平面幾何学の性質を計算機に発見させる

–包括的グレブナー基底系と準素分解の利用–

1424531 横尾 卓磨

2024 年度 M1 中間発表

鍋島研究室

2024 年 11 月 9 日

目的

計算機を用いて平面幾何の問題を自動的に解析する方法を作りたい。

1. 現在の初等幾何の定理の拡張を包括的グレブナー基底系を用いて行う方法を確立する。
2. 幾何の配置問題を包括的グレブナー基底系を用いて解く方法を確立する。
3. 準素分解を用いた退化条件と幾何の定理の一般化を計算機を用いて判定する方法を考える。
4. (包絡線とそれに付随する曲線の関係を包括的グレブナー基底を用いて解析する方法を確立する。)

記号と包括的グレブナー基底系

$f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$
$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{x \in \mathbb{C}^n | f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_s(x) = 0\}$

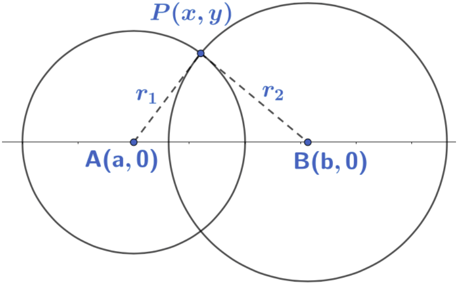
道具としてパラメータ付きグレブナー基底として有名な包括的グレブナー基底系を使用する。(包括的グレブナー基底系は計算可能である。)

例 $F = \{ax^2y^2 + bx^2y + y, x^2y^3 + by^2 + x\}$
x, y：変数、a, b：パラメータ
$\langle F \rangle$ の次数付き辞書式項順序 $(x > y)$ の包括的グレブナー基底系は以下となる。

1. $a = b = 0$ のとき $\{x, y\}$ がグレブナー基底となる。
2. $b = 0, a \neq 0$ のとき $\{ax - y^2, a^2x^3 + y\}$ がグレブナー基底となる。
3. $ab - 1 = 0$ のとき
   $\{(y + b^2)x + b^3y^2, a^4x^2 + (-a^{10} + b)x - y^3 + b^2y^2 - a^7y, x^3 - a^6x^2 + 2ax + y^2\}$
   がグレブナー基底となる。
4. $ab^2 - b \neq 0$ のとき $\{(ay + b)x + (ba - 1)y^3 + b^2y^2, b^2yx^2 + a^2x + (ba^2 - a)y^2 + by, b^3x^3 - a^3x^2 + ((-ba^3 + a^2)y^2 - bay + b^2)x\}$ がグレブナー基底となる。

配置条件 1

点 $A(a,0)$ を中心とする半径 r_1 の円と、点 $B(b,0)$ を中心とする半径 r_2 の円の交点 $P(x,y)$ をとする。このとき、$\angle APB$ が垂直になる条件は？



A, B を中心とする円の式は
$f_1 = (x-a)^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \quad f_2 = (x-b)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$

命題 $AP \perp BP$ より、AP と BP の内積が 0 になるので、以下の式が得られる。
$f_3 = x^2 - ax - bx + ab + y^2 = 0$
$f_1 = f_2 = f_3 = 0$ となる条件を探すことで可能な配置の条件を得ることができる。

f_1, f_2, f_3 から生成されるイデアルの包括的グレブナー基底系は以下となる。

1. (a, b, r_1, r_2) が $\mathbf{V}(a - b, -r_1^2 - r_2^2)$ に属するときグレブナー基底は $\{x^2 - 2bx + y^2 + b^2\}$ となる。
2. (a, b, r_1, r_2) が $\mathbf{V}(a^2 - 2ab + b^2 - r_1^2 - r_2^2) \setminus \mathbf{V}((r_1^2 + r_2^2)a + (-r_1^2 - r_2^2)b)$ に属するときグレブナー基底は $\{(a - b)x - ab + b^2 - r_2^2, (-r_1^2 - r_2^2)y^2 + r_2^2 r_1^2\}$ となる。
3. (a, b, r_1, r_2) が $\mathbb{C}^4 \setminus \mathbf{V}(a^2 - 2ab + b^2 - r_1^2 - r_2^2)$ に属するときグレブナー基底は $\{1\}$ となる。

