

## Chapitre 2

# ÉTUDE DE FONCTION

---

I	Notion de fonction . . . . .	14
	1 – Fonction . . . . .	14
	2 – Courbe représentative . . . . .	14
II	Variations . . . . .	15
	1 – Fonction croissante . . . . .	15
	2 – Fonction décroissante . . . . .	15
	3 – Fonction constante . . . . .	16
	4 – Tableau de variation . . . . .	16
	Exercices . . . . .	17

---

## I NOTION DE FONCTION

### 1 – FONCTION

Définir une fonction  $f$  sur un ensemble  $\mathcal{D}$  de nombres réels, c'est associer à chaque nombre  $x \in \mathcal{D}$  un **unique** nombre réel noté  $f(x)$ . On note :

$$\begin{aligned} f: \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- $\mathcal{D}$  est l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .  $x$  est la variable.
- Le nombre  $f(x)$  est l'image du réel  $x$  par la fonction  $f$ .
- Quand on sait que  $f(x) = y$ , on dit que  $x$  est un antécédent de  $y$  par la fonction  $f$ .

#### EXEMPLE

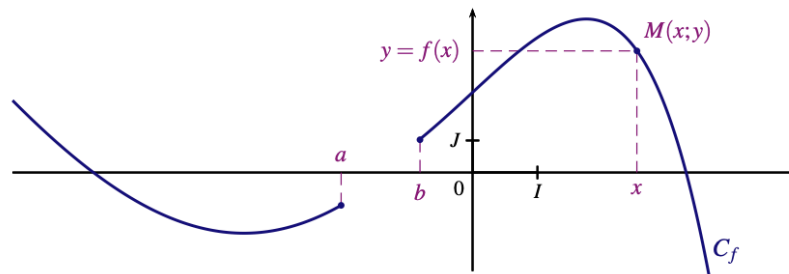
$f$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- L'ensemble de définition de la fonction  $f$  est l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- L'image de 9 par la fonction  $f$  est  $f(9) = \sqrt{9} = 3$ .
- 9 est l'antécédent de 3 par la fonction  $f$ .

### 2 – COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$  de nombres réels.

La courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que  $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$ .



$C_f$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{D} = ]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$

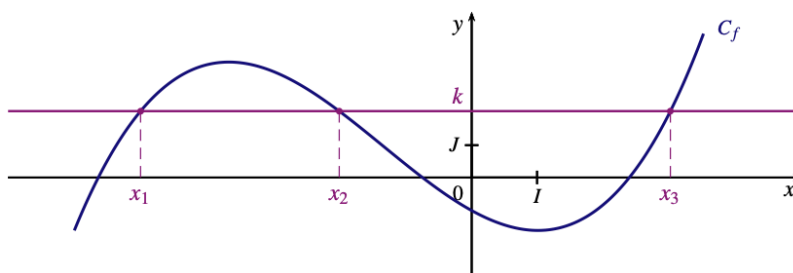
#### RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATION ET D'INÉQUATION

Soient  $C_f$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  et  $k$  un réel.

- Les solutions de l'équation  $f(x) = k$  sont les abscisses des points de la courbe  $C_f$  d'ordonnée  $k$ .
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) < k$  (respectivement  $f(x) > k$ ) sont les abscisses des points de la courbe  $C_f$  dont l'ordonnée est inférieure à  $k$  (respectivement supérieure à  $k$ )

#### EXEMPLE

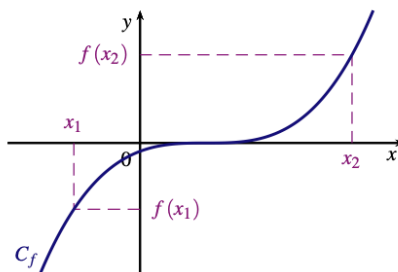
$C_f$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



- La courbe  $C_f$  coupe la droite  $\mathscr{D}$  d'équation  $y = k$  en trois points d'abscisses respectives  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  :  
L'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $f(x) = k$  est  $S = \{x_1; x_2; x_3\}$ .
- Sur chacun des intervalles  $]-\infty; x_1]$  ou  $[x_2; x_3]$ , la courbe  $C_f$  est en dessous de la droite  $\mathscr{D}$  d'équation  $y = k$  :  
L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \leq k$  est  $\mathscr{S} = ]-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3]$ .

