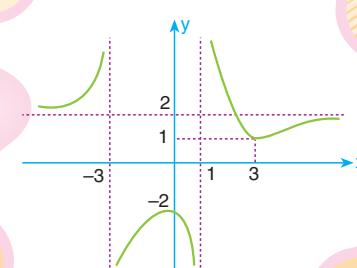
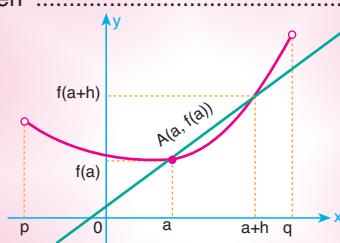
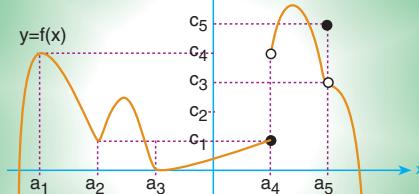


ÜNİTE 3

TÜREV KAVRAMI

Türev ile Hız Arasındaki İlişki	253
Türev ve Teğeten Eğimi Arasındaki İlişki	258
Diferansiyel Kavramı	261
Türevin Tanımı	262
Türev Alma Kuralları	272
Sabitin Türevi	272
Toplam veya Farkın Türevi	273
Çarpımın Türevi	273
Bir Fonksiyonun Kuvvetinin Türevi	274
Bölümün Türevi	284
Parametrik Fonksiyonların Türevi	281
Kapalı İfadelerin Türevleri	281
Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	282
Logaritma Fonksiyonunun Türevi	285
Üstel Fonksiyonun Türevi	286
Bileşke Fonksiyonun Türevi	294
Ters Fonksiyonun Türevi	294
Ardışık Türev (Yüksek Sıradan Türev)	295
Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	297
Mutlak Değerli Fonksiyonların Türevi	299
Parametrik Denklemlerde İkinci Mertebe Türevi	300
Türevin Limit Hesabında Kullanılması	310
L'Hospital Kuralı	310
Türevin Geometrik Anlamı	317
Teğet Denklemi	318
Normal Denklemi	318
Artan ve Azalan Fonksiyonlar	327
Ekstremum Noktaları	329
Türevin Anlamı	339
Dönüm Noktası	342
İkinci Türev ve Yerel Ekstremum Noktası	351
Mutlak Maksimum–Mutlak Minimum	352
Polinom Fonksiyonlarının Grafikleri	365
Asimptolar	372
Kesirli Fonksiyonların Grafikleri	373
Üstel Fonksiyonların Grafikleri	377
Logaritmali Fonksiyonların Grafikleri	378



TÜREV KAVRAMI

1.
BÖLÜM

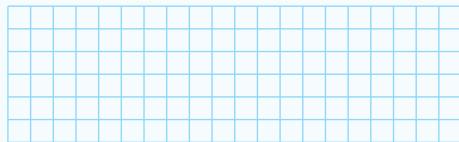
KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

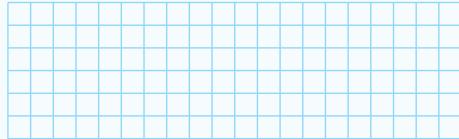
Bir doğru boyunca hareket eden bir cismin başlangıç noktasına göre konumu S (metre), zamanın t (saniye) bir fonksiyonu olarak

$$S = S(t) = 10t + t^2 \text{ ile verilsin.}$$

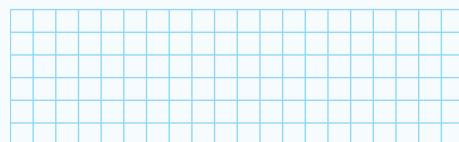
- a) Bu cisim ilk 2 sn'de kaç m yol alır?



- b) Bu cisim ilk 6 sn'de kaç m yol alır?



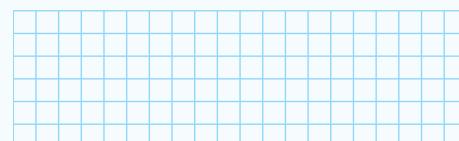
- c) Bu cisim 2. sn ile 6. sn arasında kaç m yol alır?



- d) Bu cismin 2. sn ile 6. sn arasındaki ortalama hızı kaç m/sn dir?



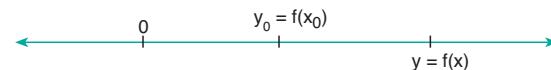
- e) Bu hareketlinin 3.sn deki anlık hızı kaç m/sn dir?



Matematiğin en önemli konularından biri türev kavramıdır. Bu kavramı birçok şekilde açıklamak mümkündür. Bu kitapta türev konusu öğrencinin hislerine en çok hitap edecek bir yöntemle açıklanmıştır. Türev tanımına geçmeden önce bazı kavramları hatırlayıp bu kavumlara dayanan tanımlar vereceğiz.

1. Türev ile Hız Arasındaki İlişki

Bir doğru üzerinde $y = f(x)$ denklemine göre hareket eden bir hareketlinin x_0 anındaki hızını tanıyalalım.



x_0 anının yakınlarında bir x alırsa hareketlinin ortalama hızı, alınan yol $f(x) - f(x_0)$ ve geçen süre $x - x_0$ olduğundan

$$V_{\text{ort}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ dır.}$$

x_0 in yakınlarında seçilen her x için bu yolla değişik ortalama hızlar elde edilebilir.

Biz x_0 anındaki hız aradığımız için $x \neq x_0$ olmak üzere elde edilen tüm ortalama hızların limiti olarak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa, bu limite $x = x_0$ anındaki **anlık hız** denir.

ÖRNEK

Bir hareketlinin t saatte aldığı yol $S(t) = t^2 + 100t$ fonksiyonu ile verilsin. Yukarıdaki tanıma göre bu hareketlinin $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama hızı

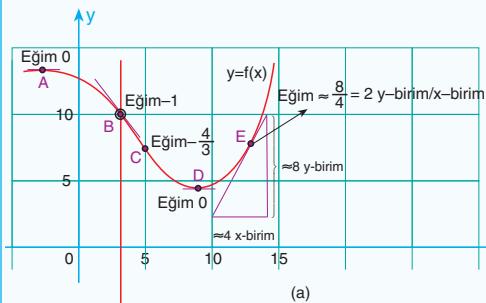
$$V_{\text{ort}} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ dır.}$$

Bu hareketlinin $[3,6]$ aralığındaki ortalama hızını bulalım.

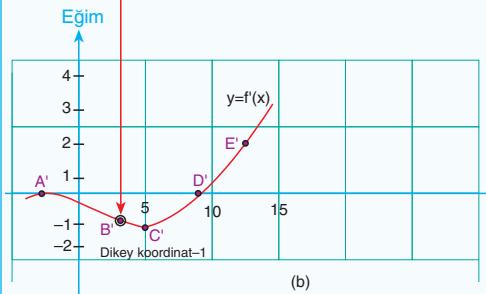
ETKİNLİK

Kan Şekeri Konsantrasyonu: 23 Nisan 1988'de insan gücüyle çalışan Daedalus uçağı Yunanistan'ın güneydoğusunda Ege Denizi'ndeki Girit'ten adasından Santorini'ye 119 km'lik rekor bir uçuş yaptı. Uçuştan önceki 6 saatlik dayanıklılık testlerinde araştırmacılar pilot adaylarının kan şekeri konsantrasyonlarını ölçüdü. Atlet pilotlardan birinin konstantrasyon grafiği şekil-a da görülüyor.

Konsantrasyon miligram/desilitre ve zaman saat olarak verilmiştir.



(a)



(b)

(a)'daki $y = f(x)$ grafiğinin eğimlerini işaretleyerek (b)'deki $y = f'(x)$ 'in grafiğini çizdik. Mesela, B'nin dikey koordinatı B'deki eğimdir. f' nün grafiği f 'nin eğiminin x ile nasıl değiştiğinin görsel bir kaydıdır.

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(6) - S(3)}{6 - 3} = \frac{(6^2 + 100.6) - (3^2 + 100.3)}{3}$$

$$V_{\text{ort}} = \frac{636 - 309}{3}$$

$$= 108 \text{ km/sa olur.}$$

Hareketlinin [4,6] aralığındaki ortalama hızını bulalım.

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(6) - S(4)}{6 - 4} = \frac{(6^2 + 100.6) - (4^2 + 100.4)}{2}$$

$$V_{\text{ort}} = \frac{636 - 416}{2}$$

$$= 110 \text{ km/sa olur.}$$

Hareketlinin [5,6] aralığındaki ortalama hızı

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(6) - S(5)}{6 - 5} = \frac{(6^2 + 100.6) - (5^2 + 100.5)}{1}$$

$$V_{\text{ort}} = 636 - 525$$

$$= 111 \text{ km/sa olur.}$$

Hareketlinin [5,9, 6] aralığındaki ortalama hızı

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(6) - S(5,9)}{6 - 5,9}$$

$$= \frac{(6^2 + 100.6) - [(5,9)^2 + 100.(5,9)]}{0,1}$$

$$= \frac{636 - (34,81 + 590)}{0,1}$$

$$= 111,9 \text{ km/sa olur.}$$

Hareketlinin [6, 6,1] aralığındaki ortalama hızı

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(6,1) - S(6)}{6,1 - 6} = \frac{[(6,1)^2 + 100.6,1] - (6^2 + 100.6)}{0,1}$$

$$= \frac{(37,21 + 610) - (636)}{0,1}$$

$$= \frac{637,21 - 636}{0,1}$$

$$= 112,1 \text{ km/sa olur.}$$

Hareketlinin [6, 7] aralığındaki ortalama hızı

$$V_{\text{ort}} = \frac{S(7) - S(6)}{7 - 6} = \frac{(7^2 + 100.7) - (6^2 + 100.6)}{1}$$

$$= 749 - 636$$

$$= 113 \text{ km/sa olur.}$$

Bu sonuçları bir tabloda gösterelim.

$[t_1, t_2]$	[3, 6]	[4, 6]	[5, 6]	[5,9, 6]	[6, 6,1]	[6, 7]
V_{ort}	109	110	111	111,9	112,1	113

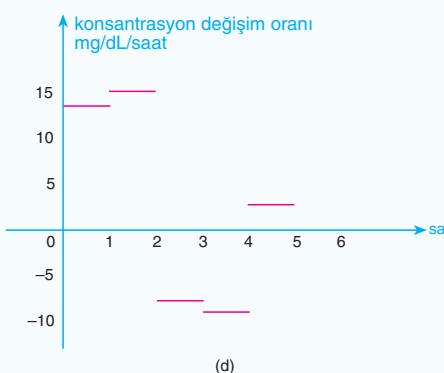
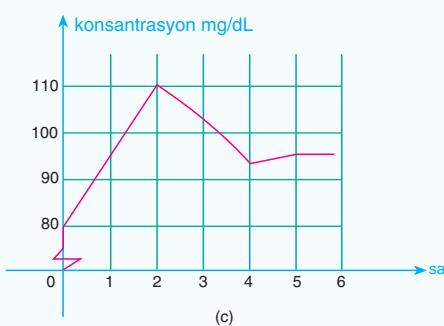
KAVRAMSAL ADIM

Grafik veri noktalarını birleştiren doğru parçalarından yapılmıştır. Her parçanın sabit eğimi ölçümler arasındaki konsantrasyonu verir. Her parçanın eğimi hesaplanarak şekil-b deki grafik çizilmiştir. Örneğin, ilk saat için çizim yapılırken konsantrasyonun 79 mg/dL den 93 mg/dL ye arttığı gözlemleniyor. (Şekil-c)

Net artma $\Delta y = 93 - 79 = 14 \text{ mg/dL}$ dir. Bunu $\Delta t = 1$ saat ile bölgerek, ortalama değişim oranını buluruz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{14}{1} = 14 \text{ mg/dL/saat}$$

Konsantrasyonun bir köşesinin bulunduğu ve eğiminin olmadığı $t = 1, 2, \dots, 5$ zamanlarında konsantrasyonun değişim oranı hakkında bir tahminde bulunamayız. Türev fonksiyonu (Şekil-d) bu zamanlarda tanımlı değildir.



Bu hareketlinin 6. saatte hız sınırını geçtiğini varsayıyalım. Bu hareketlinin 6. saatteki hızı (anlık hızı) $h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$h \rightarrow 0$ için $[6, 6+h]$ veya $[6-h, 6]$ aralığında ortalama yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned}\text{Anlık hız} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(6+h) - S(6)}{6+h - 6} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6+h)^2 + 100.(6+h) - (6^2 + 100.6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36 + 12h + h^2 + 600 + 100h - 636}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 112h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 112) \\ &= 112 \text{ km/sa}\end{aligned}$$

veya

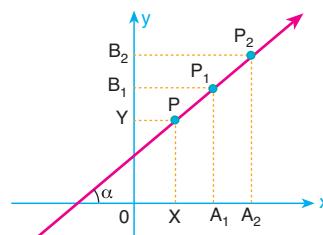
$$\begin{aligned}\text{Anlık hız} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(6) - S(6-h)}{6 - (6-h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6^2 + 100.6) - [(6-h)^2 + 100(6-h)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{636 - [36 - 12h + h^2 + 600 - 100h]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{112h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (112 - h) \\ &= 112 \text{ km/sa} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$[6, 6+h]$ aralığında hesaplanan anlık hız $t = 6$ noktasındaki sağdan türevi, $[6-h, 6]$ aralığında hesaplanan anlık hız $t = 6$ noktasındaki soldan türevi ifade eder. Anlık hız için sağdan türevin, soldan türevede eşit olduğuna dikkat ediniz.

Düzleme Doğrunun Denklemi ve Doğrunun Eğimi

Koordinat düzleminde $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$ noktalarını alalım.

P_1 ve P_2 den geçen doğrunun denklemi bulmak için bu doğruya ait ve koordinatları (x, y) olan bir P noktasını gözönüne alalım.



KAVRAMSAL ADIM

P, P_1 ve P_2 noktalarının eksenler üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla X, A_1, A_2 ve Y, B_1, B_2 olsun.

Tales teoremi yardımıyla

$$\frac{|B_1 Y|}{|B_1 B_2|} = \frac{|A_1 X|}{|A_1 A_2|} \text{ yazılabilir.}$$

Bu aşamada koordinatlara geçerek

$$\frac{y - b_1}{b_2 - b_1} = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \text{ şeklinde yazılabılır.}$$

Bu eşitlikten y çekilek,

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} \dots (1)$$

elde edilir. (1) deki bağıntiya P_1 ve P_2 noktalarından geçen **doğrunun denklemi** denir.

Doğruya bir fonksiyon gözüyle bakılırsa (1) denklemi

$$f(x) = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \cdot x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} \text{ şeklindedir.}$$

Bu son yazılıştan $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ olur. O halde doğrunun denklemi

$$y = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} x + \frac{a_2 \cdot f(a_1) - a_1 \cdot f(a_2)}{a_2 - a_1} \dots (2) \text{ şeklini alır.}$$

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}$$

sayısına **doğrunun eğimi** denir. Bu sayı doğrunun Ox eksenile pozitif yönde oluşturduğu α açısının tanjantına eşittir. Yani

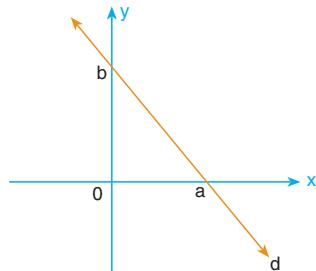
$$\tan \alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = m \dots (3) \text{ yazılabilir.}$$

O halde,

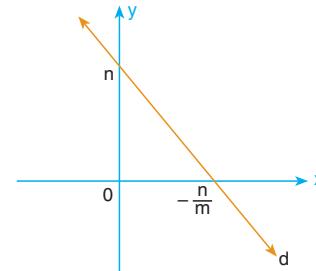
$$n = \frac{a_2 \cdot f(a_1) - a_1 \cdot f(a_2)}{a_2 - a_1}$$

denilirse (2) denklemi

$$y = mx + n \dots (4) \text{ şeklini alır.}$$



$$d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



$$d: y = mx + n$$

Bağımsız (Serbest) Değişkenin Artış Miktarı, Fonksiyonun Artış Miktarı

$y = f(x)$ fonksiyonunda x 'e **bağımsız değişken**, y 'ye **bağımlı değişken** denir.

Eğer x ve x_1 , x değişkeninin iki değeri ve $y = f(x)$ ve $y_1 = f(x_1)$ bu değerlere karşılık fonksiyonun aldığı değerler ise bu durumda

$\Delta x = x_1 - x$ değerine (x, x_1) aralığı üzerinde x değişkeninin **artış miktarı** ve

$$\Delta y = y_1 - y \text{ veya}$$

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

değerine de aynı aralıkta y fonksiyonunun **artış miktarı** denir.

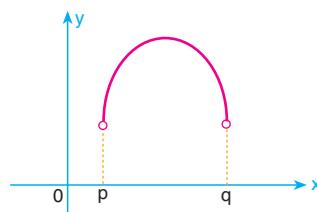
Değişim Oranı

oranına, x değişkeni x ten $x + \Delta x$ e kadar değiştiğinde y nin x 'e göre **ortalama değişim oranı** denir.

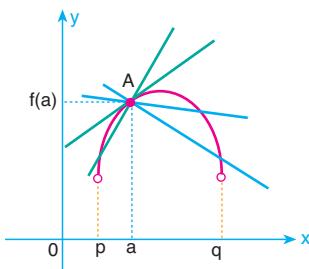
Bir Fonksiyonun Grafiğinin Teğeti

f bir fonksiyon olsun. f nin tanımlı olduğu (p, q) aralığını gözönüne alalım.

Aralığa ait herhangi bir a değeri seçildikten sonra f fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan $(a, f(a))$ noktasına A diyelim.



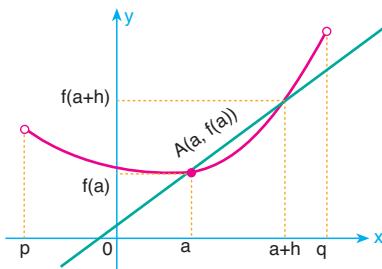
KAVRAMSAL ADIM



Merkezi $A(a, f(a))$ olan doğru demetine ait doğrulardan bazıları f fonksiyonunun grafiğini oluşturan eğri parçasını A noktası dışında ikinci bir noktada keser. Bu tür doğrulara eğrinin A noktasından geçen **kesen veya kırışları** denir.

Şimdi a değerini h kadar artıralım. $a + h$ noktasına grafik üzerinde $(a + h, f(a + h))$ noktası karşılık gelir.

$(a, f(a))$ ve $(a + h, f(a + h))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi (2) denkleminde olduğu gibi yazılabilir ve bu doğrunun eğimi (3) bağıntısına göre;



$$m(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

şeklindedir. a ve $a + h$ noktaları arasındaki artma miktarı (h) küçültülürse, yani h ile gösterilen büyülük sıfıra yaklaşılacak olursa $(a, f(a))$ ve $(a + h, f(a + h))$ noktaları birbirine yaklaşır. Geometrik olarak $(a + h, f(a + h))$ noktasının $(a, f(a))$ noktasına yaklaşarak çakışması halinde kesen doğrunun limit durumuna, f fonksiyonunun grafiğinin A noktasındaki **teğet doğrusu** denir.

Teğet doğruya elde etme işlemini fonksiyonlara indirgeyerek, A noktasından geçen doğrunun denklemi (2) bağıntısına göre,

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot x + \frac{(a+h)f(a) - a \cdot f(a+h)}{h} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot x - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot a + f(a) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

O halde $(a + h, f(a + h))$ noktasının $(a, f(a))$ noktasına yaklaşması halinde kesen doğrular için aranan limit yerine h sayısının sıfıra yaklaşması halinde kesen doğrunun eğimi olan,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ifadesinin limiti alınabilir. Bu limitin sonucu olarak elde edilen sayıyı eğim olarak kabul eder ve A noktasından geçen doğrunun eğimi yazma olanağı, fonksiyonlar için limit kavramının varlığından dolayı vardır.

Öyleyse f fonksiyonunun grafiğinin A noktasındaki teğet, fonksiyonlardaki limit kavramını uygulamak suretiyle bulunabilir.

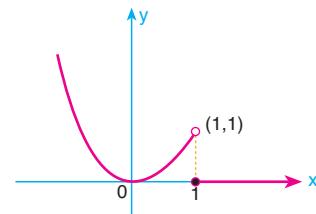
Teğet Çiziminde Ortaya Çıkabilecek Zorluklar

Teğet problemlerinde ortaya çıkan $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ oranının limitini bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Değişkenin a değeri için fonksiyon sürekli değilse böyle bir teğet çizmek mümkün olmayacağıdır.

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

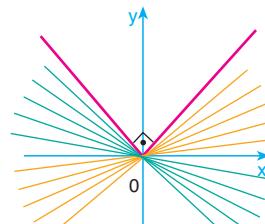
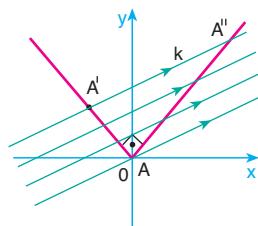
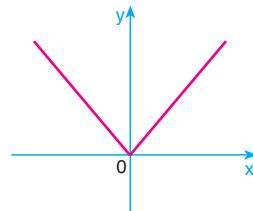
fonksiyonunun grafiğine $x = 1$ noktasında teğet çizmek mümkün değildir.



Fonksiyonun sürekli olması halinde bile sürekli olduğu her noktada teğetinin olması mümkün olmayırlar.

ÖRNEK

$f(x) = |x|$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olduğu halde bu noktada bir teğet çizmek mümkün değildir.

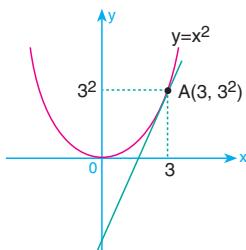


A' ve A'' noktaları k doğrusu kendine paralel kalacak şekilde A noktasına yaklaşılabilir. Buna göre, başlangıçtan geçen ve k gibi her doğuya paralel kalan doğru $x = 0$ noktası için teğet kabul edilebilir. Şu halde verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki teğetleri merkezi O noktası olan ve fonksiyonu belirtlen iki doğru ile sınırlanmış 90° lik açıyla dolduran doğru demetini oluştururlar.

KAVRAMSAL ADIM

2. Türev ve Teğetin Eğimi Arasındaki İlişki

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğine A(3, 3²) noktasında çizilen teğetin eğimini araştıralım.



Düzlemede A(x₁, y₁) ve B(x₂, y₂) noktalarından geçen doğrunun eğiminin

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğunu biliyorsunuz.

$y = x^2$ eğrisi üzerindeki A(3, 3²) noktasına yakın B(2, 2²) noktası için,

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ deki değişim}}{x \text{ deki değişim}}$$

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2^2 - 3^2}{2 - 3} = 5 \text{ bulunur.}$$

Şimdi $y = x^2$ eğrisi üzerinde A(3, 3²) noktasına yakın (2,9, (2,9)²) noktası için

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ deki değişim}}{x \text{ deki değişim}}$$

$$= \frac{(2,9)^2 - 3^2}{2,9 - 3} = \frac{8,41 - 9}{-0,1} = 5,9 \text{ bulunur.}$$

$y = x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın D(3,1, (3,1)²) noktası için,

$$m_{AD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ deki değişim}}{x \text{ deki değişim}}$$

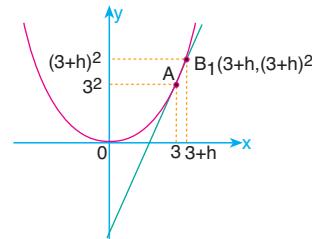
$$= \frac{(3,1)^2 - 3^2}{3,1 - 3} = \frac{9,61 - 9}{0,1} = 6,1 \text{ bulunur.}$$

$y = x^2$ eğrisi üzerinde A noktasına yakın E(4, 4²) noktası için

$$\begin{aligned} m_{AE} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ deki değişim}}{x \text{ deki değişim}} \\ &= \frac{4^2 - 3^2}{4 - 3} = \frac{16 - 9}{1} = 7 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Elde edilen bu sonuçları tabloda gösterelim.

Nokta	(2, 2 ²)	(2,9, (2,9) ²)	(3,1, (3,1) ²)	(4, 4 ²)
Eğim	5	5,9	6,1	7



$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğine A(3, 3²) noktasında çizilen teğetin eğimini bulalım.

$h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $h \rightarrow 0$ için

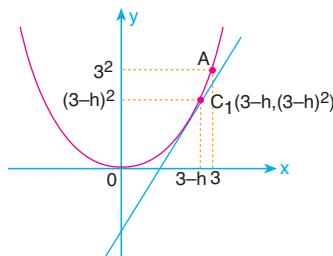
A ve B₁(3 + h, f(3 + h)) = B₁(3 + h, (3 + h)²) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} m_{AB_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{(3 + h) - 3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \text{ dır.} \end{aligned}$$

Bu değer $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki sağıdan türevidir.

C₁((3-h), f(3-h)) = C₁(3-h, (3-h)²) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} m_{AC_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 - h)^2 - 3^2}{(3 - h) - 3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6 - h) = 6 \end{aligned}$$



KAVRAMSAL ADIM

Bu değer $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki soldan türevidir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi, fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimidir. $f(x) = x^2$ fonksiyonun grafiğine A(3, 3²) noktasında çizilen teğetin eğimi 6 dır.

NOT

Bir fonksiyonun grafiğine ait bir noktadaki teğetin eğimi için o noktadaki sağdan ve soldan türevin eşit olduğuna dikkat ediniz.

UYARI

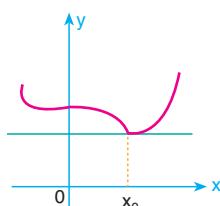
Bir fonksiyonun grafiğine $x = a$ noktasında çizilen teğetin eğimi 0 (sıfır) ise teğet doğru x -eksenine paraleldir.

Eğim = $m = \tan\alpha$ eşitliğinde α açısı tejet doğrunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açıdır.

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad \text{ise} \quad m = \tan \alpha > 0$$

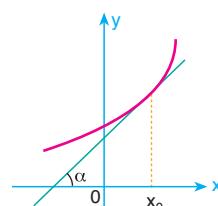
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \quad \text{ise} \quad m = \tan \alpha < 0$$

Yani f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevinin değeri x_0 noktasındaki teğetinin eğimi $m = f'(x_0) = \tan \alpha > 0$ ise α dar açı, $m = f'(x_0) = \tan \alpha < 0$ ise α geniş açıdır.

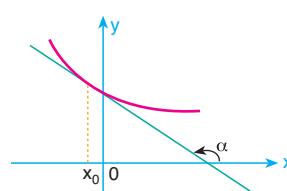


$$f'(x_0) = 0$$

Eğim sıfır



$0 < a < 90^\circ$, $f'(x_0) > 0$
(Eğim pozitif)



$90^\circ < a < 180^\circ$, $f'(x_0) < 0$
(Eğim negatif)

ETKİNLİK

- a) $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki soldan ve sağdan türevini bulunuz.

- b) $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki soldan ve sağdan türevini bulunuz.

- c) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ noktasındaki soldan ve sağdan türevini bulunuz.



UYGULAMA ADIMI



1. Bir hareketlinin t saatte aldığı yol $S(t) = t^2 + 150t$ fonksiyonu ile verilsin. Bu hareketlinin $[2,3]$ aralığındaki ortalama hızını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} V_{\text{ort}} &= \frac{S(3) - S(2)}{3 - 2} \\ &= \frac{(3^2 + 150 \cdot 3) - (2^2 + 150 \cdot 2)}{3 - 2} \\ &= 459 - 304 \\ &= 155 \text{ km/sa} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

2. $y = x^2 - 5x + 6$ fonksiyonu veriliyor. x değişkeninin aşağıdaki değerlerine karşılık gelen Δx ve Δy değerlerini bulunuz.

a) $x = 1$ den $x = 1,1$ ' e b) $x = 3$ ten $x = 2$ ye

Çözüm

a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 1, 1 - 1 = 0,1$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) = f(1,1) - f(1) \\ &= [(1,1)^2 - 5(1,1) + 6] - [1^2 - 5 \cdot 1 + 6] \\ &= -0,29 \end{aligned}$$

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(3) \\ &= (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ hiperbolünün $A\left(3, \frac{1}{3}\right)$ ve $B\left(10, \frac{1}{10}\right)$ noktalarından geçen keseninin (kırışının) eğimini bulunuz.

Çözüm

$$x_1 = 3, x_2 = 10$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10 - 3 = 7$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{30} \text{ olup eğim,}$$

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y \text{ deki değişim}}{x \text{ teki değişim}}$$

$$m_{AB} = \frac{-\frac{7}{30}}{7} = -\frac{1}{30} \text{ dur.}$$

4. $f(x) = 1 - 2x^2$ fonksiyonu veriliyor.

x değişkeninin aşağıdaki değerlerine karşılık gelen Δx ve Δy değerlerini bulunuz.

a) $x = 1$ den $x = 2'$ ye b) $x = 1$ den $x = 1,1$ e

Çözüm

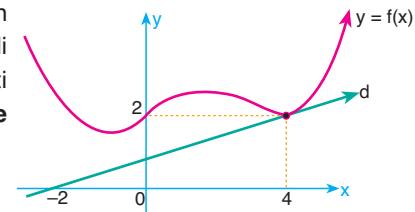
a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 = f(y_2) - f(y_1) = f(2) - f(1) \\ &= (1 - 2 \cdot 2^2) - (1 - 2 \cdot 1^2) \\ &= (-7) + 1 = -6 \end{aligned}$$

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 1,1 - 1 = 0,1$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 = f(y_2) - f(y_1) = f(1,1) - f(1) \\ &= (1 - 2 \cdot (1,1)^2) - (1 - 2 \cdot 1^2) \\ &= [1 - 2 \cdot (1,21)] - (-1) \\ &= 2 - 2,42 \\ &= -0,42 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

5. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $x = 4$ apsisli noktasındaki teğeti veriliyor. Buna göre $f'(4)$ kaçtır?

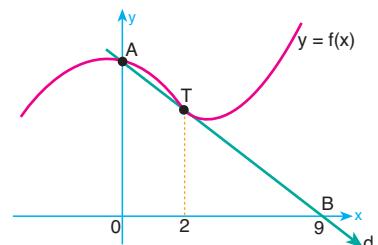


Çözüm $f'(4)$, d doğrusunun eğimidir.

$$m_d = \frac{1}{3} \text{ olup, } f'(4) = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

6. Şekilde $y = f(x)$ eğrisinin grafiği ve $x = 2$ apsisli noktadaki teğeti veriliyor. $f'(2) = -\frac{2}{3}$ ve

$B(9,0)$ olduğuna göre, A noktasının ordinatı kaçtır?



Çözüm

d doğrusunun eğimi

$$f'(2) = m_d = -\frac{2}{3} = \frac{|OA|}{|OB|}$$

$$(\text{eğim açısı geniş açı}) - \frac{2}{3} = \frac{|OA|}{9}$$

$$|OA| = 6 \text{ dir.}$$

O halde, A noktasının ordinatı 6 dir.

KAVRAMSAL ADIM

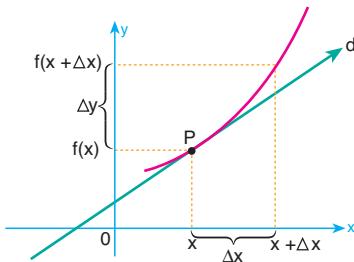
3. Diferansiyel Kavramı

f , x noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$$

Burada dy ye f nin x noktasındaki diferansiyeli denir.

Yaklaşık Değer Hesabında Diferansiyelin Kullanılması



d doğrusu f nin grafiğine P noktasında teğettir.

Şekilden $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ve $\Delta x \rightarrow 0$ için,

$$(\Delta x = dx) \Delta y \cong dy \text{ olduğundan, } \frac{\Delta y}{\Delta x} \cong \frac{dy}{dx}$$

$dy \cong f(x + \Delta x) - f(x)$ olur.

O halde,

$f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$ diferansiyel elde edilir. Bu ifade yaklaşık değer hesaplamasında kullanılır.

ÖRNEK

$\sqrt{25,8}$ sayısının yaklaşık değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$y = f(x) = \sqrt{x} \text{ alalım.}$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$$

$$\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$x = 25$ ve $\Delta x = dx = 0,8$ alınırsa,

$$\sqrt{25,8} = \sqrt{25 + 0,8} \cong \sqrt{25} + \frac{0,8}{2\sqrt{25}}$$

$$\sqrt{25,8} \cong 5 + \frac{8}{100} = \frac{508}{100} = 5,08 \text{ dir.}$$

ETKİNLİK

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

a) $x = 2$ için aşağıdaki tabloyu tamamlayınız.

b) Herhangi bir x için $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitini hesaplayınız.

Δx	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0, 2		
0, 1		
0, 01		
0, 001		
-0, 001		
-0, 01		
-0, 1		
-0, 2		

ÖRNEK

$\sqrt[3]{63}$ sayısının yaklaşık değerini hesapyalım.

ÇÖZÜM

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ alalım.}$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$$

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \cong \sqrt[3]{x} + d(\sqrt[3]{x})$$

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \cong \sqrt[3]{x} + \frac{dx}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$x = 64$, $\Delta x = dx = -1$ alınır.

$$\sqrt[3]{64 - 1} \cong \sqrt[3]{64} + \frac{(-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$\sqrt[3]{63} \cong 4 - \frac{1}{3 \cdot 16}$$

$$\sqrt[3]{63} \cong \frac{191}{48} = 3,979 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\tan 48^\circ$ nin yaklaşık değerini bulalım.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) dx$$

$$\tan(x + \Delta x) \cong \tan x + (1 + \tan^2 x) \cdot dx$$

$$x = 45^\circ \text{ ve } \Delta x = dx = 3^\circ = \frac{\pi}{60} \text{ alınır.}$$

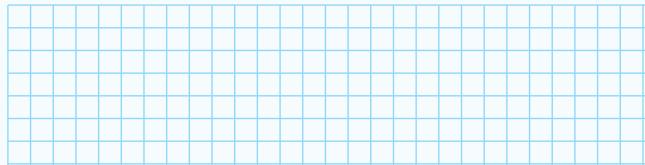
$$\tan(45^\circ + 3^\circ) \cong \tan 45^\circ + (1 + \tan^2 45^\circ) \cdot \frac{\pi}{60}$$

$$\tan 48^\circ \cong 1 + (1 + 1) \cdot \frac{\pi}{60}$$

$$\tan 48^\circ \cong 1 + \frac{\pi}{30} \text{ olur.}$$

ETKİNLİK

$\sqrt{5}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.

**ETKİNLİK**

$\ln(e^3 + e^2)$ nin yaklaşık değerini bulalım.

$$f(x) = \ln x, \quad x = e^3, \quad \Delta x = dx = e^2 \text{ alalım.}$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$$

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)dx$$

$$\ln(x + \Delta x) \cong \ln x + \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(e^3 + e^2) \cong \ln e^3 + \frac{1}{e^3} \cdot e^2$$

$$\ln(e^3 + e^2) \cong 3 + \frac{1}{e} \text{ dir.}$$

4. Türevin Tanımı (Bir Noktada Türev)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$x_0 \in A$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ifadesi bir reel sayı ise, bu limite, f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki **türevi** denir ve

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında türevlenebilir denir. f fonksiyonu A kümesinin her noktasında türevlenebiliyorsa, f fonksiyonuna **A kümesinde türevlenebilir** denir.

$f': A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun A tanım kümesindeki **türev fonksiyonu** denir.

f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad y_x(x_0) \text{ simgelerinden biri ile gösterilir.}$$

$x - a = h$ olsun, $x = a + h$ olup f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

birimde de yazılabilir.

ETKİNLİK

$f(x) = ax + b$ fonksiyonunun $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini bulunuz.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a \end{aligned}$$

$f'(x) = a$ bulunur.



UYGULAMA ADIMI



1. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \\ &= 2a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{4}$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{4}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{x - \frac{1}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{4}}}{x - \frac{1}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}} \\ &= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \text{ ile genişlettik} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{x - \frac{1}{4}}{\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

bultur.

3. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) - (1^3 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm

Trigonometrik fonksiyonların türevini bulmak için,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} \text{ yolunu kullanmak kolaylık sağlar.}$$

Türev alırken

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \text{ eşitliğini kullanacağız.}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \sin\frac{\pi}{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + h + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + h - \frac{\pi}{4}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

• PEKİŞTİRME ADIMI •



- 1. Hareket fonksiyonu $S = S(t) = 2t^2 + 3t + 5$ olan bir hareketinin [1,5] aralığındaki ortalama hızı kaçtır?**
(t saniye , S cm)

15 cm / sn

2. $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ den $x = 2$ ye kadar Δx ve Δy değerlerini bulunuz.

$$\Delta x = 1$$

3. $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonu için aşağıdaki değerlere göre
 Δy yi hesaplayınız.

- a) $x = 0$, $\Delta x = 0,001$
 b) $x = 8$, $\Delta x = -9$
 c) $x = a$, $\Delta x = h$

- a) $0, 1$
- b) -3
- c) $\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$

- a) 0, 1
- b) -3
- c) $\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$

4. $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunda neden sadece $\Delta x = 5$ verildiğinde Δy bulunamıyor da bu durum $f(x) = x^2$ fonksiyonunda geçerli olmuyor?

$a \neq 0$ için $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyon olduğundan bu durum geçerli, 2. ve daha yüksek dereceli polinom fonksiyonlarda geçerli değildir.

$a \neq 0$ için $f(x) = ax + b$ lineer fonksiyon olduğunda ve bu durum geçerli, 2. ve daha yüksek dereceli polinom fonksiyonlarda geçerli değildir.

