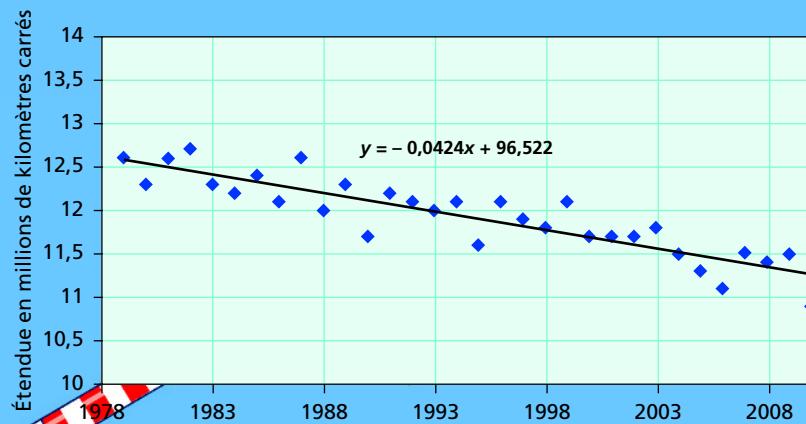


# Statistique à deux variables

(1)



Quel avenir pour l'ours polaire ?

**L**e graphique ci-dessus correspond à l'étendue moyenne de la glace dans l'océan Arctique, mesurée en millions de kilomètres carrés, au mois de juin, de 1979 à 2010.

- En utilisant l'équation affichée, à combien peut-on estimer l'étendue de la glace dans l'océan Arctique en juin 2050 (si la tendance se maintient) ?

## Est-ce que je sais... ?

### 1. Placer des points dans un repère

Dans un repère orthogonal, placer les points  $A(-0,5 ; -1)$  ;  $B(1 ; 2,5)$  et  $C(3 ; 1)$ .

### 2. Calculer une moyenne

- Calculer la moyenne  $\bar{x}$  des nombres  $-0,5 ; 1 ; 3$ , puis la moyenne  $\bar{y}$  des nombres  $-1 ; 2,5 ; 1$ .
- Placer dans le repère précédent le point  $G(\bar{x} ; \bar{y})$ .

### 3. Déterminer une équation de droite

Calculer le nombre  $b$  pour que la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + b$  passe par le point de coordonnées  $\left(\frac{7}{6} ; \frac{5}{6}\right)$ .

## Activité 1 Représenter une série et calculer son point moyen



### Vendre plus pour gagner plus

Une enquête a été menée auprès de huit représentants d'entreprises différentes de vente de photocopieurs. Le tableau suivant donne, pour chaque représentant, le chiffre d'affaires annuel et le revenu annuel, en milliers d'euros.



Chiffre d'affaires annuel (en milliers d'euros)	340	390	440	620	470	360	460	520
Revenu annuel (en milliers d'euros)	25	26	33	41	36	28	35	38

### 1 Ce que montre un graphique

- Dans un repère orthogonal, représenter les huit points correspondant à ces représentants de commerce. Placer en abscisses le chiffre d'affaires, en graduant l'axe à partir de 320 avec comme unité 1 cm pour 20 milliers d'euros. Placer en ordonnées le revenu annuel, en graduant l'axe à partir de 24 avec comme unité 1 cm pour 1 millier d'euros.

Les points obtenus forment le **nuage de points**.

- Il y a deux parties dans le salaire d'un représentant : un fixe et une commission proportionnelle au chiffre d'affaires réalisé. Pourquoi le nuage de points montre-t-il que la rémunération est approximativement la même dans les huit entreprises ?

### 2 En moyenne...

- Calculer la moyenne  $\bar{x}$  des huit chiffres d'affaires, puis la moyenne  $\bar{y}$  des huit revenus.
- Placer le point  $G$  de coordonnées  $(\bar{x} ; \bar{y})$ . Comment se situe-t-il par rapport au nuage ?

Le point  $G$  se nomme le **point moyen**.

## Activité 2 Exploiter une droite d'ajustement

### Une utilisation électrique de la statistique !

La tension  $U$  aux bornes d'une batterie de force électromotrice  $e$  et de résistance interne  $R$  s'écrit théoriquement  $U = -Ri + e$ . On a procédé à différentes mesures :

Intensité $i$ (A)	0	0,1	0,4	1
Tension $U$ (V)	12	11	7	1

Les intensités  $i$  sont sur l'axe des  $x$  et les tensions  $U$  sur l'axe des  $y$ ...

- Placer dans un repère orthogonal les quatre points correspondant à ces mesures.
- Tracer, dans ce même repère, la droite d'équation  $y = -11x + 12$  et vérifier qu'elle passe à proximité des quatre points.  
Cette droite se nomme **droite d'ajustement**.
- Exploiter cette droite d'ajustement pour déterminer la force électromotrice  $e$  et la résistance interne  $R$ .

## Activité 3 Déterminer un ajustement affine



### Quelle tendance pour les gaz à effet de serre ?

Le tableau suivant correspond aux émissions de gaz à effet de serre (en millions de tonnes équivalent CO<sub>2</sub>) relevées en France (source : Ifen).

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Émissions GES	565	561	563	554	558	557	561	545	535	532

#### 1 Recherche du point moyen

Calculer les coordonnées  $\bar{x}$  (moyenne de la première ligne du tableau) et  $\bar{y}$  (moyenne de la seconde ligne) du point moyen  $G$ .

