1re BAC PRO
ENSEIGNEMENT AGRICOLE

MATHÉMATIQUES

Sous la coordination de François Moussavou
Kilani Adouani
Cécile Blazy
Stéphanie Guérin
Marielle Lacheteau

Manuel numérique

Vuibert

4 Problèmes du 2nd degré

Découvrons le sujet…

Les plus anciennes traces écrites de résolutions d'équations du second degré ont été découvertes par les archéologues sur des tablettes d'argile babyloniennes. Ces écrits datent d'environ 2000 ans avant notre ère ; pour les habitants de la Mésopotamie (actuelle région de l'Irak), il s'agissait tout d'abord de résoudre des problèmes de partage d'héritage.

Plus tard, le Grec Euclide (vers 300 avant notre ère) cherche aussi à résoudre des problèmes du second degré. Pour pallier les difficultés liées notamment aux solutions négatives, on résout les équations en recourant à la géométrie.

Ce n'est qu'entre le Ier et le IIIe siècle de notre ère, à Alexandrie, que Diophante introduit des notations symboliques pour résoudre ce type d'équations. Ses notations ne ressemblent pas à celles que nous avons l'habitude d'utiliser ; par exemple : il note l'inconnue x^2 avec le symbole Δ^Y.

Bien que les mathématiciens occidentaux des périodes suivantes connaissent les écrits de Diophante, ceux-ci ne seront pas exploités avant le XVIIe siècle.

En Orient, les recherches se poursuivent au IXe siècle à Bagdad, avec le mathématicien Al-Khwârizmî (780-850). Il propose une méthode générale de résolution des équations du second degré. Le but est de résoudre des problèmes courants tels que le creusement de canaux, grâce au calcul d'un **discriminant** (ce mot est expliqué dans le cours).

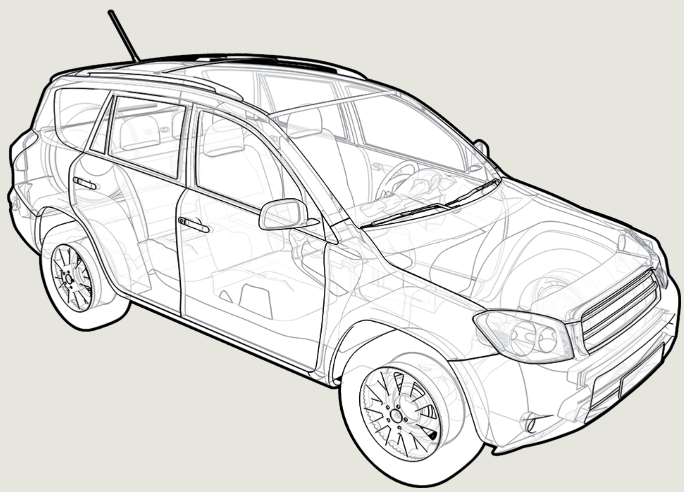
Ma vie pro

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés par une fonction du second degré : dans la nature, une relation du second degré lie le nombre de proies et de prédateurs, permettant ainsi de prévoir l'évolution de populations animales ; en géométrie, certains calculs d'optimisation d'aires de surfaces planes utilisées pour le remembrement rural conduisent à des équations du second degré ; en économie, la détermination de taux successifs ou le calcul de bénéfices d'une exploitation agricole, par exemple, peuvent s'appuyer sur des modèles du second degré.

ACTIVITÉ 1

Consommation d'essence

Objectifs : Calculer des valeurs d'une expression algébrique – Tracer une représentation graphique – Comprendre et interpréter un modèle



Un constructeur automobile veut déterminer la vitesse permettant d'avoir une consommation d'essence minimale sur l'un de ses nouveaux véhicules. Les services techniques proposent de modéliser la consommation de cette voiture en utilisant la relation suivante :

$$f(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}16x + 11{,}4$$

La fonction f est définie sur l'intervalle [20 ; 130].

> ***x*** désigne la **vitesse en km/h** et ***f*(*x*)** est le nombre de **litres d'essence consommés** lorsque la voiture parcourt 100 km à la vitesse x.

1. a. Peut-on calculer la valeur de l'expression algébrique : $0{,}001x^2 - 0{,}16x + 11{,}4$ pour x égal à 200 ?

b. Pourquoi se restreint-on à une étude sur l'intervalle [20 ; 130] ?

2. Recopier, puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant au dixième :

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$f(x)$	8,6			5,9								7,5

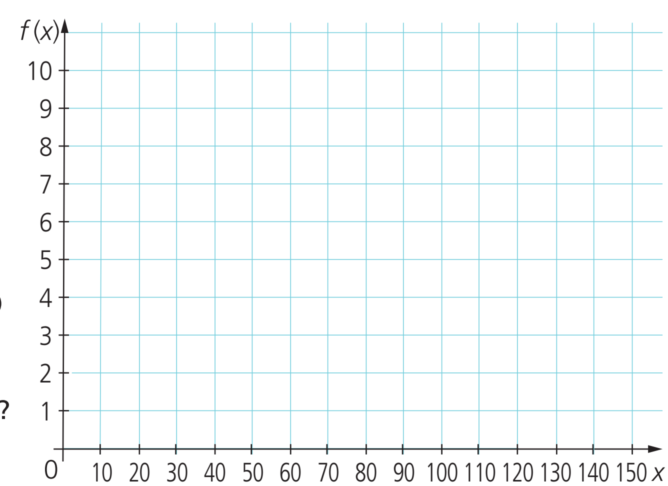
3. a. Recopier le repère ci-contre.

b. À l'aide des valeurs du tableau, tracer une représentation graphique de la fonction f.

> La courbe obtenue s'appelle une **parabole**.

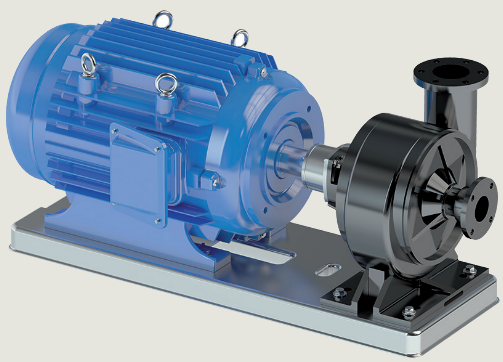
4. Déterminer, à l'aide de la représentation graphique tracée, la valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint son minimum.

5. Quelle est la vitesse à laquelle la consommation d'essence de ce modèle de voiture sera minimale ?



Pompe submersible

Objectifs : Lire des images et des antécédents – Reconnaître l'expression d'une fonction

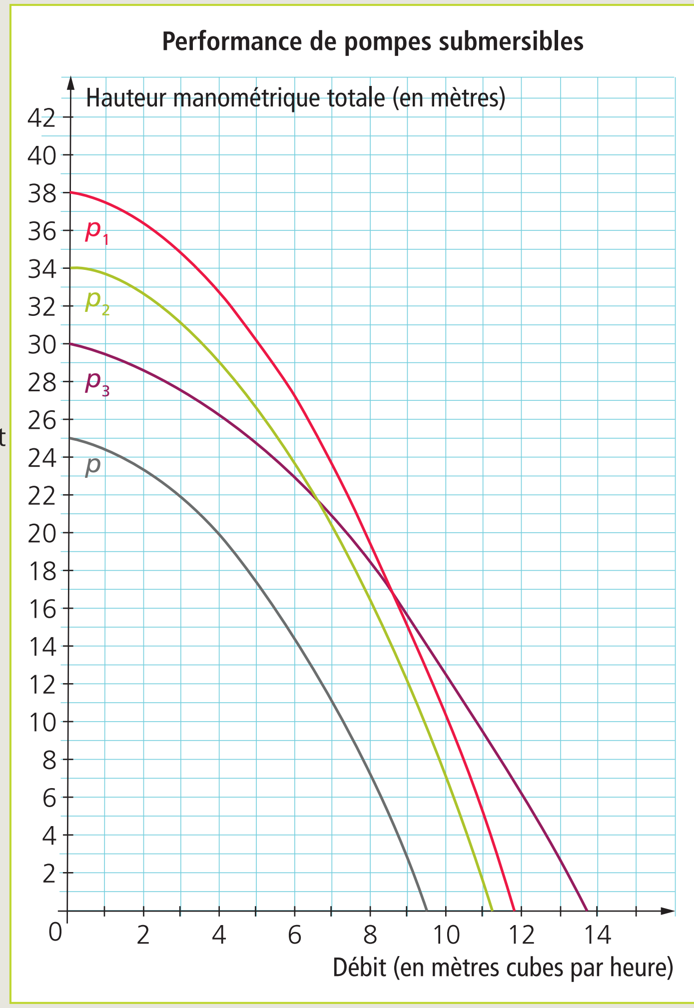


Pour puiser de l'eau pour l'irrigation, la pisciculture, les fontaines, etc., on a besoin de pompes. Elles permettent de transporter de l'eau d'un endroit à l'autre. Si elles sont plongées dans l'eau, elles sont dites submersibles.