5. Aşağıdaki fonksiyonlar için Δy artış miktarını ve $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değişim oranını bulunuz.

- a) $y = \frac{1}{(x^2 - 2)^2}$, $x = 1$ ve $\Delta x = 0,4$ için
 b) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ ve $\Delta x = 0,0001$
 c) $y = \log x$, $x = 10^6$, $\Delta x = -9 \cdot 10^5$

a) 624 ; 1560
b) 0,01 ; 100
c) -1 ; 0,0000011

- a) 624 ; 1560
- b) 0,01 ; 100
- c) -1 ; 0,00000011

6. $y = 2x - x^2$ parabolünün kesim noktalarının x_1 ve x_2 apsisleri aşağıda verilmiş olan kesenlerinin (kirişlerinin) eğimlerini bulunuz.

- a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
 b) $x_1 = 1$, $x_2 = 0,9$
 c) $x_1 = 1$, $x_2 = 1+h$

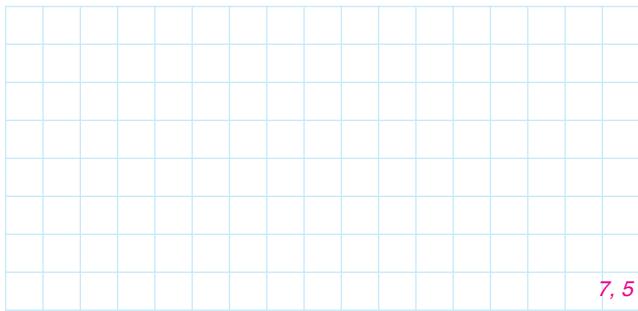
- a) -1
- b) 0, 1
- c) -h



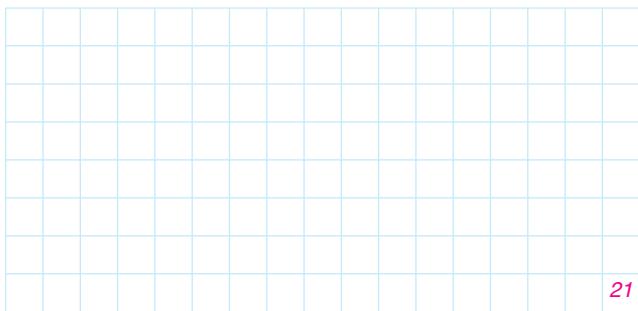
• PEKİŞTİRME ADIMI •



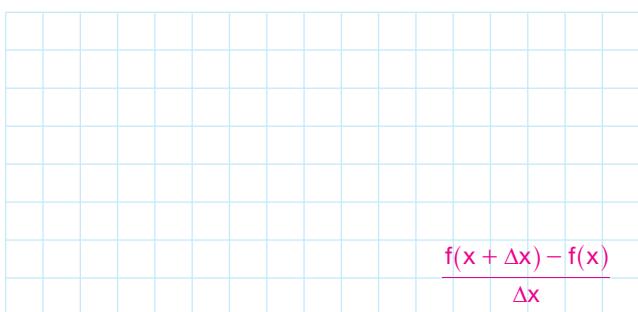
7. $y = 2^x$ eğrisinin $[1, 5]$ kapalı aralığındaki $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranını bulunuz.



8. $y = x^3$ fonksiyonunun $1 \leq x \leq 4$ kapalı aralığındaki değişimin ortalama hızı nedir?



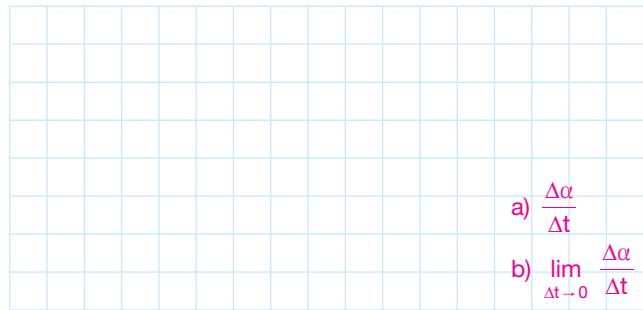
9. $y = f(x)$ eğrisi için $[x, x + \Delta x]$ kapalı aralığında $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının değeri nedir?



10. Bir nokta veya eksen etrafında dönmenin t anındaki,

- a) ortalama hızı
b) ani hızı

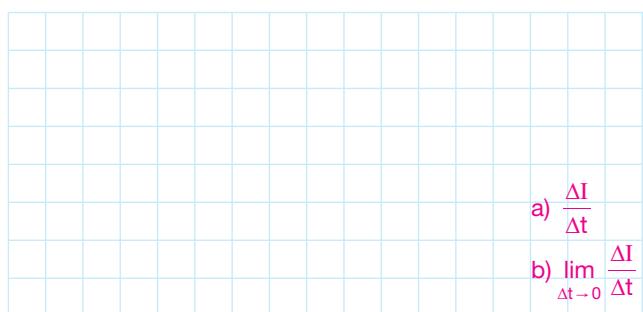
neye eşittir? (t anındaki dönme açısı: α)



11. Isıtılmış bir cisim ısısı daha az olan bir ortamda yeniden soğuyacaktır. (ısı kaybedecktir)

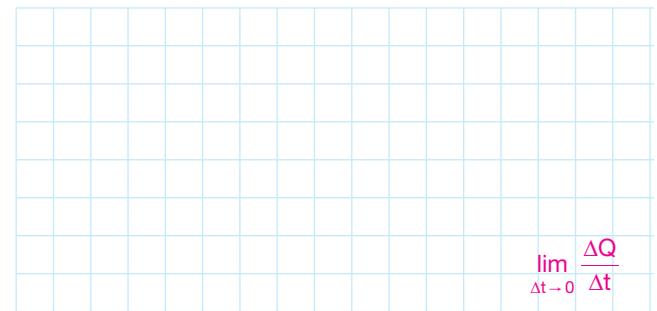
Aşağıdaki ifadelerden ne anlaşıılır?

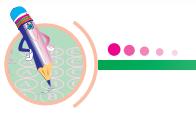
- a) Ortalama soğuma hızı
b) Verilen bir andaki soğuma hızı (t anındaki ısı I)



12. Kimyasal reaksiyon halindeki bir maddenin reaksiyon hızından ne anlaşıılır?

(Q , t anındaki madde miktarı)





• PEKİŞTİRME ADIMI •



13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun

- a) $x = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.
 - b) $x = -3$ noktasındaki türevini bulunuz.

- a) 6
- b) -4

14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun

- a) $x = -1$, b) $x = 3$, c) $x = \frac{1}{2}$

noktalarındaki türevini bulunuz.

- a) 3
- b) 27
- c) $\frac{3}{4}$

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun

- a) $x = -1$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{1}{2}$

noktalarındaki türevini bulunuz.

- a) - 1
- b) - $\frac{1}{4}$
- c) - 4

16. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki türevini bulunuz.

-1

17. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun

- a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = \frac{1}{3}$

noktalarındaki türevini bulunuz.

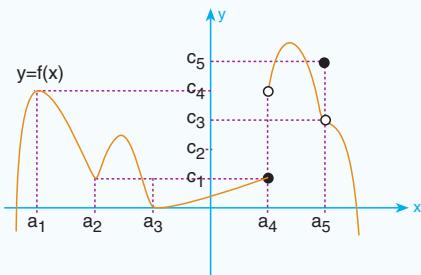
- a) 5
- b) -7
- c) -7

18. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun $x = 8$ noktasındaki türevini bulunuz.

1
12

ETKİNLİK

Grafikten yararlanarak



- a) f fonksiyonunun limitinin olmadığı noktaları bulunuz.

- b) f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

- c) f fonksiyonu hangi noktalarda türevli değildir?

- d) f fonksiyonunun sürekli olup türevli olmadığı nokta var mıdır?

e) $\lim_{x \rightarrow a_3} f(x) = ?$, $f(a_3) = ?$

$$f'(a_3) = ?$$

5. Türevin Tanımı (2) (Soldan ve Sağdan Türev)

$A \subset R$ ve $f : A \rightarrow R$ fonksiyonu verilsin. $a \in A$ ve $p \in R$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p$$

limitine, f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

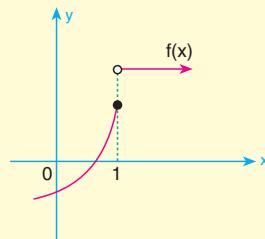
$q \in R$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = q$$

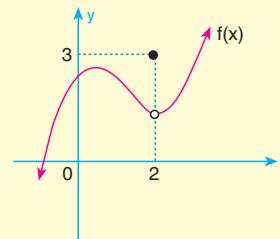
limitine de fonksiyonun $x = a$ noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

UYARI

1. Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevinin olması için gerek ve yeter koşul f nin $x = a$ noktasında sürekli ve f nin $x = a$ noktasında soldan ve sağdan türevlerinin eşit olmasıdır.
 2. Bir f fonksiyonu $x = a$ noktasında türevli ise f , bu noktada süreklidir. Ya da buna denk olarak, f fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değil ise f bu noktada türevli değildir.



$x = 1$ de $f(x)$ süreksiz
 $x = 1$ de türevi yok.



$x = 2$ de $f(x)$ süreksiz
 $x = 2$ de türevi yok.



UYGULAMA ADIMI •



1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu veriliyor.
a) $f'(2^-)$ b) $f'(2^+)$ c) $f'(2)$

değerlerini (varsıa) bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} a) f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2||x + 2|}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2).(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2).(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{aligned}$$

c) $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ olduğundan $f'(2)$ yoktur.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu veriliyor.
a) $f, x = 0$ da sürekli midir?
b) $f, x = 0$ da türevli midir?

Çözüm

a) f nin sürekli olması için $x = 0$ noktasındaki soldan ve sağdan limitlerinin $f(0)$ 'a eşit olması gereklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \text{ olup } f(x) = |x|$$

fonksiyonu $x = 0$ da sürekli dir.

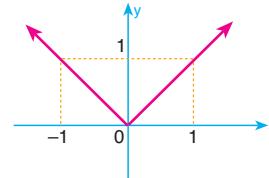
$$b) f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ olduğundan f nin $x = 0$ noktasında türevi yoktur.



Şekli inceleyiniz. $x = 0$ da fonksiyonun belirli bir teğetinin olmadığına dikkat ediniz.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonun $x = 1$ noktasındaki

a) sürekliliğini inceleyiniz.

b) türevini (varsıa) bulunuz.

Çözüm

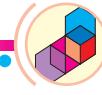
$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

ve $f(1) = 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \text{ olup}$$

$f, x = 1$ de sürekli dir.


UYGULAMA ADIMI

b) $f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - x - 1}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x-1)-1}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$

dir. $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan f fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi yoktur.

4. $f: R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x \leq 1 \\ -2x + 2 & , x > 1 \end{cases}$
fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini (varsıa) bulunuz.

Çözüm

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 2 - 0}{x - 1}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2$

olup $f'(1^-) = f'(1^+)$ olduğundan $x = 1$ noktasında fonksiyon türevlidir ve türevi $f'(1) = -2$ dir.

5. $f: R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , x < 2 \text{ ise} \\ 6 & , x = 2 \text{ ise} \\ 3x^2 - 6 & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu için eğer varsa

- a) $f'(3)$ değerini bulalım.
b) $f'(2)$ değerini bulalım.

Çözüm

a) $x = 3 > 2$ olduğundan $f'(3)$ için $f(x) = 3x^2 - 6$ dır.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x^2 - 2) - (3 \cdot 3^2 - 6)}{x - 3}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x^2 - 9)}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)}$
 $= 3 \cdot (3+3) = 18$

b) $x = 2$ kritik nokta olduğundan sağdan ve soldan türevleri bulunmalıdır.

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + 2) - (2^2 + 2)}{x - 2}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$
 $= 2 + 2 = 4$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x^2 - 6) - (3 \cdot 2^2 - 6)}{x - 2}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)}{x - 2}$
 $= 3 \cdot (2+2) = 12$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan $f'(2)$ yoktur.

6. $f(x) = |x^2 - 16|$ fonksiyonu için eğer varsa,

- a) $f'(3)$ türevini bulalım.
b) $f'(4)$ türevini bulalım.

Çözüm

a) $x = 3, f(x) = |x^2 - 16|$ fonksiyonu için bir kritik nokta olmadığından

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(16 - x^2) - (16 - 9)}{x - 3}$$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+3)(x-3)}{(x-3)}$
 $= -6 \text{ dır.}$



UYGULAMA ADIMI



- b) $x = 4$ noktası $f(x) = |x^2 - 16|$ fonksiyonunun bir kritik noktasıdır. Bu nedenle sağdan ve soldan türevlere bakılır.

$$\begin{aligned}f'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x^2 - 16) - (4^2 - 16)}{x - 4} \\&= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} \\&= 4 + 4 = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(16 - x^2) - (16 - 4^2)}{x - 4} \\&= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x-4)(x+4)}{(x-4)} = -8 \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

$f'(4^+) \neq f'(4^-)$ olduğundan $f'(4)$ yoktur.

7. \mathbb{R} de tanımlı $f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonunun $x = 2$ deki türevi kaçtır?

Çözüm

Polinom fonksiyonlar her yerde sürekli olduğundan $x = 2$ de f fonksiyonu süreklidir.

$x = 2$ noktası fonksiyon için bir kritik nokta olmadığından sol-sağ türevi bulmaya gerek yoktur.

Doğrudan türevi bulabiliriz.

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x) - (4 - 6)}{x - 2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

8. $f(x) = x|x| + 1$ ise, $f'(0)$ kaçtır?

Çözüm

$x = 0$ kritik nokta olduğundan sağdan ve soldan türevlere bakılır.

$$\begin{aligned}f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \cdot (x) + 1) - (0 \cdot 0 + 1)}{x - 0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x \cdot (-x) + 1) - (0 \cdot 0 + 1)}{x - 0} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0\end{aligned}$$

$f'(0^+) = f'(0^-) = 0$ olup, $f'(0) = 0$ dir.

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 4 \\ 3-x & , \quad x \geq 4 \end{cases}$

fonksiyonunun $x = -1$ deki türevini bulunuz.

Çözüm

$x = -1$ noktası bu fonksiyon için kritik nokta değildir. $x = -1$ in komşuluğunda fonksiyon $f(x) = x^3$ ile ifade edilmektedir.

$f(x) = x^3$ sürekli olduğundan hemen türevini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - (-1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$



• PEKİŞTİRME ADIMI



1. $f(x) = x|x|$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasında türevini (varsısa) bulunuz.

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & , \quad x \leq 1 \\ 2x^3 + 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f'(1)$ değerini (varsıa) bulunuz.

3. $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevini (varsı)
bulunuz.

Türev yoktur.

- $$4. \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & , \quad x \leq 2 \\ x^2 + ax + 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında türevli olması için a ve b değerleri ne olmalıdır?

$$a = \frac{5}{4}, b = \frac{1}{4}$$

- 5.** $f(x) = x^3 + x^2 |x| + 2x + 1$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & , \quad x < 1 \\ x^3 + 2x^2 + cx + 1 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ x^2 + d & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

**fonksiyonu $x = 1$ ve $x = 2$ de türevli olduğuna göre,
a. b. c. d değerlerini bulunuz.**

$$a=4, b=-17$$



6. Türev Alma Kuralları

$D \subset \mathbb{R}$ ve f, g, h fonksiyonları D kümesinde türevli olsunlar.

1. Sabitin Türevi

$c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ dir. (Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.)

ÖRNEK

$f(x) = 5, \quad f(x) = 0, \quad f(x) = \sqrt{2}$ fonksiyonlarının türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ dir.}$$

2. $n \in \mathbb{Q}, \quad c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = c.x^n$

$$f'(x) = c.n.x^{n-1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = 3x^5, \quad f(x) = -x^3$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad f(x) = 4x^{-2}$ fonksiyonlarının türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = 3x^5 \Rightarrow f'(x) = 3.5x^{5-1} = 15x^4$$

$$f(x) = -x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^{3-1} = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} = x$$

$$f(x) = 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (-2)x^{-2-1} = -8x^{-3} \text{ olur.}$$

ETKİNLİK

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

b) $y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x$

c) $y = (1 + 4x^3).(1 + 2x^2)$

d) $y = (2x^2 - 3)^2$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

3. Toplam veya Farkın Türevi

$F(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ dir.

ÖRNEK

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2$$

fonksiyonunun türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 &\Rightarrow f'(x) = (x^4 + 3x^3 - 5x^2)' \\ &\Rightarrow f'(x) = (x^4)' + (3x^3)' - (5x^2)' \\ &\Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x \text{ olur.} \end{aligned}$$

4. Çarpımın Türevi

1. $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ ise $F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2. $F(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ ise
 $F'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ dir.

ÖRNEK

$$f(x) = 2x^2 \cdot (x+1)$$

fonksiyonu verildiğine göre, $f'(x)$ ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM**I. Yol:**

$$f(x) = 2x^2 \cdot (x+1)$$

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = 6x^2 + 4x \text{ olur.}$$

II. Yol:

Çarpımın türevinde verilen kural uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot x \cdot (x+1) + 2x^2 \cdot 1 \\ &= 4x \cdot (x+1) + 2x^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 2x^2 = 6x^2 + 4x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$a, b \neq 0$ olmak üzere;

$f(x) = (x-a)(x-b)$ fonksiyonu veriliyor.

$f'(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) = (x-a)(x-b) &\Rightarrow f'(x) = (x-a)'(x-b) + (x-a)(x-b)' \\ &= 1 \cdot (x-b) + (x-a) \cdot 1 \\ &= 2x - (a+b) \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow 2x - (a+b) = 0 \Rightarrow 2x = a + b \\ &\Rightarrow x = \frac{a+b}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$f(x) = x^{2m} + x^{2n}$ ise, $f'(1) + f'(-1)$ toplamı nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) = x^{2m} + x^{2n} &\Rightarrow f'(x) = 2mx^{2m-1} + 2nx^{2n-1} \text{ olur.} \\ f'(1) &= 2m + 2n \\ f'(-1) &= 2m(-1)^{2m-1} + 2n(-1)^{2n-1} \\ &= 2m(-1) + 2n(-1) \\ &= -(2m+2n) \text{ ve} \\ f'(1) + f'(-1) &= 2m + 2n - (2m + 2n) = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

5. Bir Fonksiyonun Kuvvetinin Türevi

$n \in \mathbb{Q}$ ve $F(x) = [f(x)]^n \Rightarrow F'(x) = n.[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ tır.

ÖRNEK

$f(x) = (x^2 - 1)^{10}$ fonksiyonunun türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2 - 1)^{10} &\Rightarrow f'(x) = 10.(x^2 - 1)^9 \cdot (x^2 - 1)' \\ &= 10.(x^2 - 1)^9 \cdot 2x \\ &= 20x \cdot (x^2 - 1)^9 \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{(x^4 + 1)^3}$ fonksiyonu için $f'(-1)$ nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(x^4 + 1)^3} &\Rightarrow f(x) = (x^4 + 1)^{-3} \\ f'(x) = -3 \cdot (x^4 + 1)^{-3-1} \cdot (x^4 + 1)' &= -3 \cdot (x^4 + 1)^{-4} \cdot 4x^3 \\ &= -12x^3 \cdot \frac{1}{(x^4 + 1)^4} \text{ olup} \\ f'(-1) = \frac{-12 \cdot (-1)^3}{((-1)^4 + 1)^4} &= \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

6. Bölümün Türevi

$g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)' \cdot (x+2) - (x+1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ise, $f'(-1) = \cos \theta$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif θ açısı kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \text{ ise} \\ f'(x) &= \frac{0 \cdot (1+x^2) - 1 \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f'(-1) &= \frac{-2 \cdot (-1)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \cos \theta \text{ ise} \\ \theta &= 60^\circ \text{ dir.} \end{aligned}$$

KAVRAMSAL ADIM

ÖRNEK

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \text{ ve } f'(x) = \frac{1+ax}{(1+x)^3} \text{ ise, } a \text{ kaçtır?}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(1+x)^2} \text{ ise} \\ f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x)^2 - x \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{(1+x)[(1+x)-2x]}{(1+x)(1+x)^3} \\ &= \frac{1-x}{(1+x)^3} = \frac{1+ax}{(1+x)^3} \text{ ise } a = -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \frac{m^2x + 1}{x + 1}$ fonksiyonunun türevi sıfır ise, m kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m^2x + 1}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{m^2(x+1)-(m^2x+1)}{(x+1)^2} \text{ ve} \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{m^2-1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow m^2 = 1 \\ &\Rightarrow m = \pm 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

7. Köklü İfadelerin Türevi

a) $f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

b) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[g(x)]^{n-1}}} \text{ dir.}$

ÖRNEK

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ ise, } f'(x) \text{ nedir?}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} \text{ ise } f(x) \cdot f'(x) \text{ nedir?}$$

ÇÖZÜM

Her iki tarafın karesini alalım.

$$f(x) = \sqrt{3x + 1} \Rightarrow f^2(x) = 3x + 1 \text{ olur.}$$

Şimdi de her iki tarafın türevini alalım.

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 3 \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \text{ ise, } f'(3) \text{ kaçtır?}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} \\ f'(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{3-1}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

KAVRAMSAL ADIM

ÖRNEK

 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad f(0) = 1 \text{ ve}$

 $f(x).f'(x) = 4x + 3 \text{ ise, } f'(1) \text{ kaçtır?}$

ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ ise } f^2(x) = ax^2 + bx + c$

$2f(x).f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f(x).f'(x) = ax + \frac{b}{2} \text{ ve}$

$$\begin{aligned} f(x).f'(x) &= 4x + 3 \Rightarrow ax + \frac{b}{2} = 4x + 3 \\ &\Rightarrow a = 4, \quad \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

$f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = \sqrt{c} = 1 \Rightarrow c = 1 \text{ ve}$

$f(x) = \sqrt{4x^2 + 6x + 1} \text{ dir.}$

$f(1) = \sqrt{4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 1} = \sqrt{11}$

$f(x).f'(x) = 4x + 3 \Rightarrow f(1).f'(1) = 4 \cdot 1 + 3$

$\Rightarrow \sqrt{11}.f'(1) = 7$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{7\sqrt{11}}{11} \text{ dir.}$

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} \text{ ise, } f'(1) \text{ değerini bulunuz.}$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{x^{\frac{5}{6}}} = x^{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

$f'(x) = \frac{5}{12} \cdot x^{\frac{5}{12}-1} = \frac{5}{12} \cdot x^{-\frac{7}{12}}$

$f'(1) = \frac{5}{12} \cdot 1^{-\frac{7}{12}} = \frac{5}{12} \text{ olur.}$

ETKİNLİK

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + x^2 - 3}{\sqrt{x}} \text{ fonksiyonunun türevi}$

Bu tip fonksiyonlarda türev alınırken önceden sadeleştirme yapılırsa

$f(x) = x^{-1/6} + x^{3/2} - 3x^{-1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{6}x^{-7/6} + \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{3}{2}x^{-3/2}$

birimde bulunur.

ETKİNLİK

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}{x^3}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

b) $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ ise, $f'(1)$ değerini bulunuz.



UYGULAMA ADIMI



1. $f(x) = x^2 + 36x + 1$ fonksiyonu için, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = x^2 + 36x + 1 \text{ ise } f'(x) = 2x + 36$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 36 = 37 \text{ dir.}$$

2. $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ fonksiyonu için $g(-1) = 2$, $g'(-1) = 4$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = x^2 \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$$

$$x = -1 \text{ için, } f'(-1) = 2(-1) \cdot g(-1) + (-1)^2 \cdot g'(-1)$$

$$f'(-1) = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \text{ bulunur.}$$

3. Uygun koşullarda

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{f(x)} + x + 2 \text{ koşulunu sağlayan}$$

f fonksiyonu için $f(1) = 4$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{f(x)} + x + 2 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 6x \cdot \sqrt{f(x)} + 3x^2 \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + 1$$

$x = 1$ için,

$$f'(1) = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{f(1)} + 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}} + 1$$

$$f'(1) = 6\sqrt{4} + \frac{3 \cdot f'(1)}{2\sqrt{4}} + 1$$

$$f'(1) = 12 + \frac{3}{4} \cdot f'(1) + 1 \Rightarrow f'(1) - \frac{3}{4} f'(1) = 13$$

$$\frac{1}{4} f'(1) = 13 \Rightarrow f'(1) = 52 \text{ bulunur.}$$

4. $f(x) = mx^3 + 2x^2 + 3x + 2$ ve $f'(2) = 6$ olduğuna göre, m kaçır?

Çözüm

$$f(x) = mx^3 + 2x^2 + 3x + 2 \text{ ise } f'(x) = 3mx^2 + 4x + 3$$

$$\Rightarrow f'(2) = 3 \cdot m \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = 6$$

$$\Rightarrow 12m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{12} \text{ bulunur.}$$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ ise, $f'(0)$ değeri kaçır?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+2x+3) - (x^2+3x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(2 \cdot 0 + 3)(0^2 + 2 \cdot 0 + 3) - (0^2 + 3 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 + 2)}{(0^2 + 2 \cdot 0 + 3)^2}$$

$$= \frac{9 - 2}{9} = \frac{7}{9} \text{ bulunur.}$$

6. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 1}$ fonksiyonuna apsisı 1 olan noktadan çizilen teğetin eğimi kaçır?

Çözüm

$f'(1)$ istenmektedir.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3x + 2)' \cdot (x^2 + x - 1) - (x^2 + 3x + 2) \cdot (x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x-1) - (x^2+3x+2)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2+3)(1+1-1) - (1+3+2)(2+1)}{(1+1-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{5-18}{1} = -13 \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



7. $f(x) = \frac{ax+3}{2x+1}$ fonksiyonu için, $f'(1) = \frac{1}{3}$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \frac{ax+3}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a \cdot (2x+1) - 2 \cdot (ax+3)}{(2x+1)^2}$$

$$x=1 \Rightarrow f'(1) = \frac{a \cdot 3 - 2 \cdot (a+3)}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a-6}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow a-6 = 3 \\ \Rightarrow a = 9 \text{ bulunur.}$$

8. $f(x) + 2x^2 \cdot g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(1) = 3$, $g'(1) = 2$ olduğuna göre, $g(1)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) + 2x^2 \cdot g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) + 4x \cdot g(x) + 2x^2 \cdot g'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$x=1 \Rightarrow f'(1) + 4 \cdot 1 \cdot g(1) + 2 \cdot 1^2 \cdot g'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1$$

$$f'(1) = 3 \text{ ve } g'(1) = 2 \text{ olduğundan}$$

$$3 + 4 \cdot g(1) + 2 \cdot 2 = 9$$

$$4 \cdot g(1) = 2$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

9. $f(x) = (6x^2 + 2x + 1)^3$ fonksiyonu için $f'(-1)$ değeri kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = (6x^2 + 2x + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(6x^2 + 2x + 1)^{3-1} \cdot (6x^2 + 2x + 1)' \\ = 3(6x^2 + 2x + 1)^2 \cdot (12x + 2)$$

$x = -1$ için;

$$f'(-1) = 3(6 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1)^2 \cdot (12(-1) + 2)$$

$$= 3 \cdot 25 \cdot (-10)$$

$$= -750 \text{ bulunur.}$$

10. $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ fonksiyonunun grafiğine $x = 2$ apsisli noktada çizilen teğetin eğimi 6 olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

$$f'(2) = 6 \text{ olmalıdır.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a \text{ olup } f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3a = 6$$

$$\Rightarrow 6 = 3a \Rightarrow a = 2 \text{ dir.}$$

11. $f(x) = (2x + 3)^3$ ise, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f(x) = (2x + 3)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x + 3)^{3-1} \cdot (2x + 3)'$$

$$f'(x) = 3 \cdot (2x + 3)^2 \cdot 2$$

$$f'(x) = 6 \cdot (2x + 3)^2 \text{ bulunur.}$$

12. $f(3x - 5) = 2x^2 + x - 1$ olduğuna göre,

$$f'(1) + f(1)$$
 kaçtır?

Çözüm

$$f(3x - 5) = 2x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow f'(3x - 5) \cdot 3 = 4x + 1$$

$$\Rightarrow f'(1) \cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3$$

$$f(3x - 5) = 2x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow f(3 \cdot 2 - 5) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 9$$

O halde, $f'(1) + f(1) = 3 + 9 = 12$ bulunur.



• PEKİŞTİRME ADIMI •



1. $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$ ise, $f'(x)$ i bulunuz.

10x - 3

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ ise, $f'(-1)$ değeri kaçtır?

-4

3. $f(x) = x^3 \cdot g(x) + 2x + 1$ ve $g(-1) = -2$, $g'(-1) = 3$ olduğuna göre, $f'(-1)$ değeri kaçtır?

-7

4. $f(x) = x^2 + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu için $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ değeri kaçtır?

$-\frac{5}{2}$

5. $f(x) = x^2 \cdot (x+1)^{10}$ fonksiyonu için $f'(-2)$ değeri kaçtır?

-44

6. $f(x) = \frac{4x-1}{3x+2}$ fonksiyonunun $x = -\frac{2}{3}$ noktasında (varsıa) türevini bulunuz.

yoktur

7. $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 4x + 2}$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki türevini bulunuz.

-1

8. $f(x) = \frac{(3x-1)^2}{x+2}$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{3}$ noktasındaki türevini bulunuz.

0

8. Parametrik Fonksiyonların Türevi

$D \subset \mathbb{R}$ ve $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (bağıntısı) $y = f(x)$ kuralıyla verildiği gibi, t ortak değişkenine bağlı olarak $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ kuralıyla da verilebilir. Burada t ye **parametre**, $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ ifadesine **parametrik fonksiyon** denir.

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları t ye göre türevli olmak üzere, y nin x değişkenine göre türevi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

dir.

Bu türev kısaca $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$x = t^2 + 1$, $y = t^2 + t$ ise, $\frac{dy}{dx}$ ifadesi nedir?

ÇÖZÜM

$$x = t^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$y = t^2 + t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t + 1 \text{ olup}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + 1}{2t}$$

dir.

ÖRNEK

$x = t^4 - t^3$ ve $y = t^2 - 2t$ ise, $\frac{dy}{dx}$ türevinin $t = 2$ noktasındaki değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$x = t^4 - t^3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 3t^2$$

$$y = t^2 - 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t - 2 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 2}{4t^3 - 3t^2} \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} &= \frac{2.2 - 2}{4.2^3 - 3.2^2} \\ &= \frac{2}{32 - 12} = \frac{1}{10} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

9. Kapalı İfadelerin Türevleri

$F(x,y) = 0$ denkleminden, $y = f(x)$ gibi y nin x e bağlı fonksiyonu elde edilebiliyorsa türev

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ tir.}$$

Ancak çoğu kez, $f(x,y) = 0$ denkleminde $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon bulmak olanaksızdır.

Bu durumda verilen denklemin her teriminin x e göre türevi alınarak $\frac{dy}{dx}$ türevi bulunur.

ÖRNEK

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ ise, $\frac{dy}{dx}$ ifadesi nedir?

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ eşitliğinde her terimin x 'e göre türevi alınırsa,

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x + 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow x + y \cdot y' = 0 \Rightarrow y \cdot y' = -x$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK**

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 5$ ise, $\frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=2}}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Önce $\frac{dy}{dx}$ i bulalım:

Her terimin x'e göre türevi alınırsa:

$$4x^3 + 4x.y^2 + 2x^2.2y.y' + 4.y^3.y' = 0$$

$$y'(4x^2y + 4y^3) = -4xy^2 - 4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{4xy^2 + 4x^3}{4x^2y + 4y^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 + x^3}{x^2y + y^3}$$

$$\text{ve } \frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=2}} = -\frac{2.2^2 + 2^3}{2^2.2 + 2^3} = -1 \quad \text{bulunur.}$$

KOLAYLIK

$F(x,y) = 0$ denkleminin $y'_x = \frac{dy}{dx}$ türevi şöyle de bulunabilir.

y sabit düşünülerek x değişkenine göre $F'_x(x,y)$, x sabit düşünülerek y değişkenine göre $F'_y(x,y)$ bulunarak

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \text{ yazılır.}$$

ÖRNEK

$x^3 + 3x^2y + y^3 = 20$ ise, $\frac{dy}{dx}$ ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3 - 20$$

$$F'_x(x,y) = 3x^2 + 6xy$$

$$F'_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2 \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 6xy}{3x^2 + 3y^2} \\ &= -\frac{x^2 + 2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

ETKİNLİK

$$y = \sin^3(\pi x) + \cos^4(x^2 + 1) \Rightarrow y' = ?$$

10. Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri:

1.

a) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

b) $f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x))$

c) $f(x) = \sin^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot (\sin x)' \\ = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$

ÖRNEK

$f(x) = \sin 3x$ ise, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM

$f(x) = \sin 3x$ ise, $f'(x) = (3x)' \cdot \cos 3x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos 3x$ tir.

ÖRNEK

$f(x) = \sin^2 x$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \sin^2 x$ ise, $f'(x) = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ ve
 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ dir.

ÖRNEK

$f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \sin 3x$ ve

$f'(x) = -2 \cdot \cos x + 3 \cdot \cos 3x$ ise $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \sin 3x$ ise

$f'(x) = a \cdot \cos x + 3b \cdot \cos 3x = -2\cos x + 3\cos 3x$

olup bu eşitlikten

$a = -2, 3b = 3 \Rightarrow b = 1$ bulunur. O halde,

$f(x) = -2\sin x + \sin 3x$ olup,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = -2 \cdot 1 - 1 = -3$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = 4 \cdot \sin^2 3x + 3 \cdot \sin^2 4x$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{24}\right)$ nedir?

ÇÖZÜM

$f(x) = 4 \sin^2 3x + 3 \sin^2 4x$ ise

$$f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot \sin 3x \cdot (\cos 3x) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot \sin 4x \cdot (\cos 4x) \cdot 4$$

$$= 12 \cdot 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x + 12 \cdot 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x$$

= 12. ($\sin 6x + \sin 8x$) olup

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = 12 \cdot \left(\sin 6 \cdot \frac{\pi}{24} + \sin 8 \cdot \frac{\pi}{24}\right)$$

$$= 12 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3}\right) = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 6(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ tür.}$$

2. a) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

b) $f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \cdot \sin g(x)$

c) $f(x) = \cos^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \cos^{n-1} x \cdot (\cos x)'$

$$= -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \sin x$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{\cos 3x}{3}$ ise, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM

$$f(x) = \frac{\cos 3x}{3} \text{ ise}$$

$$f'(x) = (3x)' \cdot \frac{-\sin 3x}{3} = 3 \cdot \frac{-\sin 3x}{3} = -\sin 3x \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = \cos^2 x + \cos 2x$ türevinin $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki değeri nedir?



ÇÖZÜM

$f(x) = \cos^2 x + \cos 2x$ ise

$$f'(x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x - 2 \sin 2x$$

$$= -\sin 2x - 2 \sin 2x = -3 \sin 2x$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -3 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} = -3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \sin^2 \pi x + \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \sin^2 \pi x + \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ ise

$$f'(x) = 2\pi \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi x - 2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 2\pi \cdot \sin(-\pi) \cdot \cos(-\pi) - \pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a)} \quad f(x) &= \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(x) &= \tan g(x) \Rightarrow f'(x) = (1 + \tan^2 g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) \\ &= \sec^2 g(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) &= \tan^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \tan^{n-1} x \cdot (1 + \tan^2 x) \\ &= n \cdot \tan^{n-1} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= n \cdot \tan^{n-1} x \cdot \sec^2 x \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = 3 \tan 2x$ ise, $f'(x)$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM

$f(x) = 3 \tan 2x$ ise

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (1 + \tan^2 2x) \cdot 2 = 6(1 + \tan^2 2x) \\ &= 6 \sec^2 2x \text{ veya} \\ &= \frac{6}{\cos^2 2x} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \tan^3 4x + \cos^2 x$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değeri nedir?

ÇÖZÜM

$f(x) = \tan^3 4x + \cos^2 x$ ise

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \tan^2 4x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 4x}\right) \cdot 4 - 2 \cos x \cdot \sin x \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 12 \cdot \left(\tan \frac{4\pi}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)^2} - 2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 12 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 36 \cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 144 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$4. \text{ a)} \quad f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x)(1 + \cot^2 g(x))$$

$$= -\frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$$

$$= -g'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2 g(x)$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \cot^n x \Rightarrow f'(x) = -n \cdot \cot^{n-1} x \cdot (1 + \cot^2 x)$$

$$= -n \cdot \cot^{n-1} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -n \cdot \cot^{n-1} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$$

ÖRNEK

$f(x) = \cot^2 4x - \cot x$ ise, $f'(x)$ ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \cot^2 4x - \cot x$ ise

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\cot 4x \cdot (1 + \cot^2 4x) \cdot 4 + (1 + \cot^2 x) \\ &= -8\cot 4x - 8\cot^3 4x + 1 + \cot^2 x \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{4\tan x + 3\cot x}$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(1 + \tan^2 x) - 3(1 + \cot^2 x)}{2\sqrt{4\tan x + 3\cot x}} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) - 3\left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{4\tan \frac{\pi}{4} + 3\cot \frac{\pi}{4}}} \\ &= \frac{4(1+1) - 3(1+1)}{2\sqrt{4 \cdot 1 + 3 \cdot 1}} = \frac{8-6}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \text{ dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = \tan^4 \frac{\pi x}{4}$ ise, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ ifadesinin değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= f'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f'(1) \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\tan^3 \frac{\pi}{4} x \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} x\right) \cdot \frac{\pi}{4} \text{ olduğundan} \\ \frac{1}{2} f'(1) &= \frac{1}{2} \left[4\tan^3 \left(\frac{\pi}{4} \cdot 1\right) \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) \right] \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} 2\pi = \pi \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x = \tan t$ ve $y = \cot t$ ise, $\frac{dx}{dy}$ türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} x = \tan t \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ y = \cot t \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= -(1 + \cot^2 t) = -\frac{1}{\sin^2 t} \text{ olup} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{-\frac{1}{\sin^2 t}} = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = -\tan^2 t \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

11. Logaritma Fonksiyonunun Türevi

a. $F(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ tir.

b. $F(x) = \log_a(f(x)) \Rightarrow F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$$

$(a \in \mathbb{R}^+ - \{1\})$ dir.

