ALGÈBRE
ANALYSE

FONC 5

POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

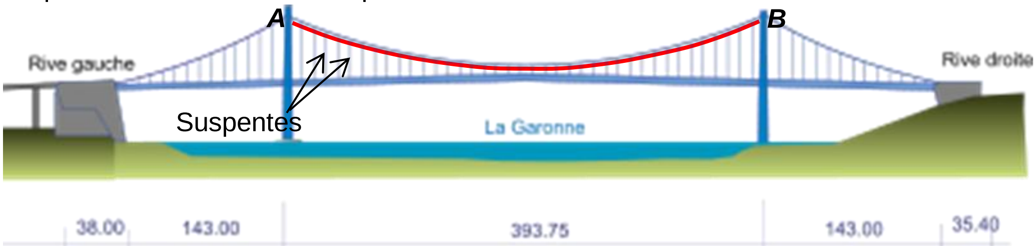
NOM :

1. Fonction polynôme de degré 2

ACTIVITE 1 « Pont d'Aquitaine »

AN Analyser/Raisonner	1 2 3 4 5	RE Réaliser	1 2 3 4 5	VA Valider	1 2 3 4 5	CM Communiquer	1 2 3 4 5

Le pont d'Aquitaine enjambe l'estuaire de la Gironde. On souhaite connaître la longueur de sa suspente centrale. La forme géométrique du câble ***AB*** de ce pont suspendu est assimilée à une parabole.



☐***1.*** **Modélisation par une fonction du second degré**

AN ***a.*** Ouvrir le fichier « Pont Aquitaine.ggb » à l'aide du logiciel GeoGebra.
On cherche la fonction polynôme de degré 2 qui modélise la hauteur d'un point du câble ***AB*** (en m) par rapport au centre du tablier. Cette fonction *f* est définie sur [0 ; 400] par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où ***a***, ***b*** et ***c*** sont trois nombres réels.
Régler le curseur ***c*** pour que ***c*** = 50, puis faire varier les coefficients ***a*** et ***b*** à l'aide des curseurs pour déterminer l'expression de la fonction *f* modélisant le câble suspendu du pont d'Aquitaine.

a = ... ***b*** = ... ***c*** = ...

CM ***b.*** Noter alors l'expression de la fonction trouvée : *f*(*x*) = ...

Appel n°1 : Faire vérifier la modélisation

☐***2.*** **Étude de la fonction *f***

RE ***a.*** Utiliser le logiciel GeoGebra ou la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs suivants :

x	0	25	50	150	200	250	300	350	400
f(*x*)									

RE ***b.*** Compléter le tableau de variations de la fonction *f* :

x	0 400
f(*x*)	


Construction du pont d'Aquitaine (1961 – 1967)

RE ***c.*** Placer un point ***S*** au minimum de la fonction.

RE ***d.*** Pour quelle valeur de *x* la fonction *f* est-elle minimum ? x_S= ....

RE ***e.*** Calculer le nombre $\frac{-b}{2\times a}$. ....

VA ***f.*** Comparer x_S et $\frac{-b}{2\times a}$. ....

RE ***g.*** La fonction *f* présente une symétrie axiale. Tracer sur le graphique l'axe de symétrie.

AN ☐***3.*** Pour des raisons de sécurité, on doit installer une sonde de température sur le câble à 45 m de hauteur. Déterminer graphiquement les abscisses possibles des positions de la sonde (on placera les points T_1 et T_2 sur le graphique). Rédiger la réponse. ....

....

....

