Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche

Définition :

f est dérivable en $a \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a). \end{cases}$

Interprétation géométrique :

Si f est dérivable à droite en a donc $\mathscr{C}_f$ admet une **demi-tangente** à droite d'équation :

$$T_d : y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$$

Si f est dérivable à gauche en a donc $\mathscr{C}_f$ admet une **demi-tangente** à gauche d'équation :

$$T_g : y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} x^2+1 & \text{pour } x<1 \\ \frac{1}{x}+1 & \text{pour } x\geq 1 \end{cases}$$

Etudier sa dérivabilité en 1 et interpreter graphiquement les résultats.

Rep :

dérivabilité à droite en 1 :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}+1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-(\cancel{x-1})}{x(\cancel{x-1})} = -1 \in \mathbb{R} = f'_d(1)$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 1 \text{ et } f'_d(1)=-1}$

graphiquement : $\mathcal{C}_f$ admet une demi tangente à dte en 1 d'ép : $T_d : y = f'_d(1)(x-1)+f(1)$

$= -(x-1)+2$

$= -x+1+2$

$$\boxed{T_d : y = -x+3}$$

TakiAccademy
www.takiacademy.com

dérivabilité à gauche en 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= 2 \in \mathbb{R} \quad = f'_g(1)$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en } 1 \text{ et } f'_g(1) = 2.}$

graphiquement : C_f admet une demi tangente à gauche en 1 d'équation

$$T_g : y = f'_g(1)(x-1) + f(1).$$

$$= 2(x-1) + 2$$

$$= 2x - \cancel{2} + \cancel{2}$$

$$\boxed{T_g : y = 2x}$$

CONCLUSION

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } 1 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } 1 \\ f'_d(1) \neq f'_g(1) \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1.}$

graphiquement :

$\mathcal{C}_f$ admet un point anguleux au point d'abscisse 1.