KAVRAMSAL ADIM

ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = \ln x$ | d) $g(x) = \log_3 x^2$ |
| b) $g(x) = x \ln x$ | e) $h(x) = \log_5(\sin x)$ |
| c) $h(x) = \ln \sqrt{x}$ | f) $k(x) = \log_2(\ln x)$ |

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x}$

b) $g'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

c) $h(x) = \ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln x$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{2x} \text{ tir.}$$

d) $g'(x) = (\log_3 x^2)' = \frac{(x^2)'}{x^2} \cdot \log_3 e$

$$= \frac{2x}{x^2} \cdot \log_3 e = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

e) $h'(x) = (\log_5(\sin x))' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} \cdot \log_5 e$
 $= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \log_5 e = \cot x \cdot \frac{1}{\ln 5}$

f) $k'(x) = (\log_2(\ln x))' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} \cdot \log_2 e$
 $= \frac{1}{x} \cdot \log_2 e = \frac{1}{x \ln x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \text{ dir.}$

ETKİNLİK

$f(x) = \ln(\sin x)$ için $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

ETKİNLİK

- f) $f(x) = \ln(\ln x)$ ise türevini bulalım.

$\ln x = u$ dersek

$$f'(x) = \frac{u'}{u} \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \text{ tir. O halde}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} \text{ olur.}$$

- f) $f(x) = \log_3(x^2 + 3)$ ise türevini bulalım.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} \log_3 e = \frac{2x}{x^2 + 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} \text{ tür.}$$

- f) $f(x) = \ln(\sin x^2)$ ise türevini bulalım.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \cos x^2}{\sin x^2} = 2x \cdot \cot x^2 \text{ olur.}$$

12. Üstel Fonksiyonun Türevi

$y = a^x$ ifadesinin her iki yanının doğal logaritmasını alalım:

$$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \text{ olur.}$$

Her iki yanının türevi alınırsa

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot \ln a \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a \text{ bulunur.}$$

O halde

a) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

b) $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a \text{ dır.}$

ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a) $f(x) = 2^x \quad d) \quad f(x) = \frac{1}{2^{x^2}}$

b) $g(x) = a^{x^2} \quad e) \quad g(x) = 3^{\sin x}$

c) $h(x) = 4^{1-x^2} \quad f) \quad h(x) = 5^{\sqrt{x}}$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot (x)' \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$

b) $g(x) = a^{x^2} \Rightarrow g'(x) = a^{x^2} \cdot (x^2)' \cdot \ln a = 2x \cdot a^{x^2} \cdot \ln a$

c) $h(x) = 4^{1-x^2} \Rightarrow h'(x) = 4^{1-x^2} \cdot (1-x^2)' \cdot \ln 4$
 $= -2x \cdot 4^{1-x^2} \cdot \ln 4 = -x \cdot 2 \cdot 2^{2-2x^2} \cdot 2\ln 2$
 $= -x \cdot 2^{4-2x^2} \cdot \ln 2$

d) $f(x) = \frac{1}{2^{x^2}} = 2^{-x^2}$ ise

$$f'(x) = 2^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot \ln 2 = 2^{-x^2} \cdot (-2x) \ln 2 = -x \cdot 2^{1-x^2} \cdot \ln 2$$

e) $g(x) = 3^{\sin x} \Rightarrow g'(x) = 3^{\sin x} \cdot (\sin x)' \ln 3$
 $= \cos x \cdot 3^{\sin x} \cdot \ln 3$

f) $h(x) = 5^{\sqrt{x}} \Rightarrow h'(x) = 5^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' \ln 5$
 $= 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \quad \text{tir.}$

ETKİNLİK

a) $f(x) = 3^{\sin(e^x)}$ ise, $f'(x) = ?$

b) $f(x) = e^{\cos x}$ ise, $f'(x) = ?$

ETKİNLİK

$f(x) = e^{1+x^2}$ ise, $f'(x)$ i bulalım.

$f'(x) = 2x \cdot e^{1+x^2}$ olur.

UYARI

$y = a^x$ fonksiyonunda

$a = e (e \approx 2,71828\dots)$ alınırsa $y = e^x$ olur.

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$ tir.

O halde

$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a) $f(x) = e^{2x}$ d) $f(x) = e^{\sin x}$

b) $g(x) = xe^{-x}$ e) $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

c) $h(x) = x^2 e^x$ f) $h(x) = e^x - e^{-x}$

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$

b) $g'(x) = (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)'$
 $= e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

c) $h'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$
 $= 2xe^x + x^2 e^x = e^x(x^2+2x)$

d) $f'(x) = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

e) $g'(x) = (e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \quad \text{tir.}$

f) $h'(x) = (e^x - e^{-x})' = (e^x)' - (e^{-x})' = e^x - e^{-x} \cdot (-x)'$
 $= e^x + e^{-x} \quad \text{tir.}$



UYGULAMA ADIMI



- 1.** Parametrik denklemi

$$x = 3t^3 + t + 2$$

$$y = t^3 + 2t^2 - 1$$

olan $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevinin $t = 1$ noktasındaki değeri kaçtır?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 4t}{9t^2 + 1} \Big|_{t=1} = \frac{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1}{9 \cdot 1^2 + 1} = \frac{7}{10} \text{ bulunur.}$$

- 2.** $x^3 + xy^2 + x^2y + x + y + 1 = 0$

eşitliğiyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun y' türevini bulunuz.

Çözüm

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$y' = -\frac{3x^2 + y^2 + 2xy + 1}{2xy + x^2 + 1} \text{ dir.}$$

- 3.** $2x^3 + x^2y + 2xy + 1 = 0$

bağıntısıyla verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm

$$2x^3 + x^2y + 2xy + 1 = 0 \text{ bağıntısında}$$

$$x = -1 \text{ için } 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 \cdot y + 2 \cdot (-1) \cdot y + 1 = 0$$

$$-2 + y - 2y + 1 = 0$$

$y = -1$ olup, $A(-1, -1)$ noktasındaki türev soruluyor.

$$y' = -\frac{6x^2 + 2xy + 2y}{x^2 + 2x} \text{ ifadesinde}$$

$$x = -1, \quad y = -1 \text{ yazılırsa}$$

$$y' = -\frac{6 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2}{(-1)^2 + 2(-1)}$$

$$= -\frac{6 + 2 - 2}{1 - 2} = \frac{-6}{-1} = 6 \text{ bulunur.}$$

- 4.** $f(x) = \sin^3 x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \sin^3 x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 0$$

$$= 0 \text{ bulunur.}$$

- 5.** $f(x) = 3\cos^2 x + 2x \cot x$ fonksiyonunun $x = -\frac{\pi}{4}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = 3\cos^2 x + 2x \cdot \cot x$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) + 2 \cot x + 2x \cdot [-(1 + \cot^2 x)]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -6 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$2 \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[-\left(1 + \cot^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 + \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$= 3 - 2 + \pi$$

$$= 1 + \pi \text{ bulunur.}$$

- 6.** $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x) \cdot (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\pi/4) = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 - 0}{\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = 1 \text{ bulunur.}$$

O halde, $m_T = 1$ dir.



UYGULAMA ADIMI



7. $f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \cos x) \cdot (x - \cos x) - (x + \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{(x - \cos x)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{(1 + \cos 0) \cdot (0 - \cos 0) - (0 + \sin 0) \cdot (1 + \sin 0)}{(0 - \cos 0)^2} \\ &= \frac{(1 + 1)(-1) - 0 \cdot 1}{(-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

8. $f(x) = x \cdot \tan^2 x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x \cdot \tan^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \tan^2 x + x \cdot 2 \cdot \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \tan^2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}(1 + 1) \\ &= 1 + \pi \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

9. $f(x) = \ln(x^3 + 2)$ ise, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \ln(x^3 + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3 + 2)'}{x^3 + 2} \cdot \ln e$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

$$f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{1^3 + 2} = \frac{3}{3} = 1 \text{ dir.}$$

10. $f(x) = \log_5\left(\frac{x+1}{x+11}\right)$ ise, $f'(9)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \log_5\left(\frac{x+1}{x+11}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x+11}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x+11}\right)} \cdot \log_5 e$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1 \cdot (x+11) - (x+1) \cdot 1}{(x+11)^2}}{\left(\frac{x+1}{x+11}\right)} \cdot \log_5 e$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10}{(x+11)^2} \cdot \left(\frac{x+11}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{\ln 5}$$

$$f'(x) = \frac{10}{(x+11)(x+1)} \cdot \frac{1}{\ln 5}$$

$$f'(9) = \frac{10}{20 \cdot 10} \cdot \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{20 \ln 5} \text{ tir.}$$

11. $f(x) = \log(x^2 + x + 1)$ ise, $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \log(x^2 + x + 1) \text{ ise}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} \cdot \log_{10} e$$

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{\ln 10}$$

$$f'(1) = \frac{2 + 1}{1 + 1 + 1} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{3}{3 \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \text{ dur.}$$

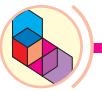
12. $f(x) = \ln(\tan x)$ ise, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f(x) = \ln(\tan x) \text{ ise } f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} + \tan x$$

$$f'(x) = \cot x + \tan x \text{ olur.}$$



UYGULAMA ADIMI



13. $f(x) = \ln(\ln x)$ ise, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = \ln(\ln x) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e}} = \frac{e}{\ln e^{-1}} = \frac{e}{-1} = -e \text{ dir.}$$

14. $y = x^{x^2}$ ise,, y' nedir?

Çözüm

$$y = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (x^2 \ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot (2x \ln x + x)$$

$$\Rightarrow y' = x^{x^2} (2x \ln x + x)$$

$$\Rightarrow y' = x^{x^2} + x \cdot (2 \ln x + 1)$$

15. $y = x^{\cos x}$ ise, y' nedir?

Çözüm

$$y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\cos x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (\cos x \cdot \ln x)'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left(-\sin x \ln x + \frac{1}{x} \cos x\right)$$

$$\Rightarrow y' = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \ln x + \frac{1}{x} \cos x\right) \text{ olur.}$$

16. $f(x) = \ln(\sin \sqrt{x})$ ise, $f'(x)$ nedir?

Çözüm

$$f(x) = \ln(\sin \sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sin \sqrt{x})'}{\sin \sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'}{\sin \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\cot \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad \text{tir.}$$

17. $y = (\ln x)^{\ln x}$ ise, y' nedir?

Çözüm

$$y = (\ln x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln[(\ln x)^{\ln x}]$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(\ln x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln(\ln x) + \ln x \cdot \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

$$\Rightarrow y' = y \left[\frac{1}{x} \ln(\ln x) + \frac{1}{x} \right]$$

$$y' = (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} [\ln(\ln x) + 1]$$

18. $f(x) = 3^{\frac{1}{1+\ln x}}$ ise, $f'(e)$ nedir?

Çözüm

$$f(x) = 3^{\frac{1}{1+\ln x}} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{1+\ln x} \right)' \cdot 3^{\frac{1}{1+\ln x}} \cdot \ln 3$$

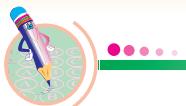
$$= [(1 + \ln x)^{-1}]' \cdot 3^{\frac{1}{1+\ln x}} \cdot \ln 3$$

$$f'(x) = -1(1 + \ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 3^{\frac{1}{1+\ln x}} \cdot \ln 3$$

$$f'(e) = -(1 + \ln e)^{-2} \cdot \frac{1}{e} \cdot 3^{\frac{1}{1+\ln e}} \cdot \ln 3$$

$$= -\frac{1}{4e} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 3$$

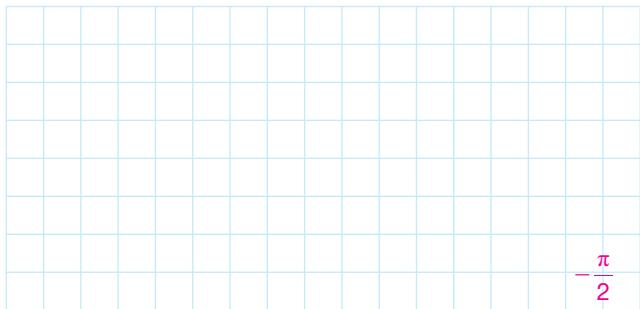
$$= -\frac{\sqrt{3} \ln 3}{4e} \quad \text{dir.}$$



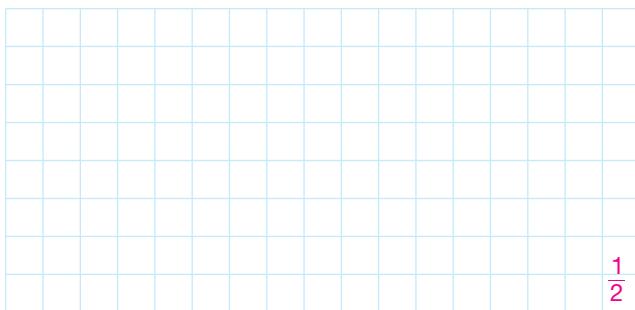
• PEKİŞTİRME ADIMI •



1. $f(x) = x \cos x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.



2. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ fonksiyonunun $x = 0$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.

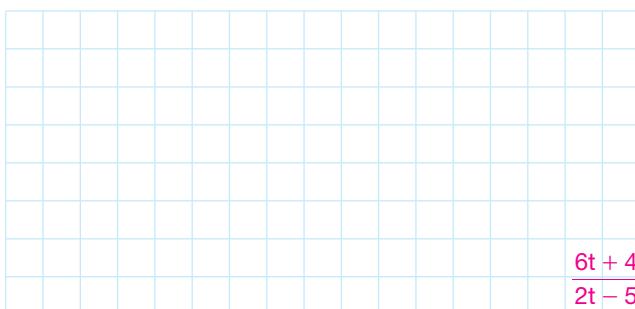


3. Parametrik denklemi

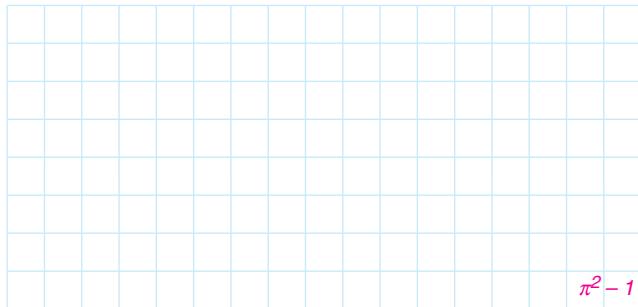
$$x = t^2 - 5t + 1$$

$$y = 3t^2 + 4t + 3$$

olan $y = f(x)$ fonksiyonu için, $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

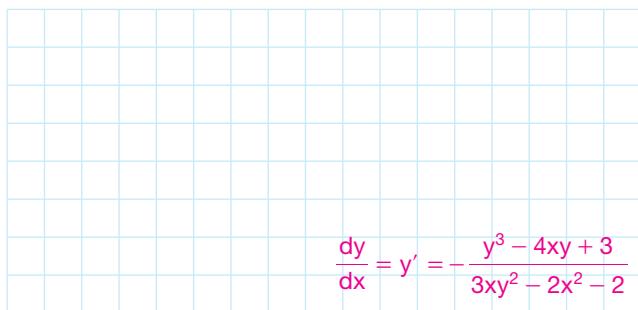


4. $f(x) = \sin x + x^2 \tan x$ fonksiyonunun $x = \pi$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.

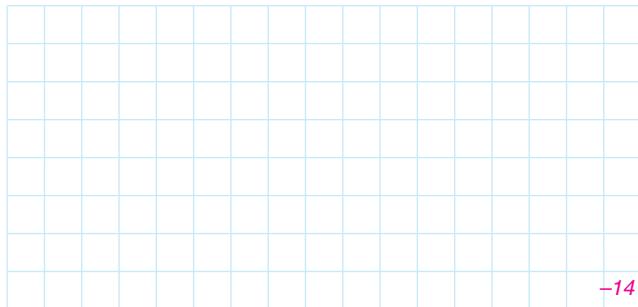


5. $xy^3 - 2x^2y + 3x - 2y + 1 = 0$

eşitliğiyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.



6. $f(x) = 4\sin 3x + 2\sin 2x$ fonksiyonu için $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değeri kaçtır?





• PEKİŞTİRME ADIMI •



7. $f(x) = \sin(\cos x)$ ise, $f'(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$-\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

8. $f(x) = \sin^3(\sin x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$3\sin^2(\sin x) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$$

9. $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ ise, $f'(e)$ değeri kaçtır?

$$4e^2$$

10. $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ değerini bulunuz.

$$3$$

11. $f(x) = e^{\sin 2x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

$$0$$

12. $f(x) = x^2 \cdot e^x$ fonksiyonu için $f'(2)$ değeri kaçtır?

$$8e^2$$

• PEKİŞTİRME ADIMI •

13. $f(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri kaçtır?

-2

14. $f(x) = xe^{\tan x}$ fonksiyonu için $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

 $e\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

15. $f(x) = 3^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ apsisli noktadaki türevini bulunuz.

 $-2\sqrt{3} \cdot \ln 3$

16. $f(x) = 2^{\ln x} + 2^x + 2^{x^2}$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.

7/n2

17. $f(x) = x \cdot 5^x$ fonksiyonu için $f'(1)$ değeri kaçtır?

 $\ln(5e)^5$

18. $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ olduğuna göre, $f'(-1)$ değeri kaçtır?

 $(\ln \sqrt{2}) - 1$

ETKİNLİK

13. Bileşke Fonksiyonun Türevi (Zincir Kuralı):

$D \subset R, E \subset R$ olmak üzere;

$f: D \rightarrow E$ fonksiyonu $a \in D$ noktasında, $g: E \rightarrow R$ fonksiyonu $f(a) \in E$ noktasında türevlenebiliyorsa;

$gof: D \rightarrow R$ fonksiyonu da a noktasında türevlenebilirdir ve $(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ dır.

$y = f(x), z = g(y)$ alınırsa

$z = g(f(x)) = (gof)(x)$ olur.

$$\frac{dz}{dx} = (gof)'(x) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ yani } z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ olur.

ÖRNEK

$f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 + 1$

$g: R \rightarrow R, g(x) = 2x^2$ ise, $(gof)'(1)$ nedir?

ÇÖZÜM

I. Yol:

$(gof)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$ olduğundan

$$g(x) = 2x^2 \Rightarrow g'(x) = 4x$$

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x, f(1) = 1 + 1 = 2$$

ve $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ ise

$$g'(f(1)) = g'(2) = 8$$
 olduğundan

$$(gof)'(1) = 8 \cdot 2 = 16 \text{ dır.}$$

II. Yol:

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) = 2(x^2+1)^2 \\ &= 2(x^4 + 2x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$(gof)'(x) = 2(4x^3 + 4x)$$
 olup

$$(gof)'(1) = 2(4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1) = 2 \cdot 8 = 16 \text{ dır.}$$

ÖRNEK

f, g ve fog fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlardır.

$g(-1) = 2, g'(-1) = 3$ ve $f'(2) = 4$ olduğuna göre, $(fog)'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$(fog)'(-1) = f'(g(-1)) \cdot g'(-1)$$

$$= f'(2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ dir.}$$

ETKİNLİK

$$f(x) = \ln x, g(x) = \sqrt{x} \text{ ise}$$

$(fog)(x)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(fog)(x) = \ln(\sqrt{x}) \text{ olur.}$$

$$(fog)'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x\right)' = \frac{1}{2x} \text{ bulunur.}$$

14. Ters Fonksiyonun Türevi:

$A \subset R, B \subset R$ olmak üzere;

$f: A \rightarrow B$ bire bir ve örten fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}: B \rightarrow A$ olsun. $x \in A$ için $y = f(x) \in B$ ise ters fonksiyon tanımından $y \in B$ için $f^{-1}(y) = x \in A$ dır. $f^{-1}(y) = x$ eşitliğinin her iki yanının x 'e göre türevi alınırsa;

$$(f^{-1})'(y) \cdot y'_x = 1 \text{ veya } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'_x} \text{ tir.}$$

$$y'_x = f'(x) = f'(f^{-1}(y)) \text{ olduğundan}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'_x(f^{-1}(y))} \text{ ya da}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f: (1,4) \rightarrow R, f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(3)$ nedir?

ÇÖZÜM

I. Yol:

f fonksiyonu $(1,4)$ aralığında bire bir ve örten olduğundan ters fonksiyon vardır.

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow (y + 1) = (x - 1)^2$$

$$\Rightarrow |x - 1| = \sqrt{y + 1}$$

ve $x \in (1,4)$ olduğundan $x > 1$ dir.

KAVRAMSAL ADIM

$|x - 1| = x - 1 = \sqrt{y + 1}$ ise
 $x = \sqrt{y + 1} + 1$ ve $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1} + 1$ dir.

O halde,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} + 1 \text{ dir.}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} \\ = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

II. Yol:

$$y = f(x) = x^2 - 2x \text{ ise}$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1} + 1 \text{ (bulundu.)}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x^2 - 2x)'} = \frac{1}{2x - 2} \\ = \frac{1}{2(\sqrt{y+1} + 1 - 1)} \\ = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

III. Yol:

$$y = f(x) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

olduğunu görmüştünüz. $(f^{-1})'(3)$ için

$y = 3$ e karşılık gelen x değerini bulmalıyız.

$$f(x) = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$x = -1$ ve $x = 3$ tür. $-1 \notin (1,4)$ ve $3 \in (1,4)$ olup $y = 3$ için $x = 3$ tür.

O halde,

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(3)}$$

ve $f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ olduğundan

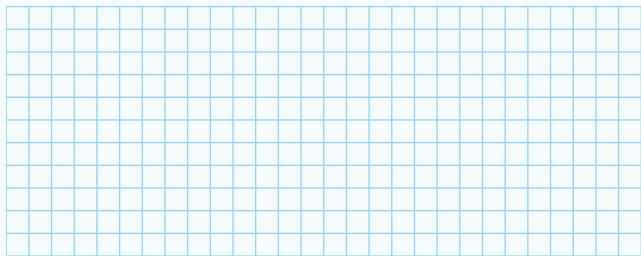
$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \text{ ve } (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f(x) = x^5 + x$ eşitliği ile tanımlanan

$f : R \rightarrow R$ fonksiyonu veriliyor.

$$(f^{-1})'(2) = ?$$



15. Ardışık Türev (Yüksek Sıradan Türev):

$D \subset R$ ve $f: D \rightarrow R$ fonksiyonu D kümesinde türevli ise;

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

ifadesine **f** fonksiyonunun 1. sıradan türevi denir. Eğer f' türev fonksiyonu da, $E \subset D$ olmak üzere E kümesinde türevli ise

$$y'' = f''(x) = (f'(x))' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

2. sıradan türevi denir.

Benzer düşünüşle

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

ifadesine **f** fonksiyonunun **3. sıradan türevi** denir. Genel olarak $n \in N^+$ ve $n > 1$ için

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

ifadesine **f** fonksiyonunun **n. sıradan türevi** denir.

ÖRNEK

$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun 2. sıradan türevini bulalım.



ÇÖZÜM

$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ ise

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = (y')' = 6x - 6 \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$y = f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$ fonksiyonunun 2. sıradan türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$y = \sin^2 x + \sin^3 x$ ise

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \sin 2x + 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = 2\cos 2x + 3.(2\sin x \cdot \cos x) \cdot \cos x + 3\sin^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= 2\cos 2x + 3\sin 2x \cdot \cos x - 3\sin^3 x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$y = f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ fonksiyonunun 3. sıradan türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$y = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ ise

$$y' = 12x^2 - 4x + 5$$

$$y'' = (y')' = 24x - 4$$

$y''' = 24$ tür.

UYARI

$f(x)$, n . dereceden polinom fonksiyon ise, f fonksiyonunun n . sıradan türevi sabit, daha yüksek türevleri sıfırdır.

ÖRNEK

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonunun n . sıradan türevi nedir?

ÇÖZÜM

n sıradan türev sorulduğunda önce, verilen fonksiyonun birkaç sıradan türevi bulunur. Bu türevlerden yararlanarak n . sıradan türev bulunur.

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y'' = n \cdot (n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot [n-(n-1)]x^{n-n}$$

$$y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0$$

$y^{(n)} = n!$ bulunur.

ÖRNEK

$y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun n . sıradan türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{-1} \text{ dir.}$$

$$y' = (-1) \cdot x^{-2}$$

$$y'' = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$y''' = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot x^{-(n+1)}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{3}\right)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \frac{x}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{9-x^2}} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^6 - 5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 5$$

ise, $f^{(4)}(x) = ?$ ve $f^{(4)}(1) = ?$

2) $\sin x$, $\cos x$ fonksiyonlarının n . sıradan türevlerini, n doğal sayısına bağlı olarak veren formüller bulunuz.

16. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$$a) f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) f(x) = \text{arcsing}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$$

$$c) f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d) f(x) = \text{arccos g}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$$

$$e) f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f) f(x) = \text{arctang}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$$

$$g) f(x) = \text{arc cot } x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$h) f(x) = \text{arc cot } g(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$$

ETKİNLİK

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arctan } \frac{5}{12}\right)$ 'nin sayısal değerini bulalım.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos x = \frac{1}{13} \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13} \text{ tür.}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \text{ olduğundan}$$

$$f(x) = \frac{12}{13} \text{ bulunur.}$$

NOT:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \text{ ve } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

olduğunu hatırlayınız.

ETKİNLİK

$f(x) = x\sqrt{1-x^2} - \text{Arccos } x + 1$ fonksiyonu için $f'(0)$ in değerini bulalım.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(0) = 1 + 1 = 2 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK

$f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ ise, $f'(x)$ nedir? ($x > 0$)

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} \\ &= -\frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= -\frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

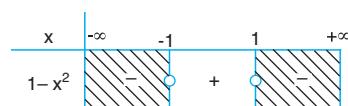
$f(x) = \arccos x$ fonksiyonunun türevsiz olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \arccos x \text{ ise, } f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ olup}$$

$1-x^2 \leq 0$ için tanımsızdır.

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ dir.}$$



f' nün tanımlı olmadığı yerlerde f' sürekli olmadığından türevsizdir. O halde

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ kümelerinde $f(x) = \arccos x$ fonksiyonu türevsizdir.

ÖRNEK

$f(x) = \arctan \sqrt{x}$ ise, $f'(4)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \arctan \sqrt{x}$ ise

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{20} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f(x) = \text{Arcsin}(\frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini bulunuz.

$$f(x) = \text{Arcsin} \left(\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ dir.}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f(x) = x\sqrt{1+x^2} - \text{Arccot}x + 23$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ in değerini bulalım.

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} - \text{Arccot}x + 23$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(1) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

KAVRAMSAL ADIM

17. Mutlak Değerli Fonksiyonların Türevi

$D \subset \mathbb{R}$ ve f , D kümesinde türevli bir fonksiyon olsun.

$F(x) = |f(x)|$ ise

$$F'(x) = \frac{f'(x).|f(x)|}{f(x)} = \begin{cases} f'(x), & f(x) > 0 \text{ ise} \\ -f'(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

ÖRNEK

$f(x) = |4x - 8|$ fonksiyonunun türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} x \neq 2 \text{ için } f'(x) &= \frac{(4x - 8)' . |4x - 8|}{4x - 8} \\ &= \frac{4.4|x - 2|}{4(x - 2)} = \frac{4.|x - 2|}{x - 2} \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi nedir?

ÇÖZÜM

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ve } x = 3 \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$	+	○	-	○
$f(x)$	$x^2 - 4x + 3$	$-(x^2 - 4x + 3)$	$x^2 - 4x + 3$	

$$x = 0 < 1 \text{ olup } f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \text{ ve}$$

$$f'(0) = 2.0 - 4 = -4 \text{ olur.}$$

UYARI

Mutlak değerin içini pozitif yapan değerler için, doğrudan içinin tü-revi alınır. Negatif yapan değerler için, içinin türevi -1 ile çarpılır.

ETKİNLİK

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = |2 - x| + 2$ olduğuna göre, $f(1) + f'(3)$ ün değerini bulalım.

$$f(1) = |2 - 1| + 2 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$f'(x) = -1.(-1) \Rightarrow f'(3) = 1$$

$$f(1) + f'(3) = 3 + 1 = 4 \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu için $f'(2)$, $f'(-2)$ ve

$f'(5)$ değerlerini bulalım.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	○	-	○
$ x^2 - 4 $	$x^2 - 4$	$-(x^2 - 4)$	$x^2 - 4$	

Buna göre $f(2) = 0$, $f(-2) = 0$ olduğundan $f'(-2)$ ve $f'(2)$ yoktur.

$$f(5) > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(5) = 10 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$f(x) = |\cos x|$ fonksiyonu veriliyor.

$$a) f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$b) f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c) f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$d) f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

İfadelerini hesaplayınız.



ÇÖZÜM

a) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ olduğundan $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ yoktur.

b) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

c) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} < 0$ olduğundan

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 \cdot \left(-\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

d) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ olduğundan

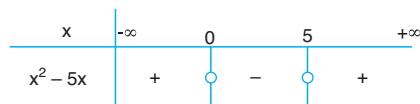
$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$f(x) = |x^2 - 5x| - kx - 3$ ve $f'(2) = 2$ ise, k nedir?

ÇÖZÜM

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5 \text{ tir.}$$



$x = 2$ için $x^2 - 5x < 0$ olduğundan

$$f(x) = |x^2 - 5x| - kx - 3 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 5x - kx - 3$$

$$f'(x) = -2x + 5 - k \Rightarrow f'(2) = -2 \cdot 2 + 5 - k = 2$$

$$\Rightarrow -4 + 5 - k = 2 \Rightarrow k = -1 \text{ dir.}$$

18. Parametrik Denklemlerde

İkinci Mertebe Türevlerin Hesaplanması

$x = g(t)$
 $y = h(t)$

parametrik denklemlerinden $\frac{d^2y}{dx^2}$ ikinci mertebe türevini hesaplayalım.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ ve } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \text{ dir.}$$

Yerine yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3} \text{ bulunur.}$$

$$\text{ya da } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{(x')^3} \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$t \in [0, 2\pi]$ parametresine bağlı olarak

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

ile verilen fonksiyon için $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = ?$



UYGULAMA ADIMI



1. $f(x) = 3x - 2$ ve $g(x) = x + 2$ ise,

- a) $(fog)'(x)$ nedir? b) $(gof)'(x)$ nedir?

Çözüm

a) I. Yol: $(fog)(x) = f(g(x))$
 $= 3(x+2)-2$
 $(fog)(x) = 3x + 4$
 $(fog)'(x) = 3$

II. Yol: $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 $= 3 \cdot 1 = 3$

b) I. Yol: $(gof)(x) = g(f(x))$
 $= (3x-2) + 2$
 $= 3x$
 $(gof)'(x) = 3$

II. Yol: $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
 $= 1 \cdot 3$
 $= 3$ olur.

2. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 + 5$ ise,

$(f^{-1})'(4)$ değeri kaçtır?

Çözüm**I. Yol:**

$f^{-1}(x) = i$ bulup türev alalım.

$$y = x^3 + 5 \Rightarrow y - 5 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 5}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5} \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}} \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(4) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(4-5)^2}} \\ &= \frac{1}{3} \text{ dür.} \end{aligned}$$

II. Yol:

Fonksiyonun tersini bulmadan

$$f^{-1}(4) = a \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a^3 + 5 = 4$$

$$a^3 = -1$$

$$a = -1 \text{ dir.}$$

$$f(x) = x^3 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \text{ olur.}$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

3. $f: [2, +\infty] \rightarrow [-9, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$ ise, $(f^{-1})'(-5)$ kaçtır?

Çözüm

$$(f^{-1})'(-5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-5))} \text{ tır.}$$

$$f^{-1}(-5) = a \Rightarrow f(a) = -5$$

$$a^2 - 4a - 5 = -5 \Rightarrow a = 0 \vee a = 4$$

$0 \in [2, \infty)$ olduğundan $a = 4$ tür. ($4 \in [2, \infty)$)

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4 \text{ tür.}$$

$$(f^{-1})'(-5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-5))} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

4. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$ ise, $f''(x)$ nedir?

Çözüm

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 4$$

$$f''(x) = 6x + 10 \text{ dur.}$$



UYGULAMA ADIMI



5. $f(x) = x^{15}$ ise, $f^{(15)}(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = 15x^{14}$$

$$f''(x) = 15 \cdot 14 \cdot x^{13}$$

$$f'''(x) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot x^{12}$$

$$f^{(4)}(x) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot x^{11}$$

.....

$$f^{(15)}(x) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 15! \text{ olur.}$$

6. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ise, $f^{(100)}(x)$ nedir?

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^3} e^{\frac{x}{2}}$$

.....

$$f^{(100)}(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{100}} \cdot e^{\frac{x}{2}} \text{ dir.}$$

7. $e^x \cdot \left(\frac{d^2(xe^{-x})}{dx^2} \right)$ ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm

$$\frac{d^2(x \cdot e^{-x})}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d(x \cdot e^{-x})}{dx} \right)$$

$$= \frac{d}{dx}(e^{-x} - xe^{-x})$$

$$= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$e^x \cdot \frac{d^2(xe^{-x})}{dx^2} = e^x \cdot (-2e^{-x} + xe^{-x})$$

$$= -2 + x \text{ tir.}$$

8. $x = 3 \cdot \sin t$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \cos 2t \end{array} \right.$ nin eşiti nedir?

Çözüm

I. Yol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2 \sin 2t}{3 \cos t} = -\frac{2 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t}{3 \cdot \cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3} \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(-\frac{4}{3} \sin t\right)}{dx} = \frac{-\frac{4}{3} \cdot \cos t}{3 \cdot \cos t} = -\frac{4}{9} \text{ dur.}$$

II. Yol:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = 3 \cos t \\ x'' = -3 \sin t \\ y' = -2 \sin 2t \\ y'' = -4 \cdot \cos 2t \end{array} \right\} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3 \cos t \cdot (-4 \cos 2t) - (-3 \cdot \sin t) \cdot (-2 \sin 2t)}{(3 \cos t)^3}$$

$$= \frac{-12 \cdot \cos t \cdot \cos 2t - 6 \sin t \cdot \sin 2t}{27 \cdot \cos^3 t}$$

$$= \frac{-12 \cdot \cos t \cdot \cos 2t - 6 \sin t \cdot 2 \sin t \cdot \cos t}{27 \cdot \cos t \cdot \cos^2 t}$$

$$= \frac{-4 \cdot (\cos 2t + 1 - \cos^2 t)}{9 \cdot \cos^2 t}$$

$$= -\frac{4}{9} \cdot \frac{(\cos^2 t - \sin^2 t + 1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t}$$

$$= -\frac{4}{9} \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



9. $x = \sin^2 t + \cos t$

$$y = \cos^2 t + \sin t$$

olmak üzere, $\frac{d^2y}{dx^2}$ nin $t = \frac{\pi}{2}$ için değeri kaçtır?

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos t \cdot (-\sin t) + \cos t}{2 \sin t \cdot \cos t - \sin t} = \frac{-\sin 2t + \cos t}{\sin 2t - \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-\sin 2t + \cos t}{\sin 2t - \sin t} \right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{-\sin 2t + \cos t}{\sin 2t - \sin t} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{-\sin 2t + \cos t}{\sin 2t - \sin t} \right)}{2 \sin t \cdot \cos t - \sin t}$$

$$= \frac{(-2 \cos 2t - \sin t) \cdot (\sin 2t - \sin t) - (-\sin 2t + \cos t) \cdot (2 \cos 2t - \cos t)}{(\sin 2t - \sin t)^2 \cdot (\sin 2t - \sin t)}$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\left(-2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right)}{\left(\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \left(\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$= \frac{((-2) \cdot (-1) - 1) \cdot (0 - 1) - (0 + 0) \cdot (2 \cdot (-1) - 0)}{(0 - 1)^2 \cdot (0 - 1)}$$

$$= \frac{1 \cdot (-1) - 0}{1 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-1}{-1} = 1 \text{ dir.}$$

10. $y = (ax + b)^n$ fonksiyonunda n bir tam sayı olmak üzere, y^n nin eşiti nedir?

Çözüm

$$y' = n \cdot (ax + b)^{n-1} \cdot a$$

$$y'' = n(n-1) \cdot (ax + b)^{n-2} \cdot a^2$$

$$y''' = n(n-1)(n-2) \cdot (ax + b)^{n-3} \cdot a^3$$

.

.

$$y^{(n)} = n \cdot (n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)] \cdot (ax + b)^{n-n} \cdot a^n$$

$$y^n = n! \cdot a^n \text{ dir.}$$

11. $y = x \cdot e^x$ ise $y^{(n)}$ nin eşitini bulalım.

Çözüm

$$y' = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$$

$$y'' = e^x \cdot (x+1) + e^x \cdot 1 = e^x(x+2)$$

$$y''' = e^x \cdot (x+2) + e^x \cdot 1 = e^x(x+3)$$

.