#### 2 Détermination d'une droite d'ajustement

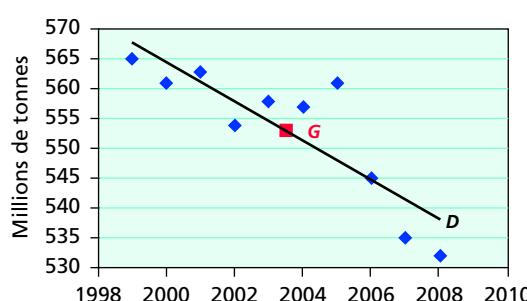
- On souhaite ajuster le nuage de points par une droite  $D$  passant par le point  $G$ .

On admet que  $D$  a pour coefficient directeur  $-3,33$ .

On note  $y = -3,33x + b$  une équation de  $D$ .

Calculer le nombre  $b$ .

- En supposant que la tendance observée sur ces dix années se poursuive, estimer la quantité d'émissions de gaz à effet de serre en France en 2015.



## 1 Nuage de points et point moyen

Une **série statistique à deux variables** est donnée sous forme d'un tableau :

Variable 1 : $x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
Variable 2 : $y_i$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Dans un repère, les points de coordonnées  $(x_i ; y_i)$  constituent le **nuage de points** représentant la série statistique.

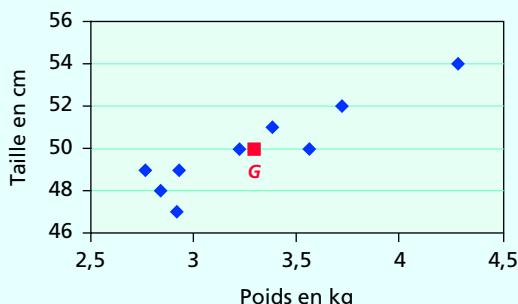
Le **point moyen** du nuage a pour coordonnées  $(\bar{x} ; \bar{y})$  où  $\bar{x}$  est la moyenne des  $x_i$  et  $\bar{y}$  la moyenne des  $y_i$ . Il est situé au « centre » du nuage.

### Exemple

La série suivante correspond aux poids (en physique on parle de masse) et aux tailles de 9 nouveau-nés d'une maternité.

Poids $x_i$ en kg	2,76	3,56	3,38	2,92	3,22	2,84	2,93	4,28	3,72
Tailles $y_i$ en cm	49	50	51	47	50	48	49	54	52

Le point moyen  $G$  a pour coordonnées :  
le poids moyen des 9 bébés,  $\bar{x} = 3,29$  kg,  
et la taille moyenne  $\bar{y} = 50$  cm.  
Il semble que plus un bébé est lourd, plus sa taille a tendance à être grande.



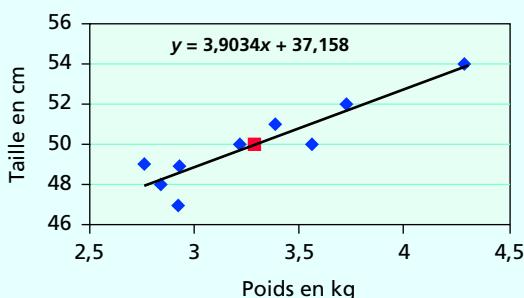
## 2 Ajustement affine

Lorsque le nuage a une forme « allongée », on peut rechercher une droite passant par le point moyen et au plus près des autres points : c'est un **ajustement affine** du nuage.

L'équation  $y = ax + b$  de la **droite d'ajustement** donne la « tendance » de l'évolution de  $y$  en fonction de  $x$ .

### Exemple

Le tableur fournit la droite d'équation  $y = 3,9034x + 37,158$  comme ajustement affine du nuage précédent.  
Cette équation indique comment la taille des bébés à la naissance a tendance à augmenter lorsque leur poids de naissance augmente.



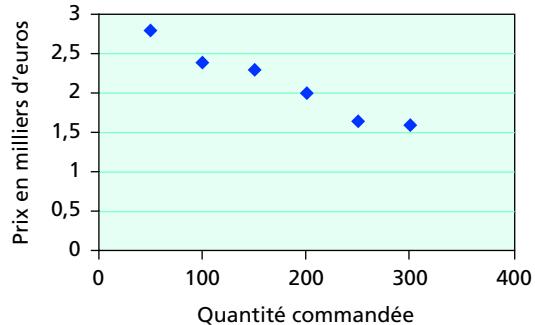
## 1 Comment déterminer le point moyen ?

### Énoncé

Le tableau suivant donne le prix de vente d'un article en fonction de la quantité commandée.

Quantité commandée $x_i$	50	100	150	200	250	300
Prix en milliers d'euros $y_i$	2,8	2,4	2,3	2	1,65	1,6

Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage de points correspondant.



### Solution

La moyenne des quantités commandées est :

$$\bar{x} = \frac{50 + 100 + 150 + 200 + 250 + 300}{6} = 175.$$

La moyenne des prix est :

$$\bar{y} = \frac{2,8 + 2,4 + 2,3 + 2 + 1,65 + 1,6}{6} = 2,125.$$

Le point  $G$  a pour coordonnées  $(175 ; 2,125)$ .

Calculer la moyenne  $\bar{x}$  des valeurs  $x_i$ .

Calculer la moyenne  $\bar{y}$  des valeurs  $y_i$ .