Appel n°2 : Faire vérifier le placement des points T_1 et T_2 puis enregistrer et transmettre au professeur le fichier de travail

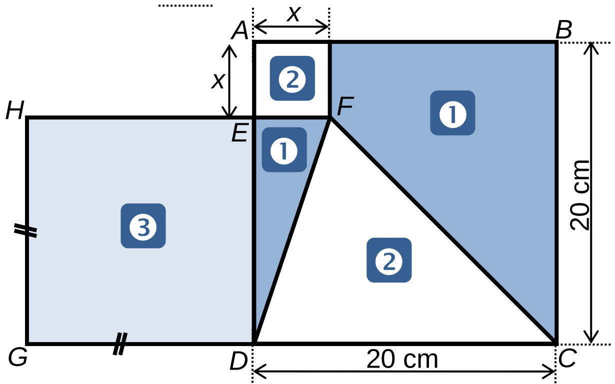
Synthèse et petit cours *(1.)* ...

2. Racines d'un polynôme de degré 2

ACTIVITE 2 « Racines d'un polynôme »

	AN Analyser/Raisonner	1 2 3 4 5	RE Réaliser	1 2 3 4 5	VA Valider	1 2 3 4 5	CM Communiquer	1 2 3 4 5

Pour paver une salle de bain avec le motif ci-contre.
L'aire A_1 de la surface ❶ est $A_1(x) = -x^2 + 10x + 200$.
L'aire A_2 de la surface ❷ est $A_2(x) = x^2 - 10x + 200$.
L'aire A_3 de la surface ❸ est $A_3(x) = x^2 - 40x + 400$.
On souhaite déterminer les dimensions du motif de façon à ce que les surfaces A_2 et A_3 soient égales.



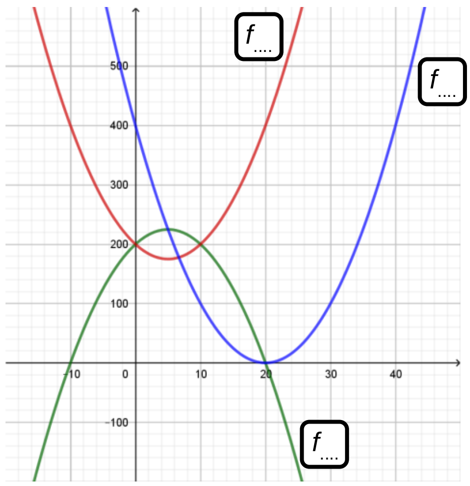
☐*1.* **Représentation des polynômes**

Les fonctions polynômes de degré 2, f_1, f_2 et f_3 définies sur [– 20 ; 50] sont respectivement un modèle mathématique pour les aires A_1, A_2 et A_3.

RE ***a.*** Utiliser la calculatrice pour tracer les représentations graphiques de ces trois fonctions. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = –20 ; Xmax = 50 ; Ymin = –200 ; Ymax = 600.

CM ***b.*** Associer sur le graphique ci-contre le nom (f_1, f_2 ou f_3) de chacune des représentations graphiques.

AN ***c.*** On souhaite résoudre les équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$. Déterminer **graphiquement** les solutions de ces trois équations :



Équation	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
Nombre de solutions	❍ 0 ❍ 1 ❍ 2	❍ 0 ❍ 1 ❍ 2	❍ 0 ❍ 1 ❍ 2
Solutions	....	....	....

Les solutions des équations f(x) **= 0** sont appelées les « **racines du polynôme *f(x)*** »

☐*2.* **Étude des surfaces**

L'aire des surfaces ❶ et ❷ doivent être égales.

VA ***a.*** Montrer que l'équation $A_3(x) = A_1(x)$ revient à résoudre l'équation $\mathbf{2x^2 - 50x + 200 = 0}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

RE ***b.*** Après avoir effacer les représentations précédentes de la calculatrice, tracer la représentation graphique du polynôme P défini par $P(x) = 2x^2 - 50x + 200$.

VA ***c.*** Combien de racines possède le polynôme P ? ❍ 0 ❍ 1 ❍ 2

RE ***d.*** Déterminer graphiquement la ou les racines du polynôme P en résolvant l'équation $P(x) = 0$.
- Sur Casio, on utilisera la fonctionnalité « ROOT » du sous menu « G-Solv »
- Sur Texas instrument, on utilisera la fonctionnalité « RACINES » du sous menu « calculs »

....