.

$$y^{(n)} = e^x \cdot (x+n) \text{ dir.}$$

12. $y = x \cdot e^x$ ise, $e^{-x} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right)$ ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm

$$y = x \cdot e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y')' = (e^x + x \cdot e^x)' = (e^x)' + (x \cdot e^x)'$$

$$= e^x + y' = e^x + e^x + x \cdot e^x$$

$$= e^x(x+2) \text{ dir.}$$



UYGULAMA ADIMI



Öyleyse,

$$e^{-x} \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) = e^{-x} [e^x(x+2) - e^x(x+1)] \\ = e^{-x} [e^x(x+2-x-1)] = 1 \text{ bulunur.}$$

13. $x = 3 \cdot \sin \theta$
 $y = 5 \cdot \cos \theta$
- ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulalım.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-5 \sin \theta}{3 \cos \theta} = -\frac{5}{3} \cdot \tan \theta \quad \text{ve}$$

$$\frac{dy'}{d\theta} = -\frac{5}{3} \cdot (1 + \tan^2 \theta) \quad \text{dir.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\frac{5}{3} \cdot (1 + \tan^2 \theta)}{3 \cdot \cos \theta}$$

$$= -\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{\cos^3 \theta} \quad \text{bulunur.}$$

14. $x = t^2 + 2t$
 $y = t^3 - 3t$
- ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulalım.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t + 2} = \frac{3}{2}(t-1)$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{3}{2} \quad \text{ve}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2t+2} = \frac{3}{4(t+1)} \quad \text{bulunur.}$$

15. $x = e^t$
 $y = t^4 + t$
- ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulalım.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 + 1}{e^t}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{12t^2 \cdot e^t - (4t^3 + 1) \cdot e^t}{(e^t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{12t^2 e^t - (4t^3 + 1)e^t}{e^{2t}}}{e^t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^t(12t^2 - 4t^3 + 1)}{e^{3t}}$$

$$= -e^{-2t}(4t^3 - 12t^2 + 1) \quad \text{bulunur.}$$

16. $x = t^2 + t$
 $y = 3t^3 + 4t$
- ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^3y}{dx^3}$ türevini bulalım.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2 + 4}{2t + 1}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{18t \cdot (2t+1) - (9t^2+4) \cdot 2}{(2t+1)^2} = \frac{18t^2 + 18t - 8}{(2t+1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{18t^2 + 18t - 8}{(2t+1)^2}}{(2t+1)} = \frac{18t^2 + 18t - 8}{(2t+1)^3} \quad \text{tür.}$$

Diğer taraftan,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{olup,}$$



UYGULAMA ADIMI



$$\frac{dy''}{dt} = \frac{(36t+18) \cdot (2t+1)^3 - (18t^2+18t-8) \cdot 3(2t+1)^2 \cdot 2}{(2t+1)^6}$$

$$= \frac{(2t+1)^2 [18 \cdot (2t+1) \cdot (2t+1) - (18t^2+18t-8) \cdot 6]}{(2t+1)^6}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dt}{dx}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{18(2t+1)^2 - (108t^2 + 108t - 48)}{(2t+1)^4}}{(2t+1)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{36t^2 + 36t - 49}{(2t+1)^5} \text{ bulunur.}$$

17. $x = \sin t$
 $y = \cos t$
- ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^3y}{dx^3}$ türevini bulalım.

Çözüm

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-(1 + \tan^2 t)}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy''}{dt} = 3 \cdot \cos^{-4} t \cdot (-\sin t) = -\frac{3 \sin t}{\cos^4 t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 \sin t}{\cos^4 t} = -\frac{3 \sin t}{\cos^5 t} \quad \text{bulunur.}$$

18. f , 2. sıradan türevlenebilir bir fonksiyon, $a \in \mathbb{R}$ ve $f'(a) \neq 0$ ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{f(x) - f(a)}$$

ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{f(x) - f(a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \\ &= \frac{f''(a)}{f'(a)} \text{ dir.} \end{aligned}$$

19. $f(x) = \arctan 3^x$ ise, $f'(0)$ kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan 3^x \Rightarrow f'(x) &= \frac{3^x \cdot \ln 3}{1 + 3^{2x}} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{3^0 \cdot \ln 3}{1 + 3^{2 \cdot 0}} \\ &= \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

$$= \ln \sqrt{3} \quad \text{bulunur.}$$

20. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ ise, $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{1 + x^2} \\ \Rightarrow f'(-1) &= -\frac{1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{dir.} \end{aligned}$$



UYGULAMA ADIMI



21. $f(x) = \operatorname{arccot}(1 + \sin^2 x)$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{arccot}(1 + \sin^2 x) \Rightarrow f'(x) &= -\frac{(1 + \sin^2 x)'}{1 + (1 + \sin^2 x)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + (1 + \sin^2 x)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{\sin 2x}{1 + (1 + \sin^2 x)^2} \\ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \left(1 + \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\frac{13}{4}} = -\frac{4}{13} \quad \text{tür.} \end{aligned}$$

22. $0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$y = \arcsin \frac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} y &= \arcsin \frac{x}{x^2 + 1} \\ \Rightarrow y' = f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1+1) - 2 \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+1}\right)^2}} = \frac{0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 0 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

23. $f(x) = 2^{\operatorname{arccot} x}$ ise $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) = 2^{\operatorname{arccot} x} \Rightarrow f'(x) &= (\operatorname{arccot} x)' \cdot 2^{\operatorname{arccot} x} \cdot \ln 2 \\ &\Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot 2^{\operatorname{arccot} x} \cdot \ln 2 \\ &\Rightarrow f'(-1) = \left[-\frac{1}{1+(-1)^2}\right] \cdot 2^{\operatorname{arccot}(-1)} \cdot \ln 2 \\ &\Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \ln 2 \\ &= -2^{\frac{3\pi}{4}-1} \cdot \ln 2 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

24. $f(x) = x \cdot \arcsinx + \sqrt{1-x^2}$ ise, $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = 1 \cdot \arcsinx + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \arcsinx = f'(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{dir.}$$

25. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$ ($a > 0$) fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a \cdot \frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{a - x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a - x} \cdot \sqrt{a - x}}{\sqrt{a - x} \sqrt{a + x}} = \frac{\sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x}} \quad \text{bulunur.}$$



• PEKİSTİRME ADIMI



- 1. f , g ve (gof) fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlardır.**
 $f(3) = 4$, $f'(3) = 5$ ve $g'(4) = 2$ olduğuna göre, $(gof)'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

10

2. $f: R \rightarrow R$, $y = f(x) = x^3 - 2x$
 $g: R \rightarrow R$, $u = g(y) = y^3$
fonksiyonları veriliyor. $\frac{du}{dx}$ ifadesini bulunuz.

$$3(x^3 - 2x)^2 \cdot (3x^2 - 2)$$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 5$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonunun türevini bulunuz.

1
4

4. $f: R^+ \rightarrow (-4, +\infty)$, $y = f(x) = x^2 - 4$ olduğuna göre,
 $(f^{-1})'(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

$$\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

5. $f: (-1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2 + 2x - 4$ fonksiyonu veriliyor.
 $(f^{-1})'(4)$ değerini bulunuz.

1
6

6. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun 4. sıradan türevini bulunuz.

6

• PEKİŞTİRME ADIMI •

7. $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun n . sıradan türevini bulunuz.

$$\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

8. $y = f(x) = xe^x$ fonksiyonu için $f''(-2)$ değerini bulunuz.

0

9. $x = t^3 + 4t$
 $y = t^3 - 4t$

olduğuna göre, $t = 1$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ikinci türevinin değerini bulunuz.

48
343

10. $y = x^{10}$ ise $y^{(10)}$ türevini bulunuz.

10!

11. $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$ fonksiyonu için $y^{(5)}(2)$ değeri kaçtır?

$-5! \left(\frac{1}{3^6} + 1 \right)$

12. $y = 2e^{2x}$ fonksiyonu için $y^{(10)}$ türevini bulunuz.

$2^{11} \cdot e^{2x}$



• PEKİŞTİRME ADIMI •



13. $f(x) = \arcsin 3x$ olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulunuz.

$$\frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

14. $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$ olduğuna göre, $f'(x)$ türev fonksiyonunu bulunuz.

$$-\frac{1}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}}$$

15. $f(x) = x \cdot \arctan x$ ise, $f'(-1)$ değerini bulunuz.

$$-\left(\frac{\pi + 2}{4}\right)$$

16. $f(x) = e^{\arcsin 2x}$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ değerini bulunuz.

$$\frac{4}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6}}$$

17. $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu için,

a) $f'(1)$

b) $f'(2)$

c) $f'(-3)$

değerlerini bulunuz.

- a) -2
b) Yoktur
c) -6

18. $f: R [-3, 3], f(x) = |3\sin x|$ fonksiyonu için,

a) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $f'(\pi)$

c) $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

değerlerini bulunuz.

- a) $\frac{3}{2}$
b) Yoktur
c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ETKİNLİK

$f(x) = e^{\tan x}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

limitinin değerini bulalım.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

tür.

$$f(x) = e^{\tan x} \Rightarrow f'(x) = (\tan x)' \cdot e^{\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ için } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot e = 2e \text{ bulunur.}$$

TÜREVİN LİMİT HESABINDA KULLANILMASI

L'HOSPITAL KURALI

Limit problemlerinde birçok kez $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlikleriyle karşılaşılır.

Bu tür durumlarda L'Hospital kuralı kolaylık sağlar.

f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ oluyorsa ve $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti (sonlu ve sonsuz) varsa

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ tir.}$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği devam ediyorsa L'Hospital kuralı yine uygulanır.

Eğer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti yoksa bu kural uygulanamaz.

1[∞], 0⁰, ∞⁰ BELİRŞİZLİKLERİ

ETKİNLİK

Gerçel sayılar kümesinde tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \text{ ve}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 3$$

olduğuna göre, $f'(1)$ 'i bulunuz.

$[f(x)]^{g(x)}$ biçimindeki ifadelerin limitleri bulunurken bu tür belirsizliklerle karşılaşılır.

Bu tür belirsizlikleri kaldırmak için $x = e^{\ln x}$ eşitliğinden yararlanılır.

Yani $[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$ ve

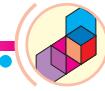
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}} \text{ olur.}$$

Bu son limitte $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.



UYGULAMA ADIMI



1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^{15} + 2x^{10} + 1}{x^{10} - 1}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x = -1$ yazılırsa

$$\frac{3 \cdot (-1)^{15} + 2 \cdot (-1)^{10} + 1}{(-1)^{10} - 1} = \frac{-3 + 3}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ olur.}$$

L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^{15} + 2x^{10} + 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{45x^{14} + 20x^9}{10x^9}$$

$$= \frac{45 \cdot (-1)^{14} + 20 \cdot (-1)^9}{10 \cdot (-1)^9}$$

$$= \frac{45 - 20}{-10} = \frac{25}{-10} = -\frac{5}{2} \text{ olur.}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x^2 - 1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$x = 1$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital Kuralına göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{2x} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^x}{1 - 3^x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x \rightarrow \infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Kural gereğince,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^x}{1 - 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot \ln 3}{-3^x \cdot \ln 3} = -1 \text{ bulunur.}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x = 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Kurala göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin ax}{2x} = \frac{a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot a = \frac{a^2}{2} \text{ dir.}$$

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x^n - a^n}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x = a$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Kurala göre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}}{n \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{a^{\frac{1-n}{n}}}{a^{n-1}} = \frac{1}{n^2} \cdot a^{\frac{1-n}{n} - n + 1}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot a^{\frac{1-n^2}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt[n]{a^{1-n^2}} \text{ olur.}$$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} + x + 1}{x^2}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x \rightarrow \infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Kurala göre,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x} + 1}{2x}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0 \text{ dir.}$$



UYGULAMA ADIMI



7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x \rightarrow \infty$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ limitinin değeri nedir?

($a > 0, b > 0$)

Çözüm

$x \rightarrow 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Kurala göre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - b^x \ln b}{1}$$

$$= \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \text{ dir.}$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\arcsin 8x}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$x = 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\arcsin 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}}{\frac{8}{\sqrt{1-64x^2}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{m}{x}$ limitinin değeri 2 ise, m kaçtır?

Çözüm

$x \rightarrow \infty$ için $\infty \cdot \sin \frac{m}{\infty} = \infty \cdot \sin 0 = \infty \cdot 0$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{m}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{m}{x}}{\frac{1}{x}} \text{ yazılırsa } \frac{0}{0} \text{ biçimine dönüşür.}$$

O halde,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-m}{x^2} \cdot \cos \frac{m}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} m \cdot \cos \frac{m}{x}$$

$$= m \cdot \cos 0 = 2 \\ \Rightarrow m \cdot 1 = 2 \Rightarrow m = 2 \text{ dir.}$$

11. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^{x+h} - 3^x}{h}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^{x+h} - 3^x}{h} = f'(x) \text{ dir.}$$

$$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \text{ olur.}$$

12. $\lim_{y \rightarrow x} \frac{y^3 - x^3}{y^2 - x^2}$ limitinin değeri nedir?

Çözüm

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{y^3 - x^3}{y^2 - x^2} = \frac{0}{0} \text{ dir.}$$

Pay ve paydayı çarpanlarına ayıralım.

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{(y-x)(y+x)} = \frac{x^2+xy+x^2}{x+x} = \frac{3}{2}x \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

1^∞ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x}{1+x}}{\frac{1}{x}}}$$

e^0 olduğundan L'Hospital Kuralı uygulanırsa;

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x}} = e^{-1} \text{ bulunur.}$$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+x}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

∞^0 belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{1+x}} \text{ limitinde } \frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ olduğundan}$$

L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x}} = e^0 = 1 \text{ dir.}$$

UYARI

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ ifadesinde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \{1 + [f(x) - 1]\}^{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + (f(x))]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right\}^{(f(x)-1)g(x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - 1]} \text{ dir.}$$

13. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\sin a} = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0} = \infty \text{ olup}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} [\frac{\sin x}{\sin a} - 1]}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sin a} \cdot \frac{[\sin x - \sin a]}{x-a}}$$

$$= e^{\frac{1}{\sin a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{[\sin x - \sin a]}{x-a}} \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \cos a \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cot a} \text{ dir.}$$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{4x-3} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{4x-3} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{4 \cdot 1 - 3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

olduğundan 1^∞ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{4x-3} \right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \left[\frac{2x-1}{4x-3} - 1 \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(2x-1)(4x-3) - (2x-1)}{4x-3}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{4x-3}} = e^{-2} \text{ dir.}$$



• PEKİŞTİRME ADIMI •



1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x - 1} = k$ ise, $k \in \mathbb{R}$ sayısı kaçtır?

2

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ limitinin değeri kaçtır?

∞

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

$\frac{1}{4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos x}{x}$ limitinin değeri kaçtır?

3

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos xy - 1}{x^2y^2}$ limitinin değeri kaçtır?

$-\frac{1}{2}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} \right)$ limitinin değeri kaçtır?

1



• PEKİŞTİRME ADIMI •



7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{\cos x - 1}$ limitinin değeri kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi \cdot \sin x)}{\sin 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$ limitinin değeri kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 3a + 5}{2 - a^2} = m$ ve $m^2 + 2mt - t^2 = 0$ eşitliklerini sağlayan m ve t değerleri için t - m farkı kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ limitinin değeri kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

12. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \theta - \tan \theta)$ limitinin değeri kaçtır?

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



• PEKİŞTİRME ADIMI •



13. $x \in [0, \pi]$ için $\lim_{a \rightarrow x} \frac{\sin a - \sin x}{x - a} = \frac{1}{2}$ ise, x kaçtır?

$\frac{2\pi}{3}$

14. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta - \sin \theta + 1}{\cot \theta}$ limitinin değeri kaçtır?

1

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+2}$ limitinin değeri kaçtır?

$\frac{1}{e^6}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ limitinin değeri kaçtır?

e

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{121}}{e^x}$ limitinin değeri kaçtır?

0

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$ limitinin değeri kaçtır?

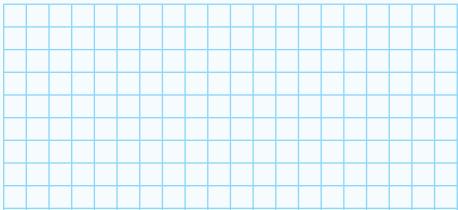
$\frac{1}{2}$



ETKİNLİK

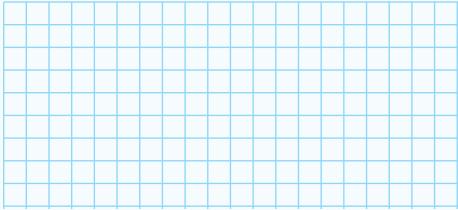
1) $y = x^2$ eğrisine, $x = 2$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

Normalin denklemini bulunuz.

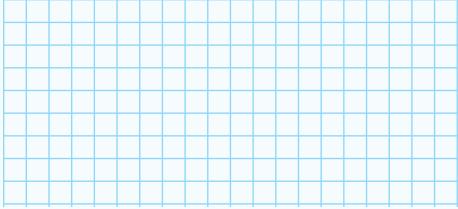


2) $y = \sin x$ eğrisine

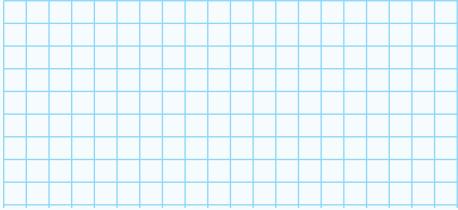
a) $x = \frac{\pi}{6}$ apsisli noktasından çizilen teğet ve normalin denklemlerini



b) $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasından çizilen teğet ve normalin denklemlerini yazınız.



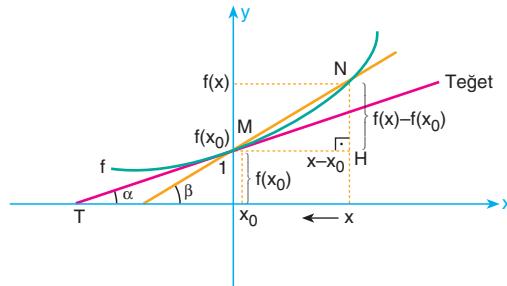
3) $y = \cos x$ ve $y = \sin x$ eğrileri kaç derecelik açı altında kesişirler?



TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

$D \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in D$ olmak üzere;

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevli olsun.



f fonksiyonunun grafiği üzerinde $M(x_0, f(x_0))$ ve $N(x, f(x))$ noktalarını alalım.

MN doğrusunun eğimi,

$$m_{MN} = \tan \beta = \tan(\widehat{NMH}) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ dır.}$$

($x \rightarrow x_0$ yaklaşırken) N noktası M noktasına β açısı α açısına ve MN doğrusu MT teğetine yaklaşır.

O halde NT teğeri $x \rightarrow x_0$ için MN kirişinin limit durumu olup MT teğetinin eğimi, MN doğrusunun eğiminin $x \rightarrow x_0$ için limitidir. Öyleyse MT teğetinin eğimi

$$m_{\text{teğet}} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ olur.}$$

SONUÇ

x_0 noktasında türevli f fonksiyonunun $M(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin eğimi, fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevine eşittir. Yani $m_t = f'(x_0)$ dır.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğim açısı kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - x \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(0) = -\frac{1 + 0}{(0 - 1)^2} \text{ olup } \tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ \text{ tır.}$$



ÖRNEK

$f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ fonksiyonu veriliyor. f' fonksiyonunun $x = \frac{1}{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi nedir?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ olup f' nün $x = \frac{1}{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi $f''(\frac{1}{3})$ tür.

$$f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 0 \text{ olur.}$$

TEĞET DENKLEMİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun $M(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ dır.}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ eğrisinin $x = 2$ noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

ÇÖZÜM

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ ise } f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \text{ dır.}$$

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 \text{ olup teğet denklemi}$$

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2 \cdot (x - 2)$$

$$y = 2x - 4 + 3 \Rightarrow y = 2x - 1 \text{ dır.}$$

ÖRNEK

$xy + x = x^2y^2 + 1$ eğrisinin $M(1, 1)$ noktasındaki teğet denklemi nedir?

ÇÖZÜM

$F(x, y) = xy + x - x^2y^2 - 1$ ise

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{y + 1 - 2xy^2}{x - 2x^2y}$$

$$\frac{dy}{dx}(1, 1) = -\frac{1+1-2 \cdot 1 \cdot 1}{1-2 \cdot 1 \cdot 1} \Rightarrow m = \frac{0}{-1} \text{ dır.}$$

O halde teğeten denklemi

$$y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 1 \text{ dır.}$$

UYARI

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli değilse bu noktada teğetten söz edilemez. Ancak, f nin sürekli olması teğeten varlığını garanti etmez.

NORMAL DENKLEMİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun $M(x_0, f(x_0))$ noktasındaki normal doğrusunun eğimi $M_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$ dır.

O halde $M(x_0, f(x_0))$ noktasındaki normalinin denklemi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \text{ dır.}$$

ÖRNEK

$y = kx^3$ eğrisinin $x_0 = 1$ apsisli noktasındaki normali $y = 6x + 5$ doğrusuna paralel olduğuna göre, k kaçtır?

ÇÖZÜM

$y = 6x + 5$ doğrusunun eğimi 6 dır. Normal ile bu doğru paralel olduklarıdan eğimleri eşittir.

Normalin eğimi $m_N = 6$ ve teğeten eğimi $m_T = -\frac{1}{m_N} = -\frac{1}{6}$ dır. $y' = 3kx^2$ ve $m_T = y'(1) = 3k$ dır.

Buradan $3k = -\frac{1}{6} \Rightarrow k = -\frac{1}{18}$ bulunur.



UYGULAMA ADIMI



1. $f(x) = \sin x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm

$f(x) = \sin x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi $f'(\frac{\pi}{3})$ tür.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \text{ ve}$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

2. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 3}$ fonksiyonunun grafiğine $x = -1$ apsisli noktada çizilen teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

$f'(-1)$ soruluyor.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x+3) - 1 \cdot (x^2 + 2x)}{(x+3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(2 \cdot (-1) + 2)(-1 + 3) - [(-1)^2 + 2 \cdot (-1)]}{(-1 + 3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

3. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ fonksiyonunun grafiğine $x = \pi$ apsisli noktasından çizilen teğetin x ekseniyle pozitif yönüyle yaptığı açı α ise, $\tan \alpha$ kaçtır?

Çözüm

$$\tan \alpha = f'(\pi) \text{ dir.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)$$

$$f'(\pi) = 2\pi \cdot \cos \pi - \pi^2 \cdot \sin \pi$$

$$= 2\pi(-1) - \pi^2 \cdot 0$$

$$= -2\pi \text{ bulunur.}$$

4. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiğine $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğim açısı kaç derecedir?

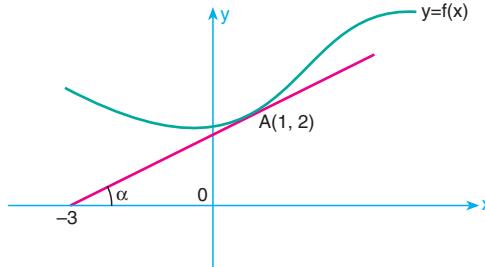
Çözüm

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\tan \alpha = f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}}$$

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ \text{ dir.}$$

- 5.



Şekilde $y = f(x)$ eğrisinin $A(1, 2)$ noktasındaki teğeti veriliyor.

$g(x) = \frac{x}{f(x)} + f^2(x)$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu için, $g'(1)$ değeri kaçtır?

Çözüm

g fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi soruluyor.

$$g(x) = \frac{x}{f(x)} + f^2(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)} + 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

$x = 1$ yazılırsa

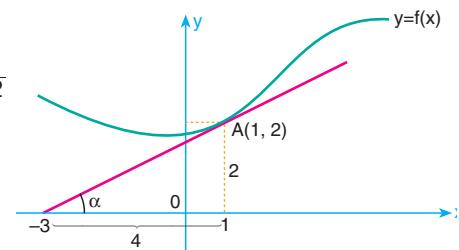
$$g'(1) = \frac{f(1) - f'(1)}{f^2(1)} + 2 \cdot f(1) \cdot f'(1)$$

Şekilden $f(1) = 2$, $f'(1) = \tan \alpha = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$ olup yerlerine yazılırsa

$$g'(1) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2^2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8} + 2 = \frac{19}{8}$$

bultur.





UYGULAMA ADIMI



6. $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 6$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x)$ fonksiyonunun grafiğine $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi -3 olduğuna göre, k reel sayısı kaçtır?

Çözüm

$f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 6$ fonksiyonu verilmiş. $f'(x)$ in grafiğine $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi -3 olduğuna göre,

$$f'(-1) = -3 \text{ tür. O halde}$$

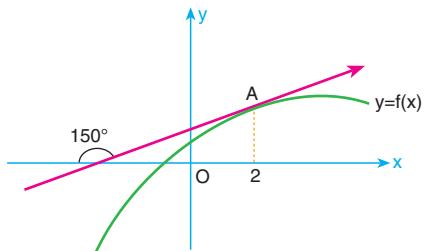
$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$$

$$f''(x) = 6x + 2k$$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 2k = -3 \Rightarrow 2k = 6 - 3$$

$$k = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

7.



Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonuna üzerindeki $A(2, y)$ noktasından çizilen teğeti x eksenile 150° lik açı yaptığına göre, teğetin eğimi kaçtır?

Çözüm

Teğetenin x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \text{ dir.}$$

$$\text{Teğetenin eğimi } \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$

8. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonuna $x = -2$ apsisli noktasından çizilen teğetinin denklemi nedir?

Çözüm

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = -3 \text{ olup,}$$

$A(-2, -3)$ noktasından çizilen teğetin denklemi isteniyor.

Teğetenin eğimi $= f'(-2)$ dir.

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \text{ dir.}$$

Teğetenin eğimi sıfırdır.

Teğetenin denklemi:

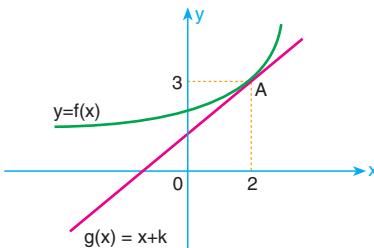
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-3) = 0 \cdot (x - (-2))$$

$$y = -3 \text{ tür.}$$

$f'(-2) = 0$ olduğundan bulunan teğeten x eksenine平行 olduğuna dikkat ediniz.

9.



Şekilde $y = f(x)$ ile f ye $A(2, 3)$ noktasında teğet olan

$g(x) = x + k$ doğrusu veriliyor.

$$h(x) = 2 \cdot f^2(x) \cdot g(x)$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonuna $x = 2$ apsisli noktadan çizilen teğetin denklemi nedir?

Çözüm

$A(2, 3)$ noktası $g(x) = x + k$ doğrusu üzerinde olduğundan

$$g(2) = 3 \Rightarrow 2 + k = 3 \Rightarrow k = 1 \text{ dir.}$$

$$h(x) = 2 \cdot f^2(x) \cdot g(x)$$

$$= 2f^2(x) \cdot (x + 1)$$

$$h'(x) = 2 \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \cdot (x + 1) + 2 \cdot f^2(x) \cdot 1$$

$$h'(2) = 4 \cdot f(2) \cdot f'(2) \cdot (2 + 1) + 2 \cdot f^2(2)$$

$g(x) = x + 1$ ve $f(x)$ in A noktasındaki teğeti $g(x)$ olduğundan

$$f'(2) = 1 \text{ dir. } (g(x) = x + 1 \text{ in eğimi } 1 \text{ dir.})$$

Şekilden $f(2) = 3$ olup yerine yazılırsa

$$h'(2) = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 54$$

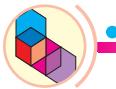
$$h(2) = 2 \cdot f^2(2) \cdot g(2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 54 \text{ olup}$$

$h(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi

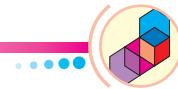
$$y - h(2) = h'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - 54 = 54 \cdot (x - 2)$$

$$y = 54x - 54 \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



10. $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^2 + mx - 3}{x + 2}$ fonksiyonunun, apsisi $x_0 = 1$ olan nokta-
sında teğeti, denklemi $2x - 3y - 1 = 0$ olan doğruya para-
lel ise, m kaçır?

Çözüm

$2x - 3y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_d = \frac{2}{3}$ tür.

Bu doğruya paralel olan teğetin eğimi de $m_t = \frac{2}{3}$ olur.

(Paralel doğruların eğimleri eşittir.)

Teğetin eğimi o noktadaki türevin değeri olduğundan

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x+2) - (x^2+mx-3).1}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2+m)(1+2) - (1+m-3)}{(1+2)^2}$$

$$= \frac{6+3m-m+2}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2m+8}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 6m + 24 = 18$$

$$\Rightarrow 6m = -6$$

$$\Rightarrow m = -1 \text{ dir.}$$

11. $f(x) = x^2 + 6x + 3$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti

$y = 8x + 4$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm

İstenen noktanın apsisi x_0 olsun.

Paralel doğruların eğimleri eşit olacağinden istenen teğetin
eğimi 8 olmalıdır. ($y = mx + n$ doğrusunun eğimi m dir.)

O halde $f'(x_0) = 8$ denklemini sağlayan x_0 değeri isteniyor.

$$f(x) = x^2 + 6x + 3$$

$$f'(x) = 2x + 6 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 + 6$$

$$8 = 2x_0 + 6$$

$$x_0 = 1$$

olup $x_0 = 1$ için $f(x_0) = 1 + 6 + 3 = 10$ olur.

O halde istenilen nokta $(1, 10)$ olur.

12. $f(x) = x^3 - 12x + 1$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri
 $y = 13x + 2$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm

İstenen noktanın apsisi x_0 olsun.

Paralel doğruların eğimleri eşit olacağından istenen teğetlerin
eğimi 15 olmalıdır.

O halde $f'(x_0) = 15$

eşitliğini sağlayan x_0 değerlerini bulmalıyız.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 - 12$$

$$\Rightarrow 15 = 3x_0^2 - 12$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 = 27 \Rightarrow x_0^2 = 9$$

$$\Rightarrow x_0 = 3 \text{ veya } x_0 = -3 \text{ olur.}$$

$$x_0 = 3 \Rightarrow f(x_0) = f(3) = 3^3 - 12.3 + 1 = -8$$

$$x_0 = -3 \Rightarrow f(x_0) = f(-3) = (-3)^3 - 12.(-3) + 1 = 10$$

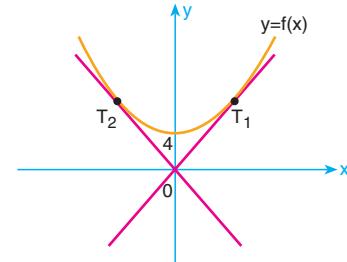
olup istenilen noktalar $(3, -8)$ ve $(-3, 10)$ dur.

13. $f(x) = x^2 + 4$ eğrisinin orijinden geçen teğetlerinin denklemelerini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x^2 + 4$$

eğrisinin orijinden geçen teğetleri eğriye T_1 ve T_2 noktalarında teğet olsun.



$$T_1(x_0, x_0^2 + 4) \text{ ise}$$

$$T_2(-x_0, (-x_0)^2 + 4) = T_2(-x_0, x_0^2 + 4) \text{ olur.}$$

T_1 noktasındaki teğetin eğimi $f'(x_0)$ olduğundan

$$f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 \text{ dir.}$$

T_1 noktasındaki teğetin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (x_0^2 + 4) = 2x_0(x - x_0)$$

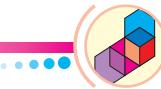
$$y = -x_0^2 + 2x_0x + 4$$

olup T_1 teğeti $O(0, 0)$ noktasından geçtiğinden

$x = 0$ ve $y = 0$ yazılırsa



UYGULAMA ADIMI



$$0 = -x_0^2 + 2x_0 \cdot 0 + 4$$

$$x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = 2 \text{ veya } x_0 = -2$$

bulunur.

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2^2 + 4 = 8 \Rightarrow T_1(2, 8)$$

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \Rightarrow T_2(-2, 8)$$

dir.

$$T_1 \text{ noktasındaki teğetin eğimi } m_{T_1} = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

T_1 noktasındaki teğetin denklemi

$$y - f(2) = m_{T_1} \cdot (x - 2)$$

$$y - 8 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x$$

$$T_2 \text{ noktasındaki teğetin eğimi } m_{T_2} = 2x_0 = 2 \cdot (-2) = -4$$

T_2 noktasındaki teğetin denklemi

$$y - f(-2) = m_{T_2} [x - (-2)]$$

$$y - 8 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x \text{ bulunur.}$$

14. $f(x) = x^2$ eğrisine A(2, 3) noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarını bulunuz.

Çözüm

$f(x) = x^2$ eğrisine A(2, 3) noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları T_1 ve T_2 olsun. T_1 ve T_2 nin koordinatları isteniyor. İstenen noktanın apsisı x_0 olsun.

$$T_1(x_0, x_0^2) \text{ dir. } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \text{ olduğundan}$$

$$T_1 \text{ noktasındaki teğetin eğimi } m_{T_1} = 2x_0 \text{ dir.}$$

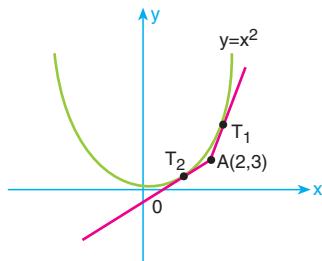
T_1 noktasındaki teğetin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - x_0^2 = 2x_0 \cdot (x - x_0)$$

$$y = -x_0^2 + 2x_0 \cdot x$$

olup T_1 den geçen teğet A(2, 3) noktasından da geçtiğinden



$x = 2 \text{ ve } y = 3$ yazılırsa

$$3 = -x_0^2 + 2x_0 \cdot 2$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ veya } x_0 = 3 \text{ olur.}$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1^2 \Rightarrow T_2(1, 1)$$

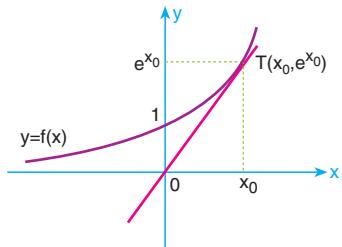
$$x_0 = 3 \Rightarrow f(x_0) = 3^2 \Rightarrow T_1(3, 9)$$

bulunur.

15. $f(x) = e^x$ eğrisinin orijinden geçen teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun eğrisine x_0 apsisli noktadan çizilen teğeti orijinden geçsin.



$T(x_0, e^{x_0})$ dir.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = e^{x_0}$$

dir. Teğetin eğimi $m_T = f'(x_0) = e^{x_0}$ dir.

$T(x_0, e^{x_0})$ noktasındaki teğetin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (x - x_0) \dots (\star)$$

ve teğet orijinden geçtiğinden $x = 0$ ve $y = 0$ değerleri (\star) da yerine yazılırsa

$$0 - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (0 - x_0)$$

$$-e^{x_0} = -e^{x_0} \cdot x_0$$

$e^{x_0} \neq 0$ olduğundan $x_0 = 1$ dir. O halde

Teğetin değme noktası $T(1, e)$

Teğetin eğimi $m_T = e$ olup

istenilen denklem

$$y - e = e(x - 1)$$

$$y = e \cdot x \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



- 16.** $f(x) = ax^2 + 3x - b$ eğrisi $x = 1$ noktasında x - ekseni teğet ise (a, b) ikilisi nedir?

Çözüm

Eğri $x = 1$ noktasında x - ekseni teğet ise fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi sıfırdır. Çünkü x - ekseni üzerindeki bir noktanın ordinatı ve x - ekseninin eğimi sıfırdır.

O halde

$$f(1) = 0 \text{ ve } f'(1) = 0 \text{ olacağından}$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + 3 - b = 0$$

$$\Rightarrow a - b = -3 \dots (1)$$

$$f'(x) = 2ax + 3 \Rightarrow f'(1) = 2a \cdot 1 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \dots (2)$$

$$(1) \text{ de } a = -\frac{3}{2} \text{ yazılırsa}$$

$$-\frac{3}{2} - b = -3 \Rightarrow b = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ ve}$$

$$(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ olur.}$$

- 17.** $f(x) = x^2 + 4x + 3$ eğrisine $x = 1$ apsisli noktasında çizilen normalin denklemini bulunuz.

Çözüm

Teğetin eğimi m_T ve normalin eğimi m_N ise, $m_T \cdot m_N = -1$ dir.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 4 \text{ ve}$$

$x = 1$ apsisli noktadaki teğetin eğimi

$$m_T = f'(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6 \text{ olup}$$

$$6 \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{6} \text{ dir.}$$

$$f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 8 \text{ olup}$$

normalin denklemi

$$y - f(1) = -\frac{1}{6} \cdot (x - 1)$$

$$y - 8 = -\frac{1}{6} (x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6} (x - 49) \text{ bulunur.}$$

- 18.** $x^2 + y^2 = 4$ çemberine $A(-1, -\sqrt{3})$ noktasından çizilen normalin denklemini bulunuz.

Çözüm

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \text{ diyelim.}$$

$$F_x = 2x$$

$$F_y = 2y \text{ olduğundan}$$

$$F'(x, y) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \dots (\star)$$

olup teğetin eğimi

$$m_T = F'(-1, -\sqrt{3})$$

$$= -\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

$$\text{Normalin eğimi } m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{F'(-1, -\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

O halde normalin denklemi

$$y + \sqrt{3} = m_N(x + 1)$$

$$y + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x + 1)$$

$$y = \sqrt{3}x \text{ bulunur.}$$

- 19.** $f(x) = x^3 - 11x + 1$ eğrisinin $y = 1 - x$ doğrusuna dik teğetinin denklemi nedir?