## II VARIATIONS

### 1 – FONCTION CROISSANTE

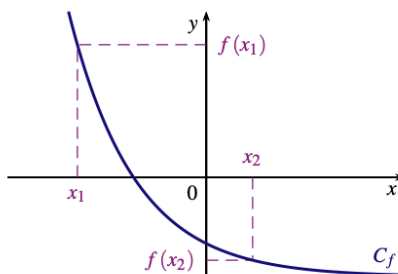


Dire que la fonction  $f$  est croissante sur un intervalle  $I$  signifie que pour tous réels  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ .

$$\text{Si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \leq f(x_2)$$

On dit que la fonction  $f$  conserve l'ordre : les réels de l'intervalle  $I$  et leurs images par  $f$  sont rangés dans le même ordre.

### 2 – FONCTION DÉCROISSANTE

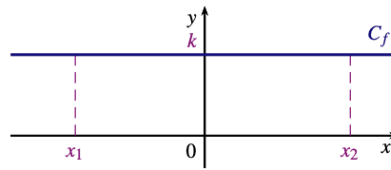


Dire que la fonction  $f$  est décroissante sur un intervalle  $I$  signifie que pour tous réels  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$ .

$$\text{Si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \geq f(x_2)$$

On dit que la fonction  $f$  change l'ordre : les réels de l'intervalle  $I$  et leurs images par  $f$  sont rangés dans un ordre contraire.

### 3 – FONCTION CONSTANTE

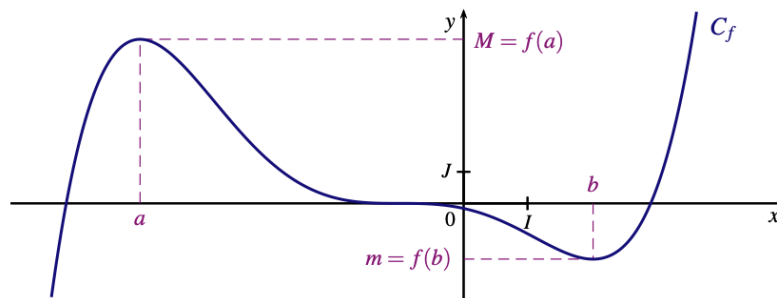


Dire que la fonction  $f$  est constante sur un intervalle  $I$  signifie que pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ .

$$f(x) = k \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

### 4 – TABLEAU DE VARIATION

Une fonction qui ne change pas de variation sur un intervalle est une fonction monotone sur cet intervalle. Étudier les variations d'une fonction c'est chercher sur quel(s) intervalle(s) elle est monotone.



On résume les variations de la fonction  $f$  à l'aide du tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$a$	$b$	$+\infty$
$f(x)$		$M$	$m$	

### EXTREMUM

- Dire que la fonction  $f$  admet un maximum en  $a$  sur un intervalle  $I$  signifie que pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x) \leq f(a)$ .
- Dire que la fonction  $f$  admet un minimum en  $a$  sur un intervalle  $I$  signifie que pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x) \geq f(a)$ .

Dans le tableau de variation précédent :

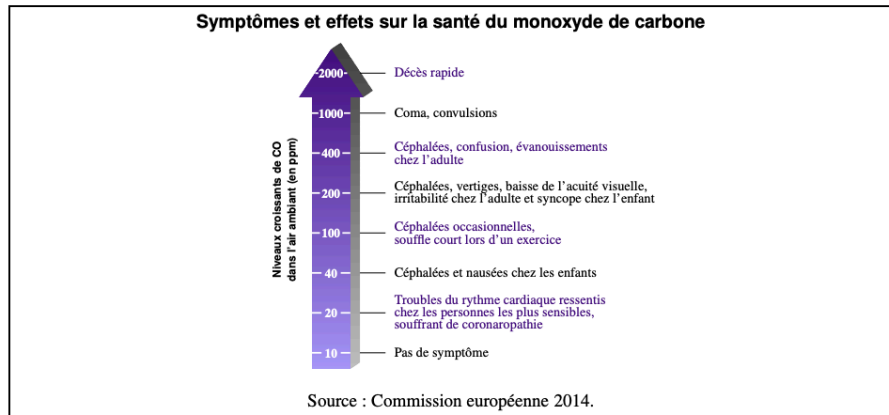
Le nombre  $M$  est le maximum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; b]$  atteint pour  $x = a$ ;

le nombre  $m$  est le minimum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a; +\infty[$  atteint pour  $x = b$ .

