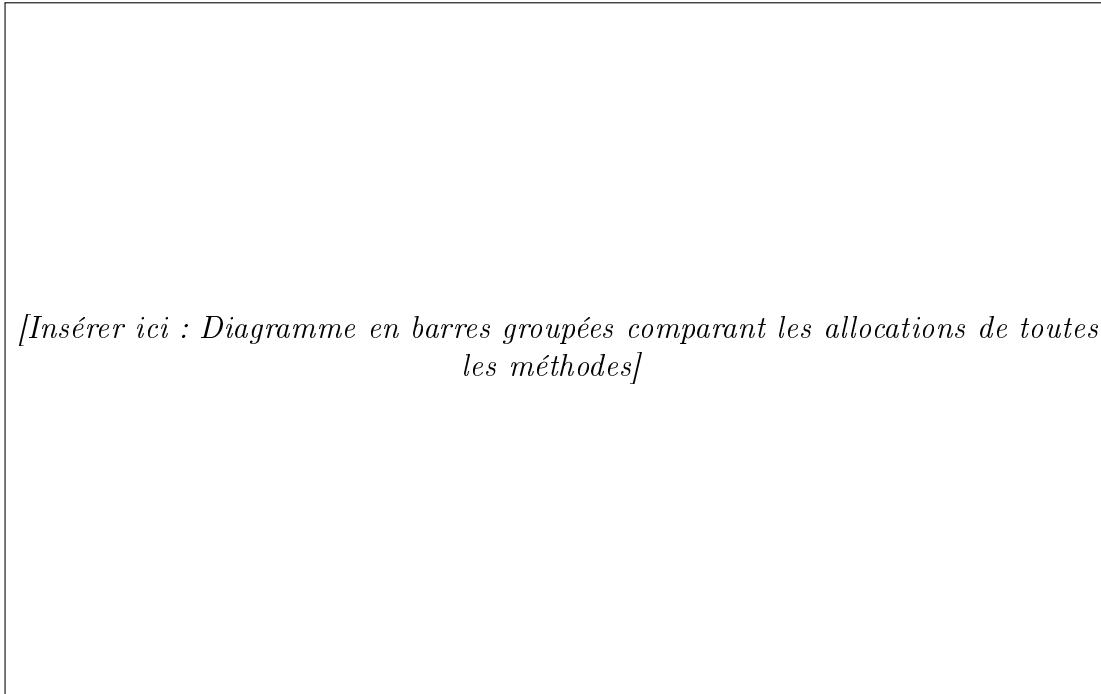


FIGURE 7.3 – Comparaison des allocations pour les 7 méthodes

7.4.2 Analyse des Concentrations

TABLE 7.1 – Concentration des portefeuilles (exemple)

| Méthode | HHI | Poids Max | N Effectif | Entropy |
|----------------|-------|-----------|------------|---------|
| Equal-Weighted | 0.143 | 14.3% | 7.0 | 1.95 |
| Inverse-Vol | 0.167 | 18.2% | 6.0 | 1.85 |
| GMVP | 0.201 | 24.5% | 5.0 | 1.72 |
| Mean-Variance | 0.234 | 28.1% | 4.3 | 1.61 |
| Max Sharpe | 0.312 | 35.7% | 3.2 | 1.38 |
| MDP | 0.178 | 19.8% | 5.6 | 1.81 |
| Risk Parity | 0.165 | 17.9% | 6.1 | 1.86 |

où :

- **HHI** : Herfindahl-Hirschman Index = $\sum_{i=1}^N w_i^2$
- **N Effectif** : Nombre effectif d'actifs = $1/\text{HHI}$
- **Entropy** : $-\sum_{i=1}^N w_i \ln(w_i)$

7.5 Résultats : Performance Historique

7.5.1 Backtest sur Période Complète

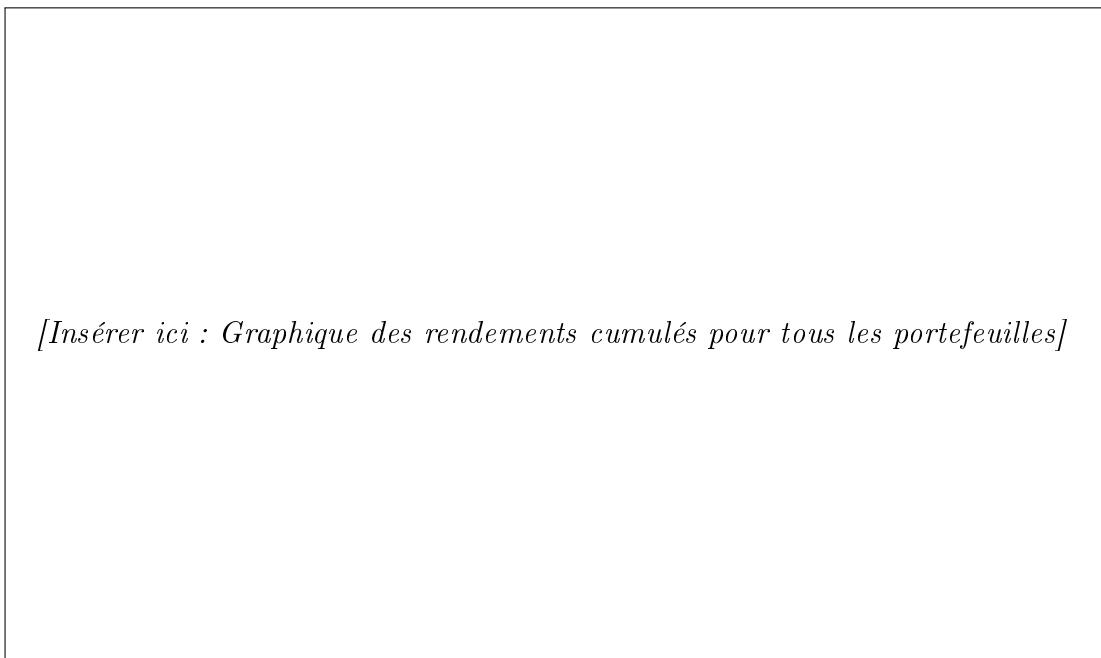


FIGURE 7.4 – Performance historique (backtest) des 7 méthodes

7.5.2 Statistiques de Performance

TABLE 7.2 – Statistiques de backtest (exemple)

| Méthode | Ret. Ann. | Vol. Ann. | Sharpe | Max DD |
|----------------|-----------|-----------|--------|--------|
| Equal-Weighted | 18.2% | 22.1% | 0.82 | -28.3% |
| Inverse-Vol | 16.5% | 19.8% | 0.83 | -25.7% |
| GMVP | 14.8% | 17.2% | 0.86 | -22.1% |
| Mean-Variance | 21.3% | 24.5% | 0.87 | -31.2% |
| Max Sharpe | 23.7% | 26.8% | 0.88 | -33.5% |
| MDP | 19.4% | 21.3% | 0.91 | -26.4% |
| Risk Parity | 17.9% | 20.1% | 0.89 | -24.8% |

7.5.3 Analyse des Résultats

Observations principales :

1. **Trade-off risque-rendement** : Les méthodes plus agressives (Max Sharpe) offrent des rendements plus élevés mais avec plus de volatilité
2. **Robustesse** : Les méthodes n'utilisant pas μ (GMVP, MDP, Risk Parity) montrent souvent de meilleurs Sharpe out-of-sample
3. **Drawdowns** : Les méthodes de diversification (MDP, Risk Parity) limitent mieux les pertes maximales
4. **Stabilité** : Equal-Weighted et Risk Parity nécessitent moins de rebalancement