Çözüm

$$d: y = 1 - x \text{ olsun. } f(x) = x^3 - 11x + 1 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 11 \text{ olup } P(x, y) \text{ noktasındaki teğetinin eğimi}$$

$$m_p = 3x^2 - 11 \text{ ve diklik koşulundan } m_p = -\frac{1}{m_d} \text{ dir.}$$

$$d: y = 1 - x \text{ olduğundan } m_d = -1 \text{ ve } m_p = -\frac{1}{-1} = 1 \text{ dir.}$$

$$O \text{ halde } 3x^2 - 11 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2,$$

$$x_2 = -2 \text{ dir. } x = 2 \text{ için } f(2) = 2^3 - 11 \cdot 2 + 1 = -13 \text{ ve } m_p = 1 \text{ olduğundan}$$

1. teğet denklemi:

$$y - (-13) = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = x - 15$$

$$x = -2 \text{ için } f(-2) = (-2)^3 - 11 \cdot (-2) + 1 = 15$$

$$\text{ve } m_p = 1 \text{ olduğundan}$$

2. teğet denklemi:

$$y - 15 = 1 \cdot (x - (-2)) \Rightarrow y = x + 17 \text{ bulunur.}$$



UYGULAMA ADIMI



- 20.** $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ eğrisinin $x = x_0$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel ise, a ile b arasında hangi bağıntı vardır?

Çözüm

$x = x_0$ noktasındaki teğetin x - eksenine paralel olması için eğimi sıfır olmalıdır.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+b}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x+1) - (ax+b)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a - b}{(x+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

ise $a - b = 0 \Rightarrow a = b$ olur.

- 21.** $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ fonksiyonuna $x = -1$ noktasında $y = x + 1$ teğeti çiziliyor. $(1, 2) \in f$ ise, b kaçtır?

Çözüm

Eğrinin $x = -1$ noktasındaki teğeti $y = x + 1$ ise $y = x + 1$ doğrusunun eğimi ile fonksiyonun $x = -1$ noktasındaki türevinin değeri eşittir.

$$d: y = x + 1 \text{ ise } m_d = 1 \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \text{ ise}$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot b \cdot (-1) + c = 1$$

$$c - 2b = -2 \dots (1)$$

$$\text{ve } (1, 2) \in f \text{ ise } f(1) = 2 \text{ olur.}$$

$$f(1) = 1 + b + c - 1 = 2 \text{ ise}$$

$$b + c = 2 \dots (2) \text{ dir.}$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } 3b = -4 \Rightarrow b = -\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

UYARI

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_1 noktasındaki teğetinin eğimi m_1 , x_2 noktasındaki teğetinin eğimi m_2 ve bu teğetler arasındaki açılardan biri α ise, $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ dir.

- 22.** $f(x) = -x^2 + ax + 2$ eğrisinin $x_1 = 1$ ve $x_2 = 0$ apsisli noktalarındaki teğetlerinin oluşturduğu açının tanjantı $-\frac{1}{2}$ ise, a kaçtır?

Çözüm

$f(x) = -x^2 + ax + 2$ eğrisinin $x_1 = 1$ ve $x_2 = 0$ noktalarındaki teğetlerinin eğimi bu noktalarda türev fonksiyonunun aldığı değerdir.

$$f'(x) = -2x + a \text{ ve } f'(1) = -2 + a = m_1$$

$$f'(0) = a = m_2 \text{ olur. } \tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \text{ olup}$$

$$\tan \alpha = \frac{a - 2 - a}{1 + (a - 2) \cdot a} = -\frac{1}{2} \text{ ise}$$

$$1 + a^2 - 2a = 4 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a - 3) \cdot (a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = -1 \text{ dir.}$$

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = -\frac{1}{2} \text{ eşitliğini sağlayan } a \text{ reel sayısı yoktur.}$$

- 23.** $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki normal doğrusunun denklemi nedir?

Çözüm

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \text{ ise } f'(x) = 3x^2 + 8x - 6 \text{ dir.}$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 6 = 11 - 6 = 5$$

$$f(1) = 1 + 4 - 6 + 1 = 0 \text{ dir.}$$

O halde normalin denklemi

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{5} (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{(x - 1)}{5} \text{ tir.}$$

- 24.** Denklemi $x^2 + xy + y^2 = 1$ olan eğrinin $M(-1, 1)$ noktasındaki normal doğrusunun denklemi nedir?

Çözüm

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 \text{ olsun.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx}(-1, 1) = -\frac{2(-1) + 1}{-1 + 2 \cdot 1} = -\frac{-1}{1} \Rightarrow M_N = 1$$

$$\text{Normal denklemi } y - 1 = -\frac{1}{M_N} (x - (-1))$$

$$y - 1 = -\frac{1}{1}(x + 1) \text{ ve } y - 1 = -x - 1 \Rightarrow y = -x \text{ tir.}$$



• PEKİSTİRME ADIMI •



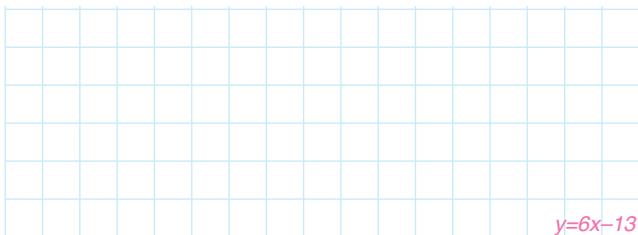
1. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ eğrisine $x = -2$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.



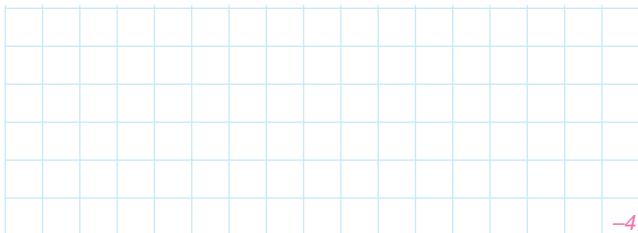
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?



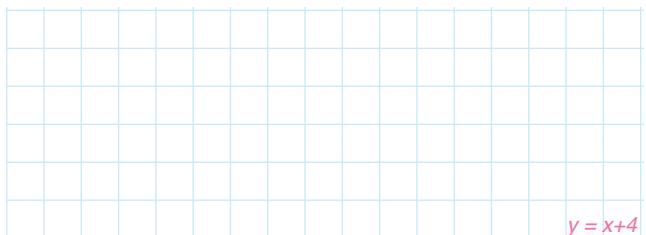
3. $f(x) = x^2 - 4$ eğrisine apsisi 3 olan noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?



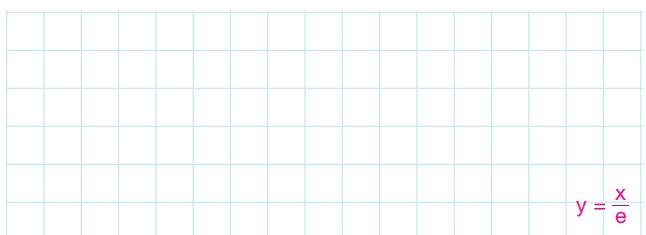
4. $f(x) = x^2$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasından çizilen teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?



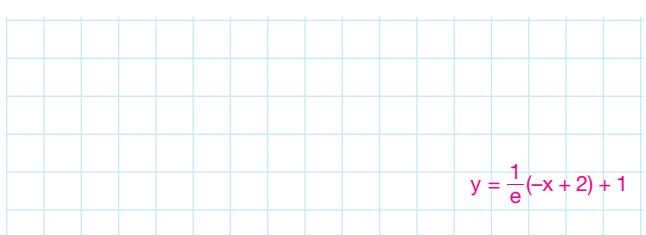
5. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğine $x = -2$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?



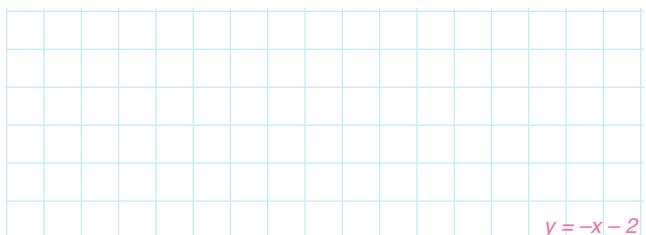
6. $f(x) = \ln x$ eğrisinin orijinden geçen teğetinin denklemini bulunuz.



7. $y = e^{-x} + 1$ eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.



8. $y = \frac{1}{x}$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.





• PEKİŞTİRME ADIMI •



9. $f(x) = x^2 \ln x$ eğrisine $x = e$ apsisli noktasından çizilen normalinin eğimi nedir?



10. $f(x) = x^3$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasından çizilen normalin denklemi nedir?

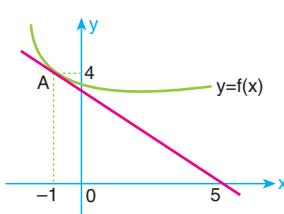


11. $f(x) = x^2 e^x$ eğrisine $x = 1$ apsisli noktasından çizilen normalinin y ekseni kestiği noktanın ordinatı kaçtır?



12. Şekilde $y = f(x)$ eğrisinin A(-1, 4) noktasındaki teğeti veriliyor.

$h(x) = x^2 \cdot f(x)$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

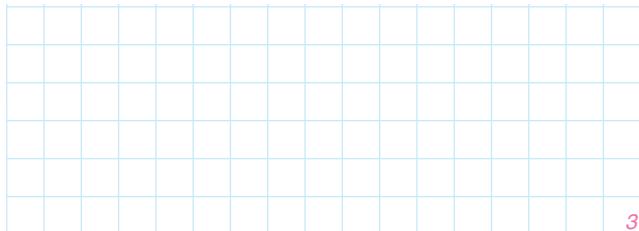


$-\frac{22}{3}$

13. $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisine A(-4, 0) noktasından çizilen teğetin denklemi bulunuz.



14. $f(x) = \frac{ax^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi -14 olduğuna göre, a kaçtır?

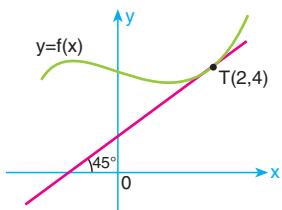


15. $f(x) = x \sqrt[3]{g(x)}$ şeklinde tanımlanıyor. $g(x)$ in $x = 3$ apsisli noktasındaki teğetinin x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı 135° ve $g(3) = -8$ olduğuna göre, $f(x)$ in $x = 3$ apsisli noktadaki teğetinin denklemi nedir?



16. Şekilde $y = f(x)$ eğrisinin T(2, 4) noktasındaki teğeti x -eksenile 45° lik açı yapıyor.

$g(x) = x \cdot f^2(x)$ şeklinde tanımlı $g(x)$ fonksiyonu için,
 $g'(2)$ kaçtır?



32

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR**1. ARTAN FONKSİYON****TANIM**

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $x_1, x_2 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ veya $x_1 > x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında **artan fonksiyon** denir.

Bir fonksiyon hangi aralıkta artan ise, fonksiyonun birinci türevi o aralıkta pozitiftir. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani, bir fonksiyonun birinci türevi bir aralıkta pozitif ise fonksiyon bu aralıkta artandır.

ÖRNEK

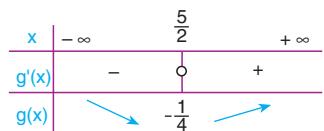
Aşağıdaki fonksiyonların artan oldukları küme nedir?

- a) $f(x) = 5x - 1$
- b) $g(x) = x^2 - 5x + 6$
- c) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 5 > 0$ olduğundan f, \mathbb{R} de artandır.

b) $g(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow g'(x) = 2x - 5 = 0$ ise $x = \frac{5}{2}$ dir.



$$g\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = -\frac{1}{4} \text{ olup}$$

g fonksiyonu $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$ aralığında artandır.

c) $h(x) = x^3 - 6x^2 + 5 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 12x$

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0
$h(x)$	5		-27	

$$h(0) = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$h(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 = 64 - 96 + 5 = -27 \text{ dir.}$$

h fonksiyonu $(-\infty, 0)$ ve $(4, \infty)$ aralıklarında artandır.

ETKİNLİK

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun artan–azalan olduğu aralıkları bulunuz.

2. AZALAN FONKSİYON**TANIM**

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve

her $x_1, x_2 \in [a, b]$ için

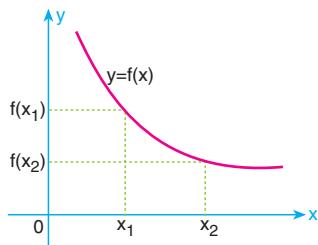
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ veya

$x_1 > x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise

f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında **azalan fonksiyon** denir.

KAVRAMSAL ADIM

Bir fonksiyon hangi aralıkta azalan ise fonksiyonun birinci türevi, o aralıkta negatiftir. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani bir fonksiyonun birinci türevi bir aralıkta negatif ise fonksiyon bu aralıkta azalandır.



ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların azalan oldukları küme nedir?

- $f(x) = 3 - 4x$
- $f(x) = x^2 + 6x - 9$
- $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 3 - 4x \Rightarrow f'(x) = -4 < 0$ olduğundan f fonksiyonu \mathbb{R} de azalandır.

b) $f(x) = x^2 + 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 2x + 6$

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	-	o	+
$f(x)$			

f fonksiyonu $(-\infty, -3)$ kümesinde azalandır.

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ ise

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(-3x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{5}{3} \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	o	+	o
$f(x)$				

f fonksiyonu $(-\infty, 1)$ ve $(\frac{5}{3}, \infty)$ kümelerinde azalandır.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} - \{k\} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$f(x) = \frac{ax+b}{x-k}$ fonksiyonunun daima azalan olması için k hangi koşulu sağlamalıdır?

ÇÖZÜM

$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\}$ için $f'(x) < 0$ olmalıdır.

$$f(x) = \frac{a(x-k) - (ax+b)}{(x-k)^2} < 0$$

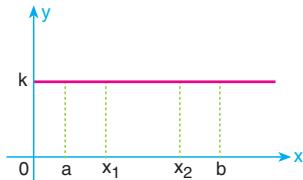
$$\Rightarrow \frac{-ak-b}{(x-k)^2} < 0 \Rightarrow -ak-b < 0$$

$$-ak < b$$

$$ak > -b$$

$$k > -\frac{b}{a} \text{ olmalıdır.}$$

Sabit Fonksiyon



f , $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) = f(x_2) = k$ ise f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında **sabit fonksiyon** denir.

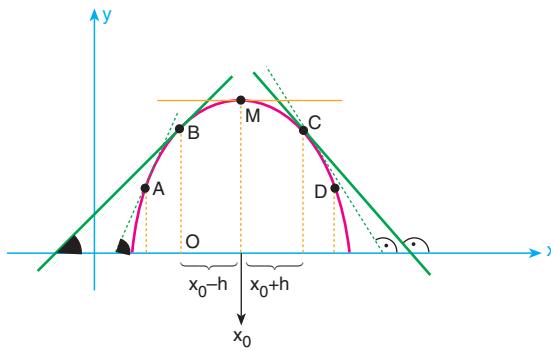
$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sabit olması için gerek ve yeter koşul her $x \in [a, b]$ için $f'(x) = 0$ olmasıdır.

Örneğin,

- $f(x) = 4$ fonksiyonu için $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x) = 4$ sabit fonksiyondur.
- $f(x) = \sqrt{3}$, $f(x) = \pi + 2$, $f(x) = e^2 + 3$ fonksiyonları sabit fonksiyonlardır.

Bir Fonksiyonun Yerel Maksimum ve Yerel Noktaları Ekstremum (Ektremum Noktaları)

1. Maksimum Noktası



$y = f(x)$ fonksiyonunda $x = x_0$ için alınan $y = f(x_0)$ değeri, x_0 in solundaki $x = x_0 - h$ noktası için $y = f(x_0 - h)$ ve x_0 in sağındaki $x = x_0 + h$ için $y = f(x_0 + h)$ değerinden büyükse $y = f(x_0)$ değeriine $x = x_0$ için fonksiyonun yerel maksimum değeri, $M(x_0, f(x_0))$ noktasına da fonksiyonun yerel maksimum noktası denir.

Şekilde $f(x_0) > f(x_0 - h)$ ve $f(x_0) > f(x_0 + h)$ olduğundan $y = f(x_0)$, $x = x_0$ için fonksiyonun yerel maksimum değeridir.

$x = x_0$ için fonksiyonun yerel maksimumu varsa x_0 in solundaki $x = x_0 - h$ için fonksiyon artan ve $f'(x) > 0$, x_0 in sağında $x = x_0 + h$ için fonksiyon azalan ve $f'(x) < 0$ dır. $x = x_0$ için ise $f'(x_0) = 0$ dır. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani,

bir fonksiyonun birinci türevi

$$x = x_0 - h \text{ için } f'(x_0 - h) > 0$$

$$x = x_0 \text{ için } f'(x_0) = 0$$

$$x = x_0 + h \text{ için } f'(x_0) < 0$$

koşullarını sağlıyorsa $x = x_0$ için fonksiyonun yerel maksimumu vardır.

UYARI

Yerel maksimum noktasındaki teğet x - eksenine平行 olur.

ÖRNEK

$f(x) = -x^2 + 5x - 6$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasını (varsıa) bulalım.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = -2x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Tablo:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

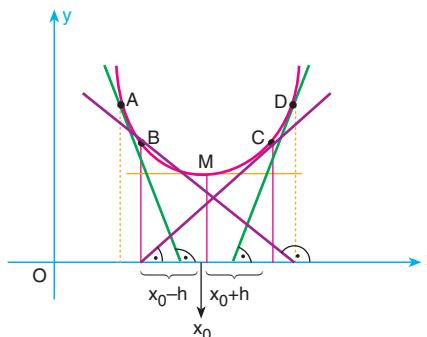
$$x = \frac{5}{2} - h \text{ için } f'(x) > 0$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ için } f'(x) = 0$$

$x = \frac{5}{2} + h$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $x_0 = \frac{5}{2}$ noktasında fonksiyon yerel maksimum değerine ulaşır.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{49}{4} \text{ olup } M\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{4}\right) \text{ noktası yerel maksimum noktasıdır.}$$

2. Minimum Noktası



M nin ordinatı $f(x_0)$

B nin ordinatı $f(x_0 - h)$

C nin ordinatı $f(x_0 + h)$

KAVRAMSAL ADIM

$y = f(x)$ fonksiyonunda $x = x_0$ için alınan $y = f(x_0)$ değeri, x_0 in solundaki $x = x_0 - h$ noktası için $y = f(x_0 - h)$ ve x_0 in sağındaki $x = x_0 + h$ için $y = f(x_0 + h)$ değerinden küçükse $y = f(x_0)$ değerine $x = x_0$ için f fonksiyonunun yerel minimum değeri, $M(x_0, f(x_0))$ noktasına da fonksiyonun **yerel minimum noktası** denir.

Şekilde $f(x_0) < f(x_0 - h)$ ve $f(x_0) < f(x_0 + h)$ olduğundan $f(x_0)$, $x = x_0$ için fonksiyonun bir yerel minimum değeridir.

$x = x_0$ için fonksiyonun yerel minimumu varsa x_0 in solundaki $x = x_0 - h$ için fonksiyon azalan ve $f'(x) < 0$ x_0 in sağındaki $x = x_0 + h$ için fonksiyon artan ve $f'(x) > 0$ ve $x = x_0$ için $f'(x) = 0$ dır.

Bunun karşıtı da doğrudur. Yani,

bir fonksiyonun birinci türevi

$x = x_0 - h$ için $f'(x_0 - h) < 0$

$x = x_0$ için $f'(x_0) = 0$

$x = x_0 + h$ için $f'(x_0 + h) > 0$

koşullarını sağlıyorsa $x = x_0$ için fonksiyonun yerel minimumu vardır.

ÖRNEK

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 - 4x^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \text{ ve}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x - \frac{8}{3}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3} \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

\downarrow \downarrow \downarrow

0 $-\frac{256}{27}$

$x = 0$ noktasında $f'(x)$ türev fonksiyonu + dan - ye geçtiğinden $x = 0$ için fonksiyonun bir yerel maksimumu vardır. Bu değer $f(0) = 0$ dır. O halde $A(0, 0)$ noktası f nin maksimum noktasıdır.

$x = \frac{8}{3}$ için $f'(x)$ türev fonksiyonu - den + ya geçtiğinden fonksiyonun $x = \frac{8}{3}$ için bir yerel minimumu vardır.

$$\text{Bu değer } f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2^9}{27} - \frac{2^8}{9} = \frac{2^9 - 3 \cdot 2^8}{27}$$

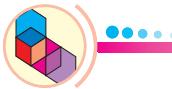
$$= \frac{2^8(2-3)}{27} = -\frac{256}{27} \text{ dır.}$$

O halde $B\left(\frac{8}{3}, -\frac{256}{27}\right)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

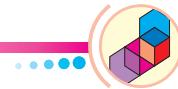
ETKİNLİK

- 1) $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktasını bulunuz.

- 2) $f(x) = 2x^3 + nx - 3$ fonksiyonunun $x = -1$ de yerel ekstremumu olduğuna göre, n kaçtır?



UYGULAMA ADIMI



1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$
fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(x-1)(3x-1) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ veya } x_2 = \frac{1}{3}$$

Tablo yapılırsa;

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	artan		azalan	

$\forall x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ kümesinde artandır.

$\forall x \in (\frac{1}{3}, 1)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan f fonksiyonu $(\frac{1}{3}, 1)$ kümesinde azalandır.

2. $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif ve artan olduğuna göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $g(x) = x + 2.f(x)$ aynı aralıkta artandır.
- II. $g(x) = -f^2(x)$ aynı aralıkta azalandır.
- III. $g(x) = f^3(x)$ aynı aralıkta artandır.
- IV. $g(x) = x + f^2(x)$ aynı aralıkta azalandır.
- V. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ aynı aralıkta azalandır.

Çözüm

- I. $g'(x) = 1 + 2 \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan I deki fonksiyon artandır.

dir.

- II. $g'(x) = -2 \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} < 0$ olduğundan II deki fonksiyon azalandır.

landır.

- III. $g'(x) = 3 \underbrace{f^2(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan III teki fonksiyon artandır.

landır.

- IV. $g'(x) = 1 + 2 \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan IV teki fonksiyon artandır.

V. $g'(x) = -\frac{\overbrace{f'(x)}^{+}}{\underbrace{f^2(x)}_{+}} < 0$ olduğundan V teki fonksiyon azalanıdır.

O halde I – II – III – V te verilenler doğrudur.

3. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	azalan		artan

$(-\infty, 0)$ aralığında f azalan

$(0, +\infty)$ aralığında f artandır.

4. $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2).e^x + (x^2 + 2x).e^x \\ &= e^x(x^2 + 4x + 2) \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } e^x &> 0 \text{ olduğundan} \\ e^x.(x^2 + 4x + 2) &= 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 16 - 8 = 8$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$$



UYGULAMA ADIMI



x	–∞	–2 – √2	–2 + √2	+∞
f'(x)	+	○	–	○
f(x)	artan	azalan		artan

∀x ∈ (–∞, –2 – √2) ∪ (–2 + √2, +∞) için
 $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ artan,
 $\forall x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ için $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ azalan bir fonksiyondur.

5. $f(x) = x \ln x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1 \text{ olup}$$

$$x = \frac{1}{e} \text{ dir.}$$

Tablo yapılırsa;

x	–∞	$\frac{1}{e}$	+∞
f'(x)	–	○	+
f(x)	azalan		artan

$f'(x) = \ln x + 1$ türev fonksiyonunun kökü $x = \frac{1}{e}$ olduğundan

$\frac{1}{e}$ den büyük değerler için örneğin,

$$x = \frac{2}{e} \text{ için } f'(\frac{2}{e}) = \ln \frac{2}{e} + 1 = \ln 2 - \ln e + 1 = \ln 2 > 0$$

$$x = \frac{3}{e} \text{ için } f'(\frac{3}{e}) = \ln \frac{3}{e} + 1 = \ln 3 - \ln e + 1 = \ln 3 > 0$$

$x = \frac{1}{e}$ den küçük değerler için

$$x = \frac{1}{e^2} \text{ için } f'(\frac{1}{e^2}) = \ln \frac{1}{e^2} + 1 = \ln 1 - \ln e^2 + 1 = -1 < 0$$

$$x = \frac{1}{e^3} \text{ için } f'(\frac{1}{e^3}) = \ln \frac{1}{e^3} + 1 = \ln 1 - \ln e^3 + 1 = -2 < 0$$

O halde

$\forall x \in (-\infty, \frac{1}{e})$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $(-\infty, \frac{1}{e})$ aralığında $f(x) = x \ln x$ fonksiyonu azalandır.

$\forall x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan $(\frac{1}{e}, +\infty)$ aralığında $f(x) = x \ln x$ fonksiyonu artandır.

6. $f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - 1) + 2(x - 2) + 2(x - 3) \\ &= 6x - 12 = 0 \end{aligned}$$

$$x = 2$$

x	–∞	2	+∞
f''(x)	–	○	+

$x \in (-\infty, 2)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $(-\infty, 2)$ de f azalandır.

$x \in (2, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f , $(2, \infty)$ de artandır.

7. $f(x) = (x - a)^2 + (x + a)^2 + x^2$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - a) + 2(x + a) + 2x \\ &= 2x - 2a + 2x + 2a + 2x \\ &= 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	–∞	0	+∞
f'(x)	–	○	+

$(-\infty, 0)$ aralığında f azalan,

$(0, \infty)$ aralığında f artandır.



UYGULAMA ADIMI

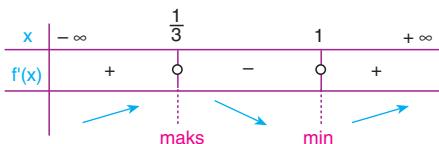


8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{ve} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\&\Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0\end{aligned}$$

$$x = 1 \quad \text{veya} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{tür.}$$



$$x = \frac{1}{3} - h \quad \text{icin} \quad f'(x) > 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{icin} \quad f'(x) = 0$$

$x = \frac{1}{3} + h$ için $f'(x) < 0$ olup $x = \frac{1}{3}$ için fonksiyon maksimum değerini alır.

Öyleyse $x = \frac{1}{3}$ için maksimum değer

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \\&= \frac{1-6-18}{27} \\&= -\frac{23}{27} \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

9. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ fonksiyonu için $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ yerel ekstremum noktalarının apsisleri ise, (a, b) ilişkisini bulalım.

Çözüm

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

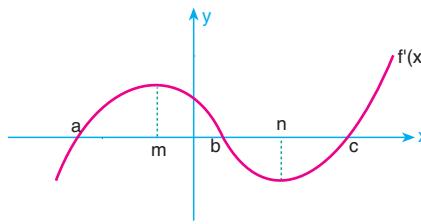
$$f'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \dots [1]$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \dots [2]$$

[1] ve [2] den $a = 0, b = -3$ bulunur.

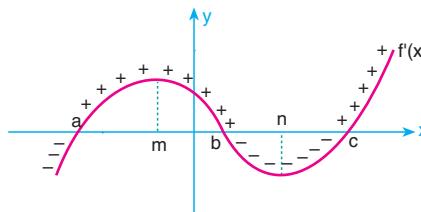
$$(a, b) = (0, -3) \quad \text{tür.}$$

- 10.



Şekilde verilen f fonksiyonunun türevinin grafiğine göre, $f(x)$ 'in maksimum ve minimum noktasının apsisleri nedir?

Çözüm



$f(x)$ in maksimum değer alması için $f'(x)$ 'in pozitif değerden, negatif değerle geçmesi gereklidir. Buna göre $x = b$ 'de $f(x)$ in maksimum değerini vardır.

$f(x)$ in minimum değerini için, türev negatif değerden pozitif değerle geçmelidir. O halde a ve c noktalarında $f(x)$ in minimum değerlerini vardır.

11. $y = f(x) = \frac{x^2 - 2}{mx + 1}$ fonksiyonunun $x = -2$ de bir ekstremumu varsa, m kaçtır?

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ de bir ekstremumu varsa $f'(-2) = 0$ olmalıdır.

$$y = \frac{x^2 - 2}{mx + 1} \quad \text{ise}$$

$$y' = \frac{2x(mx+1) - m(x^2 - 2)}{(mx+1)^2} = \frac{2mx^2 + 2x - mx^2 + 2m}{(mx+1)^2}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow \frac{8m - 4 - 4m + 2m}{(-2m+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

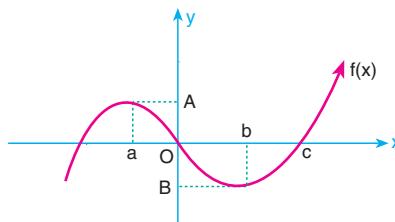
bulunur.



UYGULAMA ADIMI



12.



$f(x) = 3x^3 - 9x$ fonksiyonunun grafiği verildiğine göre, $|AB|$ kaç birimdir?

Çözüm

A noktası yerel maksimum noktasının ordinatı, B noktası da yerel minimum noktasının ordinatıdır.

$$f'(x) = 9x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

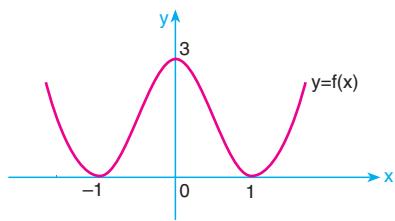
O halde $a = -1$; $b = 1$ olur.

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 9(-1) = -3 + 9 = 6$$

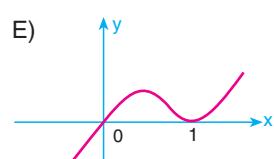
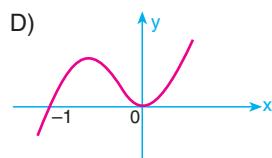
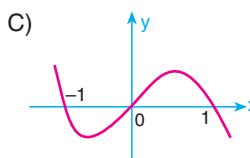
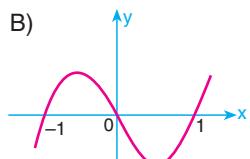
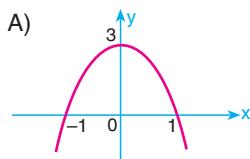
$$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 = 3 - 9 = -6 \text{ dır.}$$

Buna göre $|AB| = |6 - (-6)| = 12$ bulunur.

13.



Şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği için, $f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Çözüm

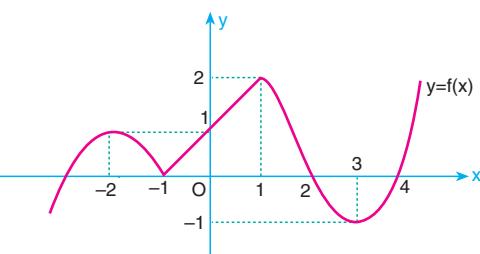
Verilen grafik incelendiğinde

$(-\infty, -1)$ için $f(x)$ azalan, yani $f'(x) < 0$ ve $f'(-1) = 0$;

$(-1, 0)$ aralığında $f(x)$ artan, yani $f'(x) > 0$ ve $f'(0) = 0$ dır.

$(0, 1)$ aralığında $f(x)$ azalan, yani; $f'(x) < 0$; $(1, \infty)$ aralığında $f(x)$ artan yani, $f'(x) > 0$ olduğundan bu koşulları sağlayan grafik (B) seçeneğindedir.

14.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) Yerel minimum değerlerinden biri sıfırdır.
- B) Yerel maksimum değerlerinden biri 1 dir.
- C) Yerel maksimum değerlerinden biri 2 dir.
- D) Yerel minimum değerlerinden biri -1 dir.
- E) 3 tane maksimum değeri vardır.

Çözüm

Grafik incelenirse $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 3$ apsisli noktalarda yerel minimumu, $x = -2$ ve $x = 1$ apsisli noktalarda yerel maksimumu vardır. Bu nedenle A, B, C ve D seçenekleri doğru E seçeneği yanlıştır.

15. $f(x) = x^3 - 3x + 6$ fonksiyonunun yerel minimum ve yerel maksimum değerlerini bulalım.

Çözüm

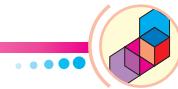
$$f(x) = x^3 - 3x + 6 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x = -1, \quad x = 1$$



UYGULAMA ADIMI



Tablo yapılırsa:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	o	-	o
$f(x)$				

yerel maks. yerel min.

Türev fonksiyonunun işaretini incelenirse f fonksiyonu $(-\infty, -1)$ aralığında -1 'e kadar türev fonksiyonunun işaretini incelenirse f fonksiyonu $(-\infty, -1)$ aralığında -1 e kadar pozitif ve $f(-1) = 0$ olduğundan $f(x)$ in maksimum değeri

$$f(-1) = -1 + 3 + 6 = 8 \text{ dir.}$$

$(-1, 1)$ aralığında 1 e kadar negatif ve $f'(1) = 0$ olduğundan $f(x)$ in minimum değeri

$$f(1) = 1 - 3 + 6 = 4 \text{ tür.}$$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki yerel ekstremum değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

olup $x = 2 \in [0, 3]$ olduğundan $x = 2$ bir kritik noktadır.

x	0	2	3
$f'(x)$	-	o	+
$f(x)$			

yerel maks. yerel min. yerel min.

$$x = 0 \text{ için } f(0) = 0^2 - 4.0 + 1 = 1 \quad (\text{Yerel maksimum})$$

$$x = 2 \text{ için } f(2) = 2^2 - 4.2 + 1 = -3 \quad (\text{Yerel minimum})$$

$$x = 3 \text{ için } f(3) = 3^2 - 4.3 + 1 = -2 \quad (\text{Yerel minimum})$$

O halde, yerel ekstremum değerlerinin toplamı

$$1 + (-3) + (-2) = -4 \text{ olur.}$$

17. Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıklardaki en küçük ve en büyük değerlerini bulalım.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \quad [-2, \frac{5}{2}]$

b) $f(x) = x^2 \ln x \quad [1, e]$

c) $f(x) = xe^{-x} \quad [0, \infty]$

d) $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)} \quad [-1, 1]$

Çözüm

- a) Önce $f'(x)$ in kritik noktaları bulunur.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ ve } x_2 = 2 \quad x_1, x_2 \in [-2, \frac{5}{2}] \text{ dir.}$$

$[a, b] = [-2, \frac{5}{2}]$ olup $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)$ bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = -3, \\ f(-1) = 8, \\ f(2) = -19 \\ f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad f \text{ nin } [-2, \frac{5}{2}] \text{ aralığındaki } \underline{\text{en küçük}} \text{ değeri } -19, \underline{\text{en büyük}} \text{ değeri } 8 \text{ dir.}$$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$

$$x(2 \ln x + 1) = 0$$

$$x \neq 0, \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} \notin [1, e] \text{ olduğundan sadece } f(1) \text{ ve } f(e) \text{ ye bakılır.}$$

$$f(1) = 0 \text{ ve } f(e) = e^2$$

$f(1) = 0$ en küçük değer, $f(e) = e^2$ en büyük değerdir.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} - xe^{-x} = 0$

$$e^{-x}(1-x) = 0, e^{-x} \neq 0, x = 1$$

$$x = 1 \in [0, \infty)$$

$$f(1) = \frac{1}{e}, f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

En küçük değer : 0

En büyük değer : $\frac{1}{e}$ dir.

d) $f'(x) = \frac{-2x \cdot (1+2x^2) + (1-x^2) \cdot 4x}{2\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}} = 0$

$$-2x - 4x^3 + 4x - 4x^3 = 0$$

$$8x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1] \text{ dir.}$$

$$f(-1) = 0, f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2\sqrt{2}}, f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2\sqrt{2}}, f(0) = 1, f(1) = 0$$

En küçük değer: 0

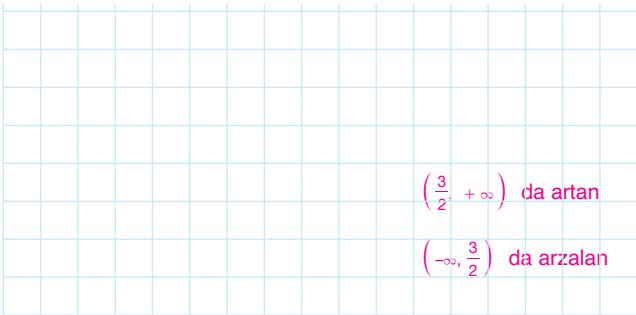
En büyük değer: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ dir.



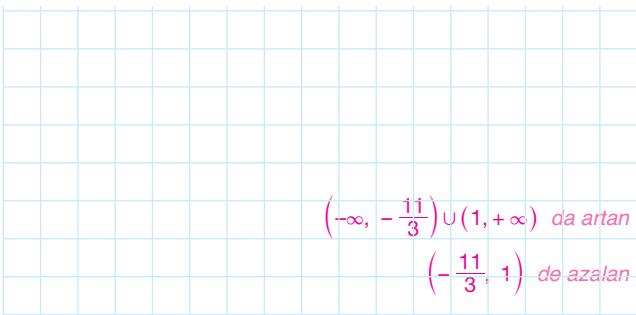
• PEKİŞTİRME ADIMI •



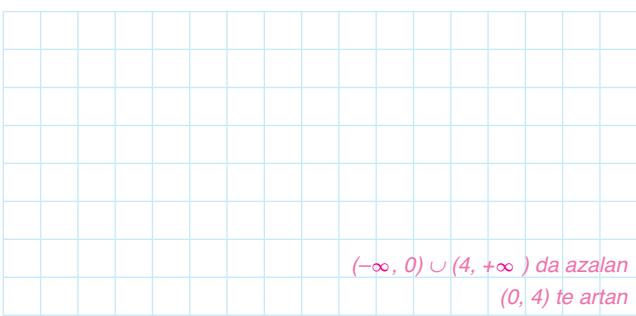
1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ fonksiyonunun artan veya azalan oldukları kümeleri bulunuz.