## EXERCICE 1

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. »

### DOCUMENT 1



### DOCUMENT 2

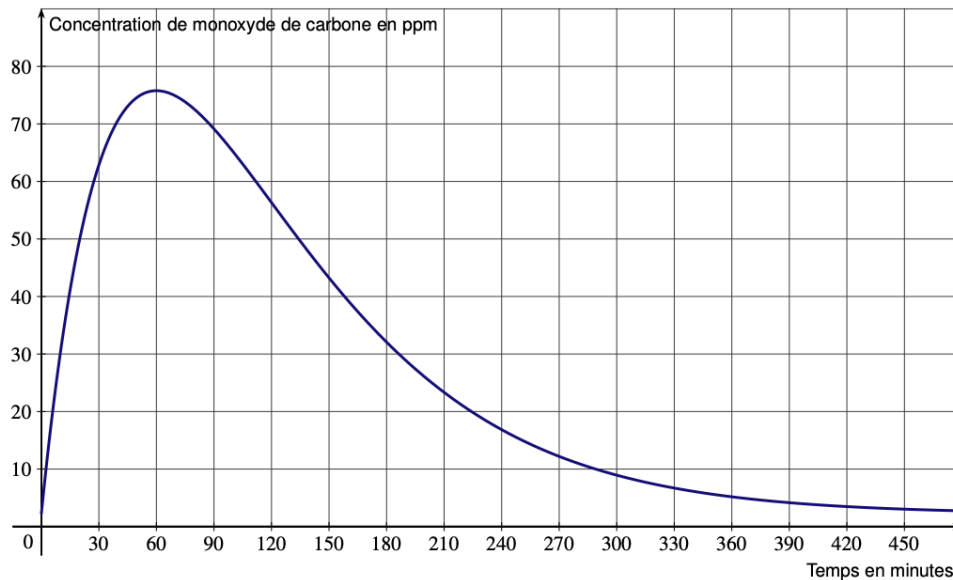
La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm). Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.

Il déclenche un signal d'alarme :

- si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins 10 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce. Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en minutes.

Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.



À partir du graphique et des documents précédents :

1. Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.
2. Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes ? Si oui, lesquels ?

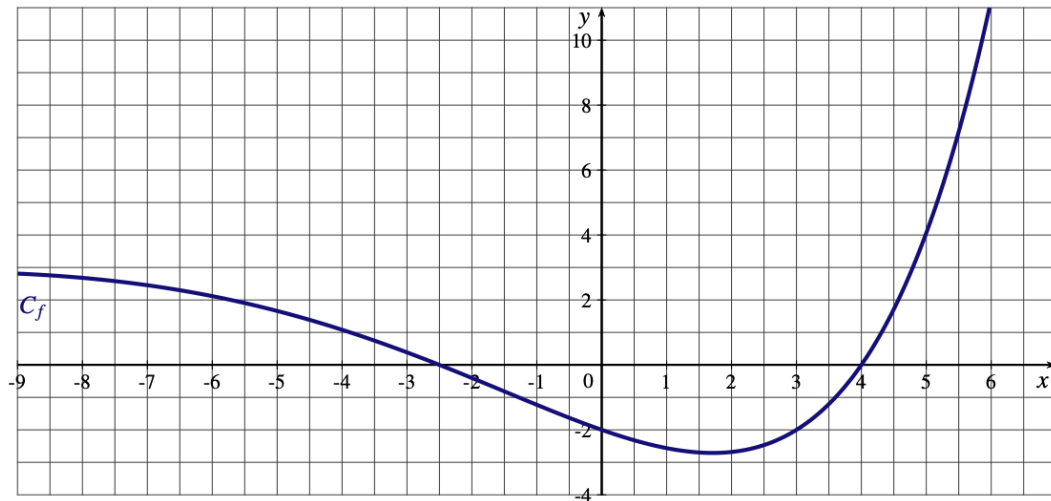
### EXERCICE 2

$f$  et  $g$  sont deux fonctions

1. Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :
  - a) L'image de  $-1$  par la fonction  $f$  est 3.
  - b) L'antécédent de  $\sqrt{2}$  par la fonction  $f$  est 3.
  - c)  $-3$  a pour image 1 par la fonction  $g$ .
  - d) 3 a pour antécédents  $-1$  et 2 par la fonction  $g$ .
2. On sait que  $f(-2) = 1$  et  $g(1) = -2$ 
  - a) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "image".
  - b) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "antécédent".