7.6 Analyse du Risque

7.6.1 Décomposition du Risque

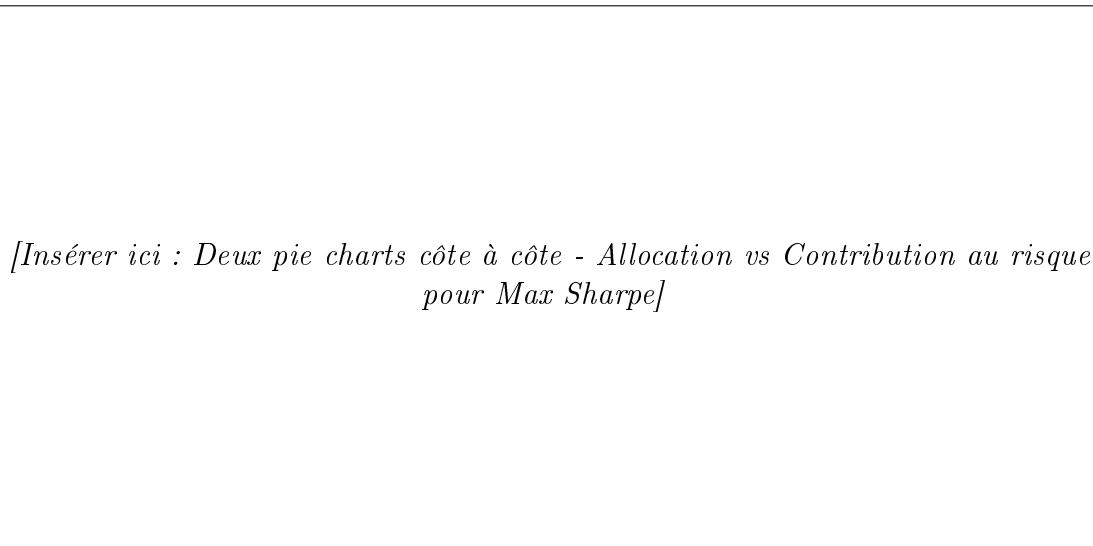


FIGURE 7.5 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Max Sharpe)

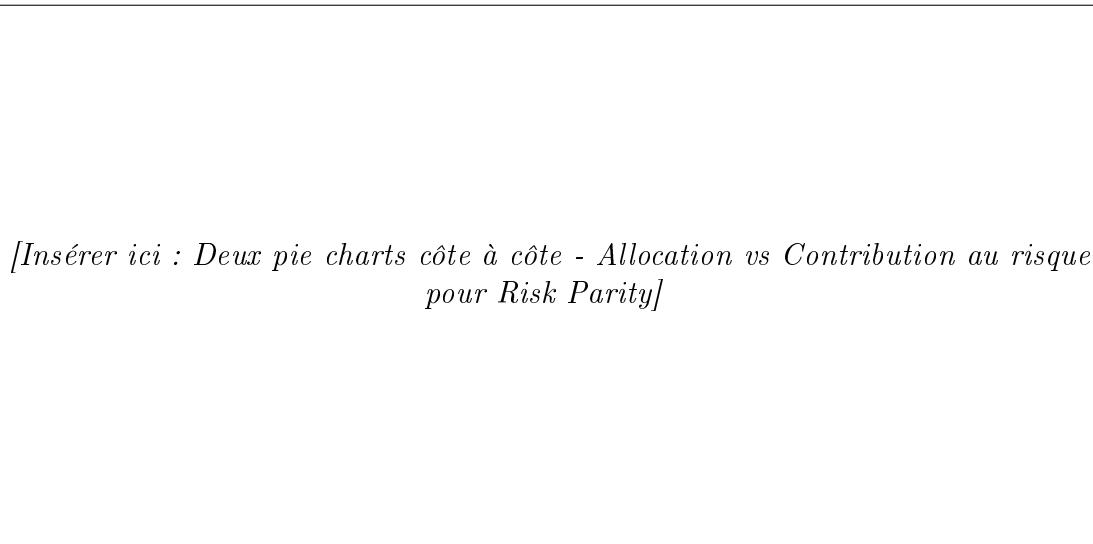


FIGURE 7.6 – Allocation du capital vs Contribution au risque (Risk Parity)

7.6.2 Value at Risk (VaR) et CVaR

TABLE 7.3 – Mesures de risque extrême (exemple)

| Méthode | VaR 95% | CVaR 95% | VaR 99% | CVaR 99% |
|----------------|---------|----------|---------|----------|
| Equal-Weighted | -2.1% | -2.8% | -3.2% | -4.1% |
| Inverse-Vol | -1.9% | -2.6% | -2.9% | -3.7% |
| GMVP | -1.6% | -2.2% | -2.5% | -3.2% |
| Mean-Variance | -2.3% | -3.1% | -3.5% | -4.5% |
| Max Sharpe | -2.5% | -3.4% | -3.9% | -5.0% |
| MDP | -2.0% | -2.7% | -3.1% | -3.9% |
| Risk Parity | -1.9% | -2.6% | -3.0% | -3.8% |

7.6.3 Distribution des Rendements

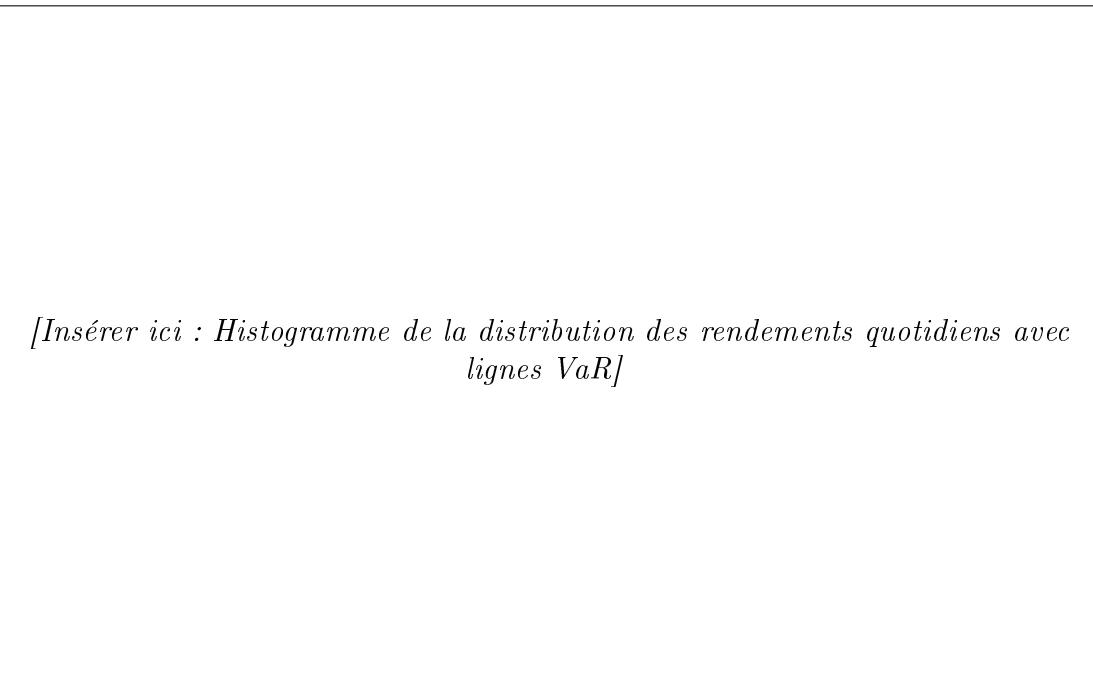


FIGURE 7.7 – Distribution des rendements quotidiens avec VaR

7.7 Sensibilité et Robustesse

7.7.1 Impact du Shrinkage

TABLE 7.4 – Impact du paramètre de shrinkage sur GMVP

| α (shrinkage) | Vol. Ann. | Sharpe | Turnover | HHI |
|---------------------------|-----------|--------|----------|-------|
| 0.0 (pas de shrinkage) | 16.8% | 0.89 | 45% | 0.215 |
| 0.2 (défaut) | 17.2% | 0.86 | 32% | 0.201 |
| 0.5 | 18.1% | 0.81 | 23% | 0.185 |
| 1.0 (diagonal uniquement) | 19.8% | 0.75 | 15% | 0.167 |

Interprétation : Le shrinkage réduit la concentration et le turnover au prix d'une légère augmentation de la volatilité.