VA ***e.*** Placer un point sur le graphique de la page précédente qui permet de résoudre l'équation $A_3(x) = A_1(x)$.

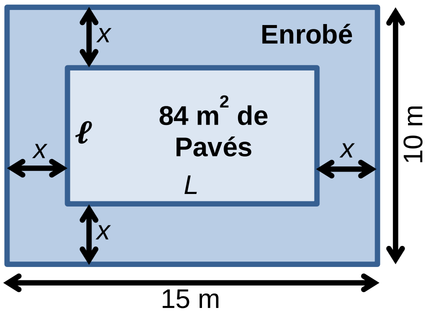
CM ***f.*** Conclure quant aux dimensions du motif pour obtenir les mêmes surfaces ❶ et ❸.

....
....

ACTIVITE 3 « Pavages d'une place »

	AN Analyser/Raisonner	1 2 3 4 5	RE Réaliser	1 2 3 4 5	VA Valider	1 2 3 4 5	CM Communiquer	1 2 3 4 5

Une mairie souhaite aménager une place rectangulaire de 10 m sur 15 m. Elle souhaite paver le centre de la place sur une surface de **84 m²** et faire une allée en enrobé autour. Les travaux sont réalisés par l'entreprise « DJIB TP » qui envisage de faire une allée en enrobé telle que x = 2 m.



AN ☐**1.a.** Exprimer la longueur L de la place pavée en fonction de la largeur x de l'allée en enrobé.

❍ $L = 10 + 2x$ ❍ $L = 10 - 2x$ ❍ $L = 2x - 10$ ❍ $L = 15 + 2x$ ❍ $L = 15 - 2x$ ❍ $L = 2x - 15$

b. Exprimer la largeur ℓ de la place pavée en fonction de la largeur x de l'allée en enrobé.

❍ $\ell = 10 + 2x$ ❍ $\ell = 10 - 2x$ ❍ $\ell = 2x - 10$ ❍ $\ell = 15 + 2x$ ❍ $\ell = 15 - 2x$ ❍ $\ell = 2x - 15$

c. Exprimer la surface ***S*** de la place pavée en fonction de la largeur x de l'allée en enrobé.

❍ $S = (10 + 2x)+(15 + 2x)$ ❍ $S = (10 - 2x)+(15 - 2x)$ ❍ $S = (2x - 10)+(2x - 15)$

❍ $S = (10 + 2x)(15 + 2x)$ ❍ $S = (10 - 2x)(15 - 2x)$ ❍ $S = (2x - 10)(2x - 15)$

Appel n°1 : Faire vérifier les expressions mathématiques

AN ☐**2.** On cherche à savoir si l'entreprise « DJIB TP » a raison de faire une allée d'enrobé de 2 m.
Émettre une conjecture répondant au problème, en la justifiant : ❍ DJIB TP à raison ❍ DJIB TP à tort

....

....

....

Appel n°2 : Faire vérifier la conjecture

VA ☐**3.** Montrer, en détaillant les calculs, que la surface pavée peut s'écrire sous la forme $S = 4x^2 - 50x + 150$.

....

....

....

AN ☐**4.a.** Parmi les équations suivantes, laquelle traduit le problème ?

❍ $4x^2 - 50x + 150 = -84$ ❍ $4x^2 - 50x + 150 = 84$ ❍ $4x^2 - 50x + 150 = -2$ ❍ $4x^2 - 50x + 150 = 2$

VA **b.** Modifier cette équation en déplaçant le terme de droite pour qu'elle soit de la forme « .... = 0 »

....

....

Appel n°3 : Faire vérifier la mise en équation du problème

VA ☐**5.** Soit le polynôme P définie sur [0 ; 15] par $P(x) = 4x^2 - 50x + 66$.

a. Développer l'expression $4(x - 1,5)(x - 11)$ pour montrer que $4(x - 1,5)(x - 11) = P(x)$

....