Un maraîcher possède un puits et souhaite utiliser une pompe pour remplir une réserve d'eau. Sur un catalogue, il a le choix entre quatre modèles et souhaite acheter celui qui correspond le mieux à ses besoins journaliers.

Les performances des pompes sont représentées sur le graphique ci-contre, qui donne la hauteur manométrique totale (en mètres) en fonction du débit d'eau (en mètres cubes par heure).

La hauteur manométrique totale est égale à la somme de la longueur entre la pompe et la réserve d'eau (L) et la hauteur (H) de dénivelé entre la pompe et la réserve d'eau : HMT = $L + H$.



1. Pour un débit de 5 m³/h, quelles sont les hauteurs manométriques totales minimales et maximales que les quatre pompes proposent ?

2. Pour une hauteur manométrique totale de 23 m, déterminer le débit minimal, puis le débit maximal possible.

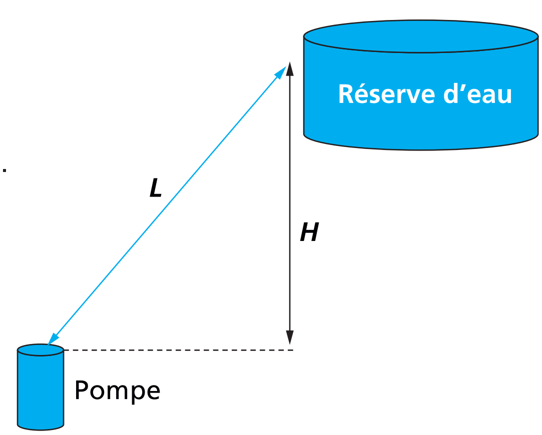
3. Quelle est la représentation graphique qui tient compte le mieux des deux contraintes des questions **2** et **3** (débit de 5 m³/h et HMT = 23 m) ?

4. Parmi les équations ci-dessous, laquelle représente la courbe p_2 ?

a. $y = -0{,}125x + 30$.

b. $y = -0{,}125x^2 + 30$.

c. $y = -0{,}125x^2 - 0{,}45x + 30$.



ACTIVITÉ 3

Jet d'eau

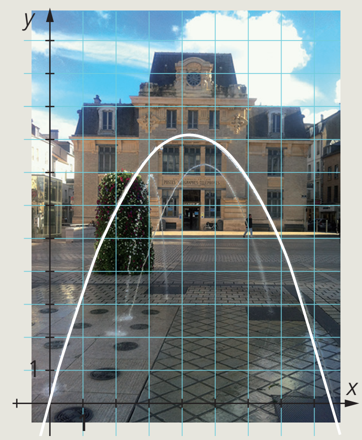
Objectifs : Lire graphiquement et modéliser à l'aide d'une parabole

Le jet d'eau de la place Marché-Neuf, à Saint-Germain-en-Laye, prend l'allure d'une parabole d'équation :
$y = -\frac{9}{20}x^2 + \frac{77}{20}x$, où :

- y est la hauteur de l'eau.
- x est la distance en partant de la source du jet, vers sa chute.

Sur le repère orthonormé tracé sur la photo, 1 unité représente 1 m. L'origine du repère est placée à la source du départ de l'eau.

Le jet d'eau



La parabole d'équation $y = -\frac{9}{20}x^2 + \frac{77}{20}x$

1. Déterminer, en utilisant le repère donné, et selon la précision permise par le graphique :
a. la hauteur maximale, en mètres, atteinte par l'eau (on appellera cette hauteur y_{Max}) et x, l'abscisse qui correspond à cette hauteur (on la notera : $x_{HauteurMax}$) ;
b. la distance entre la source du départ de l'eau et la chute de l'eau sur le sol : x_{Max} ;
c. la valeur de x pour laquelle le jet d'eau atteint pour la première fois 3 m.

2. Un jeune éléphant et son howdah (sorte de nacelle pour transporter des gens) ont une dimension totale de 3,40 m de haut et 1,50 m de large.
Peuvent-ils passer sous le jet d'eau sans s'éclabousser ?

3. Un jeune pilote veut faire passer son drone sous le jet d'eau de Saint-Germain-en-Laye.
À quelle hauteur maximale peut-il piloter sans éclabousser sa machine sachant que celle-ci a une envergure de 2,05 m ?

4. Pour retrouver les résultats des questions **1**, **2** et **3** par le calcul, on étudie la fonction f définie pour tout nombre réel par l'expression : $f(x) = -\frac{9}{20}x^2 + \frac{77}{20}x$.
a. Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{77}{9}\right)$. À quoi correspondent ces deux valeurs ?
b. Démontrer que $f(x) = -\frac{9}{20}\left(x - \frac{77}{18}\right)^2 + \frac{5\,929}{720}$.
c. Donner le signe de l'expression : $-\frac{9}{20}\left(x - \frac{77}{18}\right)^2$.
d. En déduire le maximum de la fonction f.
e. Pour quelle valeur de f ce maximum est-il atteint ?
f. Utiliser cette modélisation pour expliquer les résultats trouvés dans les questions **1**, **2** et **3**.

1 Fonctions polynomiales du second degré

A. Définition

Une fonction polynomiale du second degré est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

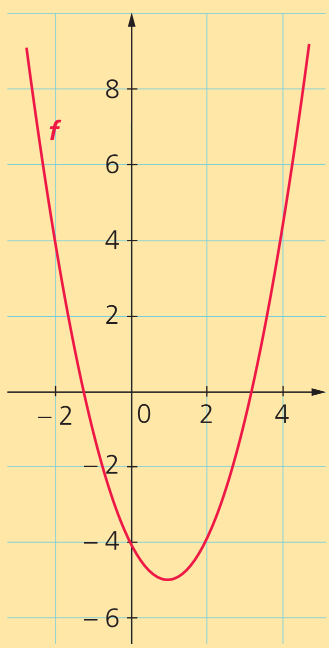
Les **coefficients** a, b et c sont des nombres réels fixés et le coefficient a est nécessairement non nul.

B. Représentation graphique et tableau de variations

La représentation graphique d'une fonction polynomiale du second degré est une **parabole**.

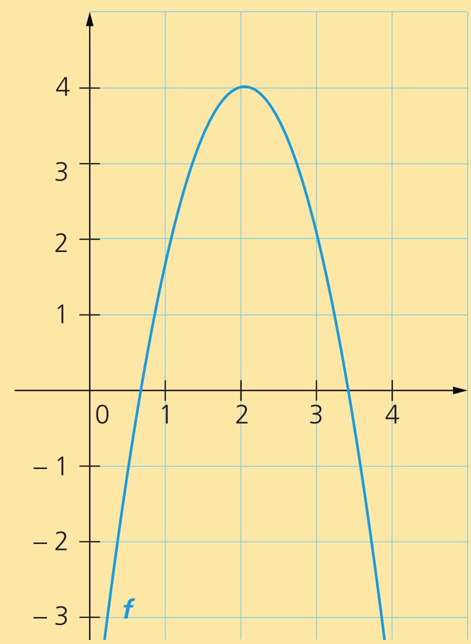
Les **coordonnées de son sommet** sont $(x_0\,;\,f(x_0))$ avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $f(x_0) = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-b^2}{4a} + c$.

Si $a > 0$



x	$-\infty$	$x_0 = 1$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(x_0) = -5$	↗

Si $a < 0$



x	$-\infty$	$x_0 = 2$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(x_0) = 4$	↘

À partir de son expression algébrique $ax^2 + bx + c$, on peut calculer la valeur d'une fonction polynomiale du second degré pour tout nombre x réel ; **il n'y a pas de contrainte de restriction de l'ensemble de définition d'une fonction polynomiale du second degré**.