### EXERCICE 3

La courbe  $C_f$  tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



Par lecture graphique :

1. Quelle est l'image de 5 par la fonction  $f$  ?
2. Quels sont les antécédents de  $-2$  ?
3. Résoudre  $f(x) = 0$ .
4. Résoudre  $f(x) < -2$ .

### EXERCICE 4

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[-3; 3]$ . On sait que :

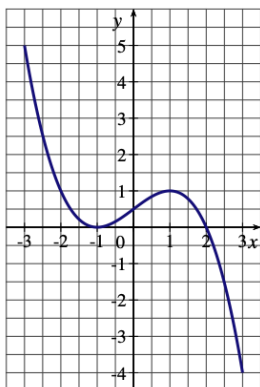
- les images de  $-3$ ;  $0$  et  $3$  par la fonction  $f$  sont respectivement  $5$ ;  $0,5$  et  $-4$
- $0$  a exactement deux antécédents  $-1$  et  $2$ .

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
  - a) L'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions.

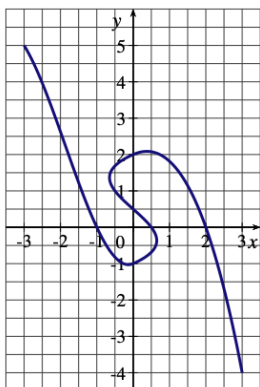
b) Le point  $M(-1;0)$  appartient à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

c) La courbe représentative de la fonction  $f$  coupe l'axe des ordonnées en deux points.

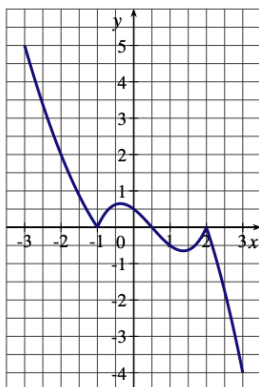
2. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent représenter la fonction  $f$ ? (Justifier)



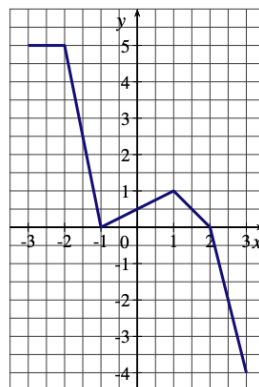
courbe  $\mathcal{C}_1$



courbe  $\mathcal{C}_2$



courbe  $\mathcal{C}_3$



courbe  $\mathcal{C}_4$

### EXERCICE 5

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[-10; 10]$ . Son tableau de variations est le suivant :

$x$	-10	-5	1	3	5	10
$f(x)$	-3	-5	0	2	0	-1

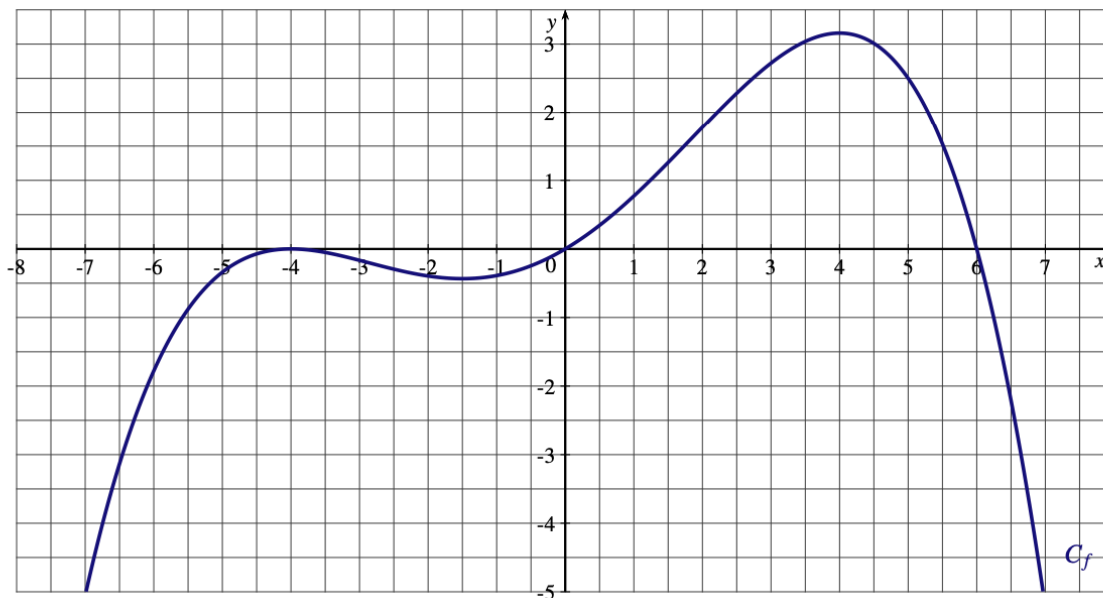
1. Donner le tableau du signe de  $f$  suivant les valeurs de  $x$ .