....

RE **b.** L'expression $P(x) = 4(x - 1,5)(x - 11)$ est dite « **forme factorisée** » du polynôme P.
L'équation $P(x) = 0$ permettant de trouver les racines du polynôme P revient donc à résoudre l'équation $4(x - 1,5)(x - 11) = 0$ qui n'est faites que d'une suite de facteurs (multiplications). Une telle équation est égale à 0 si au moins un de ses facteurs est nul.
Donner les solutions évidentes des équations du premier degré suivantes :

• $(x - 1,5) = 0$	• $(x - 11) = 0$
x = ...	x = ...

CM **c.** En déduire les deux racines du polynôme $P(x)$. x_1 = ... et x_2 = ...

CM ☐**6.** Conclure quant à la problématique posée :

a. La place pavée est de 84 m² lorsque la largeur de l'allé en enrobé est de : ❍ 1,5 m ❍ 2 m ❍ 11 m

b. L'entreprise « DJIB TP » a-t-elle raison de faire une allée d'enrobé de 2 m ? ❍ OUI ❍ NON

Synthèse et petit cours ***(2. à 3.)*** **...**

NOM : ....

Exercice 1 : Racines de polynômes de degré 2

VA **1.** Vérifier si chacune des affirmations suivantes est correcte :

a. $x = 1$ est une racine du polynôme $P_1(x) = -1{,}5x^2 + 3x - 2$. ❍ VRAI ❍ FAUX

b. $x = 5$ est une racine du polynôme $P_2(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 5$. ❍ VRAI ❍ FAUX

c. $x = -2$ est une racine du polynôme $P_3(x) = x^2 - x - 6$. ❍ VRAI ❍ FAUX

d. $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$ sont les racines du polynôme $P_4(x) = 3{,}5x^2 - 14x + 7$. ❍ VRAI ❍ FAUX

f. $x_1 = 0$ et $x_2 = 7$ sont les racines du polynôme $P_5(x) = 2x^2 - 14x$. ❍ VRAI ❍ FAUX

g. $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$ sont les racines du polynôme $P_6(x) = 0{,}4x^2 + 0{,}8x - 1{,}2$. ❍ VRAI ❍ FAUX

RE **2.** Donner les racines des polynômes suivants :

a. $P_7(x) = 6(x - 1{,}5)(x + 2)$

b. $P_8(x) = -0{,}4(x - 7)^2$

c. $P_9(x) = 2x(x - 1)$

d. $P_{10}(x) = 10(x + 1)(x - 2)$

e. $P_{11}(x) = 2(x - \frac{1}{3})(x + 3)$

Exercice 2 : Harbour Bridge

Le « Harbour Bridge » est le pont en arc à tablier suspendu dans le port de Sydney en Australie qui est le plus large au monde. On modélise avec des fonctions polynômes de degré 2 f_S et f_I les deux arches du pont.

AN **1.** Associer chacune des arches à la fonction polynôme qui la modélise :

- Arche Supérieur : ❍ $f_S(x) = -0{,}001866x^2 + 0{,}936732x - 46{,}605216$ ❍ $f_S(x) = -0{,}001154x^2 + 0{,}585078x$
- Arche Inférieur : ❍ $f_I(x) = -0{,}001866x^2 + 0{,}936732x - 46{,}605216$ ❍ $f_I(x) = -0{,}001154x^2 + 0{,}580517x$

RE **2.** On donne les formes factorisées des polynômes f_S et f_I :

$$f_S(x) = -0{,}001154x(x - 507) \quad \text{et} \quad f_I(x) = -0{,}001866(x - 56)(x - 446)$$

a. Donner les racines des deux polynômes f_S et f_I.