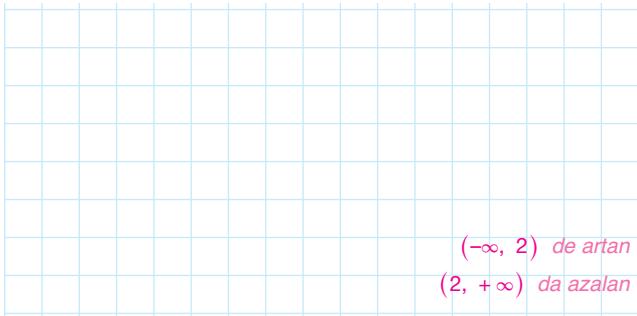
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 1$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.



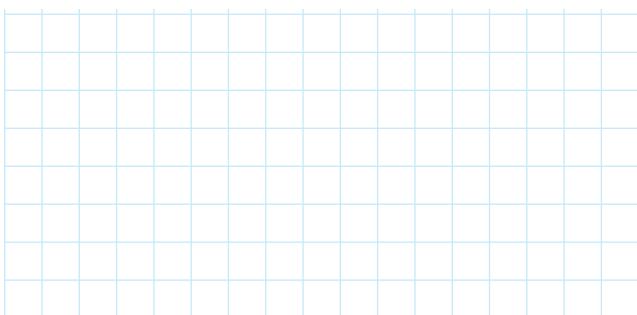
3. $f(x) = 4\ln x - x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.



4. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x + 2$ fonksiyonu veriliyor.
 $f'(x)$ türev fonksiyonunun artan veya azalan olduğu kümeleri bulunuz.

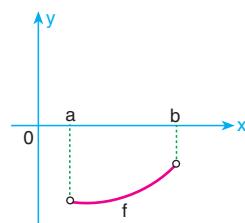


5. $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 2x - 1$ fonksiyonunun R de artan olması için k hangi koşulu sağlamalıdır?



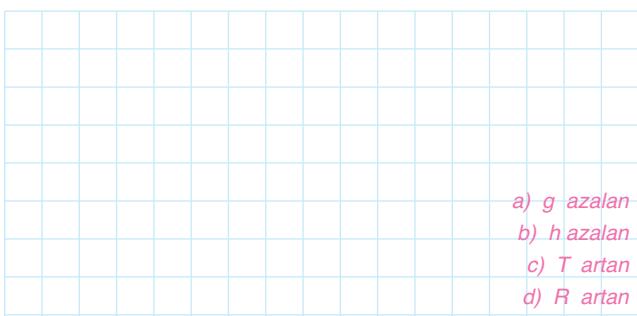
6. (a, b) aralığında şekildeki gibi tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, aşağıda tanımlanan fonksiyonların hangilerinin artan, hangilerinin azalan olduğunu belirtiniz.



- a) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
b) $h(x) = f^2(x)$

- c) $T(x) = x + f^3(x)$
d) $R(x) = \sqrt[3]{f(x)}$





• PEKİŞTİRME ADIMI •



7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığındaki yerel ekstremum değerlerinin toplamı kaçtır?



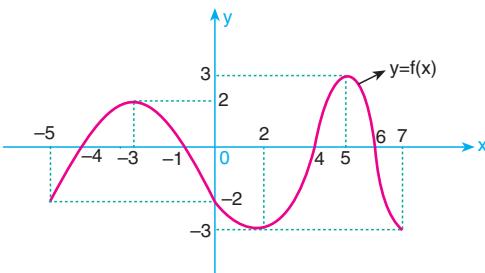
3

8. $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerinin toplamını bulunuz.



0

9.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre, bu fonksiyon için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?**

- A) $x = -5$ te yerel minimum değeri vardır.
- B) $x = 2$ de yerel minimum değeri vardır.
- C) 2 tane yerel maksimum değeri vardır.
- D) $x = -3$ te yerel maksimum değeri vardır.
- E) $x = 5$ te yerel minimum değeri vardır.

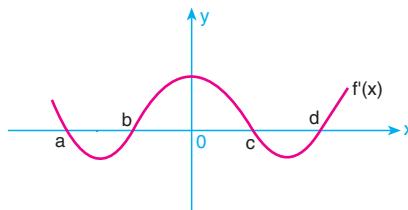


E

10. $f(x) = x^3 + 4ax^2 - x + 3$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{3}$ apsisli noktasında yerel minimum olduğunu göre, a nin değeri kaçtır?

 $\frac{1}{4}$

11.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevinin grafiği verilmiştir. **$y = f(x)$ in yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının apsislerini bulunuz.**



$x = a, x = c$ de
yerel maksimum;
 $x = b, x = d$ de
yerel minimum var.

12. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ fonksiyonunun apsişi $x = 1$ olan noktası yerel minimum noktasıdır. Bu noktadaki minimum değeri -3 olduğuna göre, $a.b$ kaçtır?



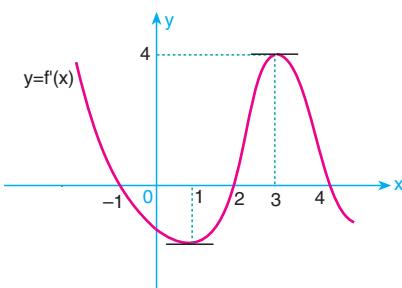
-14



• PEKİŞTİRME ADIMI •



13.

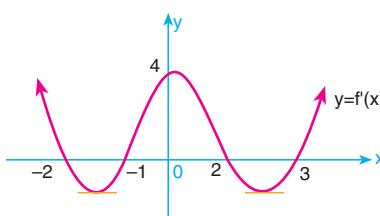


$y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği çizilmiştir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun hangi x değeri için minimumu vardır?



15.

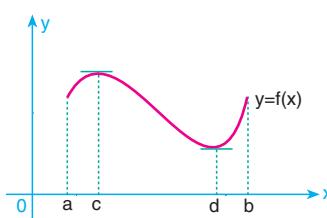


Şekilde türevinin grafiği verilmiş olan $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

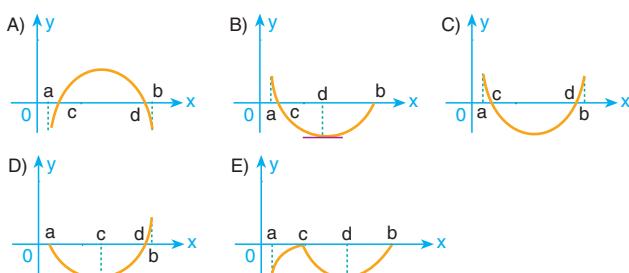


0

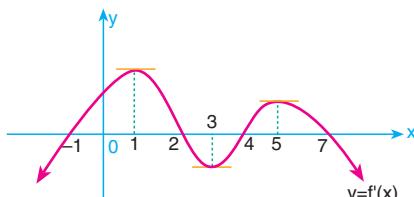
14.



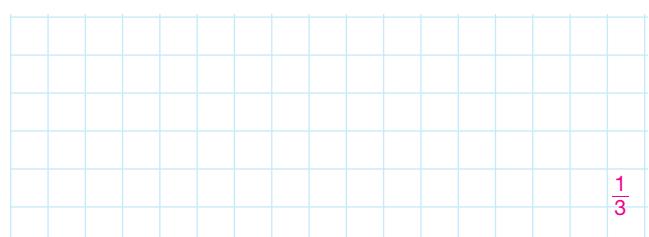
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $y = f(x)$ ile tanımlı fonksiyonun grafiği şekildeki gibidir. $f'(x)$ fonksiyonuna ait grafik aşağıdakilerden hangisi olabilir?



16.

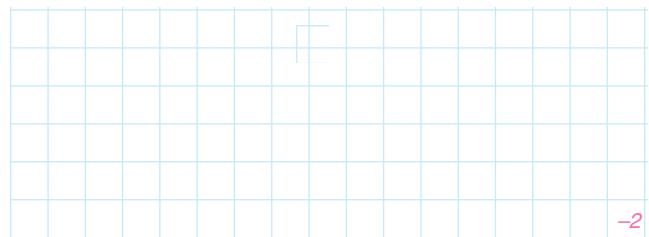


Şekilde türevinin grafiği verilmiş olan $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsislerinin toplamının yerel maksimum noktalarının apsislerinin toplamına oranı kaçtır?



1/3

17. $f(x) = \frac{(k+1)x^2 + 2x - 1}{x+1}$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında bir yerel ekstremumunun olması için, k kaç olmalıdır?



-2

TÜREVİN ANLAMI

Hareketli bir cismin t zamanda aldığı S yolunu t zamanının bir fonksiyonu olarak
 $S = f(t)$ ile gösterelim.

Cismin $t = t_1$ anında aldığı yol $S_1 = f(t_1)$

$t = t_2$ anında aldığı yol $S_2 = f(t_2)$ olur.

$t_1 < t_2$ ise $\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ oranına cismin $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama hızı denir ve V_{ort} ile gösterilir. Yani
 $V_{\text{ort}} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ dir.

$f'(t_0)$ değeri varsa bu değere cismin $t = t_0$ anındaki anlık (anı) hızı denir.

Cismin hız fonksiyonu $V(t)$ ile gösterilirse $V(t) = f'(t)$ olur.

Başka bir deyişle yolun zamana göre türevi hızı verir.

Cismin ivmesi a ise ivme zamanın bir fonksiyonudur. Yani

$a(t) = V'(t)$ dir.

Bu “hızın zamana göre türevi ivmeyi verir” şeklinde yorumlanır.

ÖRNEK

Hareket denklemi $f(t) = t^2 + 2t + 1$ olan bir cismin $t_1 = 2$ ve $t_2 = 3$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı kaç m/sn dir?

ÇÖZÜM

$$V_{\text{ort}} = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} \text{ idi.}$$

$$t_1 = 2 \text{ için } f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$t_2 = 3 \text{ için } f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$$

$$V_{\text{ort}} = \frac{9 - 16}{2 - 3} = 7 \text{ m/sn dir.}$$

ÖRNEK

Hareket denklemi $f(t) = t^3 + 1$ olan hareketlinin $t = 2$ 'inci saniye-deki ivmesi kaç m/sn^2 dir?

ÇÖZÜM

$$V(t) = f'(t) = 3t^2$$

$a(t) = V'(t) = (3t^2)' = 6t$ olup $a(2) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/sn}^2$ bulunur.

ÖRNEK

$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ denklemiyle bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin hızı hangi zaman aralığında azalır?

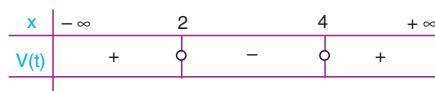
ÇÖZÜM

$$V(t) = f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t - 2)(t - 4) = 0$$



Tablodan görüldüğü gibi cismin hızı $(2, 4)$ aralığında azalır

ETKİNLİK

Hareket denklemi

$$S_1 = t^3 + 4 \text{ ve } S_2 = 3t + k$$

olan iki cisim buluşukları anda hızları aynıdır.

S_1 ve S_2 cisimlerin yerden yüksekliğini gösterdiğinde, k kaçtır?

Cisimlerin hız fonksiyonları

$$V_1(t) = 3t^2$$

$$V_2(t) = 3 \text{ tür.}$$

Hızlar eşit olacağından

$$3t^2 = 3 \Rightarrow t = 1 \text{ olur.}$$

Buluşukları anda iki cisim de yerden aynı yükseklikte olacağından

$$S_1 = S_2 \text{ olmalıdır.}$$

O zaman $t = 1$ için

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = 1 + 4 = 5 \\ S_2 = 3 + k \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + k = 5 \\ \Rightarrow k = 2 \end{array}$$

bulunur.

KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

Hareket denklemi

$S = 3t^2 - t + 1$ olan cismin $t_0 = 2$.nci saniyedeki anlık hızını bulunuz.

$$V(t) = S'(t) = 6t - 1$$

olduğundan $t_0 = 2$ deki

anlık hız $V(2) = 12 - 1 = 11$ m/sn dir.

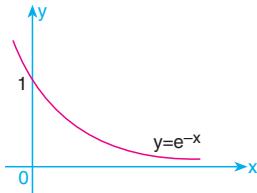
ETKİNLİK

$y = e^{-x}$ denklemiyle verilen aralığı bulalım.

$$y' = -e^{-x} \Rightarrow y'' = e^{-x} > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y'' = e^{-x} > 0$

olduğundan her yerde eğri konkavdır.



UYARI

$f(x)$ bir polinom olsun.

1) $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$f(x)$, $(x - a)^m$ ile bölünebiliyorsa, $f'(x)$, $(x - a)^{m-1}$ ile bölünebilir.

2) Eğer $f'(x)$, $(x - a)^{m-1}$ ile bölünebiliyorsa ve $f(a) = 0$ ise,

$f(x)$, $(x - a)^m$ ile bölünebilir.

3) $f(x)$, $(x - a)^m$ ile bölünebiliyorsa $f^{(m-1)}(a) = 0$ dir.

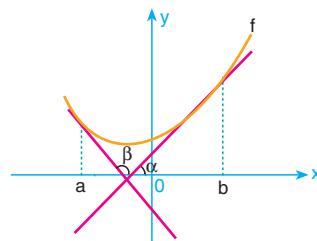
KONVEKSLİK VE TÜREV İLİŞKİSİ

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

f nin grafiği üzerinde $a < b$

olmak üzere a ve b noktaları alınsın.

$$\begin{cases} f'(a) = \tan \beta < 0 \\ f'(b) = \tan \alpha > 0 \end{cases} \text{ olup } a < b \text{ iken } f'(a) < f'(b) \text{ yani } f' \text{ artandır.}$$



$f'(x)$ artan olduğundan $f'' > 0$ dir.

Ayrıca $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ olduğundan x yerine a yazılırsa,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f nin $x = a$ noktasındaki türevi idi.

Burada $a + h = x$ denirse $h = x - a$ dir.

$h \rightarrow 0$ için $x \rightarrow a$ olur.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ olur.}$$

Grafikten $a < b$ iken $f'(a) < f'(b)$ idi

$$\begin{cases} f'(b) - f'(a) > 0 \\ b - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} > 0 \downarrow f''(a) > 0 \text{ dır.}$$

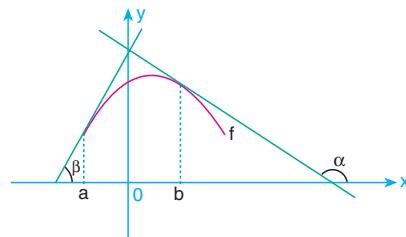
O halde, f iki kez türeviden bilen bir fonksiyon olsun.

$x \in (a, b) \Rightarrow f''(x) > 0$ ise

f konveks (çukur) bir fonksiyondur.

$f(x)$ konveks ise, $e^{f(x)}$ konvektür.

f iki kez türeviden bilen bir fonksiyon olsun.



$a < b$ olsun $f'(a) = \tan \beta > 0$

$f'(b) = \tan \alpha < 0$

$a < b$ iken (a, b) de $f'(a) > f'(b)$ dir.

Yani (a, b) de f' azalandır. f' azalan ise, $f''(x) < 0$ dir.

KAVRAMSAL ADIM

Diğer bir ifadeyle

$a < b$ iken $f'(a) > f'(b)$ olduğundan

$$\Downarrow \quad f'(b) - f'(a) < 0$$

$$b - a > 0 \rightarrow \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} < 0$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} < 0$$

O halde, $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkavdır. (tümsek)

f konveks $\Rightarrow -f$ konkavdır.

Soruclar

1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında 1. ve 2. türevleri alınabilsin.

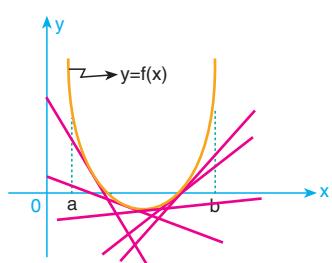
(a, b) aralığında, $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi tüm teğetlerinin üstünde kalıyorsa, **f fonksiyonunun eğrisinin çukurluğu yukarı (konveks)** denir.

Bu durumda $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) > 0$

Bunun karşıtı da doğrudur.

Yani $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x)$

> 0 ise f fonksiyonunun eğrisinin çukurluğu (a, b) aralığında yukarı doğrudur.

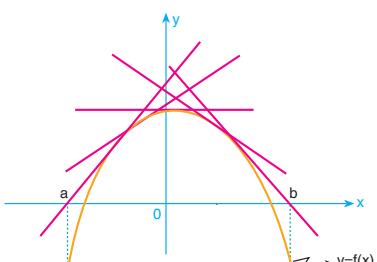


2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında 1. ve 2. türevleri var olsun.

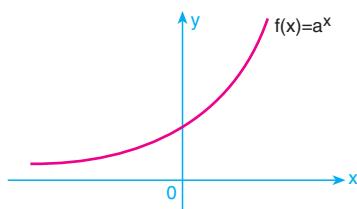
(a, b) aralığında $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi tüm teğetlerinin altında kalıyorsa **f fonksiyonunun eğrisinin çukurluğu aşağı (konkav)** denir.

Bu durumda $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0$ dir.

Bunun karşıtı da doğrudur. Yani $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0$ ise, f fonksiyonunun eğrisinin çukurluğu aşağı doğrudur.

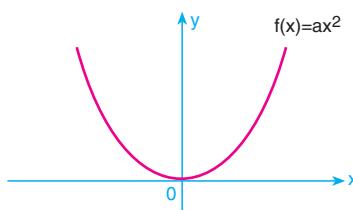


Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.



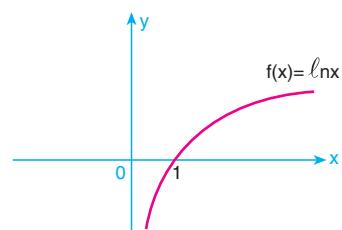
$$1 < a < \infty$$

$f(x) = a^x$ konveks

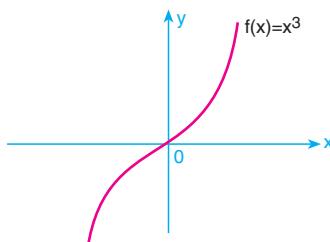


$$0 < a < \infty$$

$f(x) = ax^2$ konveks



$f(x) = \ln x$ konkav



$f(x) = x^3$ fonksiyonu

$(0, \infty)$ aralığında konveks,

$(-\infty, 0)$ aralığında konkav.

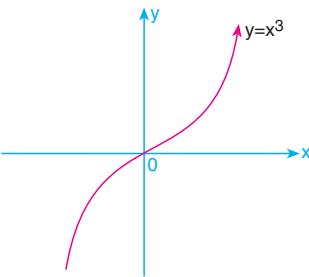
KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

$y = x^3$ denklemiyle tanımlanan eğrinin konveksliğini inceleyelim.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \text{ tır.}$$

x	-∞	0	+∞
$y'' = 6x$	-	o	+
y	konveks		konkav



$x < 0$ için $y'' < 0$,

$x > 0$ için $y'' > 0$ dır.

$x < 0$ için eğri konveks

$x > 0$ için eğri konkavdır.

ETKİNLİK

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

fonksiyonunun konkavitesini inceleyiniz.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Tablo:

x	-∞	$\frac{2}{3}$	+∞
$f''(x)$	-	o	+
$f(x)$	konkav	D.N.	konveks

$x < \frac{2}{3}$ için $f(x)$ konkav,

$x > \frac{2}{3}$ için $f(x)$ konvektir.

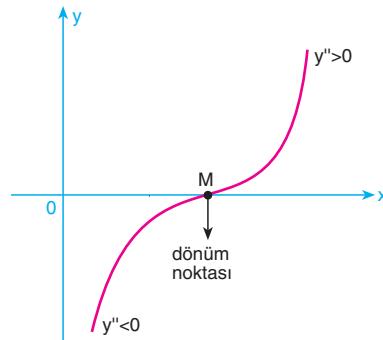
Dönüm Noktası

Bir eğrinin çukurluğunun yön değiştirdiği noktaya eğrinin **dönüm noktası** denir.

$D \subset \mathbb{R}$ ve $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$x_0 \in D$ olmak üzere $M(x_0, f(x_0))$ noktasında f tanımlı, sürekli ve f' türevli olsun.

$f''(x_0) = 0$ ve x_0 in solunda ve sağında f'' zıt işaretli ise $M(x_0, f(x_0))$ noktası f nin bir dönüm noktasıdır.

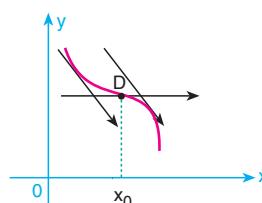
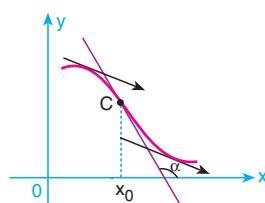
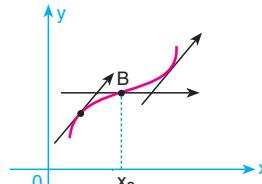
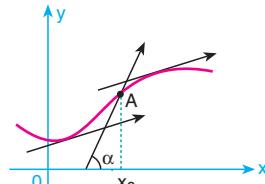


1. $y = f(x)$ fonksiyonunda $x = x_0$ için

$$f'(x_0) = 0 \text{ veya } f'(x_0) \neq 0,$$

$f''(x_0) = 0$ ve x_0 in solunda ve sağında f'' zıt işaretli ise, $x = x_0$ noktası bir dönüm noktasıdır.

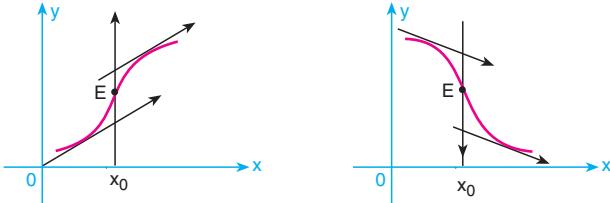
Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.



Şekillerde A, B, C ve D noktaları birer dönüm noktasıdır.

KAVRAMSAL ADIM

2. $y = f(x)$ fonksiyonunda $x = x_0$ için $f'(x_0) = \infty$ ve x_0 in solunda ve sağında f'' zit işaretli ise $x = x_0$ noktası bir dönüm noktasıdır. Aşağıdaki şeklärleri inceleyiniz.



Şekillerde E ve F noktası birer dönüm noktasıdır.

ETKİNLİK

$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisiini bulalım.

$$f'(x) = 9x^2 - 2x + 2$$

$$f''(x) = 18x - 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$
 bulunur.

UYARI

x_0 noktası f fonksiyonunun bir dönüm noktası ise, f' türev fonksiyonu bu noktada işaret değiştirmez. Yani x_0 in solunda ve sağında f' birinci türev fonksiyonu aynı işareteye sahiptir. Fakat x_0 in solunda ve sağında f'' ikinci türev fonksiyonu zit işaretlidir.

UYARI

f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında 1. ve 2. türevleri var olsun. $f''(x_0) = 0$ olması $(x_0, f(x_0))$ noktasının bir dönüm noktası olmasını gerektirmez.

ÖRNEK

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^4$ fonksiyonu için $x = 0$ noktası bir dönüm noktası mıdır?

ÇÖZÜM

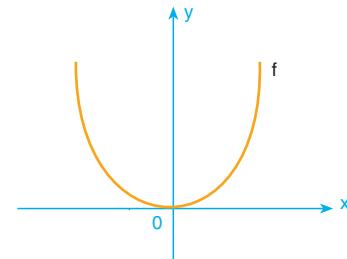
$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ dır.}$$



Fakat $(0, 0)$ noktası bir dönüm noktası değildir. Eğrinin çukurluk yönünden değişmediğine dikkat ediniz.

ÖRNEK

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ fonksiyonunun dönüm noktası nedir?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ dır.}$$

f'' için işaret tablosu yapılırsa:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''	-	0	+
	$f''(\frac{1}{2}) < 0$		$f''(\frac{1}{2}) > 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olup $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ noktası fonksiyonun dönüm noktasıdır.

KAVRAMSAL ADIM



ÖRNEK

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $(0, 2\pi)$ aralığındaki dönüm noktası nedir?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$(k \in \mathbb{Z})$ ve $k = 1$ için $x = \pi$ dir.

Tablo:

x	$-\infty$	π	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

\downarrow $f''(x) < 0$ \uparrow $f''(x) > 0$

O halde, $x = \pi$ noktası $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun dönüm noktasıdır.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ fonksiyonu için $M(1, 2)$ noktası bir dönüm noktası ise, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$M(1, 2)$ bir dönüm noktası ise

$$f''(1) = 0 \text{ ve } f'(x) = 3x^2 + 2ax + 4$$

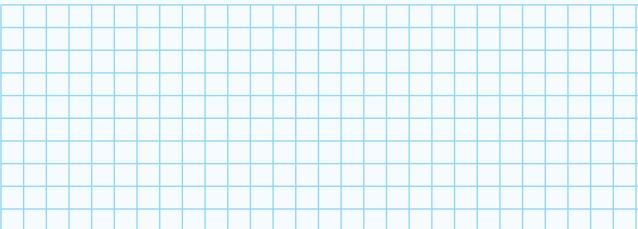
$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \text{ tür.}$$

ETKİNLİK

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$$

fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz.



ETKİNLİK

$y = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun artan, azalan oldukları aralık ve ekstremum, dönüm noktalarını $[0, 2\pi]$ aralığında belirtelim.

$$y' = \cos x - \sin x \text{ olup köklerini bulalım.}$$

$$\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

ekstremum noktalarını verir.

Ayırt etmek için ikinci türevin bu noktalarındaki işaretini inceleyelim.

$$y'' = -\sin x - \cos x \text{ olup}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ için } y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'' = -\sqrt{2} < 0 \text{ dır.}$$

Maksimum oluşur.

$$\text{Dolayısıyla } x_2 = \frac{5\pi}{4} \text{ te minimum elde edilir.}$$

Dönüm noktasını bulmak için ikinci türevi sıfırlayalım.

$$y'' = -\sin x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$\tan x = -1 \Rightarrow x_1 = \pi - \pi/4 = \frac{3\pi}{4} \text{ ve}$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ noktaları dönüm noktasıdır.}$$

Artan ve azalan olduğu aralıkları bulmak için türev işaret tablosunu yapalım.

x	0	$\pi/4$	$5\pi/4$	2π
y'	+	0	-	0
y	↗	max	↘ min	↗

Tabloya göre $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ te fonksiyon artan,

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ te azalan, $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ de artandır.



UYGULAMA ADIMI



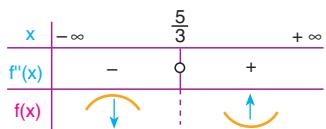
1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ fonksiyonunun eğrisinin konveks veya konkav olduğu kümeleri bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

$$f''(x) = 6x - 10 \text{ olur.}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ tür.}$$

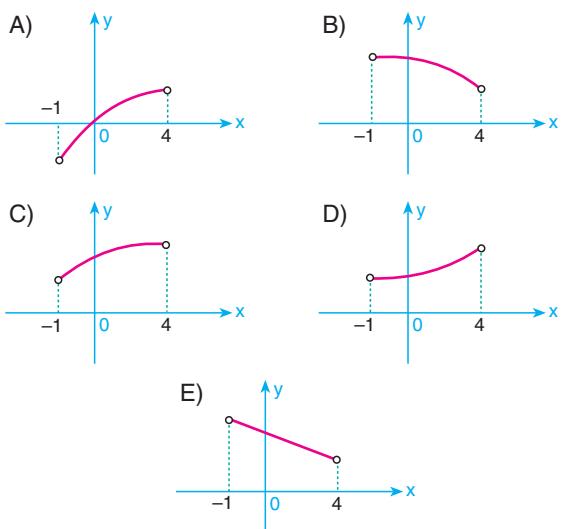


$(-\infty, \frac{5}{3})$ aralığında f nin çukurluğu aşağı doğru (konkav),

$(\frac{5}{3}, \infty)$ aralığında f nin çukurluğu yukarı doğrudur. (konveks)

2. Aşağıdaki grafikler $(-1, 4)$ aralığında $y = f(x)$ fonksiyonuna aittir.

Aşağıdakilerden hangisinde $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$ koşullarının her üçü de sağlanır?



Çözüm

$f(x) > 0$ olması grafiğin x ekseninin üst kısmında olduğunu,

$f'(x) > 0$ olması f nin artan olduğunu,

$f''(x) < 0$ olması da f nin konkav olduğunu söyler.

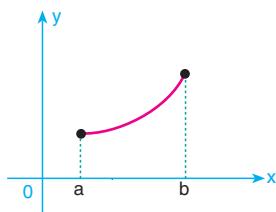
Bu üç koşulu sağlayan grafik C dendir.

3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\forall x \in (a, b)$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| A) $f'(x) > 0$ | B) $f'(x) > 0$ | C) $f'(x) > 0$ |
| $f''(x) < 0$ | $f''(x) > 0$ | $f''(x) = 0$ |
| D) $f'(x) < 0$ | E) $f'(x) < 0$ | $f'(x) < 0$ |
| $f''(x) > 0$ | $f''(x) > 0$ | |



Çözüm

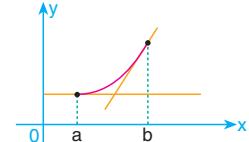
Grafik incelenirse $\forall x \in (a, b)$ için $f(x)$ artandır.

Dolayısıyla $f'(x) > 0$ dır.

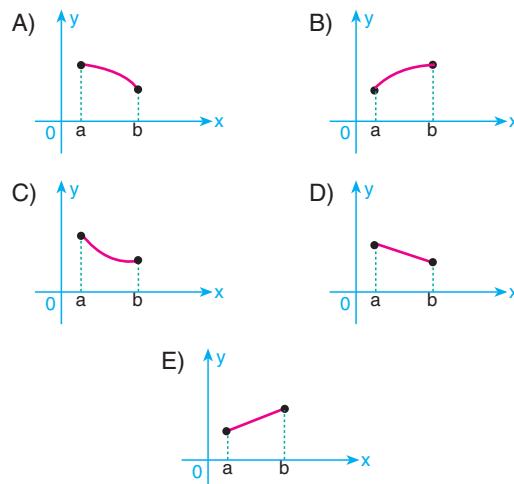
Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

$\forall x \in (a, b)$ için tüm teğetlerinin üstünde olduğundan f konvektir. Yani $f'(x) > 0$ dır.

O halde, doğru cevap B dir.



4. Aşağıda grafikleri çizilen $f(x)$ fonksiyonlarından hangisinde verilen aralıklarda $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ koşulları sağlanır?



Çözüm

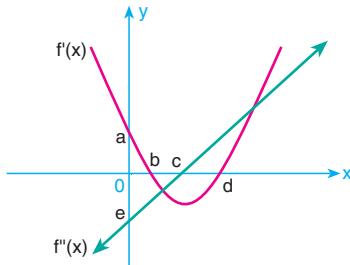
$\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ olması f nin (a, b) aralığında azalan olduğunu, $f''(x) > 0$ olması da f nin (a, b) aralığında konveks olduğunu gösterir. O halde, doğru cevap C dir.



UYGULAMA ADIMI



5.



Şekilde $g(x)$ fonksiyonuna ait $f'(x)$ ve $f''(x)$ türev fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $f''(b) < 0$ dır.
- B) $x > d$ için $f(x)$ artandır.
- C) $f(x)$, (b, d) aralığında azalandır.
- D) $x = c$ için $f(x)$ in dönüm noktası vardır.
- E) $f'(0) \cdot f''(0) = 0$

Çözüm

Grafiğe göre tabloyu oluşturalım.

x	$-\infty$	b	c	d	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↗	↗	↘	↗	↗
$f''(x)$	-	-	-	0	+

$f'(x)$ 1. türev fonksiyonu $(-\infty, b)$ ve $(d, +\infty)$ aralıklarında pozitif olduğundan bu aralıklarda f artan, (b, d) aralığında negatif olduğundan bu aralıkta f azalandır.

$f''(x)$ fonksiyonu $x = c$ de x ekseni kestiğinden ve c nin solunda ve sağında $f''(x)$ fonksiyonunun işaretleri farklı olduğundan $x = c$ de f nin bir dönüm noktası vardır.

$f'(0) = a$, $f''(0) = e$ olup $a > 0$, $e < 0$ olup $a \cdot e \neq 0$ dır.

O halde tablodan,

- A) $f''(b) < 0$ önermesi doğrudur.
- B) $x > d$ için $f(x)$ artandır.
- C) $f(x)$ (b, d) aralığında azalandır.
- D) $x = c$ için $f(x)$ in dönüm noktası vardır.
- E) $f'(0) \cdot f''(0) = 0$ önermesi yanlışır.

6. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (x - 5)^3 - 2$ fonksiyonunun dönüm noktasının koordinatlarının toplamını bulalım.

Çözüm

$$f(x) = (x - 5)^3 - 2 \text{ ise}$$

$$f'(x) = 3(x - 5)^2 \cdot 1 = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$x = 5 \text{ (çift katlı kök)}$$

$$f''(x) = 6(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ tir.}$$

Tabloyu oluşturalım.

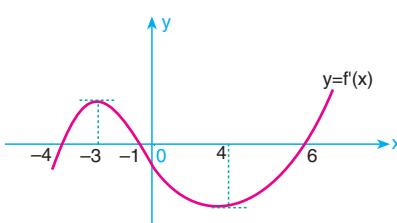
x	$-\infty$	5	$+\infty$
f'	+	0	+
f''	-	0	+

İkinci türev fonksiyonunun kökü $x = 5$ tir. 5 in solunda ve sağında $f''(x)$ fonksiyonunun işaretleri farklı olduğundan $x = 5$ dönüm noktasının apsisidir.

O halde

$x = 5$ için $f(5) = (5 - 5)^3 - 2 = -2$ olup $D(5, -2)$ dönüm noktasıdır. Dönüm noktasının koordinatlarının toplamı $5 + (-2) = 3$ bulunur.

7.



Şekilde türevinin grafiği verilen f fonksiyonunun dönüm noktalarının apsislerinin toplamı kaçtır?

Çözüm

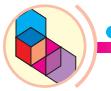
Grafikten $f'(-4) = f'(-1) = f'(6) = 0$ dır.

Ayrıca $(f')'(-3) = f''(-3) = 0$

$(f')'(4) = f''(4) = 0$ dır.

$f'(x)$ türev fonksiyonu $x = -3$ ün solunda artan sağında azalan olduğundan $f''(x)$ fonksiyonunun $x = -3$ te bir dönüm noktası vardır.

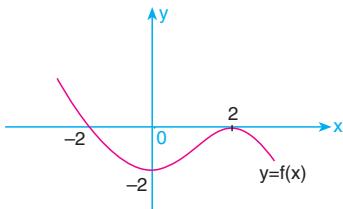
Benzer şekilde $f'(x)$ türev fonksiyonu $x = 4$ ün solunda azalan, sağında artan olduğundan, $f''(x)$ fonksiyonunun $x = 4$ te bir dönüm noktası vardır. O halde, f nin dönüm noktalarının apsislerinin toplamı $-3 + 4 = 1$ dir.



UYGULAMA ADIMI



8.



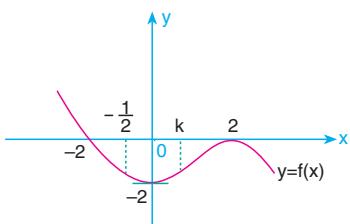
Yukarıdaki grafik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna aittir.

Aşağıdakilerden hangisi yanlışlıstır?

- A) $f(-2) \cdot f'(-2) = 0$ B) $f'(3) \cdot f''(3) > 0$
 C) $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ D) $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
 E) $f'(2) + f''(2) < 0$

Çözüm

Grafik incelenirse;



$k \in (0, 2)$ olmak üzere $x = k$ noktası dönüm noktasının apsisidir. Yani $f''(k) = 0$ dir.

Buradan $(-\infty, k)$ aralığında $f''(x) > 0$,

$(k, +\infty)$ aralığında $f''(x) < 0$ dir.

Ayrıca $(-\infty, 0)$ ve $(2, +\infty)$ aralıklarında f fonksiyonu azalan olduğundan $f'(x) < 0$ dir.

Grafikten ve yukarıda elde edilen bilgiler yardımıyla,

A) $f(-2) = 0$ olduğundan $f(-2) \cdot f'(-2) = 0$ önermesi doğrudur.

B) $f'(3) < 0$ ve $f''(3) < 0$ olduğundan

$f'(3) \cdot f''(3) > 0$ önermesi doğrudur.

C) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ ve $f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ olduğundan

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ önermesi yanlışlıstır.

D) $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ olduğundan

$f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ önermesi doğrudur.

E) $f'(2) = 0$ ve $f''(2) < 0$ olduğundan

$f'(2) + f''(2) < 0$ önermesi doğrudur.

Doğru cevap C dir.

9. $P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomu $(x + 2)^3$ ile tam bölünebildiğine göre, $a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm

$$(x + 2)^3 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(-2) = 0 \\ P'(-2) = 0 \\ P''(-2) = 0 \end{array} \right\} \text{sistemini çözmeliyiz.}$$

$$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$$

$$-32 + 4a - 2b + c = 0$$

$$4a - 2b + c = 32 \dots (1)$$

$$P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow P'(x) = 12x^2 + 2ax + b$$

$$P'(-2) = 12 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot a \cdot (-2) + b = 0$$

$$-4a + b = -48 \dots (2)$$

$$P''(x) = 24x + 2a$$

$$P''(-2) = 24 \cdot (-2) + 2a = 0$$

$$2a = 48$$

$$a = 24 \dots (3)$$

(3) ten $a = 24$ değeri (2) de yerine yazılırsa

$$-4 \cdot (24) + b = -48$$

$$\Rightarrow b = 48 \text{ olur.}$$

$a = 24$ ve $b = 48$ değeri (1) de yerine yazılırsa

$$4 \cdot 24 - 2 \cdot 48 + c = 32$$

$$\Rightarrow c = 32 \text{ bulunur.}$$

O halde $a + b + c = 24 + 48 + 32 = 104$ tür.