よって、ヒルベルトの零点定理より、$f_1 = f_2 = f_3 = 0$ の解が存在する条件は $a^2 - 2ab + b^2 - r_1^2 - r_2^2 = 0$ である。

計算機で得られた定理

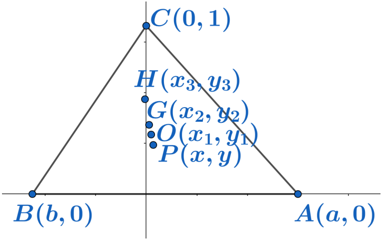
$AP \perp BP$ となる必要十分条件は以下の式である。
$a^2 - 2ab + b^2 - r_1^2 - r_2^2 = 0$

配置条件 2

オイラー線

任意の三角形において、外心と重心と垂心は一直線上にある。
この直線をオイラー線という。

では、内心がオイラー線上にある条件は？



三角形 $\triangle ABC$ とし、$A(a,0)$、$B(b,0)$、$C(0,1)$ とする。
また、内心 $P(x,y)$、外心 $O(x_1,y_1)$、重心 $G(x_2,y_2)$、垂心 $H(x_3,y_3)$ とする。

内心の性質から f_1, f_2 が得られる。

$$f_1 = \{(a-b)(x-b)\}^2(b^2+1) - \{(a-b)(-bx+b^2+y)\}^2 = 0$$

$$f_2 = \{(b-a)(x-a)\}^2(a^2+1) - \{(b-a)(-ax+a^2+y)\}^2 = 0$$

外心の性質から f_3, f_4 が得られる。

$$f_3 = (-2a+b)x_1 + a^2 - b^2 = 0$$

$$f_4 = -2ax_1 + 2y_1 + a^2 - 1 = 0$$

重心の性質から f_5, f_6 が得られる。

$$f_5 = 3x_2 - a - b = 0$$

$$f_6 = 3y_2 - 1 = 0$$

垂心の性質から f_7, f_8 が得られる。

$$f_7 = (b-a)x_3 = 0$$

$$f_8 = -b(x_3 - a) + y_3 = 0$$

P がオイラー線上にあるので以下の式を得る。

$f_9 = (x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$

ここで、$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ は変数、a, b をパラメータとする。
$f_1, \ldots, f_9$ から生成されるイデアルの包括的グレブナー基底系を求めると解のある条件は以下となる。

$2a^4b^2 + (2b^3 + 6b + 3)a^3 + (b^2 + 3b + 1)a^2 + (b^3 + b^2 + 3b)a + b = 0$

計算機で得られた定理

内心がオイラー線上にあるときは以下が成立するときである。

$2a^4b^2 + (2b^3 + 6b + 3)a^3 + (b^2 + 3b + 1)a^2 + (b^3 + b^2 + 3b)a + b = 0$

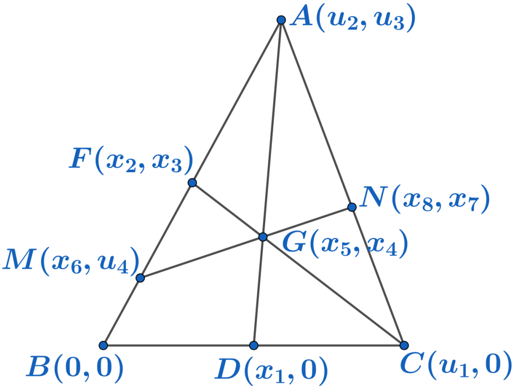
$(a, b) = (1, -\frac{1}{3})$ のとき、上の式を満たすので内心はオイラー線上にある。

計算方法

1. 幾何の仮定と結論をパラメータを含んだ多項式にモデル化する。
2. 包括的グレブナー基底系を計算する。
3. グレブナー基底系が定数でないパラメータの条件を得る。