APPLICATIONS

Application 1

Pour chacune des fonctions polynomiales suivantes de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, identifier les coefficients a, b et c :

$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ $\quad$ $g(x) = x^2 + x + 1$ $\quad$ $h(x) = 4x^2 - 7x + 10$ $\quad$ $j(x) = -x^2 - 9$

$k(x) = x^2$ $\quad$ $m(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 8$ $\quad$ $p(x) = 7x^2 + 7x$ $\quad$ $q(x) = 1 + 2x - 3x^2$

Correction

Fonction	f	g	h	j	k	m	p	q
a	2	1	4	–1	1	0,5	7	–3
b	3	1	–7	0	0	2	7	2
c	5	1	10	–9	0	–8	0	1

Application 2

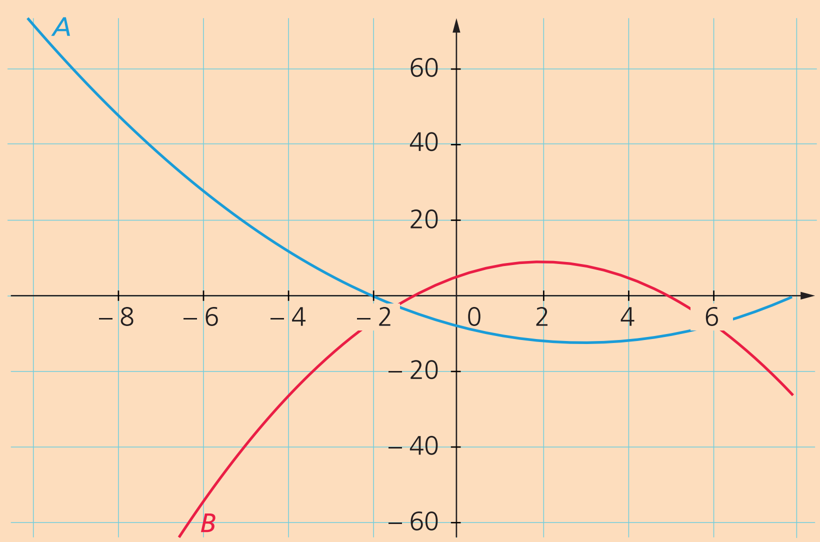
Soit les fonctions f et g définies sur $[-10 ; 8]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x - 8$ et $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

Les représentations graphiques des fonctions f et g sont tracées dans le repère ci-contre.

1. **Associer les fonctions f et g à la courbe représentative correspondante.**

2. **Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole pour chacune des deux courbes.**

3. **Dresser le tableau de variations des fonctions f et g.**



Correction

1. La fonction f correspond à la courbe A et la fonction g à la courbe B. En effet, **le coefficient a de f est positif** alors que celui de g est négatif.

2. Le sommet de la parabole A est **(3 ; –12,5)**.

Le sommet de la parabole B est **(2 ; 9)**.

x	-10		3		8
$f(x)$	72	$\searrow$	$-12{,}5$	$\nearrow$	0

x	-10		2		8
$g(x)$	-135	$\nearrow$	9	$\searrow$	-27

2 Résolutions d'équations du second degré

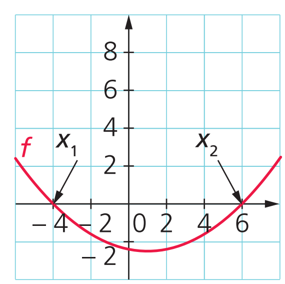
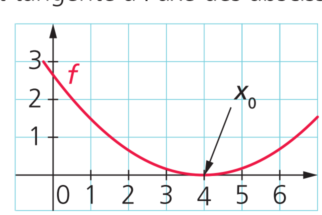
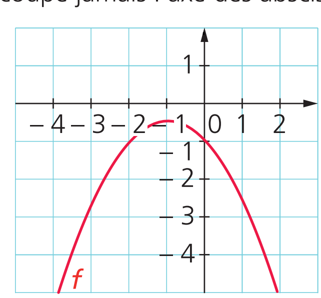
On appelle équation du second degré une équation algébrique de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et a non nul.

On appelle **discriminant** de l'équation du second degré le nombre noté Δ et calculé à partir des coefficients de l'équation : $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Le nombre de solutions d'une équation du second degré dépend uniquement du signe de son discriminant Δ :

- **Si $\Delta > 0$**, l'équation a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- **Si $\Delta = 0$**, l'équation a une solution réelle unique : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- **Si $\Delta < 0$**, l'équation n'a pas de solution réelle.

On dit ici que x_0 est une **solution double**.

<table>
<tr><th>Résolution algébrique</th><th>Interprétation graphique</th></tr>
<tr><td>Si $\Delta > 0$,
il existe deux solutions réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>La représentation graphique de la fonction polynomiale coupe deux fois l'axe des abscisses.

</td></tr>
<tr><td>Si $\Delta = 0$,
il existe une solution double :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$</td><td>La représentation graphique de la fonction polynomiale est tangente à l'axe des abscisses.

</td></tr>
<tr><td>Si $\Delta < 0$,
il n'existe aucune solution réelle.</td><td>La représentation graphique de la fonction polynomiale ne coupe jamais l'axe des abscisses.

</td></tr>
</table>

Application 3

Soit les équations du second degré suivantes :

- $0{,}5x^2 - 3x - 8 = 0$.
- $9x^2 + 6x + 1 = 0$.
- $x^2 + 2x + 5 = 0$.

1. Identifier les coefficients a, b et c de chacune des équations.
2. Calculer la valeur du discriminant Δ de chacune des équations.
3. Résoudre les équations.

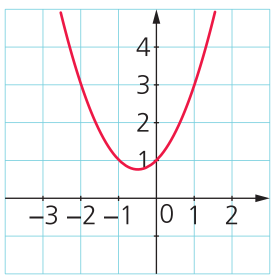
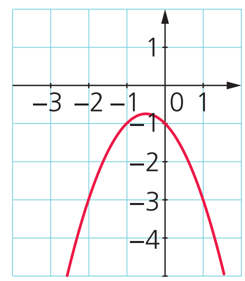
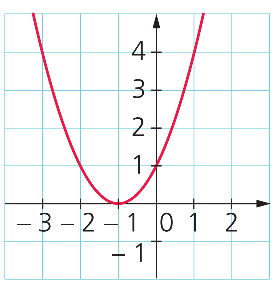
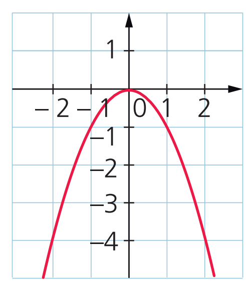
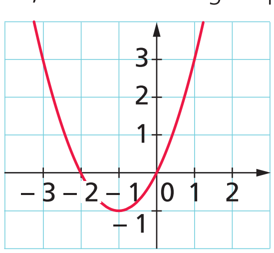
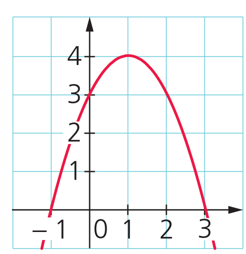
Correction

Équation à résoudre	Identification des coefficients	Calcul de Δ	Signe de Δ	Solutions
$0{,}5x^2 - 3x - 8 = 0$	$a = 0{,}5$ $b = -3$ $c = -8$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 0{,}5 \times (-8) = 25$	$\Delta > 0$	L'équation admet **deux solutions** : $x_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 0{,}5} = -2$ $x_2 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 0{,}5} = 8$
$9x^2 + 6x + 1 = 0$	$a = 9$ $b = 6$ $c = 1$	$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$	$\Delta = 0$	L'équation admet **une solution double** : $x_0 = \dfrac{-6}{2 \times 9} = -\dfrac{1}{3}$
$x^2 + 2x + 5 = 0$	$a = 1$ $b = 2$ $c = 5$	$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$	$\Delta < 0$	L'équation n'admet **pas de solution**.

3 Signe d'un polynôme du second degré

Soit un polynôme du second degré de la forme $P(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et c des nombres réels et a non nul. À un polynôme du second degré P, on peut associer l'équation du second degré $P(x) = 0$. L'étude des solutions de cette équation permet de déterminer le signe du polynôme P pour chaque valeur de x.

Un polynôme du second degré est parfois appelé **trinôme du second degré**.

	Si $a > 0$	Si $a < 0$
Si $\Delta < 0$	Le trinôme est toujours strictement positif : il est du même signe que a. 	Le trinôme est toujours strictement négatif : il est du même signe que a. 
Si $\Delta = 0$	Le trinôme est toujours positif : il est du même signe que a, à l'exception de la valeur qui l'annule. 	Le trinôme est toujours négatif : il est du même signe que a, à l'exception de la valeur qui l'annule. 
Si $\Delta > 0$	Le trinôme est du signe de $-a$ entre les valeurs qui l'annulent, et du même signe que a sinon. 	Le trinôme est du signe de $-a$ entre les valeurs qui l'annulent, et du même signe que a sinon. 