10. $y = x^3 + bx^2 + cx - 1$ fonksiyonunda apsisi $x = 1$ olan nokta dönüm (büküm) noktasıdır. Fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi 1 olduğuna göre, c nin değeri kaçtır?

Çözüm

$$y' = 3x^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6x + 2b$$

$x = 1$ için dönüm noktası olduğundan $f''(1) = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3 \text{ bulunur.} \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + c \text{ olur.}$$

$x = 1$ de teğetin eğimi 1 olduğundan $f'(1) = 1$ olmalıdır.

$$\Rightarrow 3 - 6 + c = 1 \Rightarrow c = 4 \text{ olur.}$$



UYGULAMA ADIMI



- 11.** Üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonda bir ve yalnız bir dönüm noktası vardır. Neden?

Çözüm

Üçüncü dereceden bir polinomun ikinci türevi birinci dereceden bir fonksiyondur.

Birinci derece denklemlerinin bir ve yalnız bir kökü vardır. Bu nedenle üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonun bir ve yalnız bir dönüm noktası vardır.

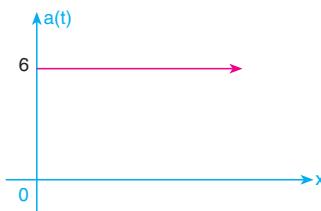
- 12.** Hareket denklemi $S(t) = 6 + 4t + 3t^2$ olan hareketlinin ivme-zaman grafiğini çiziniz.

Çözüm

$$S'(t) = 4 + 6t$$

$$a(t) = S''(t) = 6 \text{ olur.}$$

Buna göre, hareket sabit ivmelidir. Grafik aşağıdaki gibi olur.



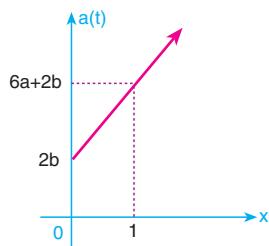
- 13.** Hareket denklemi zamanın 3. dereceden bir fonksiyonu olan hareketlinin ivmesini grafik çizerek açıklayınız.

Çözüm

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$S'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$a(t) = 6at + 2b$ olur. Bu bir doğru denklemidir. $a > 0$ ise ivme düzgün artan, $a < 0$ ise ivme düzgün azalandır. $a > 0$, $b > 0$ için grafik aşağıdadır.



- 14.** $y = \sin x - \cos x$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$y' = \cos x + \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x + \cos x \Rightarrow$$

$$-\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow$$

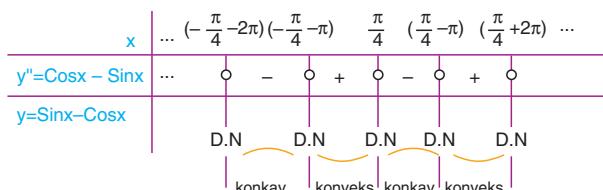
$$\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - x + k \cdot 2\pi \quad \forall x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \forall 0 = -\underbrace{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}_{\text{anlamsız}}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Buna göre, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ noktaları dönüm noktalarıdır.



- 15.** $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$$

$$e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow$$

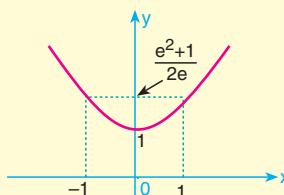
$$e^{2x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = -1 \text{ olur. Bu denklemin çözümü yoktur.}$$

O halde, dönüm noktası yoktur. Üstelik,

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ olduğundan her yerde konvektir.

UYARI

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdadır. $(0, 1)$ noktası bir minimumdur. Her yerde konveks olduğu görüller.





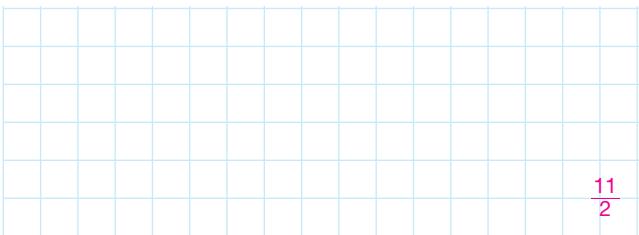
• PEKİŞTİRME ADIMI •



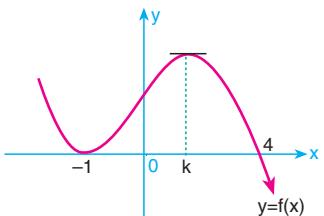
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.



2. $f(x) = (x - 3)^4 + (x - 3)^3$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsislerinin toplamı kaçtır?



3.

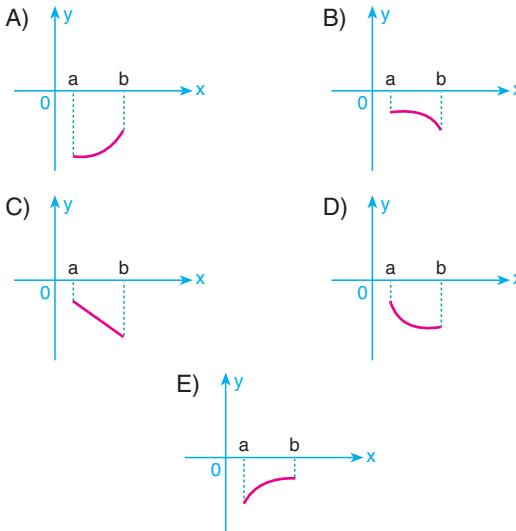


$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

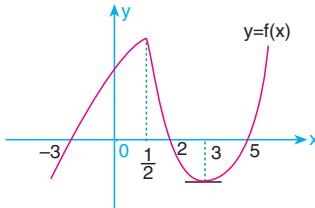
- A) $f(k) = 0$ B) $f'(0) > 0$ C) $f'(4) < 0$
 D) $f''(-1) > 0$ E) $f''(k) > 0$

E

4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ ve $f''(x) > 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

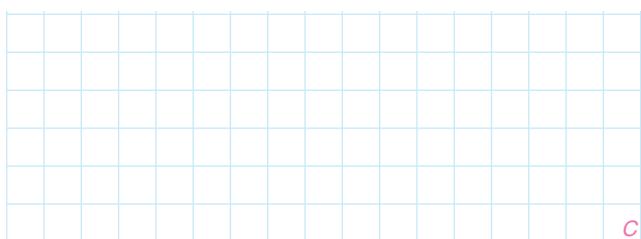


5.



Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $f'(0) > 0$ B) $f''(0) < 0$ C) $f'(\frac{1}{2}) = 0$
 D) $f'(3) = 0$ E) $f'(2) < 0$





• PEKİŞTİRME ADIMI •



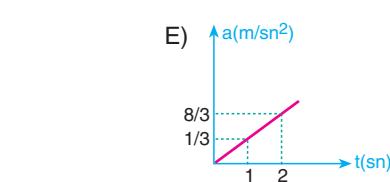
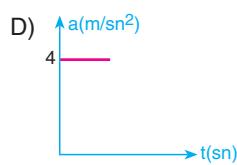
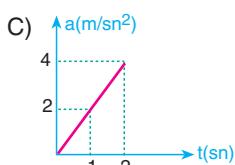
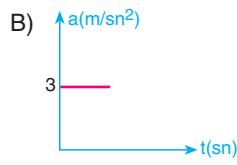
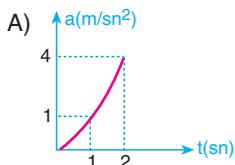
6. $P(x) = 2x^3 + ax^2 + 2bx + c$ polinomu $(x - 2)^3$ ile tam olarak bölündüğünde göre, $a + b + c$ toplamı kaçtır?



-16

7. Doğrusal bir yörunge boyunca hareket eden bir cismin hareket denklemi $S(t) = \frac{1}{3}t^3$ tür. **Bu cismin ivme–zaman grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

(Zaman birimi saniye, konum birimi metredir.)



C

8. $f(x) = (x - 1)^4$ fonksiyonunun dönüm noktası var mıdır?



Yoktur

9. a, b, c reel sayıları arasında $a < b < c$ bağıntısı vardır.

f: $R \rightarrow R$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ fonksiyonu veriliyor.**Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

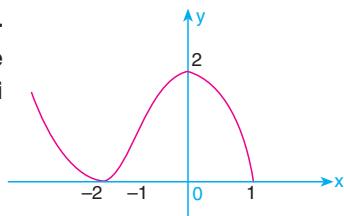
- A) $f'(a) > 0$ B) $f''(a) < 0$ C) $f'(c) > 0$
D) $f''(c) < 0$ E) $f'(b) < 0$



D

10. Yandaki şekil 3. dereceden bir $f(x)$ polinomunun grafiği olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $x = -2$ için $f(x) = 0$ 'dır.
B) $x = -1$ için $f'(x) < 0$ 'dır.
C) $x = 0$ için $f(x) = 2$ 'dir.
D) $x = 1$ için $f(x) = 0$ 'dır.
E) $x = -2$ için $f'(x) = 0$ 'dır.



B

ETKİNLİK

1) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$

fonksiyonunun $x = -1$ de maksimumu, $x = 3$ te minimumu olması için a ve b ne olmalıdır?

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

fonksiyonu, türevlenebilen bir fonksiyon olduğundan yerel maksimum–minimum noktalarında türevi sıfır olmalıdır.

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \text{ dir.}$$

$x = -1$ de maksimum olduğundan,

$$y'(-1) = 3 - 2a + b = 0$$

$x = 3$ te minimum olduğundan,

$$y'(3) = 27 + 6a + b = 0 \text{ olur.}$$

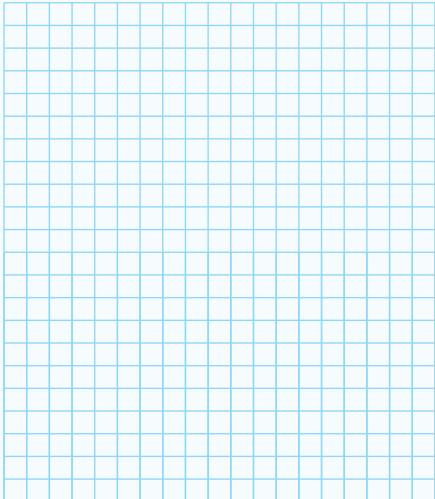
$$3 - 2a + b = 0$$

$$27 + 6a + b = 0$$

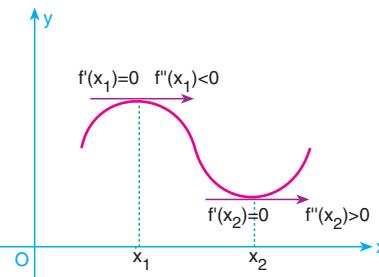
denklem sisteminden

$$a = -3, b = -9 \text{ bulunur.}$$

- 2) x - ekseni üzerinde sabit M_1, M_2, \dots, M_n noktaları alınıyor. Eksen üzerinde öyle bir N noktası bulunuz ki diğer noktalara uzaklıklarının kareleri toplamı minimum olsun.



İkinci Türev ve Yerel Ekstremum Noktası



Eğrinin maksimum noktasında çukurluğun yönü aşağı doğru olduğundan, maksimum noktası ikinci türev negatiftir. Yani

$f'(x_1) = 0$ iken $f''(x_1) < 0$ ise, x_1 noktası f fonksiyonu için bir yerel maksimum noktasıdır.

Eğrinin minimum noktasında çukurluğun yönü yukarı doğru olduğundan minimum noktası ikinci türev pozitiftir. Yani:

$f'(x_2) = 0$ iken $f''(x_2) > 0$ ise, x_2 noktası f fonksiyonu için bir yerel minimum noktasıdır.

f fonksiyonunun (a, b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve (a, b) aralığının bir c noktasında,

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \text{ ve } f^{(n)}(c) \neq 0 \text{ olsun.}$$

Aynı zamanda $f^{(n)}$ fonksiyonu c 'de sürekli olur.

- 1) Eğer; n çift ve $f^{(n)}(c) > 0$ ise f nin $x = c$ de bir yerel minimumu vardır.
- 2) Eğer; n çift ve $f^{(n)}(c) < 0$ ise f nin $x = c$ de bir yerel maksimumu vardır.
- 3) Eğer; n tek ise $x = c$ de f nin ne yerel minimumu ne de yerel maksimumu vardır.

ETKİNLİK

Asıl boyu a olan bir yayın boyu, b kadar bastırılıp bırakıldıktan sonra, zamanın fonksiyonu olarak $L = a + b \cdot \sin(t + k\pi)$ olmaktadır. Yayın hareket hızının maksimum ve minimum olduğu anları bulunuz. (a ve b pozitif reel sayılar, $k \in \mathbb{Z}$ dir.)

Hız denkleminin türevini sıfır yapan t değerleri, hızın en düşük veya en büyük olduğu anları gösterir. (Hızın türevi ivmedir. Demek ki ivmenin sıfır olduğu anlarda hız ekstremum değerdedir.)

$$V(t) = L' = b \cdot \cos(t + k\pi)$$

$$V'(t) = L'' = -b \cdot \sin(t + k\pi) \text{ olur.}$$

$$-b \cdot \sin(t + k\pi) = 0 \Rightarrow \sin(t + k\pi) = 0 \text{ denklemi bulunur.}$$

$$\Rightarrow t + k\pi = n\pi \quad V \quad t + k\pi = \pi + n\pi$$

$$\Rightarrow t_1 = k\pi \quad V \quad t_2 = \pi + k\pi$$

$$\Rightarrow t_1 = k\pi \quad V \quad t_2 = (k+1)\pi$$

Bu değerleri, hızın ikinci türevinde yerine yazalım.

$$V''(t) = L''' = -b \cdot \cos(t + k\pi)$$

$$V''(t_1) = -b \cdot \cos(k\pi + k\pi) = -b \cdot \cos(2k\pi) = -b \cdot 1 \\ = -b < 0$$

$$V''(t_2) = -b \cdot \cos[(k+1)\pi + k\pi] = -b \cdot \cos(\pi + 2k\pi) \\ = -b \cdot (-1) = b > 0$$

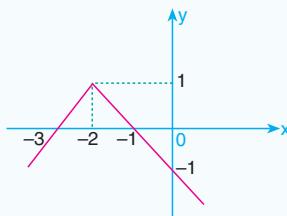
ETKİNLİK

- 1) $y = 1 - |x + 2|$ denklemiyle verilen eğrinin maksimum–minimumlarını araştıralım.

$x \leq -2$ için $y = 1 - (-x - 2) = x + 3$

$x > 2$ için $y = 1 - (x + 2) = -x - 1$

olduğundan, fonksiyonu



$$y = \begin{cases} x + 3, & x \leq -2 \\ -x - 1, & x > -2 \end{cases}$$

biçiminde parçalı olarak yazalım. Grafikten görüldüğü gibi $x = -2$ apsisli noktada fonksiyon maksimum değerini almaktadır ve maksimum değeri 1 dir. Oysa;

$$y' = \begin{cases} 1, & x < -2 \\ -1, & x > -2 \end{cases}$$

ve $y'(-2^-) = 1$, $y'(-2^+) = -1$ olduğundan $y'(-2)$ türevi yoktur.

UYARI

- Çevreleri eşit olan dörtgenler içinde alanı maksimum olan karedir.
- Çevreleri eşit olan üçgenler içinde alanı maksimum olan eşkenar üçgendir.
- Çevreleri eşit olan n-kenarlı çokgenlerden, alanı en büyük olanı düzgün çokgen olmalıdır.
- Toplamları sabit olan iki sayının çarpımlarının maksimum olması için bu sayılar eşit olmalıdır.

Buna göre,

$V'(t_1) = 0$ ve $V''(t_1) < 0$ olduğundan,

$t_1 = k\pi$ anlarında hız maksimumdur.

$V'(t_2) = 0$ ve $V''(t_2) > 0$ olduğundan,

$t_2 = (k + 1)\pi$ anlarında hız minimumdur.

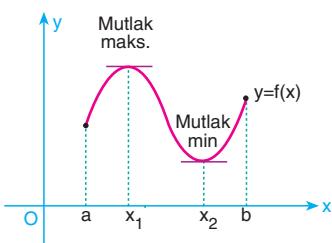
UYARI

t_1 ve t_2 değerleri için $\sin(k\pi + t) = 0$ olacağını, bu anlarda yayın boyu $L = a$ dir. Bu değer ise, yayın denge konumundaki boyudur. Denge konumunda hem maksimum hem de minimum hızın olması, hızlardan biri sıkışma için diğerinin gevşeme için demektir. (Bu hızların büyüklükleri eşittir. Biri pozitif, diğeri negatifdir.)

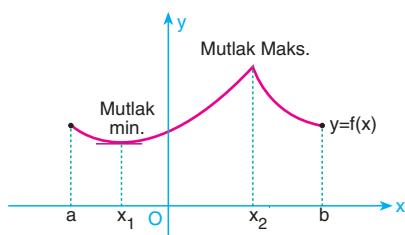
Yayın boyunun $L = a + b$ olması anında hız sıfırdır. Hız yönlü bir kavram olduğu için sıfır hız minimum hız olmaz.

MUTLAK MAKİSİMUM – MUTLAK MİNİMÜM

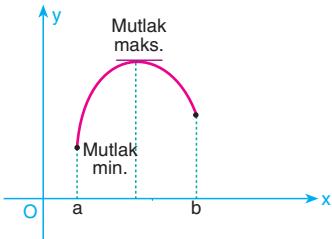
Bir fonksiyonun görüntü kümesindeki (varsayımsa) en büyük elemana o fonksiyonun **mutlak maksimum değeri**, en küçük elemana (varsayımsa) **mutlak minimum değeri** denir. Bir fonksiyonun mutlak maksimum, mutlak minimum değerlerine o fonksiyonun **mutlak ekstremum değerleri** denir.



[a, b] de grafiği verilen
 $y = f(x)$ fonksiyonunun
 $x = x_1$ de mutlak maksimumu
 $x = x_2$ de mutlak minimumu
vardır. $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$



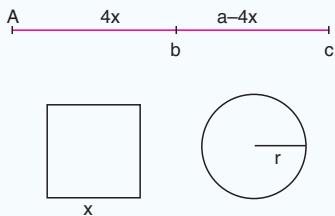
[a, b] de grafiği verilen
 $y = f(x)$ fonksiyonunun
 $x = x_1$ de mutlak minimumu
 $x = x_2$ de mutlak maksimumu
vardır. $f'(x_2)$ tanımlı değil.
 $f'(x_1) = 0$



KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

Uzunluğu a olan bir ip iki parçaya bölünüyor ve her parçanın uçları birleştirilerek birisinden kare, diğerinden bir daire yapılıyor. Kare ile dairenin alanları toplamının en küçük olması için karenin bir kenarı ne olmalıdır?



Şekildeki gibi karenin bir kenarı x , dairenin yarıçapı r ise, $2\pi r = a - 4x$ ten,

$$r = \frac{a - 4x}{2\pi} \text{ dir.}$$

Karenin ve dairenin alanları toplamı

$$A(x) = x^2 + \pi \left(\frac{a - 4x}{2\pi} \right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{4\pi} (a - 4x)^2 \text{ dir.}$$

$$A'(x) = 2x + \frac{1}{4\pi} \cdot 2(a - 4x) \cdot (-4)$$

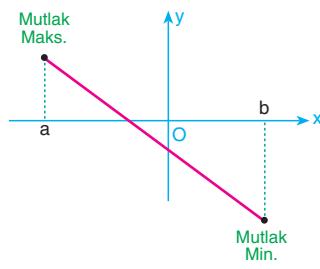
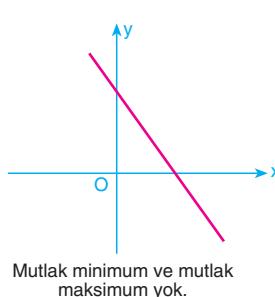
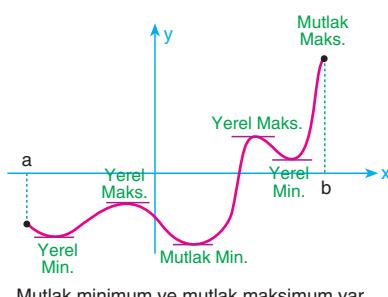
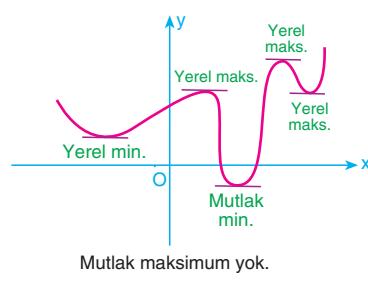
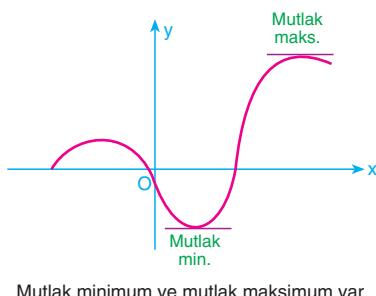
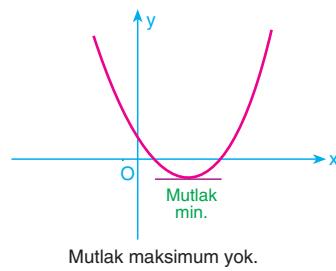
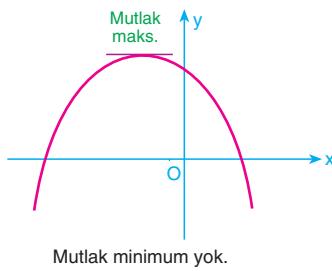
$$= 2x - \frac{2(a - 4x)}{\pi}$$

$$= \frac{2(\pi + 4)x - 2a}{\pi} \text{ ve}$$

$$A'(x) = 0 \text{ dan } x = \frac{a}{4 + \pi} \text{ bulunur.}$$

$$A''(x) = \frac{2(\pi + 4)}{\pi} > 0 \text{ olduğundan,}$$

$$x = \frac{a}{4 + \pi} \text{ için } A(x) \text{ minimum olur.}$$



Mutlak minimum ve
Mutlak maksimum var.

Sürekli Bir Fonksiyonun $[a, b]$ Kapalı Aralığındaki Mutlak Ekstremumlarını Bulmak İçin:

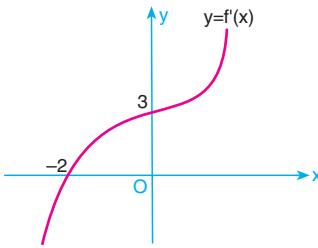
1. (a, b) açık aralığındaki kritik noktalar bulunur.
2. f nin kritik noktalarındaki ve uç noktalardaki $f(a)$, $f(b)$ değerleri bulunur.
3. Bulunan görüntülerin en küçüğü f nin mutlak minimumu, en büyüğü f nin mutlak maksimumudur.



UYGULAMA ADIMI



1.



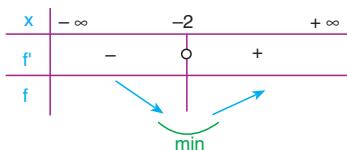
Türevinin grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki önermelerden hangisi doğru değildir?

- A) $x_0 = -2$ ’de $f(x)$ in minimum değeri vardır.
- B) $f(-5) > f(-3)$
- C) $f(5) < f(8)$
- D) $\forall x \in (-2, +\infty)$ için $f'(x) > 0$
- E) $x = 0$ da $f(x)$ in maksimum değeri vardır.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor.

Grafikten $f'(-2) = 0$ ve $(-\infty, -2)$ aralığında f azalan $(-2, +\infty)$ aralığında f artandır.



- A) $x_0 = -2$ de $f(x)$ in minimum değeri vardır önermesi doğrudur.
- B) $(-\infty, -2)$ aralığında f azalan olduğundan $f(-5) > f(-3)$ eşitsizliği doğrudur.
- C) $(-2, +\infty)$ aralığında f artan olduğundan $f(5) < f(8)$ eşitsizliği doğrudur.
- D) $\forall x \in (-2, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ önermesi doğrudur.
- E) $(-2, +\infty)$ aralığında f artan olup $x = 0$ apsisli noktada f nin maksimumu olamaz.
O halde doğru cevap (E) dir.

2. Toplamları 28 olan iki pozitif tam sayının kareleri toplamı en az kaçtır?

Çözüm

En az ifadesinden minimum anlaşılacaktır.

I. sayı II. sayı

x $28-x$ ise

$f(x) = x^2 + (28 - x)^2$ fonksiyonunun minimum değerini bulmalıyız.

$$f'(x) = 2x + 2(28 - x).(-1) = 4x - 56 \text{ ve}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 56 = 0 \Rightarrow x = 14 \text{ olur.}$$

$$f'(14) = 14^2 + (28 - 14)^2 = 2.14^2$$

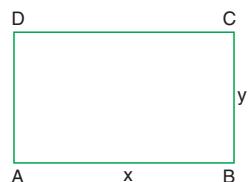
= 392 en küçük değer olur.

3. Çevresi 60 cm olan dikdörtgenler içinde alanı maksimum olanın alanı kaç cm^2 dir?

Çözüm

Dikdörtgenin kenar uzunlukları

x ve y ise çevresi



$$\mathcal{C} = (2x + 2y) = 60 \Rightarrow x + y = 30 \text{ dur.}$$

$$\text{Alan: } A = x.y \text{ ve } x + y = 30 \text{ olduğundan}$$

$$y = 30 - x \text{ olup } A(x) = x(30 - x) = -x^2 + 30x \text{ tir.}$$

$$A'(x) = -2x + 30 \text{ ve } A'(x) = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 30 = 0 \Rightarrow x = 15 \text{ olur.}$$

$$A''(x) = -2 < 0 \text{ olup } x = 15 \text{ için alan maksimum olur.}$$

$$\text{Maksimum değer } A(15) = 15.(30 - 15) = 225 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

4. Toplamları 2 ve çarpımları maksimum olan pozitif iki sayı bulunuz.

Çözüm

Sayılardan biri x ise diğer $2 - x$ olur.

$y = x(2 - x)$ çarpımının maksimum olması için $y' = 0$ olmalıdır.

$$y = 2x - x^2 \Rightarrow y' = 2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ olur.}$$

Diğer sayı $2 - 1 = 1$ dir.



UYGULAMA ADIMI



5. $f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \sin^2 x + \cos x$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x \text{ ise}$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \sin x \text{ ve}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ veya } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \sin x = \sin 2x - \sin x$$

$$f''(x) = 2\cos 2x - \cos x \text{ ve}$$

$$f''(\pi) = 2\cos 2\pi - \cos \pi = 2 \cdot 1 - (-1) = 3 > 0$$

olduğundan $x = \pi$ de minimum var.

$f(\pi) = \sin^2 \pi + \cos \pi = -1$ olup $A(\pi, -1)$ f nin bir minimum noktasıdır.

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 2\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \text{ olup}$$

$x = \frac{\pi}{3}$ te bir maksimumu vardır.

$$f(\frac{\pi}{3}) = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$B(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4})$ f nin bir maksimum noktasıdır.

$$f''(\frac{5\pi}{3}) = 2\cos 2 \cdot \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{3}$$

$$= 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \text{ olup } x = \frac{5\pi}{3} \text{ te}$$

bir maksimumu var.

$$f(\frac{5\pi}{3}) = \sin^2 \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \text{ olup}$$

$C(\frac{5\pi}{3}, \frac{5}{4})$ f nin bir maksimum noktasıdır.

O halde $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ fonksiyonunun $(0, 2\pi)$ aralığında minimum değeri -1 , maksimum değeri $\frac{5}{4}$ olur.

6. Şekilde $a, b > 0$ ve $a + b = 6$ birim ise taralı alanın en büyük değeri kaç birimkaredir?

Çözüm

$$|AB| = a + b = 6 \text{ birim olup}$$

$$\text{Alan } A = \frac{(a+b)2ab}{2} = 6 \cdot ab \text{ ve } b = 6 - a \text{ ise}$$

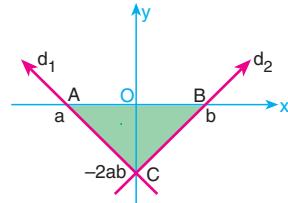
$$A(a) = 6 \cdot a(6-a) = 36a - 6a^2 \text{ dir.}$$

$$A'(a) = 36 - 12a \text{ ve } A'(a) = 0 \text{ ise}$$

$$36 - 12a = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ ve } b = 3 \text{ tür.}$$

$A''(a) = -12 < 0$ olduğundan $a = 3$ için alan en büyük değerini alır. O halde alanın en büyük değeri:

$$A(3) = 6 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54 \text{ birimkaredir.}$$



7. Bir fabrika $y = 30x + 10.000$ liraya mal ettiği üretimin tanesini $P = 100 - 0,01x$ liraya satıyor. x üretim sayısını gösterdiğinde göre kârin en çok olabilmesi için üretim sayısı kaç olmalıdır?

Çözüm

x tane mal üretilmiş olsun.

$$x \cdot p = 100x - 0,01x^2 \text{ satıştan elde edilen kâr: } k = xp - y$$

$$k(x) = 100x - 0,01x^2 - 30x - 10.000 \text{ dir.}$$

$$\frac{dk}{dx} = 100 - 0,02x - 30 \text{ ve}$$

$$\frac{dk}{dx} = 0 \Rightarrow 70 - 0,02x = 0 \\ 0,02x = 70$$

$$x = \frac{70}{0,02} = \frac{7000}{2} = 3500 \text{ bulunur.}$$

8. $y = (x + 3)^3 + 6$ ifadesinin $x = -3$ te maksimum veya minimumunun bulunup bulunmadığını inceleyelim.

Çözüm

$$y' = 3(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3 \text{ tür.}$$

Demek ki $x = -3$ te türev sıfırdır. Bu, maksimum olması anlamına gelmez. İkinci türevi ne yaptığına bakmalıyız.

$$y'' = 6(x+3) \text{ tür.}$$

$x = -3$ için $y'' = 0$ olur. Bu nedenle $x = -3$ te ekstremum yok, dönm noktası vardır. (-3 sayısının üçüncü türevi sıfır yapmadığını görürüz.)



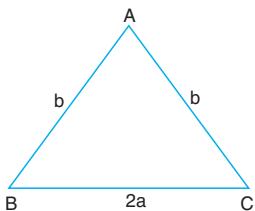
UYGULAMA ADIMI



9. Şekilde $|AB| = |AC| = b$, $|BC| = 2a$ ve $a + b = k$ (k sabit) ise, $A(\widehat{ABC})$ nin en büyük değeri nedir?

Çözüm

$A(\widehat{ABC})$ için Heron formülü kullanılırsa
 $\text{Çevre} = 2u = 2a + b + b \Rightarrow u = a + b$ dir.



$$\begin{aligned} A(\widehat{ABC}) &= \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \\ &= \sqrt{(a+b).(a+b-2a).(a+b-b).(a+b-b)} \\ &= \sqrt{(a+b).(b-a).a.a} \text{ ve} \\ a+b=k \Rightarrow b &= k-a \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$A(\widehat{ABC}) = A = \sqrt{k.(k-2a).a^2}$$

$$A(a) = \sqrt{a^2k^2 - 2a^3k}$$

$$\begin{aligned} A'(a) &= \frac{2ak^2 - 6a^2k}{2\sqrt{a^2k^2 - 2a^3k}} = 0 \\ &= \frac{2ak(k-3a)}{2a\sqrt{k^2 - 2ak}} = \frac{k(k-3a)}{\sqrt{k^2 - 2ak}} \end{aligned}$$

$$k.(k-3a) = 0 \Rightarrow k \neq 0 \text{ olduğundan } k-3a = 0 \Rightarrow a = \frac{k}{3} \text{ tür.}$$

$$\begin{aligned} A''(a) &= \frac{-3k.\sqrt{k^2 - 2ak} - (k^2 - 3ak).\frac{-2k}{2\sqrt{k^2 - 2ak}}}{k^2 - 2ak} \\ &= \frac{-3k.(k^2 - 2ak) + k^3 - 3ak^2}{(k^2 - 2ak).\sqrt{k^2 - 2ak}} \\ &= \frac{-2k^3 + 3ak^2}{(k^2 - 2ak)\sqrt{k^2 - 2ak}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A''\left(\frac{k}{3}\right) &= \frac{-2k^3 + 3 \cdot \frac{k}{3} \cdot k^2}{\left(k^2 - 2 \cdot \frac{k}{3} k\right)\sqrt{k^2 - \frac{2k}{3} k}} \\ &= \frac{-k^3}{\frac{k^2}{3} \cdot \frac{k}{\sqrt{3}}} = -3\sqrt{3} < 0 \quad \text{olduğundan } a = \frac{k}{3} \text{ için} \end{aligned}$$

$A(\widehat{ABC})$ en büyük değerini alır. Bu değer;

$$A(a) = \sqrt{a^2k^2 - 2a^3k} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} A\left(\frac{k}{3}\right) &= \sqrt{\left(\frac{k}{3}\right)^2 \cdot k^2 - 2 \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^3 \cdot k} \\ &= \sqrt{\frac{k^4}{9} - \frac{2}{27}k^4} = \sqrt{\frac{k^4}{27}} = \frac{k^2}{3\sqrt{3}} \text{ tür.} \end{aligned}$$

10. Çarpımları 2 ve toplamları minimum olan pozitif iki sayı bulunuz.

Çözüm

Sayılardan biri x olsun. Diğer $\frac{2}{x}$ olur.

$$y = x + \frac{2}{x} \text{ toplamının minimum olması için } y' = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \text{ pozitif olması} \\ \text{istendiğinden, } x = \sqrt{2} \text{ alınır.}$$

$$\text{Diğer sayı ise } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ olur.}$$

11. $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} - ex$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

Çözüm

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}}{2} - e \text{ ve } f'(x) = 0 \text{ ise } e^{2x} - e = 0 \\ e^{2x} &= e^1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^2 \cdot \frac{1}{2} - e \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ dir.}$$

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktası $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} - ex$ fonksiyonunun minimum noktası olup minimum değeri 0 dir.

12. Bir daire diliminin çevresi 12 cm dir. Daire kesmesinin alanının en büyük olması için yarıçapı kaç cm olmalıdır?

Çözüm

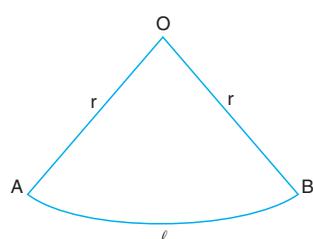
$$IOAI = IOBI = r$$

$$|\widehat{AB}| = \ell \text{ olsun.}$$

$$2r + \ell = 12$$

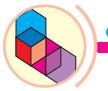
$$\text{Alan} = \frac{1}{2}r \cdot \ell$$

$$\ell = 12 - 2r$$

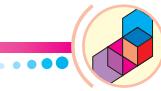


$$A(r) = \frac{1}{2}r \cdot (12 - 2r) \Rightarrow A(r) = r \cdot (6 - r)$$

$$\Rightarrow A'(r) = 6 - 2r = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ cm dir.}$$



UYGULAMA ADIMI



- 13.** $f(x) = 2(\cos^2 x) + \sqrt{3}x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki ekstremum değeri kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = 4\cos x \cdot (-\sin x) + \sqrt{3} \quad \text{ve} \quad f'(x) = 0 \quad \text{ise}$$

$$f'(x) = -2\sin 2x + \sqrt{3}$$

$$-2\sin 2x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ve} \quad 2x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ve} \quad f''(x) = -4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$f''(x) = -2 \cdot \sin 4x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \sin 4 \cdot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \quad \text{olup} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{apsisli nokta}$$

maksimum noktasıdır.

O halde $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}x$ fonksiyonunun ekstremum

$$(\text{maksimum}) \text{ değeri} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \quad \text{dir.}$$

- 14.** $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ fonksiyonunun ekstremum değeri kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x^2 - x - 6)$$

$f'(x) = 0$ denkleminin kökleri $f(x)$ in kritik noktalarıdır.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$3x(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$$

$$f''(x) = 9x^2 - 6x - 18$$

$f''(0) = -18 < 0$ olup $(0, f(0))$ yerel maksimum noktası,

$$f''(-2) = 9 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 18 = 30 > 0 \quad \text{olup} \quad (-2, f(-2))$$

yerel minimum noktası,

$$f''(3) = 9 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 18 = 45 > 0 \quad \text{olup} \quad (3, f(3)) \quad \text{yerel minimum noktası.}$$

O halde,

$f(0) = 7$ f nin yerel maksimum değeridir.

$f(-2) = -9$ f nin yerel minimum değeridir.

$$f(3) = -40 \frac{1}{4} \quad f \text{ nin yerel minimum değeridir.}$$

- 15.** $f(x) = x \ln^2 x$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0$$

$$\ln x = 0 \quad V \quad \ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2$$

$$x = 1 \quad V \quad x = e^{-2} \quad \text{dir.}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{olup}$$

$$f''(1) = \frac{2 \ln 1}{1} + 2 \cdot \frac{1}{1} = 0 + 2 = 2 > 0 \quad (1, f(1)) \text{ yerel minimum}$$

nokta ve yerel minimum değeri $f(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 1$ dir.

$$f''(e^{-2}) = \frac{2 \ln e^{-2}}{e^{-2}} + \frac{2}{e^{-2}} \Rightarrow \frac{-2}{e^{-2}} = -2e^2 < 0 \quad \text{olduğundan}$$

$(e^{-2}, f(e^{-2}))$ f nin yerel maksimum noktasıdır. f nin yerel

$$\text{maksimum değeri} \quad f(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (\ln e^{-2})^2 = \frac{4}{e^2} \quad \text{dir.}$$

- 16.** $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}$ dizisinin en büyük terimi kaçtır?