Le point  $G$  a pour coordonnées  $(\bar{x} ; \bar{y})$ .



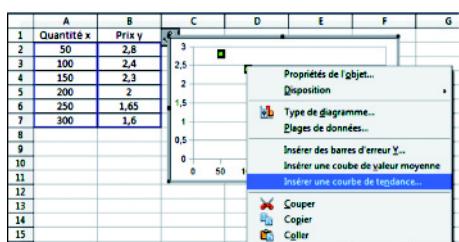
Vérifiez sur le graphique que le point moyen trouvé est bien « au centre » du nuage !

## 2 Comment représenter un nuage de points puis l'ajuster avec un tableur ?

### Énoncé

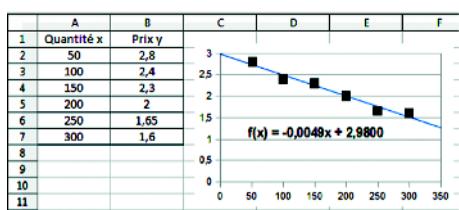
Avec les données de l'exercice précédent, représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant, puis en effectuer un ajustement affine.

### Solution



Sélectionner les données puis :

- avec Excel 2003, cliquer sur l'icône **Assistant graphique** et choisir **Nuage de points** ;
- avec Excel 2007, choisir **Insertion/Nuage de points** ;
- avec OpenOffice Calc, cliquer sur l'icône **Diagramme** puis choisir **XY (dispersion)**.



Cliquer avec le bouton droit sur l'un des points du nuage et choisir **Ajouter une courbe de tendance...** avec Excel ou **Insérer une courbe de tendance...** avec OpenOffice. Choisir Linéaire et cocher **Afficher l'équation sur le graphique**.

### 3 Comment ajuster une série avec une calculatrice, puis extrapoler ?

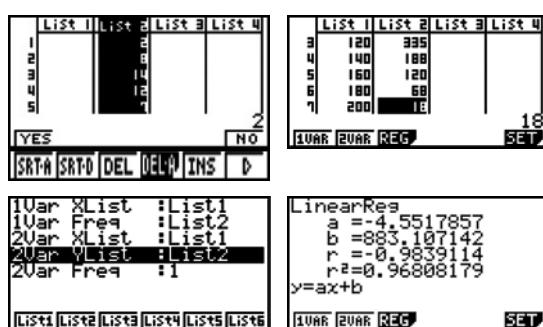
#### Énoncé

Une enquête du service commercial d'une chaîne d'hôtels « quatre étoiles » a permis de connaître l'évolution de la demande mensuelle  $y_i$  de nuitées, selon le prix  $x_i$  proposé en « période creuse ».

- Utiliser les résultats de la calculatrice pour donner une expression du type  $y = ax + b$  de la demande mensuelle en fonction du prix de la chambre.
- Utiliser la question a) pour évaluer la demande lorsque le prix est 130 €.

Prix TTC en euros : $x_i$	Demande en nuitées : $y_i$
80	540
100	452
120	335
140	188
160	120
180	68
200	18

#### Solution avec une calculatrice de marque Casio



- En arrondissant les coefficients à  $10^{-2}$ , la droite d'ajustement donnée par la calculatrice a pour équation  $y = -4,55x + 883,11$ .
- $-4,55 \times 130 + 883,11 \approx 292$  nuitées.

Faire **MENU STAT EXE**, puis effacer les données présentes en se plaçant dans une colonne, puis **DEL A YES EXE**

Entrer les valeurs  $x_i$  en colonne List 1 et les valeurs  $y_i$  en colonne List 2.

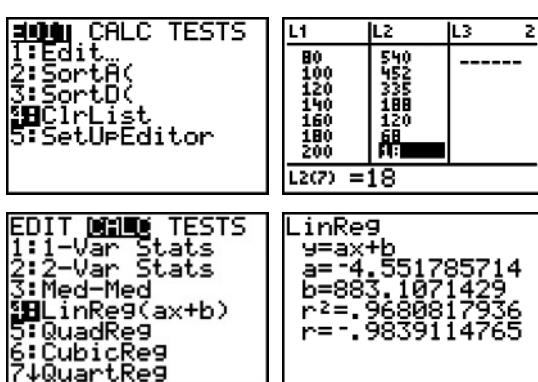
Régler les listes par **CALC SET**  
2Var X List : List 1  
2Var Y List : List 2  
2Var Freq : 1 **EXE**.

Afficher les résultats par **REG X**.

N'oubliez pas,  
si nécessaire,  
de vider les listes  
par **DEL**  
ou **ClrList**.



#### Solution avec une calculatrice de marque Texas Instruments



- En arrondissant les coefficients à  $10^{-2}$ , la droite d'ajustement donnée par la calculatrice a pour équation  $y = -4,55x + 883,11$ .
- $-4,55 \times 130 + 883,11 \approx 292$  nuitées.

Faire **STAT** ou **stats**, puis effacer les données présentes par **EDIT 4:ClrList**  
**ENTER** L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> ou **4:EffListe** entrer L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> (on obtient L<sub>1</sub> et L<sub>2</sub> au clavier par la touche **2nd** ou **2nde**).

Entrer les données par **STAT EDIT**  
1:Edit **ENTER** ou 1:Edite entrer, puis entrer les valeurs  $x_i$  en colonne L<sub>1</sub> et les valeurs  $y_i$  en colonne L<sub>2</sub>.