2. Comparer  $f(-1)$  et  $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

3. Le tableau permet-il de comparer les images de 2 et 4?

### EXERCICE 6

La courbe  $C_f$  tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction  $f$  ?
2. Pour chacune des solutions de l'équation  $f(x) = -2$ , déterminer un intervalle d'amplitude 0,5 auquel appartient cette solution.
3. Donner le tableau du signe de  $f$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .

### EXERCICE 7

On dispose d'une ficelle de longueur 51 cm que l'on coupe en deux. Avec un des morceaux on forme un carré, et avec l'autre on forme un rectangle dont la longueur est le double de sa largeur.

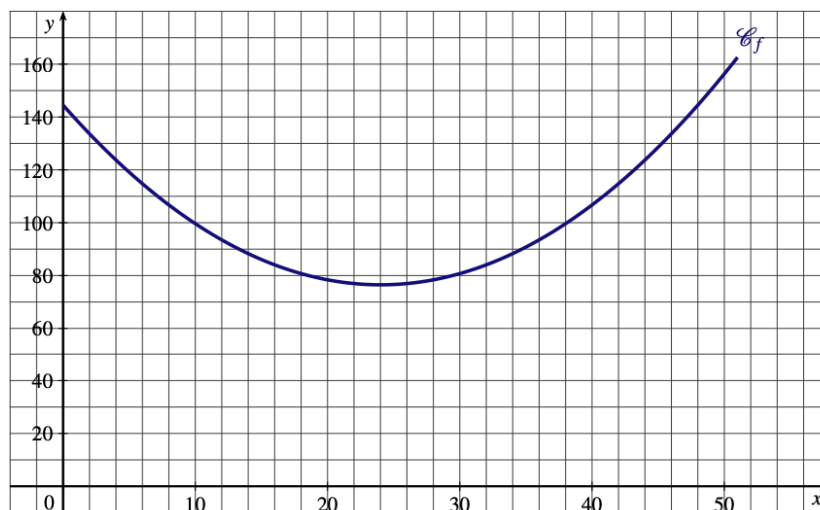
**Peut-on couper la ficelle de telle sorte que la somme des aires du carré et du rectangle soit minimale ?**

On note  $x$  la longueur de ficelle utilisée pour le carré.



1. a) Exprimer en fonction de  $x$  l'aire du carré.  
b) Exprimer en fonction de  $x$  la longueur de ficelle utilisée pour le rectangle.  
En déduire que l'aire du rectangle vaut  $\frac{(51-x)^2}{18}$
2. On note  $f$  la fonction qui à  $x$  associe la somme des aires du carré et du rectangle.
  - a) Quel est l'ensemble de valeurs possibles pour le réel  $x$  ?
  - b) Donner une expression de  $f(x)$ .
3. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$





À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

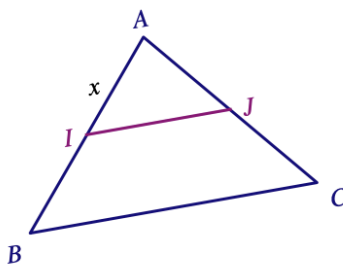
- Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- Pour quelle valeur de  $x$ , la somme des aires du carré et du rectangle est minimale ?
- On suppose qu'on ne coupe pas la ficelle et qu'on forme avec cette ficelle soit un carré soit un rectangle dont la longueur est le double de sa largeur.

L'aire du rectangle est-elle supérieure à celle du carré ?

- Calculer  $f(24)$  et interpréter le résultat.

#### EXERCICE 8

$ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  avec  $AB = 7$  et  $BC = 9$ . Soit  $I$  un point du segment  $[AB]$ , la parallèle à la droite  $(BC)$  coupe le segment  $[AC]$  au point  $J$ . On pose  $AI = x$ .