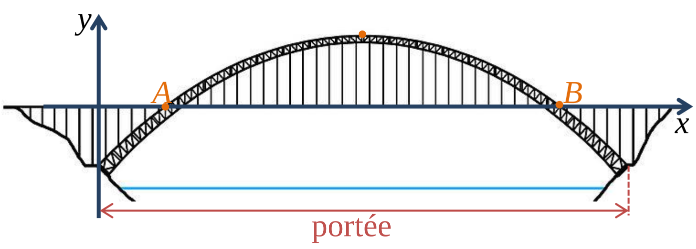
b. En déduire les distances OA et BC.

Exercice 3 : Le pont de Wushan

Le pont de Wushan traverse le fleuve Yangzi Jiang en Chine. Il est soutenu par un arc de parabole en acier. On souhaite renouveler le bitume sur une partie de ce pont dont la portée est de 450 m. La hauteur entre le tablier et le sommet de la parabole est de 120 m. L'arc de parabole touche le sol 150 m en dessous du tablier.

AP **1.** Parmi les points suivants, quels sont les trois qui appartiennent à l'arche supérieure du pont ?

❍ (0 ; 120) ❍ (0 ; –150) ❍ (0 ; 150)
❍ (450 ; 120) ❍ (450 ; –150) ❍ (450 ; 150)
❍ (225 ; 120) ❍ (225 ; –150) ❍ (225 ; 150)



VA **2.** Parmi les fonctions f suivantes définies sur [0 ; 450], laquelle modélise l'arche supérieure ?

❍ $f(x) = 0{,}00533x^2 + 2{,}4x - 150$
❍ $f(x) = -0{,}00533x^2 + 2{,}4x + 150$
❍ $f(x) = -0{,}00533x^2 + 2{,}4x - 150$

RE **3.** Utiliser la calculatrice pour tracer la représentation graphique de la fonction f. On donne les réglages de la fenêtre d'affichage : Xmin = 0 ; Xmax = 450 ; Ymin = –200 ; Ymax = 150.

RE **4.a.** Utiliser la calculatrice pour déterminer les racines de la fonction f (à 10^{-2} près)

VA ***b.*** En déduire la longueur AB de la route à rénover.

VA **5.** Quelle est la forme factorisée de la fonction f ?

❍ $-0{,}00533(x - 74{,}99)(x - 375{,}29)$ ❍ $-0{,}00533(x + 74{,}99)(x - 375{,}29)$
❍ $-0{,}00533(x - 74{,}99)(x + 375{,}29)$ ❍ $-0{,}00533(x + 74{,}99)(x + 375{,}29)$

Exercice 4 : Chandelle

Kylian est un fan de rugby. Lors d'une action il réalise une « chandelle », le ballon retombe dans le camp adverse. La trajectoire du ballon est modélisée par la fonction polynôme f de degré 2 définie par $\mathbf{f(x) = -0{,}3x^2 + 4{,}998x + 2{,}0472}$.

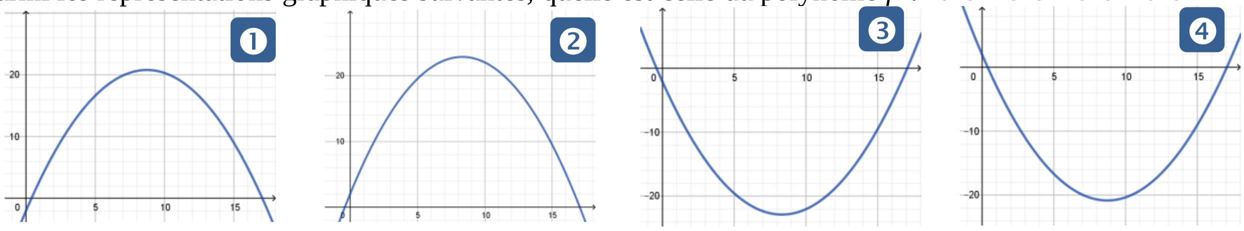
La fonction f représente la hauteur atteinte par le ballon et x la distance parcourue au sol. Kylian souhaite connaître la hauteur et la longueur atteintes par le ballon.