Afficher les résultats par **STAT CALC**  
4:LinReg(ax + b) **ENTER** L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> ou **stats**  
**CALC 4:RegLin(ax + b)** entrer L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>.

# Ajuster un grand nombre de données



## Capacité de production éolienne

Ouvrir le fichier « 01\_prod\_eolienne.xls » ou « 01\_prod\_eolienne.ods » fournissant la capacité de production éolienne de 76 pays de 2001 à 2010 (source : EWEA).

### 1 Étude de la capacité de production française

- a) Sélectionner les données de la France (ou utiliser le filtre « Pays »), puis représenter le nuage de points correspondant.

Pourquoi un ajustement affine a-t-il ici peu de sens ?

*On obtient le filtre en cliquant sur la flèche en tête de colonne.*

- b) Montrer à l'aide du tableur, qu'en ne retenant que les années de 2005 à 2010 (rangs 5 à 10), on peut ajuster la production française par la droite d'équation  $y = 839x - 4\,114$ .
- c) En supposant que cette tendance se maintienne, estimer la production française en 2012 (rang  $x = 12$ ).



### 2 Comparaison de l'Europe et de l'Asie

- À l'aide du filtre, sélectionner les données des pays d'Europe, les copier, puis les coller sur une nouvelle feuille.

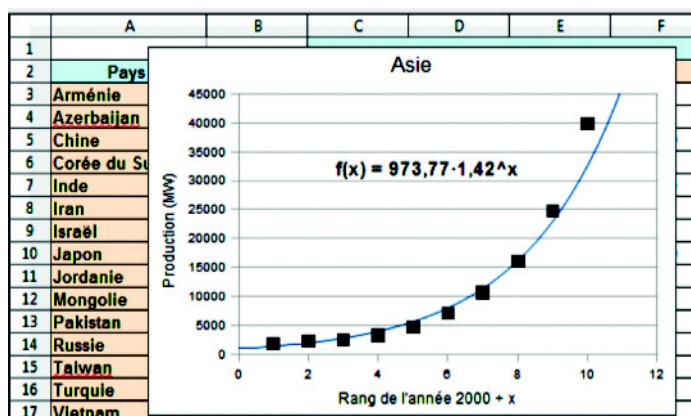
- a) Calculer, pour chaque année, la production totale des pays européens.
- b) Effectuer un ajustement affine de la production en Europe de 2001 à 2010 (afficher l'équation).
- c) À l'aide de l'équation  $y = 6\,815x + 3\,391$ , estimer la production européenne en 2012 (rang  $x = 12$ ).

- À l'aide du filtre, copier les données des pays d'Asie, puis les coller sur une nouvelle feuille.

- d) Calculer, pour chaque année, la production totale des pays asiatiques.

- e) Un ajustement affine de la production en Asie de 2001 à 2010 est-il justifié ?

- f) Le tableur permet d'ajuster le nuage à l'aide d'une « courbe de tendance exponentielle ». En utilisant la formule  $973,77 \times 1,42^x$  (le symbole  $\wedge$  indique la puissance), estimer la production asiatique en 2012 (rang  $x = 12$ ).



# J'utilise un logiciel

## TABLEUR



## Comprendre le principe des « moindres carrés »

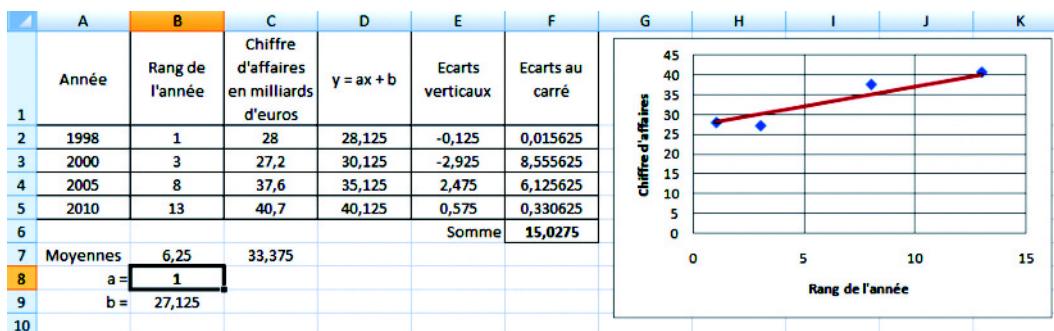


### Chiffre d'affaires d'un constructeur d'automobiles

#### 1 Principe des « moindres carrés »



Ouvrir le fichier « 01\_moindres\_carres.xls » ou « 01\_moindres\_carres.ods », donnant le chiffre d'affaires, en milliards d'euros, d'un constructeur d'automobiles.

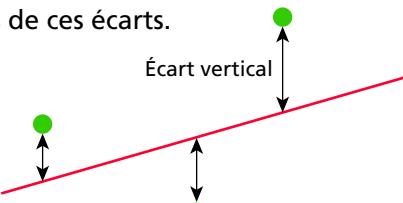


On recherche une droite d'équation  $y = ax + b$ , passant par le point moyen et ajustant « au mieux » le nuage des quatre années données.