4 Factorisation d'un polynôme du second degré

Si le discriminant Δ du trinôme $ax^2 + bx + c$ est positif ou nul, alors ce polynôme peut être **factorisé** :

- **Si $\Delta = 0$** : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right)^2.$
- **Si $\Delta > 0$** : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$

Application 4

1. **Factoriser le trinôme du second degré suivant : $2x^2 - 22x + 56$.**
2. **Étudier son signe à l'aide d'un tableau de signes.**
3. **Vérifier que le résultat obtenu à partir du tableau de signes correspond bien à la règle : « le trinôme est du signe de a à l'extérieur des valeurs qui l'annulent ».**

Les valeurs de x qui annulent un trinôme du second degré sont appelées les **racines** du trinôme.

Correction

1. ● On Calcule le discriminant de l'équation $2x^2 - 22x + 56$: $\Delta = (-22)^2 - 4 \times 2 \times 56 = 484 - 448 = \mathbf{36}$.

● Δ est strictement positif et $\sqrt{\Delta} = 6$.

Donc $x_1 = \dfrac{-(-22) - \sqrt{36}}{2 \times 2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-(-22) + \sqrt{36}}{2 \times 2} = 7$.

Donc $2x^2 - 22x + 56 = \mathbf{2\,(x - 4)(x - 7)}$.

2. Tableau de signes :

x		4	7	
$a = 2 > 0$	+		+	+
Signe de $(x - 4)$	–		+	+
Signe de $(x - 7)$	–		–	+
Signe de $2x^2 - 22x + 56$	+		–	+

3. Le trinôme $2x^2 - 22x + 56$ est **positif pour x inférieur à 4 et x supérieur à 7**.
Les valeurs 4 et 7 correspondent aux **racines** du trinôme et le coefficient a de celui-ci vaut 2, donc est strictement positif : le trinôme $2x^2 - 22x + 56$ est bien « du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

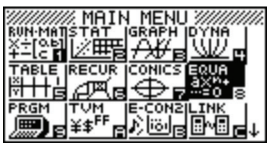
Résoudre une équation du second degré

Trouvez la (ou les) solution(s) de l'équation du second degré suivante : $x^2 + 3x + 2 = 0$.

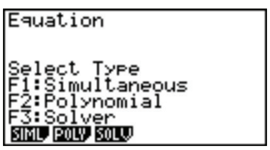
Comment résoudre le problème à l'aide de sa calculatrice ?

Avec une Casio

– Aller dans le menu EQUA.

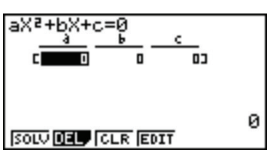


– Choisir POLY, comme « polynôme ».

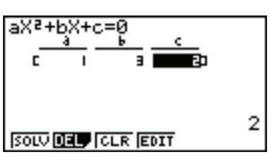


– Choisir 2, comme « second degré ».

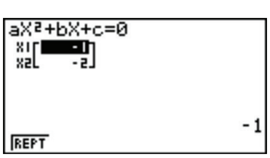
– Entrer les coefficients *a*, *b* et *c* du trinôme.



– Appuyer sur SOLV.

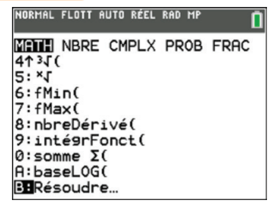


– Relever les solutions.

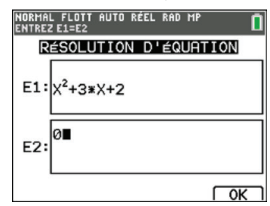


Avec une Texas Instruments

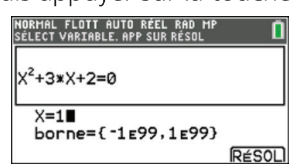
– Appuyer sur la touche MATH de la calculatrice et aller dans Résoudre.



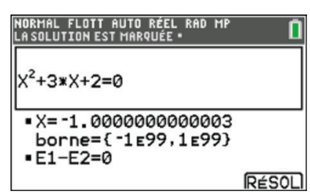
– Saisir l'équation, puis appuyer sur la touche OK.



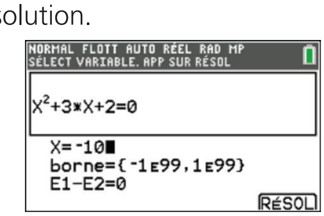
– Saisir un nombre quelconque pour *x* (l'algorithme de la calculatrice a besoin d'une valeur initiale de départ), puis appuyer sur la touche RéSOL.



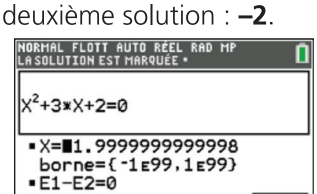
– Relever la première solution : **–1**.



– Entrer un autre nombre quelconque pour *x*, la valeur initiale de départ pour une éventuelle deuxième solution.



– Relever la deuxième solution : **–2**.



Tabuler les valeurs d'un trinôme du second degré

On veut pouvoir déterminer les valeurs de n'importe quel polynôme du second degré P donné, pour un grand nombre de valeurs de x.

1. Comment faire pour ne pas avoir à recommencer la totalité du travail chaque fois que l'on doit changer de polynôme ?

2. Comment calculer, de façon automatique, un grand nombre de valeurs de $P(x)$?

Comment résoudre le problème à l'aide d'un tableur ?

1. Pour tabuler les valeurs d'un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on va :

- Choisir trois cellules où entrer les valeurs de a, b et c.
- Choisir une ligne pour saisir les différentes valeurs de x.
- Entrer une fonction permettant de calculer la valeur de $ax^2 + bx + c$ pour chaque x choisi.

SOMME | =$B2*D2^2+$B3*D2+$B4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Coefficients								
2	*a*	1	*x*	-5	-4	-2	-1	0	1
3	*b*	2	*f*(*x*)	=$B2*D2^2+$	3	-5	-6	-5	-2
4	*c*	-5							
5									

Les valeurs de x sont sur la ligne 2 et les valeurs à calculer pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont sur la ligne 3.

Dans cet exemple : a, b et c sont respectivement placés dans les cellules **B2**, **B3** et **B4**.

2. Dans la cellule D3, on tape la formule suivante : = $B2*D2^2+$B3*D2+$B4 avant de la copier sur le reste de la ligne.

Dans la formule saisie, le symbole **$** devant les cellules **B2**, **B3** et **B4** exprime le fait que, dans un trinôme du second degré, les coefficients a, b et c sont **fixés**. En effet, lorsque l'on copie la formule sur les cellules suivantes de la ligne 3, seule la valeur **D2** doit être incrémentée en **E2**, **F2**, **G2**, etc.

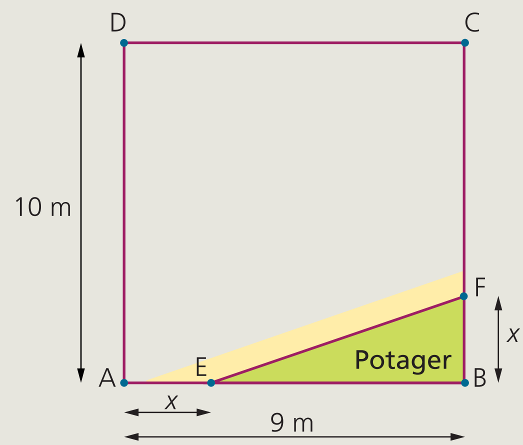
Dans cet exemple, on a la tabulation du trinôme $x^2 + 2x - 5$ pour 7 valeurs différentes de x.

On peut constater qu'aucune des valeurs de x choisies n'est une **racine** de ce trinôme, mais qu'une de ses racines est comprise entre -4 et -2 et que l'autre est comprise entre 1 et 10.

Optimiser la superficie d'un potager

M. Jean possède un jardinet en zone urbaine de forme rectangulaire de 10 m sur 9 m. Il souhaite créer un potager dans un coin de ce jardinet délimité par des pavés.
La contrainte suivante lui est imposée : la distance AE doit être égale à la distance BF.

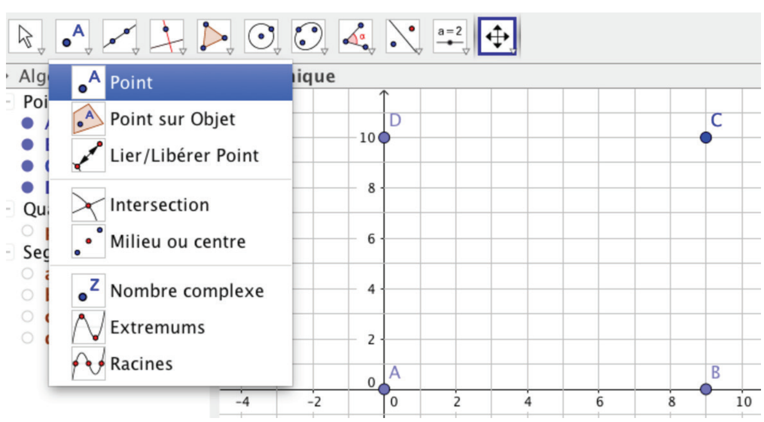
Quelle est la plus grande superficie de potager possible ?