既約分解の利用 (準素分解)

図のような $\triangle ABC$ を考える。
ここで、D は BC の中点、F は AB の中点、G は $\triangle ABC$ の重心である。
また、M は AB 上の点、N は AC 上の点で、MN は G を通る。
このとき、$AN \cdot MB + AM \cdot NC = AM \cdot AN$ が成立する。



$f_1 = 2x_1 - u_1 = 0(\because D$ が BC の中点)

$f_2 = 2x_2 - u_2 = 0(\because F$ が AB の中点)
$f_3 = 2x_3 - u_3 = 0(\because F$ が AB の中点)

$f_4 = 3x_4 - 2u_3 = 0(\because G$ が重心)
$f_5 = x_1 - 3x_5 + 2u_2 = 0(\because G$ が重心)

$f_6 = u_2u_4 - x_6u_3 = 0(\because M$ が AB 上にある)

$f_7 = x_7(u_2 - u_1) - u_3(x_8 - u_1) = 0(\because N$ が AC 上にある)
$f_8 = (x_4 - u_4)(x_8 - x_6) - (x_7 - u_4)(x_5 - x_6) = 0(\because N$ が MG 上にある)

$V = \mathbf{V}(f_1, \cdots, f_8)$ に対し既約分解 ($\mathbf{V} = \mathbf{V}(F_1) \cup \mathbf{V}(F_2) \cup \mathbf{V}(F_3)$) を行う。

$F_1 = \{(4u_3 - 5u_4 - 5x_7)u_2 + 6x_7x_6, (-u_2 + x_6)u_1 - 4u_2^2 + (5x_6 + 5x_8)u_2 - 6x_8x_6, (4u_3 + u_4 - 5x_7)u_1 + (-4u_3 + 5u_4 + 5x_7)u_2 - 6x_8u_4, u_4u_2 - x_6u_3, 4u_3^2 + (-5u_4 - 5x_7)u_3 + 6x_7u_4, (u_3 - u_4)u_1 + (4u_3 - 5u_4)u_2 - 5x_8u_3 + 6x_8u_4, 2x_1 - u_1, 2x_2 - u_2, 2x_3 - u_3, 2u_3 - 3x_4, -u_1 - 4u_2 + 6x_5\},$

$F_2 = \{x_8u_4 - x_7x_6, x_7u_2 - x_8u_3, u_4u_2 - x_6u_3, x_1, 2x_2 - u_2, 2x_3 - u_3, 2u_3 - 3x_4, 2u_2 - 3x_5, u_1\},$

$F_3 = \{2x_1 - u_1, 2x_2 - u_2, x_3, x_4, u_1 + 4u_2 - 6x_5, x_7, u_3, u_4\}$

$\mathbf{V}(F_2)$ は、C, D, G, M, N が AB 上にあることを意味する。
つまり $\triangle ABC$ は線分 AB に重なる。(退化している)

$\mathbf{V}(F_3)$ は A, F, G, M, N が BC 上にあることを意味する。
つまり $\triangle ABC$ は線分 BC に重なる。(退化している)

$AN \cdot MB + AM \cdot NC = AM \cdot AN$ が成り立つことは
$g = (x_8 - u_2)(-x_6) + (x_7 - u_3)(-u_4) + (x_6 - u_2)(u_1 - x_8) + (u_4 - u_3)(-x_7) - (x_6 - u_2)(x_8 - u_2) - (u_4 - u_3)(x_7 - u_3) = 0$
となることである。
g は $\mathbf{V}(F_1)$ 上で 0 となるので成り立つことが証明される。

$\mathbf{V}(F_2)$ と $\mathbf{V}(F_3)$ は考える必要はない。

既約分解によって得られた既約多様体をチェックすることによって退化条件でも成り立つ場合があるので定理を拡張することができる。

このような計算機代数システムを用いて初等幾何を解析する手法を包絡線や曲線、曲面に適用しそれらの性質を解析する手法を研究したい。