- Dans quelles cellules sont calculées les coordonnées  $(\bar{x} ; \bar{y})$  du point moyen ?
- Puisque la droite passe par le point moyen, on a  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ . Expliquer la formule entrée en B9.
- La colonne E contient les écarts verticaux entre les points du nuage et les points correspondants de la droite. La colonne F contient les carrés de ces écarts. Pourquoi la somme des écarts contenus en colonne E ne permet-elle pas de savoir si la droite est proche des points du nuage et quel est l'avantage de considérer la somme des écarts au carré ?
- Modifier en B8 la première décimale du coefficient directeur  $a$  de la droite (prendre 1,1 ; 1,2 ; 1,3...) de sorte à obtenir en F6 une somme des écarts au carré minimale (observer en même temps la droite sur le graphique). Quel est, à  $10^{-1}$  près, le coefficient  $a$  optimal ?



Appelez le professeur pour exposer votre résultat.



#### 2 Comparaison avec l'ajustement du tableur

Le tableur peut afficher directement la droite d'ajustement obtenue selon le principe précédent des « moindres carrés ». Sur le graphique, cliquer sur un point du nuage situé à l'écart de la droite à l'aide du bouton droit de la souris et choisir *Courbe de tendance...* Dans la boîte de dialogue, choisir *Linéaire* et cocher *Afficher l'équation*.

- Quelle est l'équation de la droite d'ajustement donnée par le tableur ?
- Comparer au résultat obtenu à la question 1.d.



Appelez le professeur pour exposer vos commentaires.

# Exercices et problèmes

R Exercices avec réponses en fin d'ouvrage

\* / \*\* Exercices plus difficiles

## Exercices

### Déterminer le point moyen

- 1** Le tableau suivant donne, pour sept années consécutives, l'évolution de la production d'un certain type de pièces et des frais de publicité correspondants, dans une entreprise du secteur industriel.

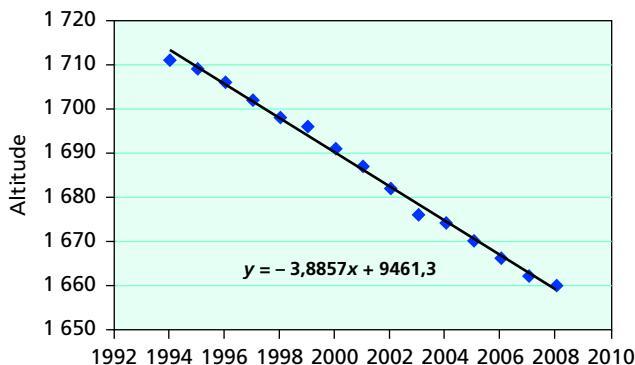
Production $x_i$ (en milliers)	Frais de publicité $y_i$ (en milliers d'euros)
260	17
280	16
260	17
310	19
300	22
350	23
340	26

- a) Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage correspondant à cette série.  
 b) On ajuste ce nuage par la droite  $D$  d'équation  $y = 0,084x - 5,2$ .  
 Vérifier que  $G$  appartient à  $D$ .

### Exploiter un ajustement affine donné

#### R 2 Fonte des glaciers

Le graphique suivant correspond à l'altitude, en mètres, de la surface du glacier de la Mer de glace au niveau du Montenvers (source : service d'observation Glacioclim).



En exploitant l'équation affichée, estimer l'altitude en 2020 si la tendance observée se maintient.



La Mer de glace.

- 3** Le tableau suivant donne la consommation d'eau, en millions de  $m^3$ , des canons à neige des stations de ski françaises.

Saison	Rang $x_i$	Consommation $y_i$
2002	1	11,6
2003	2	13,1
2004	3	15,1
2005	4	16
2006	5	16
2007	6	18,3

- a) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .  
 b) Vérifier, en la traçant, que la droite  $D$  d'équation  $y = 1,2x + 11$  constitue un bon ajustement affine du nuage de points.  
 c) En utilisant la droite  $D$ , estimer la consommation d'eau de la saison 2011.

### Déterminer un ajustement affine

- 4** Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires, exprimé en millions d'euros, de l'entreprise Mecanix de 2005 à 2010.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang $x_i$	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires $y_i$	7,85	8,23	8,19	8,62	8,98	9,46

- a) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .  
 b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  (arrondir au centième).  
 c) Tracer sur le graphique la droite  $D$  d'équation  $y = 0,3x + 7,8$ .  
 d) À l'aide de l'équation précédente, donner une estimation du chiffre d'affaires en 2011.

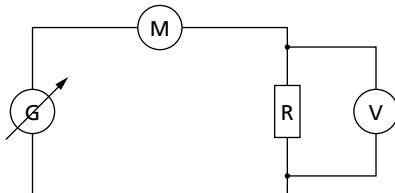
## R 5 Salaire minimum

Le tableau suivant donne le SMIC (salaire minimum) horaire brut en euros de 2005 à 2010.

Année $x_i$	2005	2006	2007	2008	2009	2010
SMIC $y_i$	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82	8,86

- a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .  
 b) On admet que l'ajustement affine réalisé reste valable jusqu'en 2012. Proposer une estimation du SMIC en 2012.

- 6 Dans le circuit électrique ci-dessous, un générateur de tension réglable permet d'obtenir les mesures résumées dans le tableau suivant, où  $U$  est la tension aux bornes du résistor (en V) et  $I$  l'intensité du courant dans le circuit (en A).