VA **1.** Montrer que la forme factorisée de la fonction f est $f(x) = -0{,}3(x - 17{,}06)(x + 0{,}4)$.

RE **2.a.** Quelles sont les racines du polynôme f ?

b. Donner la longueur de la chandelle.

AN **3.** Parmi les représentations graphiques suivantes, quelle est celle du polynôme f ? ❍❶ ❍❷ ❍❸ ❍❹



RE **4.a.** Déterminer l'abscisse du sommet de la trajectoire effectuée par le ballon de rugby (rappel : $x_S = -\frac{b}{2a}$).

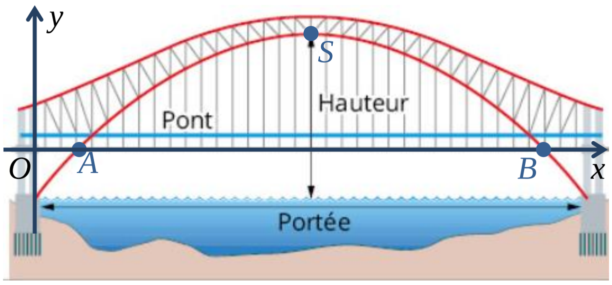
b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la hauteur maximale du ballon.

Exercice 5 : Pont à structure parabolique

On considère le pont ci-contre à structure parabolique où la hauteur de l'arche inférieure peut être modélisée par la fonction polynôme f définie sur [0 ; 80] par :

$$\mathbf{f(x) = -0{,}025x^2 + 2x - 17{,}5}$$

On cherche à déterminer la longueur AB du tableau sous l'arche inférieure.



VA **1.** Vérifier que $x_A = 10$ est une des racines du polynôme f en calculant $f(x_A)$.

RE **2.** Pour un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont des nombres réels), l'abscisse de son somment S est $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (où x_1 et x_2 sont les racines).

a. Déterminer l'abscisse du sommet S de l'arche inférieure du pont.

b. Sachant que le sommet S est sur l'axe de symétrie de la parabole, en déduire l'abscisse x_B du point B à partir de celle du point A.

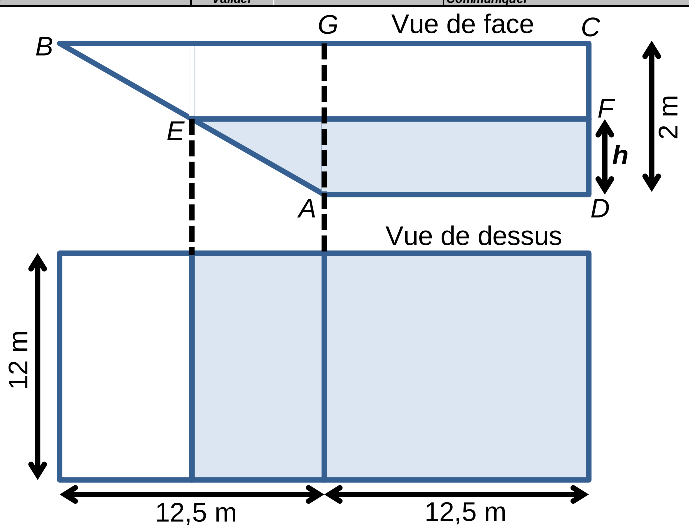
RE **3.** Quelle est la longueur ***AB*** ?

RE **4.** Écrire le polynôme f sous sa forme factorisée.

ACTIVITE 4 « Bassin de rétention »

AP S'Approprier	1 2 3 4 5	AN Analyser/Raisonner	1 2 3 4 5	RE Réaliser	1 2 3 4 5	VA Valider	1 2 3 4 5	CM Communiquer	1 2 3 4 5

On étudie le bassin de rétention dont le profil est donné ci-dessous.



Les côtes sont données ci-dessous.

L'objectif est de chercher la hauteur d'eau dans le bassin de rétention correspondant à un volume de 300 m³.