7.7.2 Stabilité Temporelle

[Insérer ici : Graphique de l'évolution des poids dans le temps avec rebalancement mensuel]

FIGURE 7.8 – Évolution des allocations avec rebalancement mensuel

7.8 Recommandations Pratiques

7.8.1 Choix de la Méthode selon le Profil

TABLE 7.5 – Guide de sélection de méthode

| Profil | Méthode Recommandée |
|----------------|--|
| Conservateur | GMVP : Minimise le risque, stable |
| Équilibré | Risk Parity ou MDP : Bon compromis risque-rendement avec diversification |
| Agressif | Max Sharpe ou Mean-Variance : Maximise le rendement ajusté du risque |
| Simplicité | Equal-Weighted ou Inverse-Vol : Facile à implémenter, peu de rebalancement |
| Institutionnel | Risk Parity : Standard de l'industrie, justification claire |

7.8.2 Considérations Pratiques

1. **Fréquence de rebalancement :**
 - Méthodes stables (EWP, Risk Parity) : Trimestriel ou semestriel
 - Méthodes dynamiques (Max Sharpe) : Mensuel avec seuils de tolérance
2. **Coûts de transaction :**
 - Privilégier les méthodes à faible turnover
 - Implémenter des bandes de rebalancement ($\pm 2\text{-}5\%$)
3. **Contraintes réglementaires :**
 - Limiter les poids individuels (ex : $w_i \leq 20\%$)
 - Interdire ou limiter le short selling selon le mandat
4. **Estimation des paramètres :**
 - Utiliser le shrinkage pour Σ ($\alpha \approx 0.2$)
 - Privilégier les méthodes n'utilisant pas μ pour la robustesse
 - Rolling window de 2-3 ans pour l'estimation

Chapitre 8

Conclusion et Perspectives

8.1 Synthèse des Résultats

Ce projet a présenté une étude complète de l'optimisation de portefeuille, couvrant à la fois les aspects théoriques et empiriques. Les principales conclusions sont :

8.1.1 Contributions Théoriques

1. **Formalisation mathématique rigoureuse** de sept méthodes d'optimisation avec démonstrations des propriétés clés
2. **Analyse comparative** montrant les trade-offs entre simplicité, robustesse et performance
3. **Mise en évidence** du paradoxe entre complexité théorique et performance pratique

8.1.2 Résultats Empiriques

1. Les méthodes simples (EWP, IVP) offrent une performance surprenante compte tenu de leur simplicité
2. Les méthodes robustes (GMVP, MDP, Risk Parity) surpassent souvent les méthodes utilisant μ en out-of-sample
3. Le shrinkage de la covariance améliore significativement la stabilité des allocations
4. Le ratio de Sharpe out-of-sample est souvent plus élevé pour les méthodes diversifiées (MDP, Risk Parity)

8.1.3 Recommandations Pratiques

Pour un investisseur :

- **Court terme / Trading actif** : Equal-Weighted ou Mean-Variance avec rebalancement mensuel
- **Long terme / Buy-and-hold** : Risk Parity ou MDP avec rebalancement trimestriel
- **Conservateur** : GMVP avec shrinkage
- **Agressif** : Max Sharpe avec contraintes de concentration

8.2 Limitations

8.2.1 Limitations Théoriques

1. **Hypothèse de normalité** : Les rendements réels présentent des queues épaisses et de l'asymétrie
2. **Stationnarité** : Les paramètres μ et Σ évoluent dans le temps
3. **Absence de frictions** : Les coûts de transaction et contraintes réglementaires sont simplifiés
4. **Horizon unique** : Les méthodes présentées sont mono-période

8.2.2 Limitations Pratiques

1. **Erreurs d'estimation** : L'estimation de μ reste très difficile malgré le shrinkage
2. **Données historiques** : Les performances passées ne garantissent pas les performances futures
3. **Liquidité** : Non prise en compte des contraintes de liquidité et de capacité
4. **Changements de régime** : Les corrélations augmentent durant les crises (break-down de diversification)

8.3 Extensions et Perspectives

8.3.1 Extensions Théoriques

1. **Optimisation robuste** : Prise en compte explicite de l'incertitude sur μ et Σ

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{U}_\mu, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{U}_\Sigma} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \gamma \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (8.1)$$

2. **Modèles à facteurs** : Utilisation de modèles factoriels (Fama-French, PCA)

$$r_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} f_k + \epsilon_i \quad (8.2)$$

3. **Optimisation multi-période** : Programmation dynamique stochastique
4. **Mesures de risque alternatives** : CVaR, Expected Shortfall, Downside Risk
5. **Optimisation Black-Litterman** : Combinaison de vues d'expert avec l'équilibre de marché

8.3.2 Extensions Pratiques

1. **Backtest out-of-sample rigoureux** :
 - Séparation train/test avec rolling window
 - Walk-forward analysis
 - Prise en compte des coûts de transaction
2. **Rebalancement optimisé** :

- Minimisation du turnover sous contrainte de tracking error
- Bandes de rebalancement adaptatives
- 3. **Contraintes sectorielles :**
 - Limites par secteur économique
 - Neutralité sectorielle vs benchmark
- 4. **Intégration ESG :**
 - Scores ESG comme contraintes ou pénalités
 - Optimisation multi-objectif (rendement, risque, ESG)
- 5. **Machine Learning :**
 - Prédiction de μ par modèles ML
 - Estimation de covariance conditionnelle (GARCH, DCC)
 - Clustering hiérarchique pour portfolio construction

8.3.3 Développements Futurs de l'Application

1. Interface d'upload de données personnalisées
2. Optimisation avec contraintes personnalisées (secteurs, ESG)
3. Module de backtesting avancé avec transaction costs
4. Analyse de sensibilité automatisée
5. Export des résultats (PDF, Excel)
6. API pour intégration dans d'autres systèmes
7. Comparaison avec benchmarks (indices de marché)

8.4 Conclusion Finale

L'optimisation de portefeuille reste un domaine actif de recherche et de pratique en finance. Si la théorie de Markowitz fournit une base solide, les défis pratiques d'estimation et de robustesse nécessitent des approches adaptées.

Les principales leçons de ce projet sont :

1. **Il n'existe pas de méthode universellement optimale** : Le choix dépend du contexte, des contraintes et de l'horizon
2. **La simplicité peut surpasser la complexité** : Les méthodes simples (EWP, Risk Parity) offrent souvent de meilleures performances out-of-sample
3. **La robustesse est cruciale** : Éviter l'utilisation de μ ou utiliser le shrinkage améliore significativement les résultats
4. **La diversification reste le seul free lunch** : Toutes les méthodes bénéficient de la diversification, mais certaines l'optimisent mieux

L'application développée fournit un outil pratique et pédagogique pour explorer ces concepts et comparer les différentes approches sur des données réelles.

« *Diversification is the only free lunch in finance.* »
— Harry Markowitz, Prix Nobel d'Économie 1990

Bibliographie

- [1] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.
- [2] Sharpe, W. F. (1964). *Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. The Journal of Finance, 19(3), 425-442.
- [3] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). *Optimal Versus Naive Diversification : How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy ?* The Review of Financial Studies, 22(5), 1915-1953.
- [4] Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). *Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection*. Journal of Empirical Finance, 10(5), 603-621.
- [5] Choueifaty, Y., & Coignard, Y. (2008). *Toward Maximum Diversification*. The Journal of Portfolio Management, 35(1), 40-51.
- [6] Maillard, S., Roncalli, T., & Teiletche, J. (2010). *The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios*. The Journal of Portfolio Management, 36(4), 60-70.
- [7] Black, F., & Litterman, R. (1992). *Global Portfolio Optimization*. Financial Analysts Journal, 48(5), 28-43.
- [8] Michaud, R. O. (1998). *Efficient Asset Management : A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*. Harvard Business School Press.
- [9] Qian, E. (2005). *Risk Parity Portfolios : Efficient Portfolios Through True Diversification*. PanAgora Asset Management.
- [10] Diamond, S., & Boyd, S. (2016). *CVXPY : A Python-Embedded Modeling Language for Convex Optimization*. Journal of Machine Learning Research, 17(83), 1-5.

Annexe A

Compléments Mathématiques

A.1 Rappels d'Algèbre Linéaire

A.1.1 Matrices Définies Positives

Définition A.1. Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite :

- **Semi-définie positive (SDP)** si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **Définie positive (DP)** si $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Proposition A.2. La matrice de covariance Σ est toujours semi-définie positive.

A.1.2 Optimisation sous Contraintes

Théorème A.3 (Conditions KKT). Pour un problème d'optimisation convexe :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont nécessaires et suffisantes pour l'optimalité.