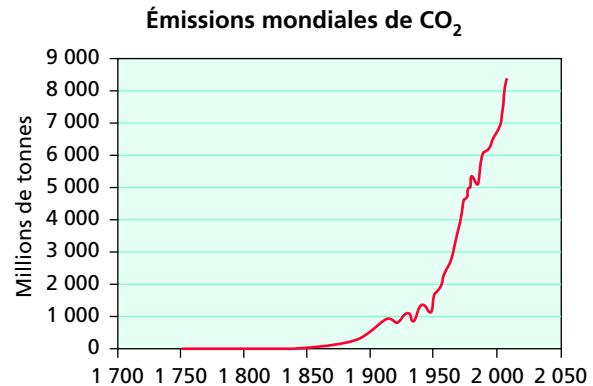


$U(x_i)$	0	1	2	3	4
$I(y_i)$	0	0,039	0,079	0,118	0,160
$U(x_i)$	5	6	7	8	9
$I(y_i)$	0,198	0,238	0,277	0,316	0,355

- a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  (les résultats seront arrondis à  $10^{-1}$ ).  
 b) La loi d'Ohm s'écrit  $U = RI$  avec  $U$  en V,  $R$  en  $\Omega$  et  $I$  en A. En déduire la valeur de la résistance  $R$  du résistor.

## R 7\* Émissions mondiales de CO<sub>2</sub>

Ouvrir le fichier « 01\_CO2\_monde.xls » ou « 01\_CO2\_monde.ods » du CD-Rom, qui fournit la quantité de gaz carbonique émise chaque année dans le monde de 1751 à 2007 (source : Carbon Dioxide Information Analysis Center).



- a) Un ajustement affine du nuage de points est-il justifié ?  
 b) Sélectionner les points correspondant aux années 1900 à 1950, puis déterminer à l'aide du tableur un ajustement affine. Quelle est l'équation affichée ?  
 c) Procéder de même pour la période de 1950 à 2007.  
 d) On lit dans la presse que « de 1900 à 1950, les émissions annuelles mondiales de CO<sub>2</sub> ont augmenté en moyenne d'environ 16 millions de tonnes par an, alors que cette augmentation sur la période de 1950 à 2007 a été d'environ 111 millions de tonnes par an ». Cette affirmation est-elle exacte ?

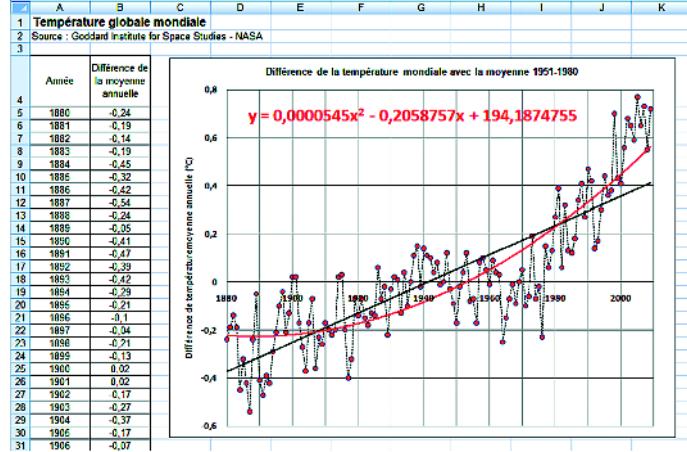
## Exploiter un ajustement non affine

### 8\* Ça chauffe !

Ouvrir le fichier « 01\_temp\_globale.xls » ou « 01\_temp\_globale.ods » du CD-Rom qui fournit, de 1880 à 2009, la différence en °C de la température moyenne annuelle globale sur Terre par rapport à la moyenne de la période 1951-1980 (Source : Goddard Institute for Space Studies, NASA).

- a) Effectuer un ajustement affine du nuage de points. Quelle est l'équation affichée par le tableur ?  
 b) Le tableur Excel fournit un ajustement par une parabole d'équation :

$$y = 0,000\,054\,5x^2 - 0,205\,88x + 194,19.$$



(Avec Excel, choisir « Polynomiale Ordre 2, avec OpenOffice, tracer la parabole à l'aide de sa formule.) Quel est, de l'ajustement affine ou de l'ajustement parabolique, celui qui semble préférable ?

- c) Donner une estimation de l'écart de la température globale en 2040 par rapport à la période 1951-1980 :  
 – en utilisant l'ajustement affine ;  
 – en utilisant l'ajustement parabolique.

## Problèmes

### Problème 1

#### Défaut d'une machine



Dans une entreprise, une machine produit des axes de moteurs électriques. La machine se dérégulant au cours du temps, on décide de noter chaque jour le pourcentage des axes défectueux produits. On obtient alors le tableau suivant.

Jours $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Défectueux (%) $y_i$	0,8	1,1	1,9	2,3	2,1	2,4	2,8	2,9

1. Représenter dans un repère le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .
2. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage, puis placer ce point sur le graphique.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation d'une droite  $D$  d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ . (Les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$ .)
4. Tracer la droite  $D$  sur le graphique.
5. En admettant que l'évolution du pourcentage d'axes défectueux constatée pendant huit jours se poursuive les jours suivants, quel est le pourcentage prévisible, arrondi à 0,1 %, d'axes défectueux produits le onzième jour par cette machine ?

### Problème 2

#### Vitesse et sécurité routière



Le tableau suivant fournit la vitesse moyenne en km/h des véhicules légers et le nombre de morts sur les routes françaises de 1998 à 2009  
 (source : [www.securite-routiere.fr](http://www.securite-routiere.fr)).