☐**1.** On dispose du fichier GeoGebra « BASSIN.ggb » où la situation a été modélisée. Le nombre ***S*** correspond à la surface en eau *AEFD* en m². Le niveau d'eau est réglable avec le curseur ***h***.

AP **a.** Que faut-il saisir dans la barre de saisie du logiciel pour obtenir le volume ***V*** en eau ?

- ❍ ***V*** = ***S*** + 2
- ❍ ***V*** = ***S****2
- ❍ ***V*** = ***S*** + 12
- ❍ ***V*** = ***S****12
- ❍ ***V*** = ***S*** + 12,5
- ❍ ***V*** = ***S****12,5

AN **b.** Saisir dans le logiciel l'expression choisie.
Utiliser alors le curseur ***h*** pour conjecturer la hauteur d'eau pour atteindre 300 m^3. ***h*** ≈ .... m

Appel n°1 : Faire vérifier la conjecture

☐**2.** Le volume ***V*** de l'eau, en m^3, est modélisé par le polynôme *f* défini sur [0 ; 2] par $\boldsymbol{f(x) = 37{,}5x^2 + 150x}$, où x représente la hauteur ***h***.

VA **a.** Montrer que le problème posé revient à résoudre l'équation $37{,}5x^2 + 150x - 300 = 0$

....

....

CM **b.** On dispose du programme en langage Python « BALAYAGE.py » ci-contre. À quoi sert ce programme ?

....

....

Programme Python : BALAYAGE.py

```
1  import matplotlib
2  from matplotlib.pyplot import*
3
4  def f(x):
5      return 37.5*x**2+150*x-300
6
7  x=0
8  while x<2:
9      plot(x,f(x),'bo')
10     x=x+0.01
11 grid()
12 show()
```

AN **c.** On souhaite compléter ce programme (entre les lignes 10 et 11) pour que la variable *x* balaye la fonction pas à pas en fonction d'un pas défini par l'utilisateur pour déterminer la racine du polynôme *f*. Parmi les deux programmes suivants, mettre en œuvre celui qui est adapté en complétant le programme « BALAYAGE.py ».

❍

```
1  import matplotlib
2  from matplotlib.pyplot import*
3
4  def f(x):
5      return 37.5*x**2+150*x-300
6
7  x=0
8  while x<2:
9      plot(x,f(x),'bo')
10     x=x+0.01
11 pas=float(input("Saisir le pas de balayage :"))
12 x=0
13 while f(x)<2:
14     x=x+pas
15     plot(x,f(x),'ro')
16 print("la racine trouvée est de ",x)
17 grid()
18 show()
```

❍

```
1  import matplotlib
2  from matplotlib.pyplot import*
3
4  def f(x):
5      return 37.5*x**2+150*x-300
6
7  x=0
8  while x<2:
9      plot(x,f(x),'bo')
10     x=x+0.01
11 pas=float(input("Saisir le pas de balayage :"))
12 x=0
13 while f(x)<0:
14     x=x+pas
15     plot(x,f(x),'ro')
16 print("la racine trouvée est de ",x)
17 grid()
18 show()
```

RE **d.** Exécuter le programme pour un pas de « 0.5 » et noter la racine obtenue : ....

AN **e.** Comment doit-on faire évoluer le pas pour avoir un résultat plus précis de la racine de *f* ?
❍ Il faut un pas plus important ❍ Il faut un pas plus petit

Appel n°2 : Faire vérifier la programmation et l'expérimentation

AN **f.** Expérimentez plusieurs pas pour trouver une racine avec une précision de 10^{-3} (c'est-à-dire une hauteur d'eau dans le bassin au mm près). Noter les résultats :
• Pas choisi : .... • Racine du polynôme *f* obtenue par l'algorithme : ....

VA ☐**3.** Confirmer ou infirmer la conjecture faite à la question ***1.b.*** et conclure quant à la hauteur d'eau en bassin, au mm près.

....

....

....

Appel n°3 : Faire vérifier la conclusion