Continuité sur un intervalle.

Ce qu'on doit apprendre :

- toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Soit f et g deux fonctions définie sur un intervalle I.

Si f et g sont continues sur I alors les fonctions $f+g$; $f\times g$; αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue sur I.

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } I \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$

alors : $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{g^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue sur I.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$

alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Exemples : Soit $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

et $h(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } x\geq 1 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$.

déterminer le domaine de continuité de chacune des fonctions f ; g ; $u=f\cdot g$; $v=|f(x)|$; $w=f^5$; $t=\sqrt{f}$ et h.

Rep :

f est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son domaine de définition c'à d $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$.

g est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son domaine de définition c'à d $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3\}}$.

f et g sont continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}}$ alors $u=f\times g$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}}$

TakiAcademy
www.takiacademy.com

f est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$

donc $V = |f|$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$.

f est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$

donc $W = f^5$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$.

x	$-\infty$ -1		2 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$		$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$\boxed{+}$ 0	$-$ ‖	$\boxed{+}$

f est continue positive sur chacun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $]2,+\infty[$

donc $\sqrt{f}$ est continue sur :

$\boxed{]-\infty,-1] \cup]2,+\infty[}$

La fonction $x \longmapsto 2x-4$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\boxed{\mathbb{R} \cap [1,+\infty[= [1,+\infty[}$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$ continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en particulier

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Sur $\boxed{(\mathbb{R}\setminus\{1\})\cap]-\infty,1[)=]-\infty,1[}$

Ainsi h est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $[1,+\infty[$

Continuité à gauche en 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty$$

donc h n'est pas continue à gauche en 1

$\boxed{\text{Concl:}}$ h est continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$