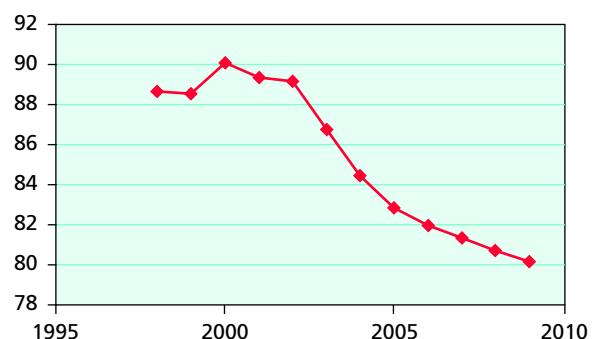
Année	Vitesse moyenne des VL $x_i$	Nombre de morts $y_i$
1998	88,7	8 437
1999	88,6	8 029
2000	90,1	7 643
2001	89,4	7 720
2002	89,2	7 242
2003	86,8	5 731
2004	84,5	5 593
2005	82,9	5 318
2006	82	4 709
2007	81,4	4 620
2008	80,8	4 275
2009	80,2	4 273

On peut obtenir ces données sur le fichier « 01\_vitesse\_securite.xls » ou « 01\_vitesse\_securite.ods » du CD-Rom.

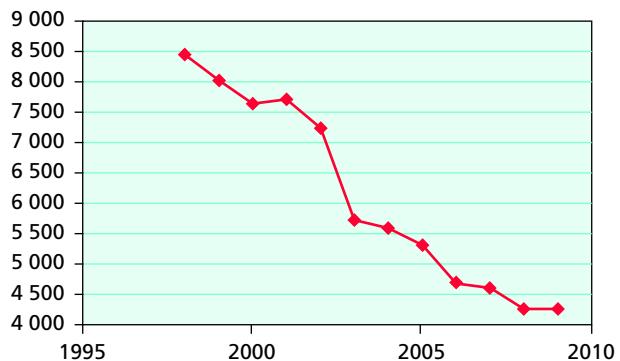
1. Comparer les graphiques ci-dessous, illustrant l'évolution de la vitesse moyenne et du nombre de morts.

Quelle hypothèse peut-on en déduire entre la vitesse moyenne et le nombre de morts ?

Évolution de la vitesse moyenne



Évolution du nombre de morts



**2. a)** Représenter avec un tableau le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  correspondant à la série statistique des vitesses moyennes des véhicules légers et du nombre de morts.

**b)** L'examen du nuage de points précédent confirme-t-il l'hypothèse faite au 1 ?

Peut-on envisager un ajustement affine du nombre de morts en fonction de la vitesse moyenne ?

**3. a)** À l'aide du tableur, donner une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .

**b)** Estimer le nombre de vies qui pourraient être sauvées par rapport aux 4 273 morts de 2009, si la vitesse moyenne baissait à 78 km/h.

### Première cause de mortalité

Les accidents de la route sont la première cause de mortalité chez les jeunes de 10 à 24 ans dans le monde. L'accident type auquel les jeunes sont confrontés est une perte de contrôle dans un virage à cause de la vitesse.



### Problème 3

#### Détermination de l'indice de réfraction

##### 1. Indice du Plexiglas

On utilise en TP un dispositif constitué d'une source lumineuse diaphragmée (pinceau lumineux vertical) et d'un demi-cylindre de Plexiglas monté sur un disque gradué en degrés. Ce disque permet la mesure de l'angle de réfraction  $r$  pour différentes valeurs de l'angle d'incidence  $i$ .

Le tableau suivant donne huit mesures effectuées avec ce dispositif.

Incidence $i$	Réfraction $r$	$\sin i$ $x_i$	$\sin r$ $y_i$
10°	7°		
20°	13,5°		
30°	20°		
40°	25,5°		
50°	31°		
60°	35,5°		
70°	39,5°		
80°	43,5°		

**a)** Reproduire et compléter le tableau en calculant les sinus des angles d'incidence et de réfraction (compte tenu de la précision des mesures, on arrondira les résultats à  $10^{-3}$ ).

**b)** Pour chaque ligne du tableau, calculer le rapport  $\frac{\sin i}{\sin r}$  (arrondir à  $10^{-2}$ ).

Que constate-t-on ?

**c)** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation d'une droite d'ajustement du nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  (arrondir à  $10^{-2}$ ).

**d)** La deuxième loi de Descartes s'écrit  $\sin i = n \sin r$  où  $n$  est l'indice du milieu par rapport à l'air.

En utilisant la question précédente, estimer l'indice de réfraction du Plexiglas.

##### 2. Indice de l'eau

Le demi-cylindre de Plexiglas est remplacé par un récipient contenant de l'eau. On obtient les mesures suivantes.

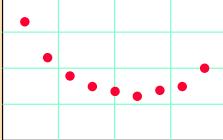
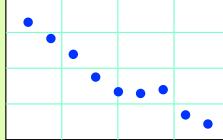
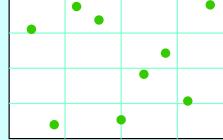
$\sin i$ $x_i$	$\sin r$ $y_i$
0,139	0,173
0,267	0,342
0,382	0,500
0,484	0,642
0,573	0,766
0,649	0,866
0,713	0,939
0,766	0,984

Donner une estimation de l'indice de réfraction de l'eau.

