Solutions

1 Let $\mathbf{u}(t) = \big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\big)$, $\mathbf{v}(t) = \big(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\big)$, $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) = w_1(t), w_2(t), w_3(t)\big)$. Then according to the definition of cross products, $w_1(t) = u_2(t)v_3(t) - u_3(t)v_2(t)$, and the other coordinate functions of $\mathbf{w}(t)$ are obtained by cycling the indexes modulo 3.

$$\begin{aligned} w_1'(t) &= u_2'(t)v_3(t) + u_2(t)v_3'(t) - u_3'(t)v_2(t) - u_3(t)v_2'(t) \\ &= \underbrace{u_2'(t)v_3(t) - u_3'(t)v_2(t)}_{a_1(t)} + \underbrace{u_2(t)v_3'(t) - u_3(t)v_2'(t)}_{b_1(t)}. \end{aligned}$$

The function $a_1(t)$ is the first coordinate function of $\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)$, and $b_1(t)$ is the first coordinate function of $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$. This shows that the first coordinate functions on both sides of the identity are the same. Cycling indexes modulo 3 then gives the rest.

2

The tangent line in parametric form at the curve point $\mathbf{r}(t)$ is

$$\mathbf{r}(t) + \mathbb{R}\,\mathbf{r}'(t) = \{\mathbf{r}(t) + \lambda\,\mathbf{r}'(t); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Since $(0,0,1) = \mathbf{r}(0)$, we need to compute $\mathbf{r}'(0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \big(\ln(t+1), t\cos(2t), 2^t\big), \\ \mathbf{r}'(t) &= \left(\frac{1}{t+1}, \cos(2t) - 2t\sin(2t), \ln(2)2^t\right), \\ \mathbf{r}'(0) &= (1, 1, \ln 2) \end{aligned}$$

Hence the answer, written using column vectors, is

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ln 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 + \lambda \ln 2 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ex. 17 Writing $h(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t)$, we have $(0,0,3) = h(0)$, and the desired point is $P = h(t_0)$, where $t_0 > 0$ is determined by $\int_0^{t_0} |h'(s)|\,\mathrm{d}s = 5$. Since

$$\int_0^t |h'(s)|\,\mathrm{d}s = \int_0^t |(3\cos s, 4, -3\sin s)|\,\mathrm{d}s = \int_0^t \sqrt{9\cos^2 s + 16 + 9\sin^2 s}\,\mathrm{d}s = 5t,$$

we obtain $t_0 = 1$ and $P = h(1) = (3\sin 1, 4, 3\cos 1)$.

Ex. 55 Since the centers of the two osculating circles are clearly on the ellipse's axes, it suffices to determine their radii or, equivalently, the curvature of the ellipse in $(2,0)$ and $(0,3)$. Using the parametrizaton $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t, 0)$, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t, 3\cos t, 0),\\
\mathbf{r}''(t) &= (-2\cos t, -3\sin t, 0),\\
\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= (0,0,6),\\
\kappa(t) &= \frac{|(0,0,6)|}{|(-2\sin t, 3\cos t, 0)|^3} = \frac{6}{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$\implies \kappa(0) = 2/9$, $\kappa(\pi/2) = 3/4$, and the two osculating circles have radii $9/2$, $4/3$, centers $(-5/2,0)$, $(0,5/3)$, and equations

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2, \quad x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

The corresponding plot can be found in the answers section of [Ste16].

Ex. 60 The curve can be written as

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\implies \mathbf{r}(t)$ is contained in the plane $E = (2,1,0) + \mathbb{R}(1,-1,0) + \mathbb{R}(0,0,1/2)$. (The same argument shows that any curve whose coordinate functions are polynomials of degree ≤ 2 is contained in a plane, or even in a line; cf. also our)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1/2 \end{pmatrix},\\
\mathbf{r}''(t) &= 2\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Since $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ span the same 2-dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$ as $(1,-1,0)$, $(0,0,1/2)$, the osculating plane at every curve point $\mathbf{r}(t)$ is equal to E. (The same is true for any curve contained in some plane, provided only it has an osculating plane at every curve point.)