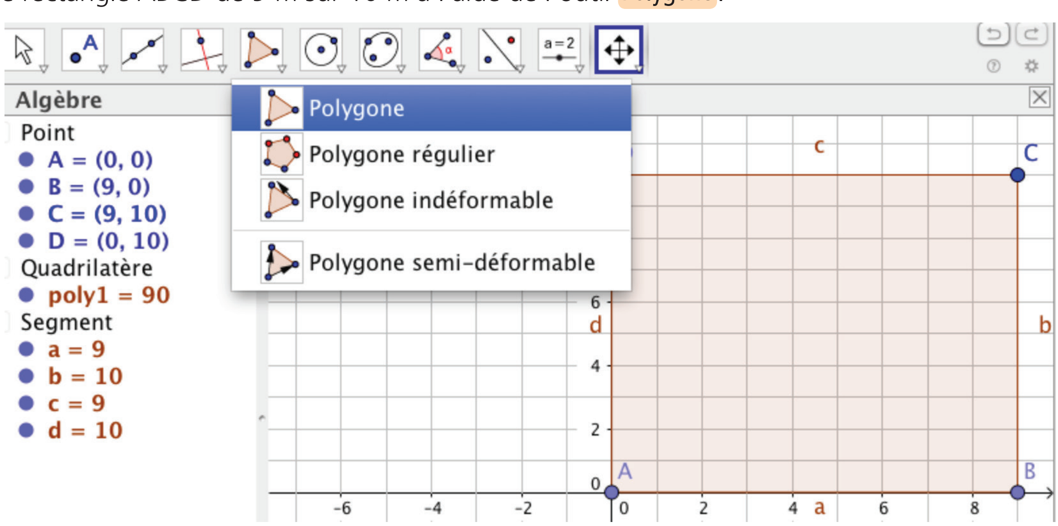
Comment résoudre le problème à l'aide de GeoGebra ?

On cherche d'abord à représenter le plan du potager sous GeoGebra.

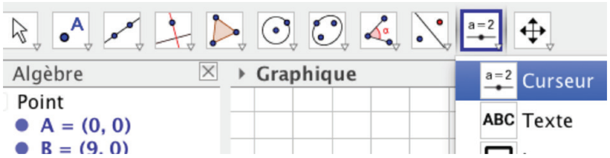
- Placer les 4 points A, B, C et D à l'aide du quadrillage.

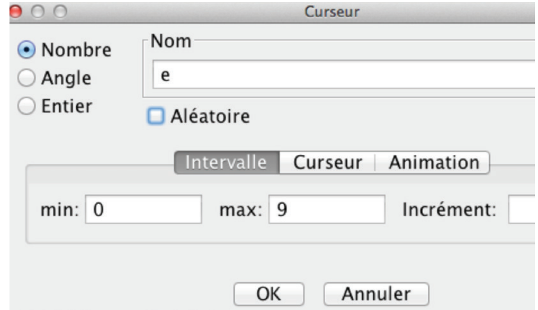


- Relier le rectangle ABCD de 9 m sur 10 m à l'aide de l'outil Polygone.

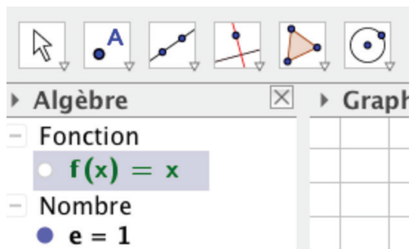


- Utiliser un curseur variant de 0 à 9.





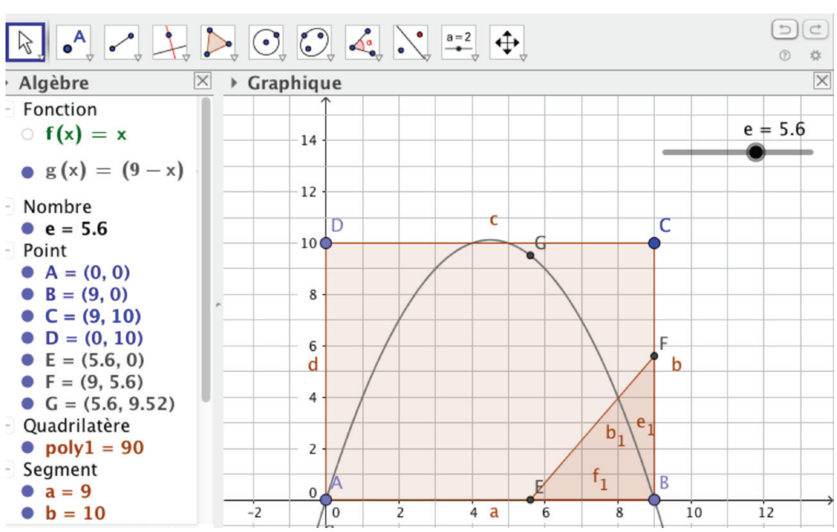
- Dans la zone Saisie, saisir x pour ajouter la fonction $f(x) = x$, puis la décocher pour qu'elle ne soit pas tracée.



- Dans la zone Saisie, placer le point E en saisissant : =(f(e),0).
- Dans la zone Saisie, placer le point F, en saisissant : =(9,f(e)).
- À l'aide de l'outil Polygone, tracer le triangle BEF. Son aire s'affiche dans la zone Algèbre/Triangle.
- Observer qu'en pointant le curseur et en le faisant varier de 0 à 9, l'aire du triangle BEF, c'est-à-dire celle du potager, varie.
- Conjecturer pour quelle valeur de x la surface du potager est maximale.
- Pour vérifier cette conjecture, on exprime algébriquement la surface du potager :

$$\text{Aire triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(9 - x) \times x}{2}$$

- Dans la zone Saisie, saisir la fonction $g(x) = \dfrac{(9 - x) \times x}{2}$.
- Placer un point G de coordonnées $(e,g(e))$.



- En faisant varier le curseur, placer le point G au sommet de la courbe représentative de la fonction g. Relever alors la valeur du curseur.
- Vérifier que cette valeur correspond à celle conjecturée précédemment.
- En déduire la surface maximale du potager en précisant pour quelle distance AE elle est obtenue.

S'AUTOÉVALUER

Question 1

Choisissez le triplet de coefficients (a ; b ; c) correspondant au trinôme du second degré $2x^2 - x$:

a. (2 ; 1 ; 0) **b.** (2 ; –1 ; 1) **c.** (1 ; –1 ; 0) **d.** (2 ; –1 ; 0) **e.** (x^2 ; x ; 0)

Question 2

Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = -2x^2 + 4x - 2$?

a. (–2 ; 4) **b.** (1 ; 0) **c.** (0 ; 0) **d.** (0 ; 1) **e.** (–2 ; –2)

Question 3

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a. Un trinôme du second degré est toujours strictement positif.

b. Un trinôme du second degré qui s'annule deux fois change forcement de signe sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.

c. Un trinôme du second degré peut s'annuler pour trois valeurs différentes de x.

d. Le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx$ est un trinôme du second degré.

e. Le polynôme $(x - 5)(x + 6)$ est un trinôme du second degré.

f. Les polynômes $144(x + 6)(x - 6)$ et $-2(x - 5)(x + 6)$ ont les mêmes racines.

Question 4

Quel est le discriminant du trinôme du second degré : $4x^2 - 4x - 1$?

a. $\Delta = 0$ **b.** $\Delta = -4$ **c.** $\Delta = 32$ **d.** $\Delta = -32$ **e.** $\Delta = -1$

Question 5

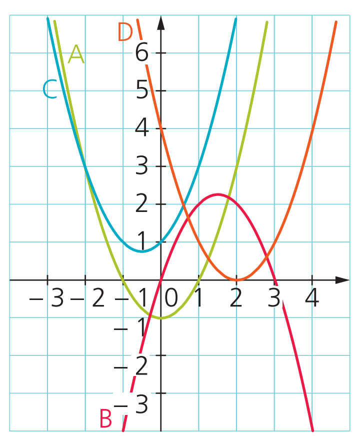
Associez chaque courbe à son expression algébrique :

a. $f(x) = x^2 + x + 1$.

b. $g(x) = -x^2 + 3x$.

c. $h(x) = x^2 - 1$.

d. $k(x) = x^2 - 4x + 4$.



Question 6

Quelle est l'expression factorisée du trinôme : $5x^2 - 35x + 60$?

a. $(x - 3)(x - 4)$.

b. $5(x - 35)(x + 60)$.

c. $5(x - 3)(x - 4)$.

d. Ce trinôme du second degré n'est pas factorisable.

e. $5(x - 3{,}5)^2$.