 Sur le CD-Rom :  
- le QCM sous forme interactive et un autre QCM pour tester vos connaissances  
- des exercices supplémentaires pour vous entraîner.

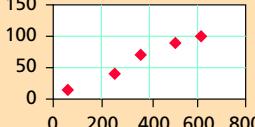
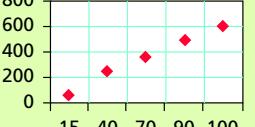
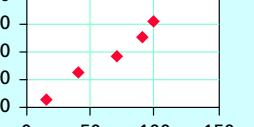
# Je teste mes connaissances

Pour chaque énoncé, indiquer la ou les bonnes réponses.

	A	B	C
1 Un ajustement affine convient au nuage de points suivant :			
2 Une série de point moyen $G(5 ; 14,8)$ est ajustée par la droite d'équation $y = 3x + b$ .	$b = -0,2$	$b = -39,4$	$b = 0,2$
3 Une série $(x, y)$ dont les valeurs de $x$ sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 est ajustée par la droite d'équation $y = 1,35x + 22,8$ .	Le point moyen est $G(6,5 ; 30,575)$	Le point moyen est $G(31,575 ; 6,5)$	Le point moyen est $G(6,5 ; 31,575)$
4 Pour la série précédente, estimer $y$ lorsque $x$ vaut 20.	40	-2,07	49,8

Pour les questions 5, 6 et 7, utiliser le tableau ci-dessous.

$x_i$	15	40	70	90	100
$y_i$	60	254	362	504	615

5 Le nuage de points correspondant à la série $(x, y)$ est le suivant :			
6 Les coordonnées du point moyen $G(\bar{x} ; \bar{y})$ sont :	$G(70 ; 359)$	$G(70 ; 362)$	$G(63 ; 359)$
7 Une calculatrice permet un ajustement par la droite $D$ :	$y = 6,06x - 22,73$	$y = 6,06x + 22,73$	$y = 6,06 - 22,73$

Pour les questions 8, 9 et 10, utiliser le tableau ci-dessous.

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année ( $x_i$ )	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires ( $y_i$ ) en milliers d'euros	340	341	343	341	344

8 Le point moyen est :	$G(2,5 ; 341,8)$	$G(3 ; 342,1)$	$G(3 ; 341,8)$
9 Une calculatrice permet un ajustement par la droite $D$ :	$y = 0,8x + 339,4$	$y = 0,9x + 339,1$	$y = 0,8x + 341,8$
10 L'ajustement précédent permet d'estimer le chiffre d'affaires pour 2011 à :	344 500 €	346 600 €	344 200 €



## Partie A Étude d'un échantillon

On dispose des données suivantes concernant un échantillon de 20 hommes : âges  $t_i$  en années, tailles  $x_i$  en mètres, poids  $y_i$  en kg (en physique, on parle de masses).

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Âge : $t_i$	22	26	33	35	38	40	42	42	43	44	45	48	49	50	51	53	56	61	64	75
Taille : $x_i$	1,82	1,71	1,72	1,75	1,77	1,97	1,94	1,76	1,68	1,98	1,79	1,82	1,8	1,87	1,72	1,65	1,9	1,81	1,75	1,68
Poids : $y_i$	75	66	64,4	74,2	70,5	93,2	90,4	71,5	59,8	95,2	73,1	74,2	71	82,8	75,4	68,7	75,1	73	82,6	64



On peut trouver ces données sur le fichier « **01\_lorentz.xls** » ou « **01\_lorentz.ods** ».

On souhaite examiner de quelle manière le poids est lié à l'âge et à la taille.

1. Représenter avec un tableur les nuages des points  $M_i(t_i ; y_i)$  et  $N_i(x_i ; y_i)$ .
2. D'après l'aspect de ces deux nuages, peut-on considérer que, sur cet échantillon, le poids est lié à l'âge ? Que le poids est lié à la taille ?
  
3. Effectuer un ajustement affine du nuage de points  $N_i(x_i ; y_i)$  à l'aide du tableur. Donner une équation de la droite obtenue.
4. Selon la tendance observée sur cet échantillon, estimer le poids d'un homme mesurant 1,85 m.

## Partie B Formule de Lorentz

La formule de Lorentz donne le poids moyen selon la taille :

$$\text{poids} = 100 \times \left( \text{taille} - 1 - \frac{\text{taille} - 1,5}{a} \right).$$

(Taille en mètres ; poids en kg ;  $a = 4$  pour un homme ;  $a = 2,5$  pour une femme.)

1. Que fournit la formule pour un homme de 1,85 m ? Une femme de 1,73 m ?
2. Cette formule a-t-elle un sens appliquée à un petit garçon de 80 cm ?
3. Montrer que, dans le cas des hommes, la formule de Lorentz peut s'écrire sous la forme  $y = 75x - 62,5$  où  $x$  désigne la taille en m et  $y$  le poids en kg.
4. Calculer  $y$  pour  $x = 1,85$  et comparer au résultat de la question A.4.



Appelez le professeur pour présenter vos calculs.

Capacités	Je sais faire	Je dois encore travailler
Déterminer le point moyen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Représenter à l'aide des TIC un nuage de points.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Déterminer, à l'aide des TIC, une équation d'une droite d'ajustement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Utiliser cette équation pour interpoler ou extrapolier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>