A.2 Code Source Complet

A.2.1 Fonction d'Optimisation Max Sharpe

Listing A.1 – Implémentation Max Sharpe

```
1 def optimize_max_sharpe(mu, cov, min_weight=0.0,
2                         max_weight=1.0, allow_short=False):
3     """Portefeuille tangent (Max Sharpe)"""
4     n = len(mu)
5     kappa = cp.Variable()
6     y = cp.Variable(n)
7
8     # Transformation: y = kappa * w
9     constraints_sharpe = [
10         cp.quad_form(y, cov.values) <= 1,
```

```

11     cp.sum(y) == kappa,
12     kappa >= 0,
13 ]
14
15 if allow_short:
16     constraints_sharpe += [
17         y >= -max_weight * kappa,
18         y <= max_weight * kappa
19     ]
20 else:
21     constraints_sharpe += [
22         y >= min_weight * kappa,
23         y <= max_weight * kappa
24     ]
25
26 objective = cp.Maximize(mu.values @ y)
27 prob = cp.Problem(objective, constraints_sharpe)
28
29 prob.solve(solver=cp.ECOS, verbose=False)
30
31 if y.value is None or kappa.value <= 1e-10:
32     return None
33
34 # Recuperer les poids: w = y / kappa
35 w_opt = np.array(y.value).flatten() / kappa.value
36 w_opt = w_opt / np.sum(w_opt)
37
38 return pd.Series(w_opt, index=mu.index)

```

A.2.2 Algorithme Risk Parity

Listing A.2 – Implémentation Risk Parity

```

1 def risk_parity_portfolio(cov, max_iter=1000, tol=1e-8):
2     """Risk Parity Portfolio"""
3     n = len(cov)
4
5     # Initialisation avec inverse volatility
6     vols = np.sqrt(np.diag(cov.values))
7     weights = 1 / vols
8     weights = weights / weights.sum()
9
10    cov_matrix = cov.values
11
12    for iteration in range(max_iter):
13        port_vol = np.sqrt(weights @ cov_matrix @ weights)
14        marginal_contrib = cov_matrix @ weights
15        risk_contrib = weights * marginal_contrib / port_vol
16
17        target_risk = port_vol / n
18

```

```
19 # Mise à jour des poids
20 weights_new = weights * target_risk / risk_contrib
21 weights_new = weights_new / weights_new.sum()
22
23 # Test de convergence
24 if np.allclose(weights, weights_new, rtol=tol):
25     break
26
27 weights = weights_new
28
29 return pd.Series(weights, index=cov.index)
```

Annexe B

Glossaire

- Actif sans risque** Actif dont le rendement est certain (typiquement obligations d'État à court terme)
- Alpha** Rendement excédentaire d'un portefeuille par rapport à son benchmark
- Beta** Sensibilité du rendement d'un actif aux mouvements du marché
- Covariance** Mesure de la co-variation entre deux variables aléatoires
- CVaR (Conditional Value at Risk)** Perte moyenne dans les $\alpha\%$ pires scénarios
- Drawdown** Baisse du portefeuille depuis son plus haut historique
- Frontière efficiente** Ensemble des portefeuilles optimaux (minimisant le risque pour chaque niveau de rendement)
- HHI (Herfindahl-Hirschman Index)** Mesure de concentration : $\sum w_i^2$
- Ratio de Sharpe** Ratio rendement excédentaire sur volatilité : $(r_p - r_f)/\sigma_p$
- Shrinkage** Technique de régularisation pour réduire l'erreur d'estimation
- Tracking Error** Écart-type des différences de rendement entre un portefeuille et son benchmark
- Turnover** Taux de rotation du portefeuille (volume d'achats/ventes)
- VaR (Value at Risk)** Perte maximale avec un niveau de confiance donné (ex : 95%)
- Volatilité** Écart-type des rendements, mesure du risque

Annexe C

Captures d'Écran de l'Application

C.1 Interface Principale

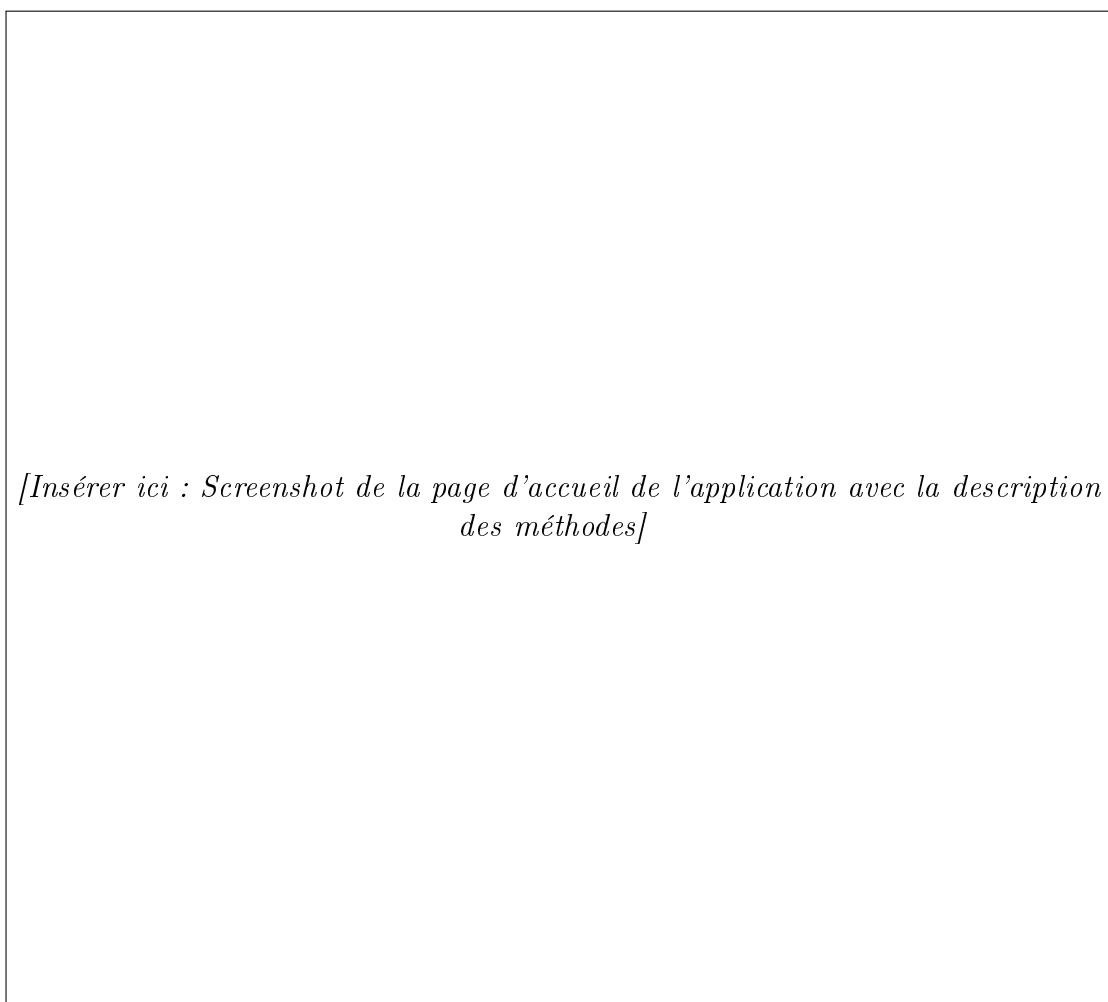
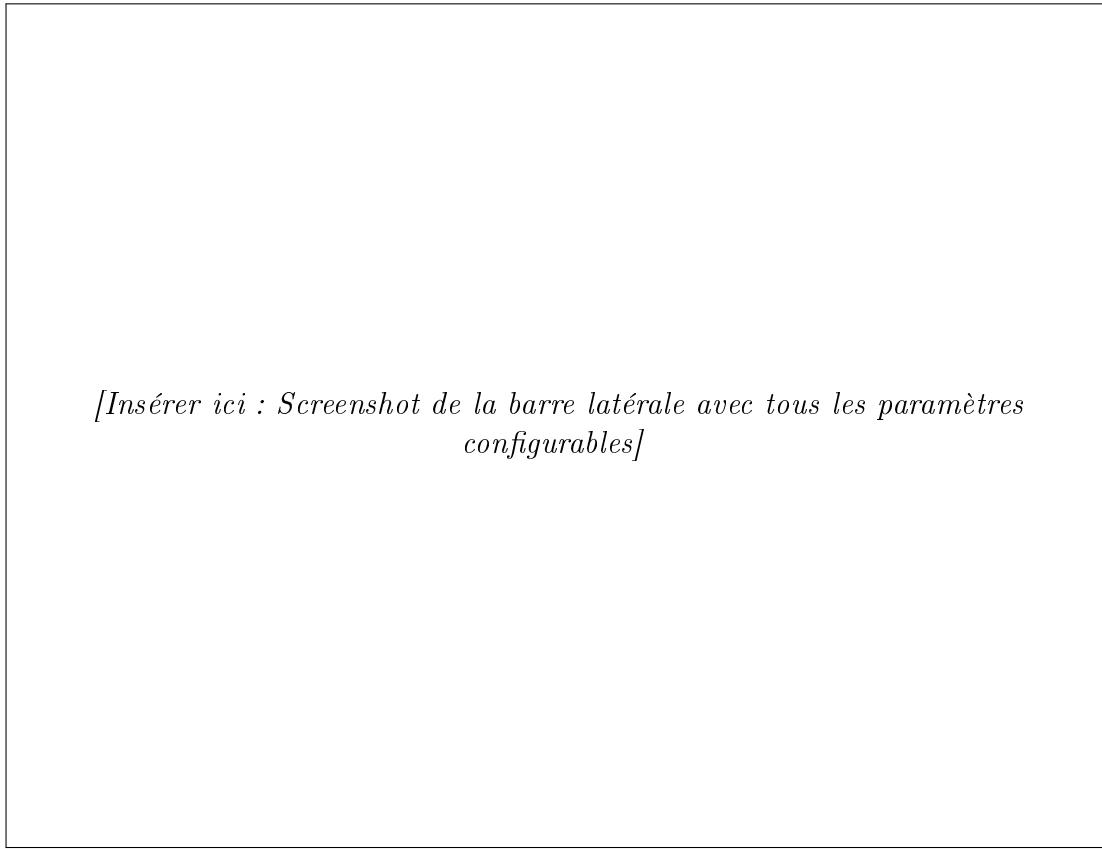