► Réponses p. 160.

S'ENTRAÎNER

Appliquer le cours

Exercice 1 Reconnaître des fonctions du second degré

Identifier les fonctions du second degré parmi les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 5$.

2. $f(x) = -5x^2 + 3x - 2{,}5$.

3. $f(x) = -0{,}005x^2 - 2{,}7x + \pi$.

4. $f(x) = \dfrac{-x^2}{5} + 2$.

5. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - 7x + 2{,}72$.

6. $f(x) = x(1{,}12x + 2)$.

7. $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

8. $f(x) = 1{,}7x^7 - 5{,}3x^2 - 2{,}10^2$.

Exercice 2 Identifier les coefficients d'un trinôme

Pour chacune des fonctions du second degré suivantes, donner la valeur des coefficients *a*, *b* et *c*.

1. $f(x) = 2{,}5x^2 - 32x + 24$.

2. $f(x) = -0{,}24x^2 + 7x + 19$.

3. $f(x) = -5{,}7x - 51x^2 + 13$.

4. $f(x) = 6x^2 - 17x$.

5. $f(x) = \dfrac{5}{7}x^2 - x + 4$.

6. $f(x) = x^2 - 12$.

7. $f(x) = \sqrt{11}x^2 - 5{,}7x - \dfrac{1}{3}$.

8. $f(x) = 0{,}002x^2 - x - 1$.

Exercice 3 Calcul d'image

Déterminer l'image de 0 pour les fonctions du second degré suivantes :

1. $f(x) = 5{,}10^7 x^2 - 5{,}7x + 2$.

2. $f(x) = 3x\left(5x - \dfrac{6}{7}\right)$.

3. $f(x) = -2x^2 - 21$.

4. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{5}$.

Exercice 4 Étude de fonctions

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [–6 ; 2] par $f(x) = x^2 + 4x - 3$.

1. Calculer l'extremum (minimum ou maximum) de la fonction *f*.

2. Déterminer les variations de la fonction *f*.

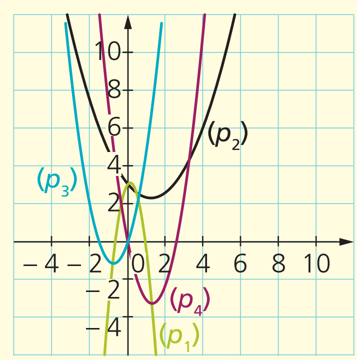
3. En déduire le tableau de variations.

4. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction *f*.

5. Répondre aux questions **1**, **2**, **3** et **4** avec la fonction *g* définie sur l'intervalle [–3 ; 2] par $g(x) = 2{,}5x^2 - 3x + 4{,}1$.

Exercice 5 Reconnaître une représentation graphique

Associer chaque parabole à son équation.



1. $y = 0{,}5x^2 - 1{,}2x + 3$.

2. $y = -5x^2 + 1{,}2x + 3$.

3. $y = 2x^2 - 5x$.

4. $y = 2x^2 + 3x$.

Exercice 6 Construire un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice

La fonction *f* est définie sur l'intervalle [–3 ; 10] par $f(x) = 0{,}3x^2 + 2x - 7$.

1. Construire un tableau de valeurs de –3 à 10 avec un pas de 0,5.

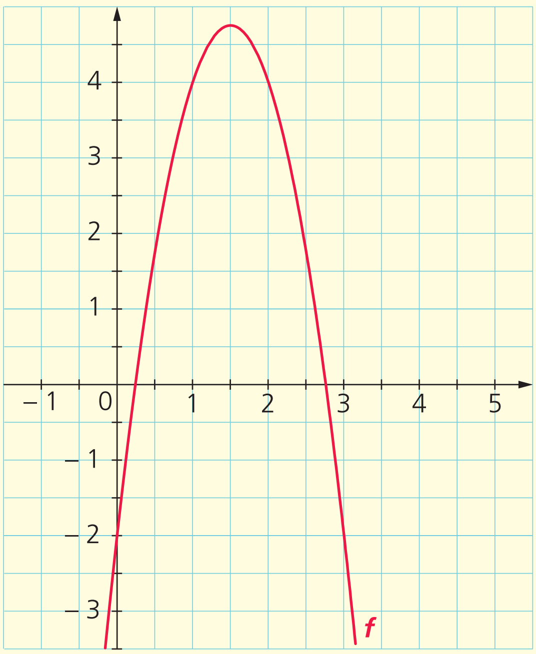
2. Le tableau de valeurs permet-il de déterminer l'extremum ?

3. Répondre aux questions **1** et **2** avec la fonction *g* définie sur l'intervalle [–3 ; 2] par $g(x) = 5x^2 + 12x + 7$.

S'ENTRAÎNER

Exercice 7 Résolution graphique d'équations

La parabole représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 4]$ par $f(x) = 3x^2 + 9x - 2$ est donnée ci-dessous.



Résoudre graphiquement les équations suivantes :

1. $f(x) = 0$.

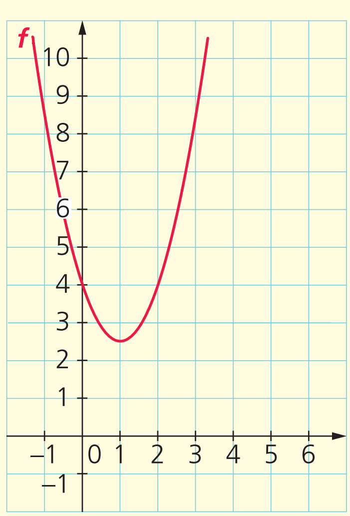
2. $f(x) = 2$.

3. $f(x) = -2$.

4. $f(x) = 5$.

Exercice 8 Résolution graphique d'inéquations

La parabole représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par $f(x) = 1,5x^2 - 3x + 4$ est donnée ci-dessous.



Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

1. $f(x) < 0$.

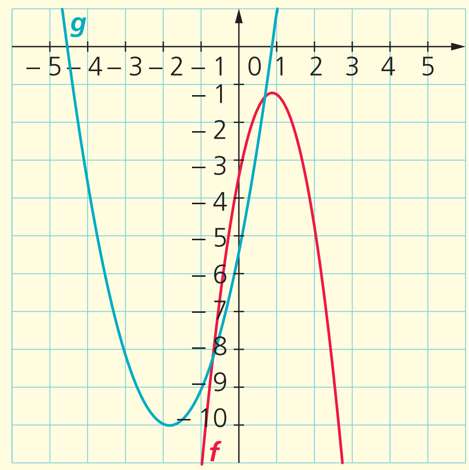
2. $f(x) > 2$.

3. $f(x) > 2,5$.

4. $f(x) \geqslant 8,5$.

Exercice 9 Comparaison de fonctions

Ci-dessous sont représentées la fonction f et la fonction g définies sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.



Résoudre graphiquement :

1. $f(x) = g(x)$.

2. $f(x) < g(x)$.

Exercice 10 Calcul de discriminants

Après avoir identifié les coefficients a, b et c des équations suivantes, calculer leur discriminant :

1. $3x^2 + 1,3x + 7 = 0$.

2. $-5x^2 + 3x + 2 = 0$.

3. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

4. $6x^2 + 7x - 11 = 0$.

5. $-x^2 - 2x + 7 = 0$.

6. $11x^2 - 3x - 2 = 0$.

7. $-2x^2 + x - 1 = 0$.

8. $5x^2 = 0,5x + 1$.

Exercice 11 Résolution algébrique d'équations

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $39x^2 - 15x + 2 = 0$.

2. $-3x^2 + 5x + \frac{2}{3} = 0$.

3. $x^2 = -4x - 4$.

4. $5 = x^2 + 4x$.

Exercice 12 Signe du polynôme du second degré

On veut étudier le signe d'un polynôme du second degré, c'est-à-dire déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fonction polynomiale est positive et la valeur de x pour lesquelles elle est négative.
Soit un polynôme du second degré défini par :

$$P(x) = 23x^2 + 6x - 17$$

1. À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $23x^2 + 6x - 17 = 0$.

2. En déduire le signe du polynôme du second degré.

3. Répondre aux questions **1** et **2** avec les polynômes $Q(x) = -2x^2 + 4x + 6$, $R(x) = 3{,}5x^2 - 4{,}4x + 5{,}1$ et $S(x) = -x^2 + x - 3$.