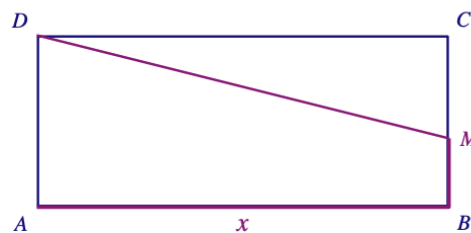
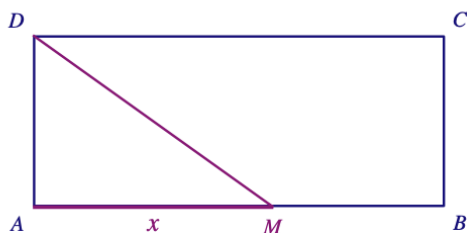
- Exprimer la distance  $IJ$  en fonction de  $x$ .
- On note  $f$  la fonction qui à  $x$  associe le périmètre du triangle  $AIJ$ .
  - Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $f$  ?
  - Donner une expression de  $f(x)$ .
- On note  $g$  la fonction qui à  $x$  associe le périmètre du quadrilatère  $IJCB$ .  
Donner une expression de  $g(x)$ .
- Déterminer la position du point  $I$  telle que  $IJCB$  et  $AIJ$  aient le même périmètre.

#### EXERCICE 9

$ABCD$  est un rectangle de longueur  $AB = 10$  et de largeur  $AD = 4$ .

$M$  est un point mobile le long de la ligne brisée  $ABC$ .

Si  $M \in [AB]$ , on pose  $x = AM$  ; si  $M \in [BC]$ , on pose  $x = AB + BM$ .



1.  $\mathcal{A}(x)$  est selon la position du point  $M$  l'aire du triangle  $ADM$  ou du trapèze  $ADMB$ .  
Exprimer  $\mathcal{A}(x)$  en fonction de  $x$ .
2. Représenter la fonction  $\mathcal{A}$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Déterminer la position du point  $M$  telle que l'aire  $\mathcal{A}(x)$  soit égale au tiers de l'aire du rectangle.

#### EXERCICE 10

Dans un repère orthonormé, on considère les points  $A(0;4)$ ,  $B(-3;0)$  et  $C(7,5;0)$ .  
 $M(x;0)$  est un point du segment  $[BC]$ . Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  associe la distance  $AM$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $f$ ?
2. a) Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .  
b) En déduire le nombre de solutions de chacune des équations suivantes  $f(x) = 3$ ;  $f(x) = 4$ ;  $f(x) = 5$  et  $f(x) = 9$ .
3. Résoudre les équations  $f(x) = 4,1$  et  $f(x) = 5,8$ .

#### EXERCICE 11

On considère une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-5;5]$ . Le tableau de variations de la fonction  $f$  est le suivant :

$x$	-5	-1	1	5
$f(x)$	5		2	
		1		-1

1. Comparer  $f\left(-\frac{5}{3}\right)$  et  $f\left(-\frac{3}{2}\right)$
2. Peut-on comparer les images de 0 et de 3?
3. Pour chacune des propositions suivantes, justifier si elle est vraie ou fausse :
  - a) Si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $2 \leq a < b \leq 4$  alors  $f(a) < f(b)$ .
  - b) Tous les réels de l'intervalle  $[-5;0]$  ont une image supérieure ou égale à 1.
  - c) Il existe un seul réel de l'intervalle  $[-5;5]$  qui a une image négative.

#### EXERCICE 12

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x-2)^2 - 9x^2$ . On note  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Factoriser l'expression de  $f(x)$ .
2. Développer l'expression de  $f(x)$ .
3. Calculer l'image par la fonction  $f$  de  $-\frac{1}{2}$ ?
4. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $C_f$  avec les axes du repère?

5. Quelles sont les abscisses des points de la courbe  $C_f$  qui ont pour ordonnée 4 ?

### EXERCICE 13

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3; 4]$  par  $f(x) = 2x^2 - 3x$ .

1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction  $f$ .
2. Compléter le tableau suivant :

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$								

3. Pourquoi peut-on affirmer que la fonction  $f$  n'est pas monotone sur  $[-3; 4]$  ?
4. Calculer l'image de 0,8. Le tableau permet-il de trouver le minimum de la fonction  $f$  ?
5. a) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3; 4]$ ,  $f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ .
- b) En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction  $f$ .

### EXERCICE 14

Soit  $f$  une fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{9 - 4x^2}{x^2 + 1}$ . On note  $C_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe  $C_f$  avec les axes du repère.
2. Étudier le signe de  $f(x) - f(0)$ . En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction  $f$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) > -4$ . Peut-on conclure que  $-4$  est le minimum de la fonction  $f$  ?