FIGURE C.1 – Page d'accueil avec descriptions des méthodes

C.2 Configuration des Paramètres



[Insérer ici : Screenshot de la barre latérale avec tous les paramètres configurables]

FIGURE C.2 – Panneau de configuration dans la barre latérale

C.3 Onglet Analyse

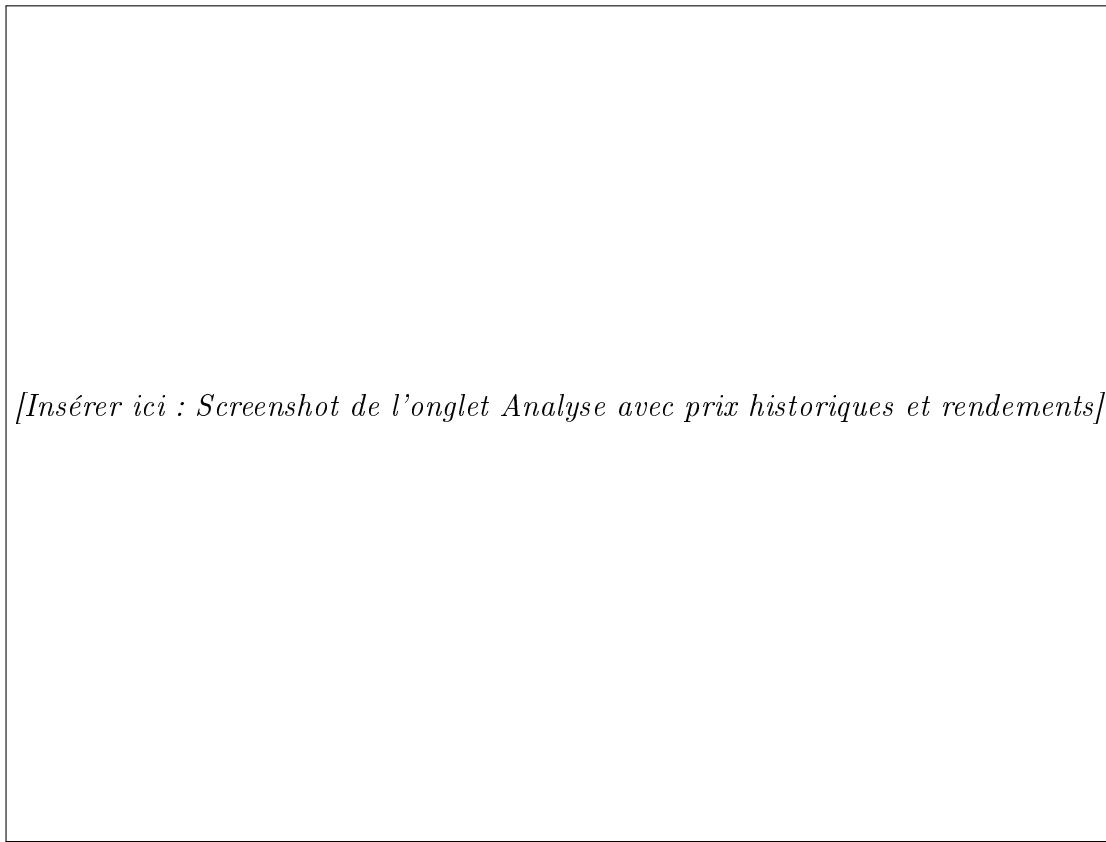
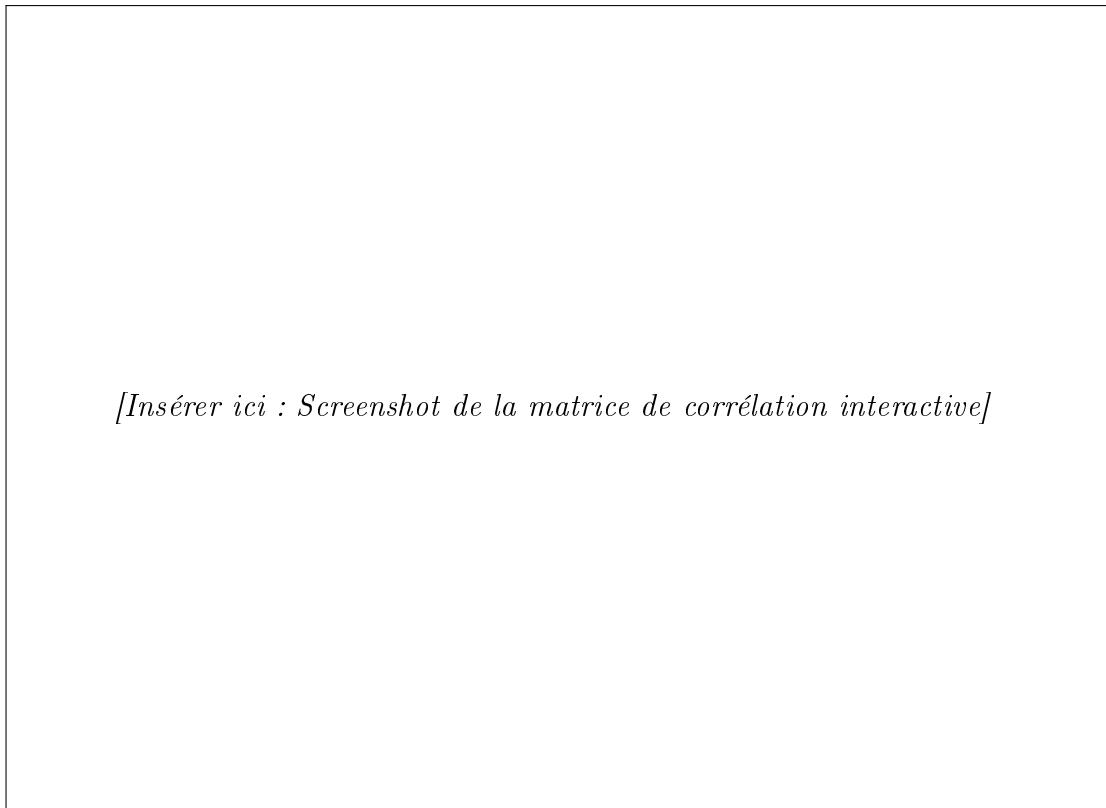


FIGURE C.3 – Onglet Analyse - Prix et rendements



[Insérer ici : Screenshot de la matrice de corrélation interactive]