Mobiliser ses connaissances

Exercice 13 Le four de cuisson solaire

Le four solaire parabolique a comme avantage son faible coût de fabrication et d'entretien. Un site d'hébergement touristique souhaite en installer pour sa clientèle. Le plan de coupe du four est une parabole dont l'équation, dans un repère orthonormé, est $y = \frac{1}{72}x^2 - \frac{4}{3}x + 32$.

x est compris entre 0 et 150 ou $x \in [0\ ;\ 150]$.
x représente la largeur du four et y représente la hauteur du four.

Les dimensions sont données en centimètres.

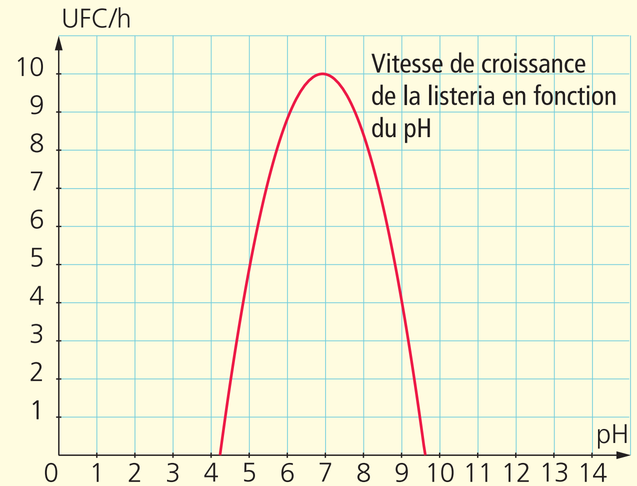
1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

2. Le four a une hauteur de 32 cm.
a. Résoudre l'équation $y = 32$.
b. En déduire la largeur du four.

3. Le foyer de cuisson se situe à une hauteur de 18 cm.
Calculer la largeur du four à cette hauteur.

Exercice 14 Sécurité alimentaire

Des modèles mathématiques permettent de prédire l'évolution des micro-organismes dans les aliments pour en assurer la sécurité microbiologique. Leur croissance dépend des facteurs environnementaux.
La listeria est très résistante dans l'environnement : sol, eaux des rivières, égouts, végétation en décomposition, ensilages avec une acidification insuffisante (origine de contamination de ruminants), excréments d'animaux contaminés. Cette bactérie peut provoquer la listériose.
L'étude ci-dessous donne la vitesse de croissance de la listeria monocytogène en fonction du pH pour une température donnée. La vitesse de croissance est donnée en unités formant colonies par heure de croissance des colonies de listeria (UFC/h).
Remarque : *une vitesse de croissance nulle ne signifie pas absence de colonie de listeria.*



1. Déterminer le pH ayant une vitesse de croissance maximale.

2. Il est préconisé de conditionner l'herbe ensilée avec un pH égal à 4.
Donner une explication de cette préconisation en lien avec la vitesse de croissance des colonies de listeria.

3. Le pH du roquefort est 4,7 et celui du gruyère est 6,2.
Déterminer la vitesse de croissance des colonies de listeria et comparer les résultats.

4. La fonction représentant la vitesse de croissance de la listeria en fonction du pH est donnée par la relation $f(x) = -1{,}37x^2 + 18{,}93x - 55{,}39$ sur l'intervalle $[4{,}2\ ;\ 9{,}6]$.
a. Déterminer par le calcul les valeurs de pH pour lesquelles la vitesse de croissance sera supérieure à 2 UFC/h.
b. Vérifier graphiquement le résultat.

Exercice 15 Distance de freinage

En décembre 2016, en Vendée, un gigantesque carambolage a eu lieu sur une voie rapide. L'accident a été provoqué par un épais brouillard rendant la visibilité inférieure à 50 m. On cherche à estimer à quelle vitesse un conducteur pouvait rouler en sécurité le jour de cet accident.
La distance d'arrêt DA en mètres d'un véhicule pour un conducteur vigilant dépend de la vitesse v du véhicule en mètres par seconde selon la relation suivante :
$DA = \frac{v^2}{17} + 2v$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 40] par l'expression algébrique $f(x) = \frac{x^2}{17} + 2x$.

Partie I

Un automobiliste qui n'a pas adapté sa vitesse aux conditions météorologiques roule à 130 km/h sur cette voie rapide, soit 36 m/s.

1. Vérifier qu'une vitesse de 130 km/h correspond bien à 36 m/s.

2. Calculer $f(36)$.

3. En déduire la distance d'arrêt de cet automobiliste.

4. Expliquer s'il conduit en sécurité.

Partie II

Plusieurs automobilistes interrogés après l'accident avaient adapté leur vitesse. L'automobiliste A a déclaré rouler à 110 km/h, le B à 50 km/h, le C à 70 km/h et le D, à 90 km/h.

5. Compléter le tableau de valeurs suivant.
On arrondira les résultats au mètre.

Automobiliste	A	B	C	D
Vitesse (km/h)	110	50	70	90
x	30	14	19	25
$f(x)$				

6. Dans le plan muni d'un repère orthogonal avec pour échelle 1 cm pour 2 m/s en abscisse et 1 cm pour 10 m en ordonnée, tracer la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f.

7. Lire graphiquement la vitesse à laquelle un automobiliste pouvait rouler en sécurité le jour de l'accident.

8. En déduire quel(s) automobiliste(s) respectai(en)t les règles de sécurité.

Partie III

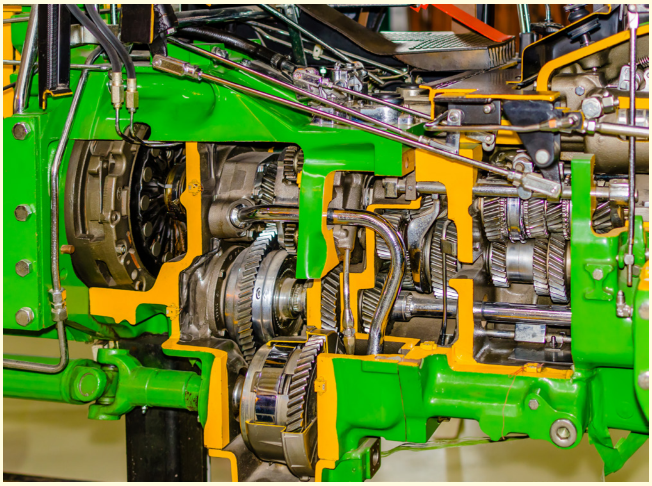
On veut retrouver le résultat de la question **3** de la **partie II** par le calcul.

9. Expliquer pourquoi résoudre l'équation $f(x) = 50$ permet de résoudre le problème.

10. Résoudre l'équation $\frac{x^2}{17} + 2x - 50 = 0$.

11. Conclure à quelle vitesse un automobiliste pouvait rouler en sécurité le jour de l'accident.

Exercice 16 Optimisation d'une production



Une entreprise fabrique des pièces détachées pour un tracteur. On se propose d'étudier graphiquement et algébriquement la rentabilité de fabrication de ces pièces pour une production maximale de 60 pièces.
Sur l'intervalle [0 ; 60], le coût total de production est donné, en milliers d'euros, par la relation $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ où q désigne le nombre de pièces détachées fabriquées.
Sur l'intervalle [0 ; 60], la recette globale, en milliers d'euros, est donnée par la relation $R(q) = 120q$.

Partie I

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant à 10^{-1} près.

q	0	10	20	30	40	50	60
$C(q)$							

2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Il a pour échelle en abscisse 1 m pour 5 unités et en ordonnée 1 cm pour 500 €.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction C dans un repère orthogonal.

3. Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{R}$ représentative de la fonction R.

4. Lire sur le graphique le nombre de pièces pour lequel le coût total est égal à la recette globale.

5. Indiquer à l'aide du graphique sur quel intervalle la production est rentable.

Partie II

6. Le bénéfice réalisé est donné par la relation :
$B(q) = C(q) - R(q)$.
Déterminer l'expression algébrique de la fonction $B(q)$.

7. Résoudre l'équation $x^2 - 55x + 450 = 0$.

8. Résoudre l'inéquation $x^2 - 55x + 450 > 0$.

9. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 17 Superficie maximale pour une clôture

On souhaite clôturer un champ rectangulaire ABCD à l'aide d'une clôture de 120 m.
On pose x = AB la largeur de ce rectangle.
On note $P(x)$ le périmètre du rectangle ABCD et $A(x)$ l'aire de ce rectangle.

Partie I

1. Démontrer que la longueur BC peut s'exprimer en fonction de x par BC = $60 - x$.

2. À quel intervalle de nombres réels appartient x ?