微积分 Worksheet 3 评分标准 (总分 20 分)

总分分配建议

- **W1 (证明题): 3 分** — 考察对叉积微分法则的理解和基本推导能力。
- **W2 (切线方程): 3 分** — 考察参数方程求导和切线方程的基本计算。
- **W3 (弧长应用): 4 分** — 考察弧长公式的计算和应用，比 W2 多一步积分求解。
- **W4 (密切圆): 6 分** — 步骤最多，计算最复杂，综合考察了参数化、曲率、密切圆半径和圆心等多个知识点。
- **W5 (密切平面): 4 分** — 考察对密切平面概念的深入理解，需要一定的分析和推断能力。

各题详细评分标准

W1. 证明叉积的微分法则 (共 3 分)

1. **(1 分)** 正确写出向量 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的分量形式，并根据叉积定义，正确写出 $u(t)\times v(t)$ 的任意一个分量（例如 $w_1(t)$）的表达式。
2. **(1 分)** 对该分量求导，并正确使用一维微积分的乘法法则。
3. **(1 分)** 将求导后的项重新组合，清晰地展示它等于 $u'(t)\times v(t)$ 和 $u(t)\times v'(t)$ 对应分量之和，并说明其他分量可通过轮换对称得到。

W2. 求参数方程的切线 (共 3 分)

1. **(1 分)** 找出指定点 (0,0,1) 对应的参数值 $t=0$，并正确计算出导数向量 $r'(t)$。
2. **(1 分)** 将 $t=0$ 代入导数向量，求得在切点的方向向量 $r'(0)=\langle 1,1,\ln 2\rangle$。
3. **(1 分)** 使用点 (0,0,1) 和方向向量 $\langle 1,1,\ln 2\rangle$ 正确写出切线的参数方程。

W3. 沿曲线移动后的位置 (共 4 分)

1. **(1 分)** 正确建立弧长积分方程 $\int_0^{t_0} |h'(s)|ds = 5$。

2. **(1 分)** 正确计算导数 $h'(s)$ 及其大小（速度）$|h'(s)| = 5$。

3. **(1 分)** 正确求解积分，得到 $5t_0 = 5$，解出 $t_0 = 1$。

4. **(1 分)** 将 $t_0 = 1$ 代入原曲线方程 $h(t)$，求得终点坐标 $P = (3\sin 1, 4, 3\cos 1)$。

W4. 求密切圆方程 (共 6 分)

1. **(1 分)** 正确地参数化椭圆 $r(t) = \langle 2\cos t, 3\sin t\rangle$，并计算出一阶和二阶导数 $r'(t)$ 和 $r''(t)$。

2. **(1 分)** 正确使用公式 $\kappa(t) = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$ 计算曲率。中间步骤需要算出 $r'(t) \times r''(t)$。

3. **(1 分)** 正确计算出点 (2,0) (对应 $t = 0$) 和 (0,3) (对应 $t = \pi/2$) 处的曲率 $\kappa(0) = 2/9$ 和 $\kappa(\pi/2) = 3/4$。

4. **(1 分)** 根据曲率计算出两个密切圆的半径 $R_1 = 9/2$ 和 $R_2 = 4/3$。

5. **(1 分)** 确定两个密切圆的圆心坐标 $(-5/2, 0)$ 和 $(0, 5/3)$。

6. **(1 分)** 根据半径和圆心，写出两个密切圆的最终方程。

W5. 证明密切平面是同一个平面 (共 4 分)

1. **(1 分)** 正确计算曲线的 $r'(t)$ 和 $r''(t)$。

2. **(2 分)** 准确阐述密切平面是由 $r'(t)$ 和 $r''(t)$ 张成的。并证明这个张成的平面对于所有 t 都是不变的。例如，指出 $r'(t)$ 和 $r''(t)$ 始终可以由两个固定的向量（如 $\langle 1, -1, 0\rangle$ 和 $\langle 0, 0, 1/2\rangle$）线性表示。这是本题的关键论证步骤。

3. **(1 分)** 得出结论：因为密切平面在所有点上都是同一个平面，所以整个曲线必然位于这个平面之内。