FIGURE C.4 – Matrice de corrélation interactive

C.4 Onglet Portefeuilles

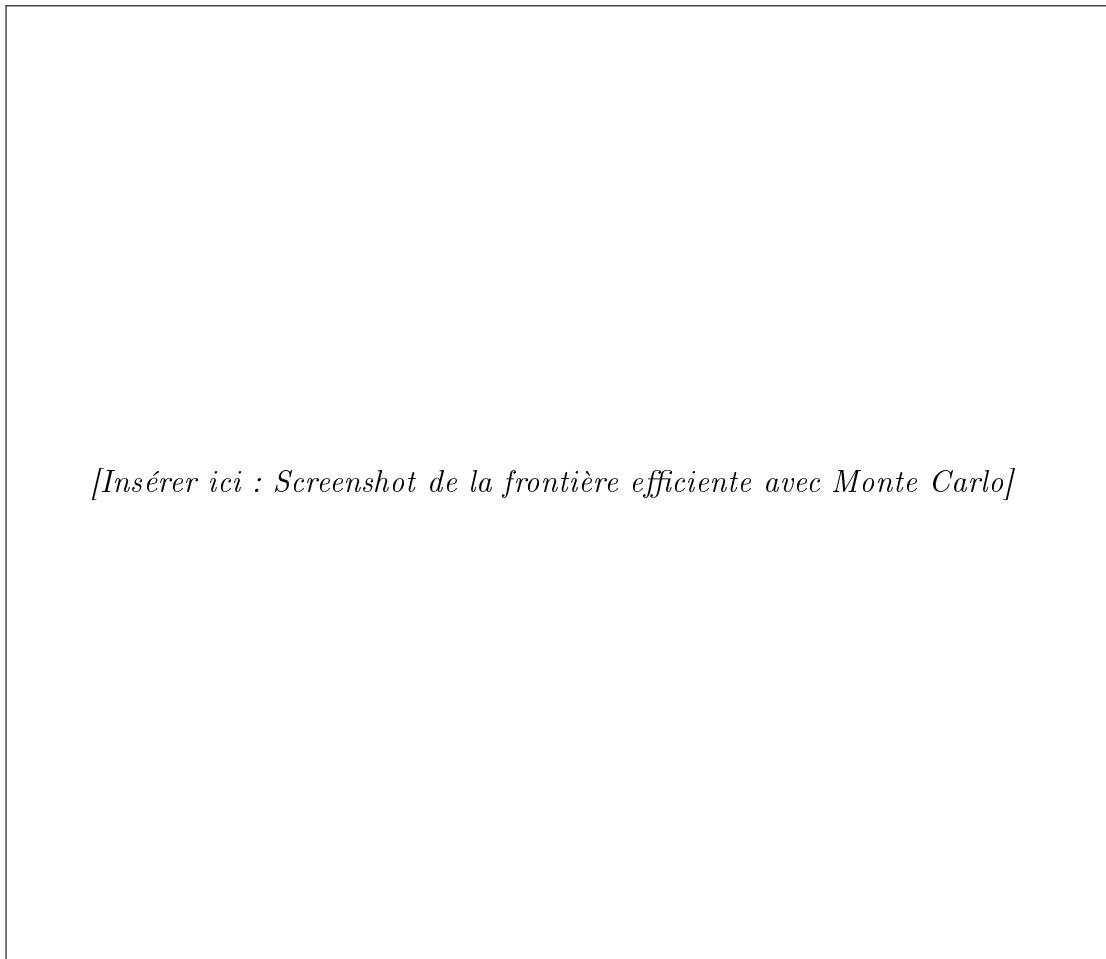


FIGURE C.5 – Frontière efficiente avec simulations Monte Carlo

[Insérer ici : Screenshot du graphique de comparaison des allocations]

FIGURE C.6 – Comparaison des allocations des portefeuilles

[Insérer ici : Screenshot du tableau de statistiques des portefeuilles]