3. Exprimer l'aire A(x) en fonction de x.

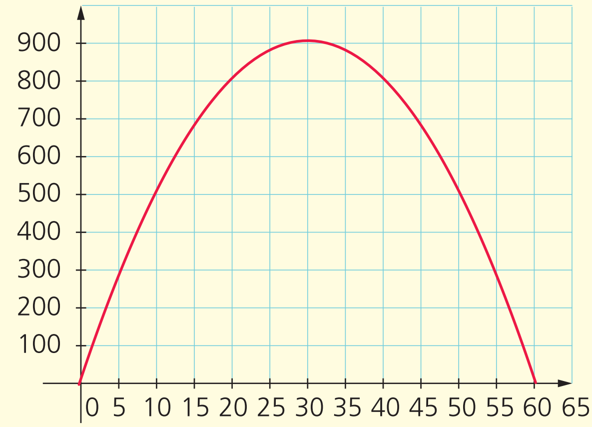
Partie II

On considère la fonction f définie sur [0 ; 60] par
$f(x) = -x^2 + 60\,x$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	10	20	30	40	50	60
$f(x)$		500				500	

2. Voici la représentation graphique de la fonction f.

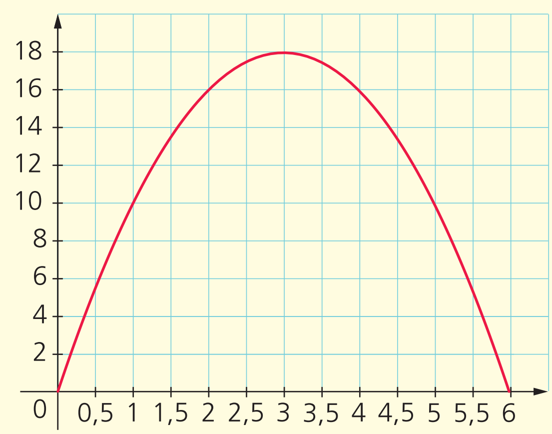


a. À l'aide du graphique, déterminer la surface maximale qu'on peut clôturer à l'aide d'une clôture de 120 m.
b. Résoudre graphiquement et algébriquement $f(x) < 500$.
c. Interpréter la solution de cette inéquation dans le cadre du champs à clôturer.

Exercice 18 Un lac dans un triangle

Partie I

On considère la fonction f définie sur [0 ; 6] par $f(x) = -2x^2 + 12x$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



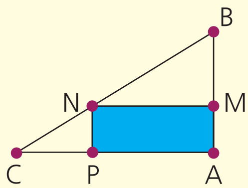
1. En utilisant la représentation graphique de f, dresser le tableau des variations de la fonction.

2. Donner la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum, puis donner la valeur de ce maximum.

3. Résoudre par le calcul : $f(x) = 0$.

Partie II

ABC représente un espace triangle rectangle en A tel que AB = 6 m et AC = 12 m. On souhaite creuser un lac rectangulaire AMNP dans cet espace :



M est un point quelconque du segment [AB] tel que BM = x.
N est le point de [BC] tel que (MN) est parallèle à (AC).
P est le point de [AC] tel que (NP) est parallèle à (AB).

1. En utilisant le théorème de Thalès, montrer que MN = $2x$.

2. Exprimer AM en fonction de x.

3. Déduire des questions précédentes l'aire A(x) du lac AMNP en fonction de x.

4. Justifier que $x \in]0\,;\,6[$ et vérifier qu'alors A(x) = $f(x)$ (f est la fonction étudiée dans la **partie I**).

5. Pour quelle valeur de x l'aire du lac AMNP est-elle maximale ?

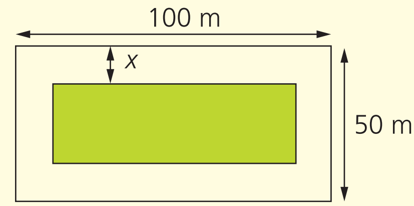
6. Pour quelle valeur de x le lac AMNP est-il un carré ?

Prendre des initiatives

Exercice 19 Calcul d'aire sous contraintes

Une communauté de communes décide de se doter d'une station d'épuration dans laquelle le traitement des eaux usées se fait par l'intermédiaire d'un filtre composé de roseaux. Ce type de station offre deux avantages : elle est peu coûteuse et elle présente une bonne intégration écologique.

L'implantation de la station se fera sur une parcelle de forme rectangulaire ; il est nécessaire de conserver une bordure de largeur x tout autour de la surface plantée de roseaux comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



Pour satisfaire les besoins de la communauté de communes, il est nécessaire que la surface plantée ait une superficie de 4 000 m^2.
Dans ces conditions, quelle devra être la valeur de x ?

Exercice 20 Sortie scolaire

Une classe de première professionnelle veut organiser une sortie de fin d'année et doit, pour cela, louer un bus. Le montant total des frais de transport s'élève à 120 €. Au dernier moment, quatre élèves de la classe sont dans l'impossibilité de participer à cette sortie, et le coût par élève du transport se retrouve augmenté de 1 €.
À partir de ces informations, peut-on déterminer le nombre d'élèves dans cette classe ?

INDICE
Il faut modéliser la situation à l'aide d'une équation en choisissant comme inconnue le nombre d'élèves de la classe ou le nombre d'élèves participant à la sortie et exprimer, de deux façons différentes, le coût du transport par élève.

Exercice 21 Réductions successives

Une production a baissé de x % il y a deux ans.
Elle a de nouveau baissé de x % l'année suivante.
Sur deux ans, la production a été divisée par 2.
Déterminer le taux de diminution annuelle.

POUR ALLER PLUS LOIN

Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré

Compléter le tableau suivant :

Équation	Discriminant	x_1	x_2	Somme $S = x_1 + x_2$	Produit $P = x_1 \times x_2$
$x^2 - 7x + 10 = 0$					
$x^2 + 6x - 40 = 0$					
$x^2 - 3x = 0$					
$x^2 - 100 = 0$					

Deux nombres réels x_1 et x_2 (distincts ou non) sont toujours solutions des équations $x^2 - Sx + P = 0$ et $ax^2 - aSx + aP = 0$ pour tout réel a non nul. Avec : $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$.

Exemple : Quelles sont les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre fait 700 m et la superficie 30 000 m² (3 ha) ?

Résolution : On pose x_1 = longueur du champ et x_2 = largeur du champ. Le périmètre du champ est égal à : $(x_1 + x_2) \times 2 = 2S = 700$.
La superficie du champ est égale à : $x_1 \times x_2 = P = 30\,000$.

x_1 et x_2 sont donc les solutions de l'équation du second degré : $x^2 - \frac{700}{2}x + 30\,000 = 0$.

$\Delta = 350^2 - 4 \times 1 \times 30\,000 = 2\,500$ et donc : $x_1 = \frac{-(-350) - \sqrt{2\,500}}{2} = 150$ et $x_2 = \frac{-(-350) + \sqrt{2\,500}}{2} = 200$.

Équation se ramenant à des équations du second degré

Exemple : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Résolution : On procède à un changement de variable en posant $y = x^2$.

- On résout l'équation du second degré $y^2 - 13y + 36 = 0$.

  $\Delta = 169 - 144 = 25$ $\quad y_1 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = 4$ $\quad y_2 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = 9$

- On résout les équations $x^2 = 4$ et $x^2 = 9$, ce qui donne les solutions :
  $x_1 = -2$ $\quad x_2 = 2$ $\quad x_3 = -3$ $\quad x_4 = 3$

Exemple : $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$.

Résolution : On pose $y = \sqrt{x}$ et on résout l'équation du second degré : $y^2 - 5y + 4 = 0$.
$\Delta = 25 - 16 = 9$ et $y_1 = 1$ et $y_2 = 4$ et donc $x_1 = \sqrt{1} = 1$ et $x_2 = \sqrt{4} = 2$.

Exemple : $x - 2 + \frac{1}{x} = 0$.

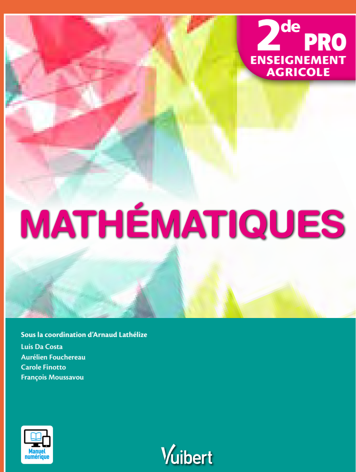
Résolution : On note que x doit nécessairement être différent de 0, puis on multiplie l'ensemble de l'équation par x.

- Il faut maintenant résoudre l'équation : $x^2 - 2x + 1 = 0$.
- $\Delta = 4 - 4 = 0$ et $x_0 = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$.

MATHÉMATIQUES

1re BAC PRO ENSEIGNEMENT AGRICOLE

Dans la même collection :



ISBN : 978-2-311-60056-8

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

Vuibert
www.vuibert.fr