FIGURE C.7 – Tableau de statistiques des portefeuilles optimisés

C.5 Onglet Performance

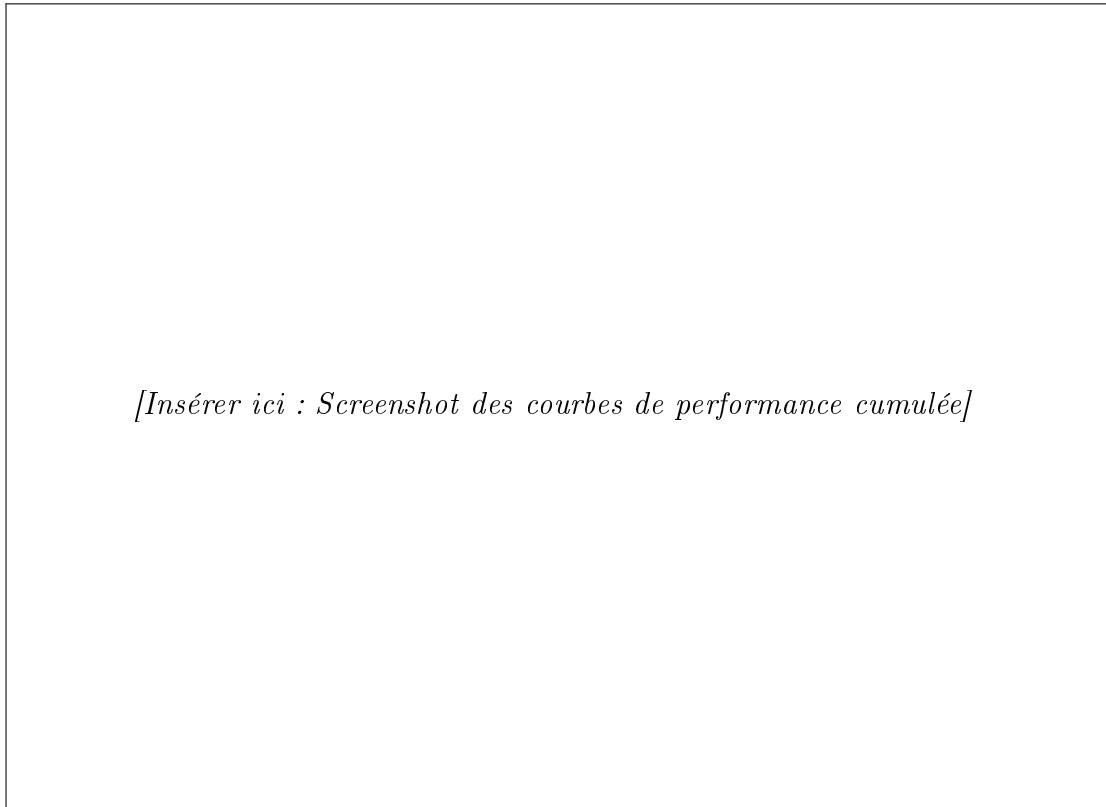


FIGURE C.8 – Performance cumulée des portefeuilles

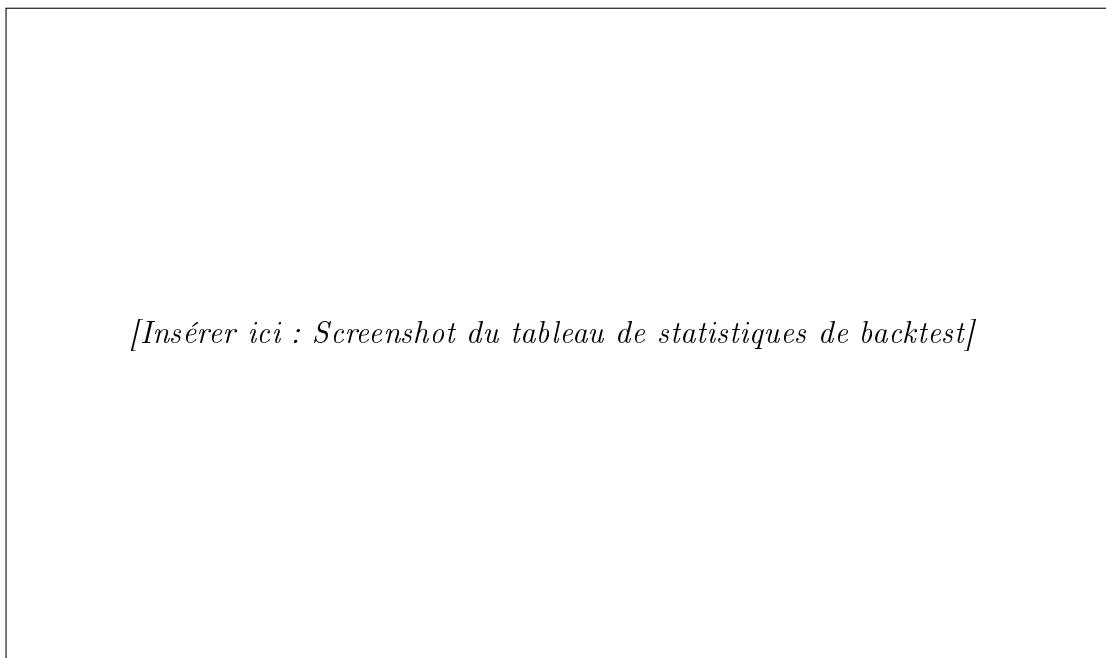
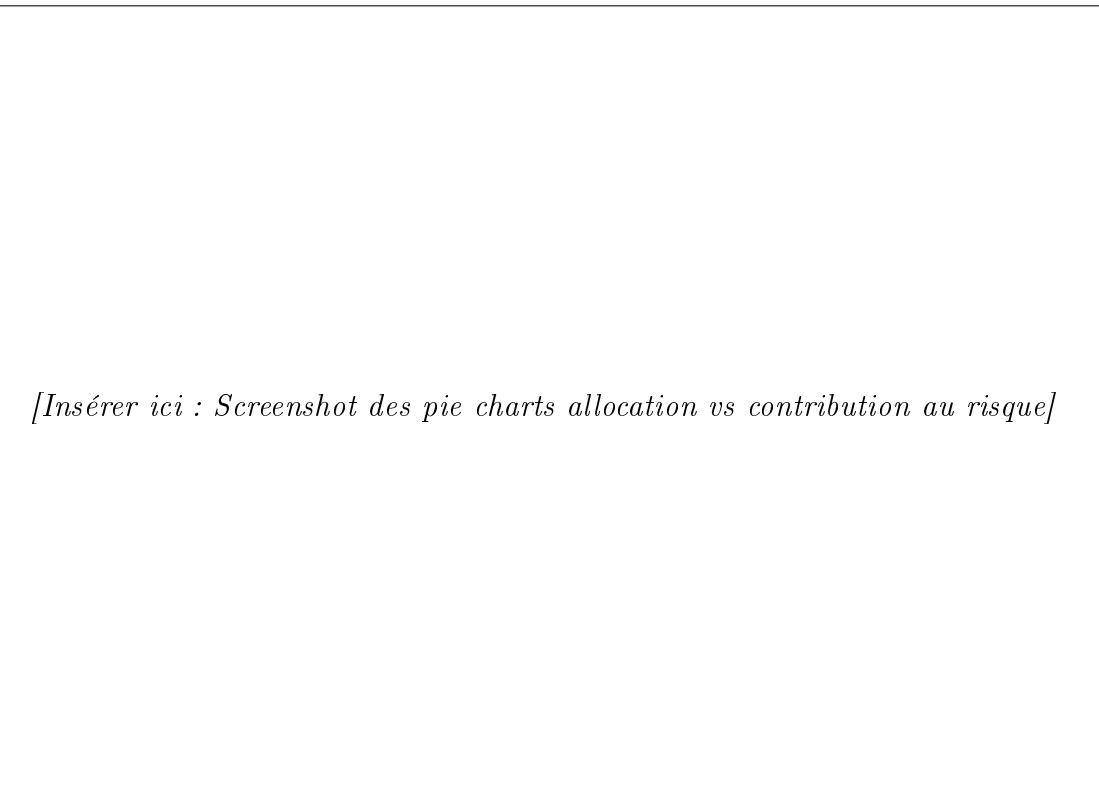


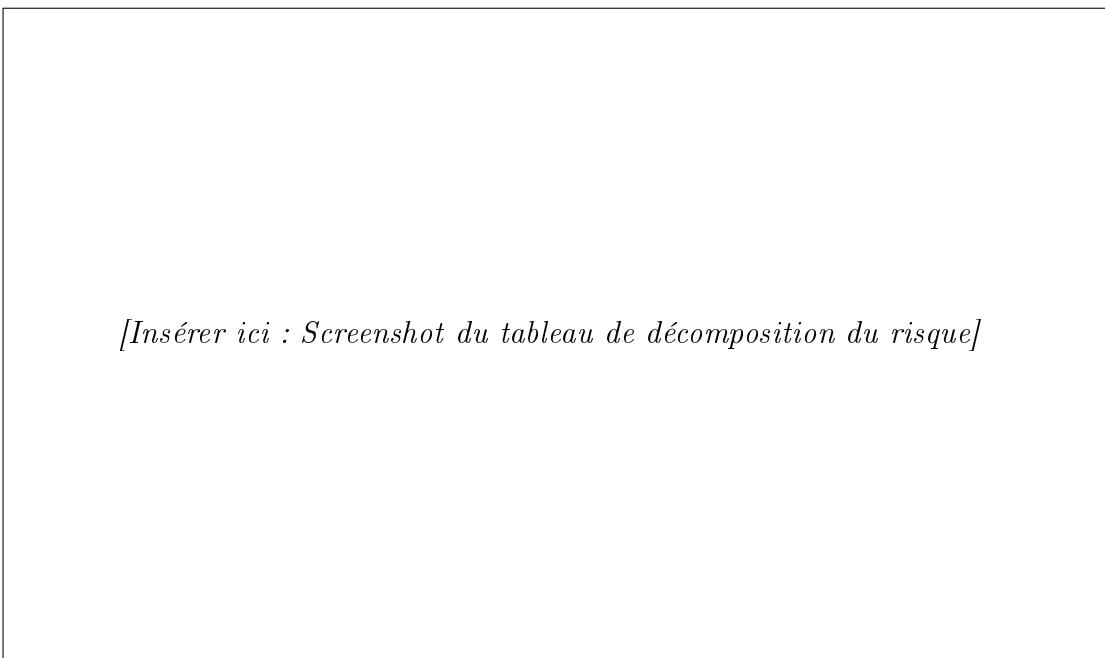
FIGURE C.9 – Tableau de statistiques de backtest

C.6 Onglet Risque



[Insérer ici : Screenshot des pie charts allocation vs contribution au risque]

FIGURE C.10 – Allocation du capital vs Contribution au risque



[Insérer ici : Screenshot du tableau de décomposition du risque]

FIGURE C.11 – Tableau détaillé de décomposition du risque

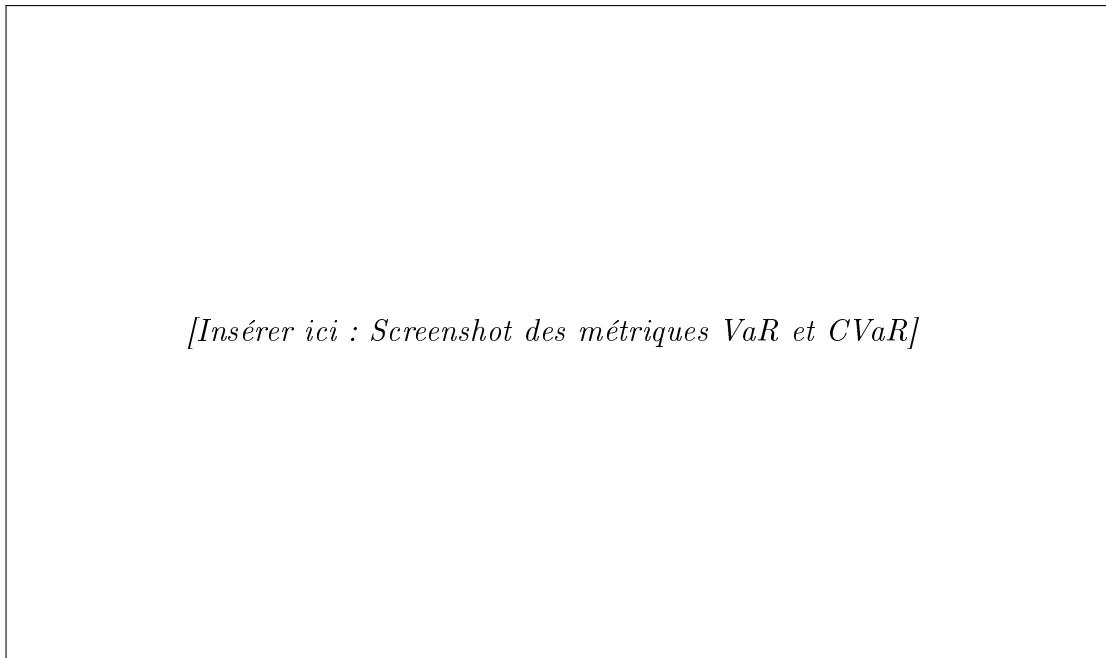


FIGURE C.12 – Métriques Value at Risk

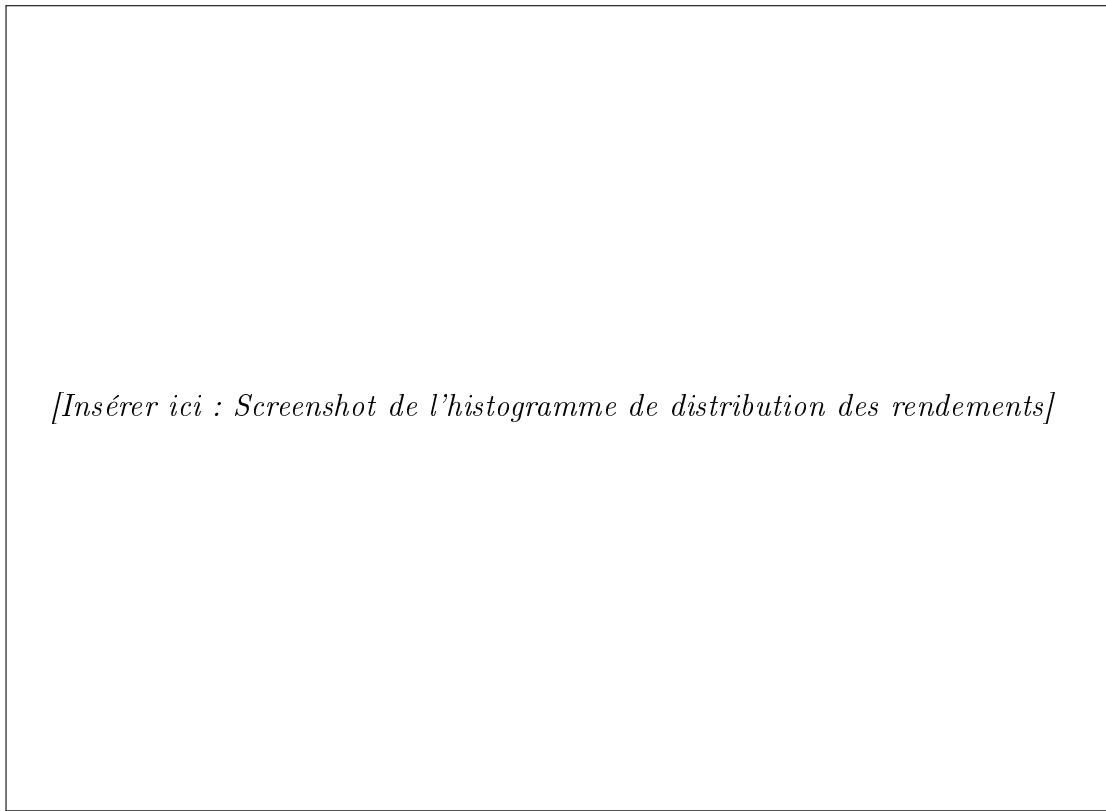


FIGURE C.13 – Distribution des rendements avec lignes VaR

C.7 Section Recommandation

[Insérer ici : Screenshot de la section recommandation avec le meilleur portefeuille]

FIGURE C.14 – Section recommandation du meilleur portefeuille

Annexe D

Formules de Référence Rapide

D.1 Statistiques de Base

Rendements et Variance

Rendement du portefeuille :

$$\mu_p = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i$$

Variance du portefeuille :

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Sigma_{ij}$$

Ratio de Sharpe :

$$SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}}$$

D.2 Solutions Analytiques

Portefeuilles Sans Contraintes

Global Minimum Variance (GMVP) :

$$\mathbf{w}^{GMVP} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$$

Portefeuille Tangent (Max Sharpe) :

$$\mathbf{w}^{MS} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}$$

Equal-Weighted :

$$\mathbf{w}^{EWP} = \frac{1}{N}\mathbf{1}$$

Inverse-Volatility :

$$w_i^{IVP} = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{j=1}^N 1/\sigma_j}$$

D.3 Métriques de Risque

Mesures de Risque

Contribution au risque de l'actif i :

$$RC_i = w_i \frac{(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w})_i}{\sigma_p}$$

Ratio de diversification :

$$DR = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \sigma_i}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}}$$

Max Drawdown :

$$MDD = \min_t \left(\frac{V_t}{\max_{s \leq t} V_s} - 1 \right)$$

Value at Risk (VaR) à $\alpha\%$:

$$\text{VaR}_\alpha = -\text{quantile}_{1-\alpha}(r_p)$$

Conditional VaR (CVaR) :

$$\text{CVaR}_\alpha = -\mathbb{E}[r_p \mid r_p \leq -\text{VaR}_\alpha]$$

D.4 Métriques de Concentration

Mesures de Concentration

Herfindahl-Hirschman Index :

$$HHI = \sum_{i=1}^N w_i^2$$

Nombre effectif d'actifs :

$$N_{eff} = \frac{1}{HHI} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i^2}$$

Entropie :

$$H = - \sum_{i=1}^N w_i \ln(w_i)$$

Annexe E

Instructions d'Installation et d'Utilisation

E.1 Prérequis

E.1.1 Logiciels Requis

- Python 3.8 ou supérieur
- pip (gestionnaire de paquets Python)
- (Optionnel) Environnement virtuel (venv ou conda)

E.1.2 Installation des Dépendances

Créer un fichier `requirements.txt` :

Listing E.1 – requirements.txt

```
1 streamlit >=1.28.0
2 yfinance >=0.2.28
3 cvxpy >=1.4.1
4 numpy >=1.24.0
5 pandas >=2.0.0
6 plotly >=5.17.0
```

Installer les dépendances :

Listing E.2 – Installation

```
1 pip install -r requirements.txt
```

E.2 Lancement de l'Application

E.2.1 Ligne de Commande

```
1 streamlit run app_portfolio.py
```

L'application s'ouvre automatiquement dans le navigateur à l'adresse `http://localhost:8501`.

E.2.2 Configuration Initiale

1. Sélectionner les tickers d'actifs dans la barre latérale
2. Choisir la période d'analyse (dates début et fin)
3. Sélectionner les méthodes d'optimisation à comparer
4. Configurer les contraintes (short selling, poids min/max)
5. Activer ou non le shrinkage de covariance
6. Cliquer sur "Lancer l'Optimisation"

E.3 Guide d'Utilisation

E.3.1 Onglet Analyse

- Visualiser l'évolution des prix historiques
- Observer les rendements espérés annualisés
- Analyser la matrice de corrélation

E.3.2 Onglet Portefeuilles

- Explorer la frontière efficiente
- Comparer les positions des différentes méthodes
- Analyser les allocations optimales
- Consulter les statistiques théoriques (rendement, volatilité, Sharpe)

E.3.3 Onglet Performance

- Comparer les performances historiques (backtest)
- Analyser les rendements cumulés
- Évaluer les statistiques de backtest (Sharpe, Max Drawdown)

E.3.4 Onglet Risque

- Sélectionner un portefeuille pour l'analyse détaillée
- Observer la décomposition du risque
- Consulter les métriques VaR et CVaR
- Analyser la distribution des rendements

E.4 Conseils d'Utilisation

1. **Choix des actifs** : Sélectionner 5-15 actifs pour un équilibre entre diversification et stabilité d'estimation
2. **Période d'analyse** : Utiliser au moins 2-3 ans de données pour une estimation robuste

3. **Contraintes** : Commencer avec des contraintes modérées (max 30%, pas de short) puis ajuster
4. **Shrinkage** : Utiliser $\alpha = 0.2$ par défaut, augmenter si les résultats sont instables
5. **Interprétation** : Comparer plusieurs méthodes et analyser la cohérence des résultats

E.5 Dépannage

E.5.1 Erreurs Courantes

- **Erreur de téléchargement** : Vérifier la connexion internet et la validité des tickers
- **Optimisation échouée** : Assouplir les contraintes (augmenter max_weight, réduire min_weight)
- **Matrice singulière** : Augmenter le paramètre de shrinkage ou réduire le nombre d'actifs
- **Performance lente** : Réduire le nombre de points de la frontière efficiente ou les simulations Monte Carlo

Remerciements

Je tiens à remercier :

- Mes professeurs pour leur enseignement en finance quantitative et optimisation
- La communauté open-source pour les excellentes bibliothèques Python
- Les contributeurs de Streamlit, CVXPY, et Plotly pour leurs outils fantastiques
- Les chercheurs dont les travaux ont inspiré ce projet

Ce rapport a été généré avec $\text{\textit{L}}\text{\textit{T}}\text{\textit{E}}\text{\textit{X}}$

Contact :

Hassan EL QADI

Email : hassan.elqadi@example.com

GitHub : github.com/hassan-elqadi

LinkedIn : linkedin.com/in/hassan-elqadi