Çözüm

$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 200}$ fonksiyonunun maksimum değerini bulmalıyız.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^3 + 200) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 200)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad V \quad x = \sqrt[3]{400}$$

x	−∞	0	$\sqrt[3]{400}$	+∞
$f'(x)$	−	0	+	0
$f(x)$		artan		azalan

$7 < \sqrt[3]{400} < 8$ olduğundan, a_7 veya a_8 den büyük olan maksimum değerdir.

$$a_7 = \frac{49}{543} > a_8 = \frac{8}{89} \quad \text{olduğundan} \quad \text{dizinin en büyük terimi}$$

$$a_7 = \frac{49}{543} \quad \text{tür.}$$



UYGULAMA ADIMI



- 17.** Yarıçapı R olan küre dışına çizilen minimum hacimli dik koninin hacmi nedir?

Çözüm

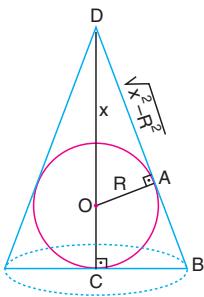
$$|OD| = x, |OA| = R \text{ ve}$$

$|BC| = r$ olsun.

DOA ve DBC üçgenleri benzerdir.

$$\text{Buna göre: } \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|OA|}{|BC|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x + R} = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R(x + R)}{\sqrt{x^2 - R^2}} \text{ dir.}$$



Koninin Hacmi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.r^2(x + R)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2(x + R)^2}{x^2 - R^2} \cdot (x + R)$$

$$= \frac{1}{3}\pi.R^2 \cdot \frac{(x + R)^2}{x - R} \text{ dir.}$$

$$V'(x) = \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{2(x + R)(x - R) - (x + R)^2}{(x - R)^2}$$

$$= \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{(2x^2 - 2R^2) - x^2 - 2xR - R^2}{(x - R)^2}$$

$$= \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{x^2 - 2xR - 3R^2}{(x - R)^2}$$

$$= \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{(x + R)(x - 3R)}{(x - R)^2}$$

ve $V'(x) = 0$ ise $x = -R$ ve $x = 3R$ olur.

$x = -R$ olamaz. $x = 3R$ dir.

$$V''(x) = \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{(2x - 2R)(x - R)^2 - (x^2 - 2xR - 3R^2).2(x - R)}{(x - R)^4}$$

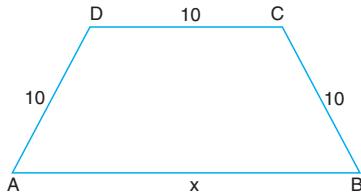
$$= \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{2(x - R)^2 - 2(x^2 - 2xR - 3R^2)}{(x - R)^3}$$

$$\text{ve } V''(3R) = \frac{\pi.R^2}{3} \cdot \frac{2.4R^2}{8R^3} = \frac{\pi R}{3} > 0 \text{ olduğundan}$$

$x = 3R$ için koni minimum hacimli olur. Buna göre hacmin minimum değeri

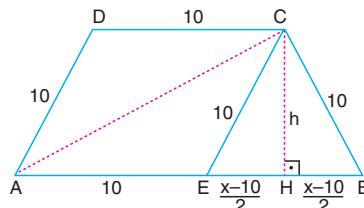
$$V(3R) = \frac{1}{3}\pi.R^2 \cdot \frac{(3R + R)^2}{(3R - R)} = \frac{8}{3}\pi R^3 \text{ birimküp bulunur.}$$

- 18.**



ABCD yamuğunda verilenlere göre, yamuğun alanının en büyük olabilmesi için $|ABI| = x$ ne olmalıdır?

Çözüm



$[CE] // [DA]$ çizilirse AEC eşkenar dörtgen, CEB ikizkenar üçgendir. $|BE| = x - 10$ olup $[CH] \perp [AB]$ çizilirse

$$|EH| = |BH| = \frac{x - 10}{2} \text{ olur.}$$

$$O \text{ halde } h^2 = 10^2 - \left(\frac{x - 10}{2}\right)^2 = 100 - \frac{x^2 - 20x + 100}{4}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2}$$

$$A(ABCD) = 2.A(\widehat{CAE}) + A(\widehat{CEB}) = 2 \cdot \frac{10.h}{2} + (x - 10) \cdot \frac{h}{2}$$

$$A(ABCD) = 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2} + (x - 10) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2}$$

$$A(x) = \sqrt{300 + 20x - x^2} \cdot \left(5 + \frac{x - 10}{4}\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 10) \cdot \sqrt{300 + 20x - x^2} \text{ olur.}$$

$$A'(x) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{300 + 20x - x^2} + \left(\frac{x + 10}{4}\right) \cdot \frac{20 - 2x}{2\sqrt{300 + 20x - x^2}}$$

$$= \frac{300 + 20x - x^2 + 100 - x^2}{4\sqrt{300 + 20x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 20x + 400 = 0; x^2 - 10x - 200 = 0$$

$$\Delta = 100 + 800 = 900$$

$$x = \frac{10 + 30}{2} = 20 \text{ dir.}$$

$A''(10) < 0$ olduğu kolayca görülebilir.

O halde $|ABI| = 20$ bririm olur.



UYGULAMA ADIMI



- 19.** $f: R \rightarrow R$ $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor.
 $f'(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

Çözüm

$$f'(x) = 4x^3 - 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6 \text{ dir.}$$

$$f''(x) = 0 \text{ için } 12x^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

$f'''(x) = 24x$ olup $f'''(x) > 0$ olacak şekildeki x değeri için en küçük olacağından

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ için } f'''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \text{ dir.}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ için en küçük değere ulaşır.}$$

Buna göre $f'(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri,

$$f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

- 20.** A(4, 1) noktasına $y = \frac{1}{2}x^2$ eğrisinin en yakın noktasının apsisi kaçtır?

Çözüm

Eğri üzerindeki B(x, $\frac{x^2}{2}$) noktası en yakın olan nokta olsun.

Uzaklık fonksiyonu $\ell(x)$ ise

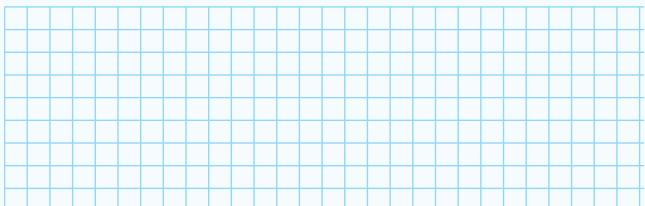
$$\ell(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\frac{x^2}{2} - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \ell'(x) = \frac{x^3 - 8}{2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4} - 8x + 17}}$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

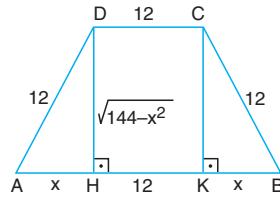
ETKİNLİK

R yarıçaplı bir küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dik silindirin yüksekliğini bulunuz.



- 21.** Bir yamuğun üç kenarından her birinin uzunluğu 12 cm dir. Yamuğun alanının en büyük olması için dördüncü kenar kaç cm olmalıdır?

Çözüm



$$A(x) = \left[\frac{(2x+12)+12}{2} \right] \cdot \sqrt{144-x^2}$$

$$A(x) = (x+12)\sqrt{144-x^2}$$

$$A'(x) = \sqrt{144-x^2} + (x+12) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{144-x^2}}$$

$$= \frac{144-x^2-x^2-12x}{\sqrt{144-x^2}} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 144 = 0$$

$$x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$\Delta = 36 + 288 = 324$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6+18}{2} = 6 \text{ olur.}$$

- 22.** $f(x)$ fonksiyonunun x_0 da bir maksimumu varsa $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ fonksiyonunun x_0 da bir minimumu olduğunu gösteriniz.
 $(f(x_0) \neq 0)$

Çözüm

$(x_0, f(x_0))$ maksimum ise, **a)** $f'(x_0) = 0$ ve **b)** $f''(x_0) < 0$ dir.

$$\text{a)} g'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)} = \frac{0}{f^2(x_0)} = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{b)} g''(x_0) = \frac{-f''(x_0) \cdot f^2(x_0) + 2 \cdot f'(x_0) \cdot (f')^2(x_0)}{f^4(x_0)}$$

$$g''(x_0) = \frac{-f''(x_0) \cdot f^2(x_0) + 0}{f^4(x_0)} = \frac{-f''(x_0)}{f^2(x_0)} \text{ olur.}$$

$$f''(x_0) < 0 \text{ olduğundan } -f''(x_0) > 0 \text{ olur.}$$

Ayrıca $f''(x_0) > 0$ dir. (Çift kuvvet olduğu için)

$$\Rightarrow \frac{-f''(x_0)}{f(x_0)} > 0 \Rightarrow g''(x_0) > 0 \text{ olur.}$$

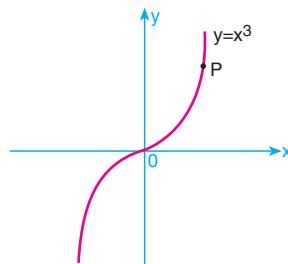
$$\left. \begin{array}{l} g'(x_0) = 0 \\ g''(x_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x_0, g(x_0)) \text{ minimumdur.}$$



UYGULAMA ADIMI



23.



$f(x) = x^3$ eğrisi üzerindeki değişken bir P noktasının K(4, 0) noktasına uzaklığı en az kaç birimdir?

Çözüm

P noktasından x eksenine

[PH] dikmesini çizelim.

$|OH| = x$ ise $|PH| = x^3$ tür.

İki nokta arasındaki uzaklık

$$|PK| = \sqrt{(4-x)^2 + (x^3 - 0)^2}$$

↓

$$h(x) = \sqrt{(4-x)^2 + x^6} \quad \text{olur.}$$

$h(x)$ fonksiyonunun minimum değerini bulmamızı.

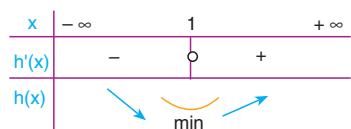
$$h'(x) = \frac{6x^5 + 2(x-4)}{2\sqrt{x^6 + (x-4)^2}} = 0$$

$$h'(x) = \frac{3x^5 + x - 4}{\sqrt{x^6 + (x-4)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^5 + x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1).(3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1). \underbrace{[3x(x+1)(x^2+1)+4]}_{\neq 0} = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ dir.}$$



$x=1$ in solunda $h(x)$ fonksiyonu azalan, sağında artan olup $x=1$ de h fonksiyonunun minimumu vardır.

$$x=1 \text{ için } h(1) = \sqrt{(4-1)^2 + 1^6} = \sqrt{10} \text{ birim bulunur.}$$

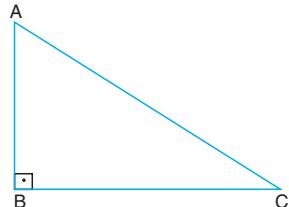
24. ABC üçgeninde

$$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$$

$$|ABI| + |BCI| = 20 \text{ cm}$$

olduğuna göre,

$|ACI|$ nin en küçük değeri kaç cm olur?



Çözüm

$|ABI| = x$ ise $|BCI| = 20 - x$ dir.

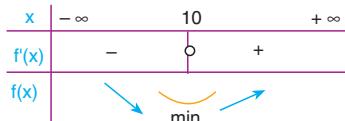
$$|ACI| = f(x) = \sqrt{x^2 + (20-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2(x-20)}{2\sqrt{x^2 + (20-x)^2}} = 0$$

$$2x + 2x - 40 = 0$$

$$4x = 40$$

$$x = 10$$



$f(x)$ fonksiyonu $x = 10$ un solunda azalan, sağında artan olduğundan $x = 10$ da minimum vardır.

$$f(10) = \sqrt{10^2 + (20-10)^2} = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ cm bulunur.}$$

NOT

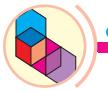
Alan en büyük olduğunda hipotenüs en küçütür.

ETKİNLİK

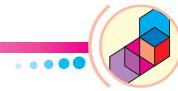
$f(x) = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki yerel minimum ve yerel maksimum değerlerini bulunuz.

--

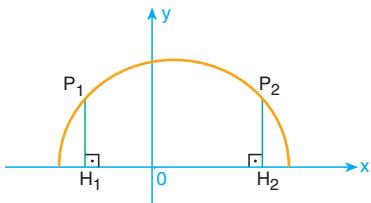




UYGULAMA ADIMI



25.



$y = \sqrt{16 - x^2}$ yarıçemberi üzerinde P_1 ve P_2 noktaları alınıyor. P_1 ve P_2 den x ekseni'ne çizilen dikme ayakları sırasıyla H_1 ve H_2 dir. $|H_1H_2| = 4$ birim olduğuna göre, $|P_1H_1| + |P_2H_2|$ toplamının en büyük değeri kaçtır?

Çözüm

$$H_1(x_1, \sqrt{16 - x_1^2}), H_2(x_2, \sqrt{16 - x_2^2}) \text{ olup}$$

$$|P_1H_1| + |P_2H_2| = \sqrt{16 - x_1^2} + \sqrt{16 - x_2^2} \text{ ve}$$

$$x_2 - x_1 = 4 \text{ (veriliyor.) olur.}$$

$$f(x_1) = \sqrt{16 - x_1^2} + \sqrt{16 - (4 + x_1)^2}$$

$$f'(x_1) = \frac{-2x_1}{2\sqrt{16 - x_1^2}} + \frac{-8 - 2x_1}{2\sqrt{-8x_1 - x_1^2}} = 0$$

$$\frac{-x_1}{\sqrt{16 - x_1^2}} - \frac{(4 + x_1)}{\sqrt{-8x_1 - x_1^2}} = 0$$

$$-x_1\sqrt{-8x_1 - x_1^2} = (4 + x_1)\sqrt{16 - x_1^2}$$

$$x_1^2(-8x_1 - x_1^2) = (4 + x_1)^2(16 - x_1^2)$$

$$-8x_1^3 - x_1^4 = (16 + 8x_1 + x_1^2)(16 - x_1^2)$$

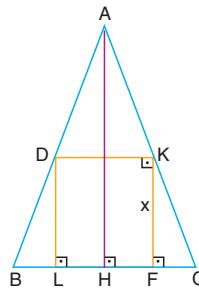
$$-8x_1^3 - x_1^4 = 256 - 16x_1^2 + 128x_1 - 8x_1^2 + 16x_1^2 - x_1^4$$

$$128x_1 = -256 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$|P_1H_1| + |P_2H_2| = \sqrt{16 - (-2)^2} + \sqrt{-8 \cdot (-2) - (-2)^2}$$

$$= \sqrt{12} + \sqrt{12} = 4\sqrt{3} \text{ tür.}$$

26.



$$|ABI| = |ACI|$$

$$|BCI| = a$$

$$|AH| = 4a$$

$$|KFI| = x$$

Bu üçgenin içine şekildeki gibi bir dikdörtgen yerleştiriliyor. Bu dikdörtgenin alanının maksimum olması için, kenarları x cinsinden ne olmalıdır?

Çözüm

$|ABI| = |ACI|$ olduğundan $[AH]$, $[BC]$ yi ortalar

$$\Rightarrow |HC| = \frac{a}{2} \text{ olur.}$$

$|KFI| = x$ diyelim.

$$\frac{|CF|}{|CH|} = \frac{x}{|AH|} \Rightarrow \frac{|CF|}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{4a} \Rightarrow$$

$$|CF| = \frac{x}{8} \text{ olur.}$$

$$|FH| = |HC| - |CF| = \frac{a}{2} - \frac{x}{8} \Rightarrow$$

$|FL| = a - \frac{x}{4}$ bulunur. Dikdörtgenin alanı $A(x)$ ise,

$$A(x) = (a - \frac{x}{4}) \cdot x = ax - \frac{x^2}{4} \text{ olur.}$$

$A(x)$ in maksimum olması için $A'(x) = 0$ olmalıdır.

$$A'(x) = a - \frac{2x}{4} = a - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = a \Rightarrow x = 2a$$

$$|LF| = a - \frac{x}{4} = a - \frac{2a}{4} = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

Demek ki dikdörtgenin kenarları $\frac{a}{2}$ ve $2a$ olmalıdır.

UYARI

Dikdörtgenin yüksekliği, üçgenin yüksekliğinin yarısıdır.

Maksimum alanı ise, $\frac{a}{2} \cdot 2a = a^2$ dir. (Üçgenin alanının yarısı)



• PEKİŞTİRME ADIMI •



1. Toplamları 8 olan iki reel sayının çarpımları en çok kaç olur?

16

2. Çarpımları 24 olan iki reel sayının toplamları en az kaç olur?

$-4\sqrt{6}$

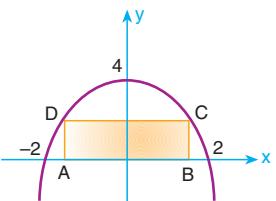
3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ fonksiyonunun minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

1 maksimum -31 minimum

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ fonksiyonunun minimum değeri kaçtır?

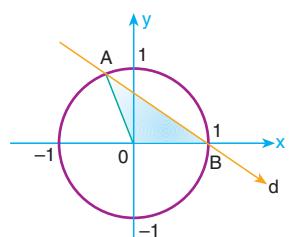
0

5. Denklemi $y = f(x) = 4 - x^2$ olan parabol veriliyor. ABCD dikdörtgen olduğuna göre dikdörtgenin alanı en çok kaç birimkare olur?



$\frac{32\sqrt{3}}{9}$

6. Şekildeki birim çemberde B sabit A değişken bir noktadır. Buna göre, AOB üçgeninin alanının en büyük değeri kaç birimkaredir?



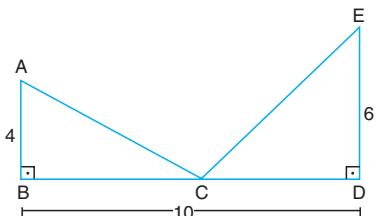
$\frac{1}{2}$



• PEKİŞTİRME ADIMI •



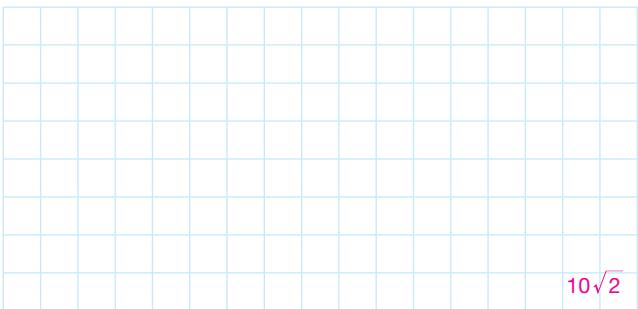
7.



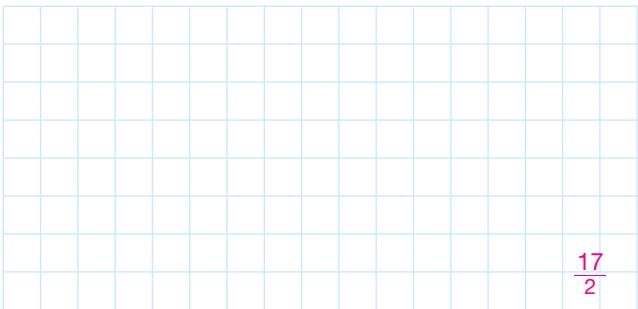
Şekilde $|BD| = 10$ m, $|AB| = 4$ m ve $|ED| = 6$ m dir.

C, [BD] üzerinde değişken bir nokta ise,

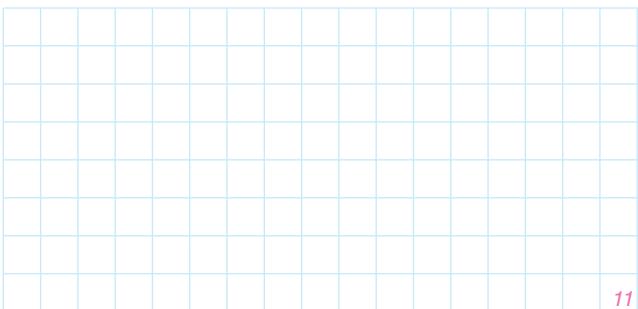
$|CA| + |CE|$ toplamı en az kaç birim olur?



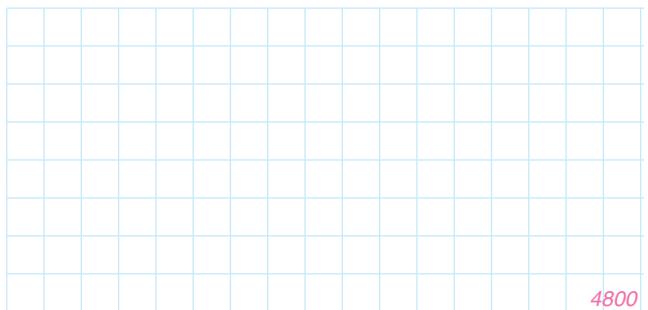
8. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin A(9, 0) noktasına en yakın noktasının apsisi nedir?



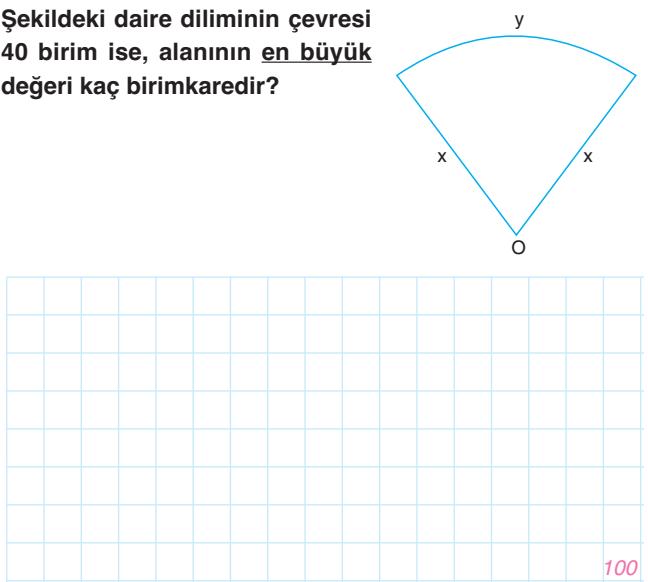
9. $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 3$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki maksimum değeri 4 ise n kaçtır?



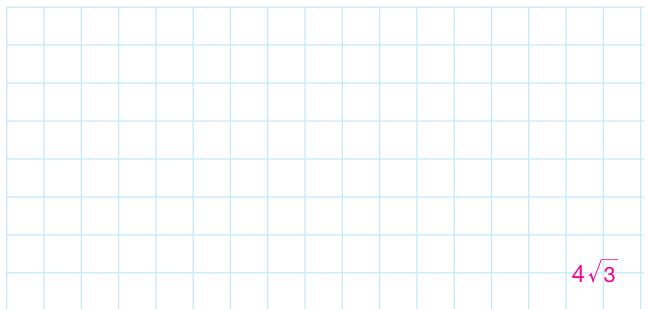
10. Kare prizma biçiminde üstü açık, 32000 m^3 hacminde bir yüzme havuzu yapılacaktır. En az malzeme kullanılarak yapılan bu havuzun yüzey alanı kaç m^2 olur?



11. Şekildeki daire diliminin çevresi 40 birim ise, alanının en büyük değeri kaç birimkaredir?



12. Yandaki şekilde A ve B noktalarından geçen d doğrusu değişkendir. $x^2 + y = 48$ ise AOB üçgeninin alanının en büyük olduğu anda $|AB|$ uzunluğu kaçtır?

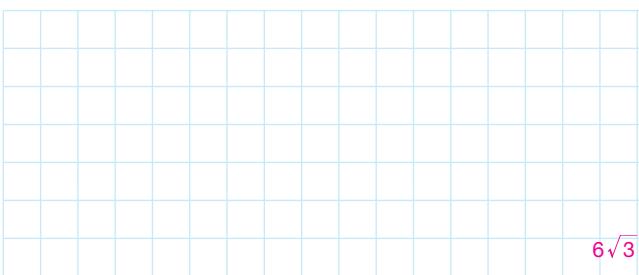
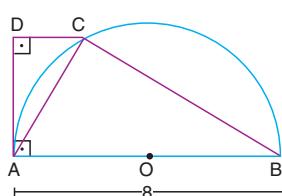




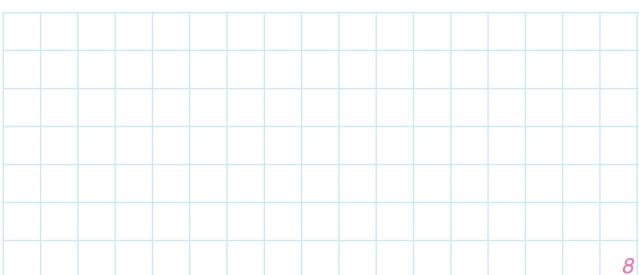
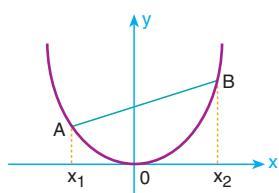
• PEKİŞTİRME ADIMI •



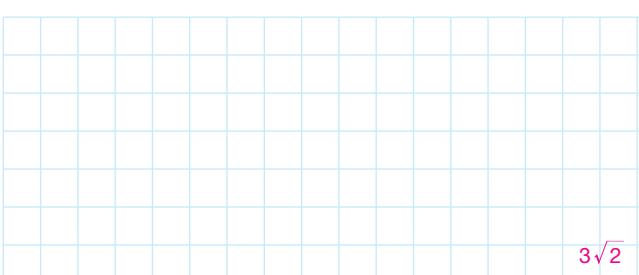
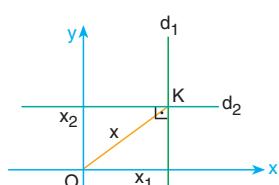
13. Şekildeki O merkezli yarıçaplı çemberde $[DA] \perp [AB]$,
 $[CD] \perp [AD]$ ve
 $|ABI| = 8$ br ise,
ADC üçgeninin alanının en büyük değeri nedir?



14. $f(x) = x^2$ parabolü üzerinde apsisleri x_1 ve x_2 olan A ve B noktaları alınıyor. $|x_1| + x_2 = 8$ ise, $|ABI|$ uzunluğunun en küçük değeri kaçtır?

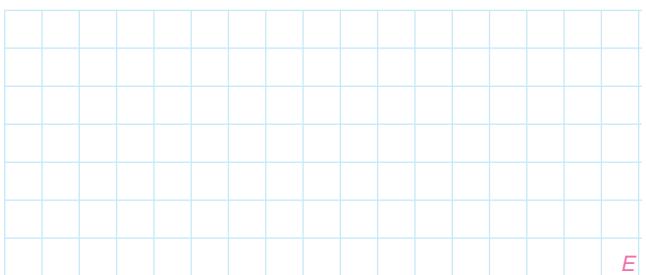
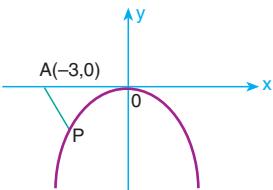


15. Değişken durumlu d_1 ve d_2 doğruları birbirine dik olacak şekilde hareket ediyor.
 $x_1 + x_2 = 6$ ise, $|OKI| = x$ uzunluğunun en küçük değeri kaçtır?



16. Şekilde $f(x) = -x^2$ parabolünün grafiği verilmiştir. Grafik üzerindeki P noktasının A(-3, 0) noktasına olan uzaklığının en küçük olması için, P noktası aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ B) $(-\sqrt{3}, -3)$ C) $(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16})$
 D) $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{9})$ E) $(-1, -1)$



17. Yarıçapı 2 birim olan küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dönel silindirin hacmini bulunuz.



$$\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$$

18. Taban yarıçapı r ve yüksekliği $4r$ olan koni içine çizilen maksimum hacimli silindirin hacmini hesaplayınız.



$$\frac{16\pi r^3}{27}$$

GRAFİK ÇİZİMİ

1. POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

biçimindeki bir fonksiyonun grafiğini çizerken aşağıdaki yolu izlemek kolaylık sağlar:

1. Tanım kümesi bulunur. Bu tür fonksiyonların tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$, yani \mathbb{R} dir.

2. $x \rightarrow -\infty$ için $y \rightarrow ?$

$x \rightarrow +\infty$ için $y \rightarrow ?$

bulunur.

Burada y bulunurken en yüksek dereceli terim olan $a_n x^n$ de x yerine $\pm\infty$ yazılır. Yani $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n)$ limiti bulunur.

Burada bulunan iki y değeri, eğrinin uçlarının hangi bölgede olduğunu belirtir. Yani,

$x \rightarrow -\infty$ için $y \rightarrow -\infty$ III. bölgeyi

$x \rightarrow -\infty$ için $y \rightarrow +\infty$ II. bölgeyi

$x \rightarrow +\infty$ için $y \rightarrow +\infty$ I. bölgeyi

$x \rightarrow +\infty$ için $y \rightarrow -\infty$ IV. bölgeyi belirtir.

3. Eğrinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar bulunur.

$x = 0$ için bulunan y değeri eğrinin y eksenini kestiği noktayı $y = 0$ için bulunan x değerleri eğrinin x eksenini kestiği noktaları verir.

UYARI

$y = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde eğri x eksenini keser, çift katlı köklerinde eğri x eksenine teğettir.

4. y' türevi bulunur $y' = 0$ denkleminin kökleri ve bu köklere karşılık gelen y değerleri bulunur.

5. Değişim tablosu düzenlenir. Yukarıda elde edilen değerler tabloya yerleştirilir. Türevin işaretini incelerek fonksiyonun artan ya da azalan olduğu bölgeler ve ekstremum noktaları belirtilir.

Türevin işaretini incelenirken en büyük kökün sağına y' türevinin en yüksek dereceli teriminin işaretini yazılır. Türevin tek katlı köklerinin soluna sağındaki işaretin tersi, çift katlı köklerin soluna sağındaki işaretin aynısı yazılır.

6. Tablodaki bilgiler koordinat sistemine aktarılarak fonksiyonun grafiği çizilir.

ETKİNLİK

$y = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

i) Fonksiyon \mathbb{R} de tanımlıdır.

ii) $x = +\infty$ için $y = +\infty$ olup asimptot yoktur.

$$\begin{cases} x = +\infty \\ y = \infty \end{cases}$$

iii) $y' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ için ekstremum vardır. $x = 3$ için

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$$

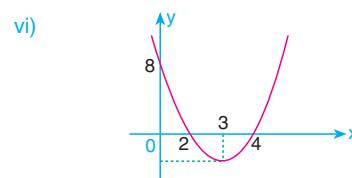
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ekst.}$$

iv) $x = 0$ için $y = 8$ olup $\begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases}$ Oy ekseni kesimi ve $y = 0$ için $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = 4$ olup Ox ekseni kesimi bulunur.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

v)	x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$
	y'	-	-	-	+	+	+
		$+\infty$	8	ϕ	-1	ϕ	$+\infty$
			min				



ÖRNEK – 1

$y = f(x) = x^3 - x^2$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

1. Tanım kümesi: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

2. Limit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$

Yani $x \rightarrow +\infty$ için $y \rightarrow -\infty$ III. bölge

$x \rightarrow -\infty$ için $y \rightarrow +\infty$ I. bölge

olup eğrinin uçları III. ve I. bölgededir.

3. Grafiğin eksenleri kestiği noktalar:

A) x eksenini kestiği noktalar:

$$y = 0 \text{ için } x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ veya } 1-x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ veya } x_3 = 1$$

olduğundan x eksenini A(0, 0), B(1, 0) noktasında keser.

$x = 0$ çift katlı kök olduğundan eğri bu noktada x eksenine teğettir.

B) y eksenini kestiği noktalar:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ olduğundan grafik 0(0, 0) noktasından geçer.

4. Türev:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2x \text{ ve } f'(x) = 0 \text{ ise}$$

$$x(3x-2) = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \text{ veya } x_5 = \frac{2}{3}$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow y = f(x_4) = f(0) = 0$$

$$C(0, 0)$$

$$x_5 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = f(x_5) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}$$

$$D\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right) \text{ dir.}$$

C ve D noktaları ekstremum noktası olmaya aday noktalarıdır.

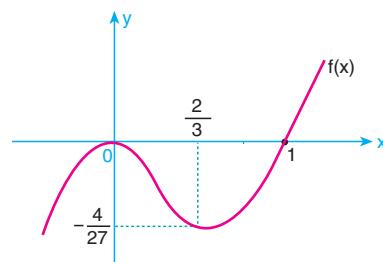
5. Değişim tablosu:

x	–∞	0	$\frac{2}{3}$	1	+∞
y'	+	0	–	0	+
y	0	$-\frac{4}{27}$	0	0	+

maks. min.

6. Eğri III. bölgeden gelecek, artarak (0, 0) noktasında maksimum değerini alacak ve sonra azalarak $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ noktasında minimum değerini alacaktır. Buradan sonra artarak (1, 0) noktasından geçecek ve I. bölgeden gidecektir.

Grafik:

**UYARI**

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $y = f(x)$ fonksiyonu için:

- $y = f(x) = (x-a).g(x)$ ise fonksiyonun grafiği x eksenini $x = a$ noktasında keser.
- $y = f(x) = (x-a)^{2n} \cdot g(x)$ ise fonksiyonun grafiği $x = a$ noktasında x eksenine teğettir.
- $y = f(x) = (x-a)^{2n-1} \cdot g(x)$ ise $n \geq 2$ için fonksiyonun $x = a$ noktasında dönüşüm noktası vardır.

ÖRNEK – 2

Üçüncü dereceden bir $f(x)$ fonksiyonu y- eksenini (0, 16), x- eksenini (-1, 0) noktalarında kesiyor. Ayrıca x eksenine (4, 0) noktasında teğet oluyor. Bu eğrinin denklemi nedir?



ÇÖZÜM

$y = f(x)$ eğrisi $(-1, 0)$ noktasından geçtiğine göre ve $(4, 0)$ noktasında x eksenine teğet olduğuna göre eğrinin denklemi:

$y = f(x) = a(x + 1)(x + 4)^2$ biçimindedir. Eğri $(0, 16)$ noktasından da geçtiğinden

$$f(0) = 16 \Rightarrow a.(0 + 1)(0 + 4)^2 = 16 \Rightarrow a = 1 \text{ olup}$$

$$y = f(x) = (x + 1)(x + 4)^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK – 3

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2mx + m$ fonksiyonunun eğrisi x eksenine teğet ise, m nin alabileceği değerlerin toplamı nedir?

ÇÖZÜM

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 2mx + m = x^2(2x - 1) - m(2x - 1)$$

$f(x) = (2x - 1)(x^2 - m)$ yazılabilir. Eğrinin x eksenine teğet olabilmesi için $f(x) = 0$ denkleminin eşit iki kökü olmalıdır. $f(x) = 0$ ise $(2x - 1)(x^2 - m) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$ veya $x^2 - m = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ veya } x_2 = \sqrt{m} \text{ veya } x_3 = -\sqrt{m}$$

Köklerden biri $x_1 = \frac{1}{2}$ olduğundan $x^2 - m = 0$ denkleminde

$$x = \frac{1}{2} \text{ yazılırsa } \left(\frac{1}{2}\right)^2 - m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Böylece $f(x) = (2x - 1)(x^2 - m) = 0$ denkleminin eşit iki kökü olur.

Bu durumda eğri $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasında x eksenine teğettir.

$x^2 - m = 0$ denkleminin eşit iki kökünün olması durumunda da

$f(x) = 0$ denkleminin eşit iki kökü olur.

Bunun için $\Delta = b^2 - 4.a.c = 0$ olmalıdır.

O halde $x^2 - m = 0$ denkleminde

$a = 1, b = 0, c = m$ olduğundan

$$\Delta = 0 - 4.1.m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ dir.}$$

Bu durumda eğri x - eksenine $(0, 0)$ noktasında teğettir.

O halde, m değerlerinin toplamı $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ dir.

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN PRATİK OLARAK ÇİZİMİ

$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ verilsin.

- 1) Grafiğin hangi bölgede başlayıp hangi bölgede bittiğine bakılır. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ ise I. bölgede biter.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ise grafik III. bölgede başlar.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ ise IV. bölgede biter.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ ise I. bölgede biter.

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ise grafik IV. bölgede başlar.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ ise IV. bölgede biter.

- 2) $P(x) = 0$ denkleminin kökleri bulunur.

Denklemin tek kat kökleri için x eksenini konkavlığının yönünü değiştirmeden keser.

Denklemin çift kat köklerinde x eksenine teğet olur.

Bu noktalar yerel ekstremum noktalarıdır.

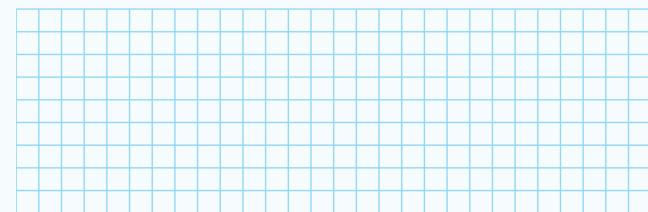
- 3) $m, 3$ veya 3 ten büyük tek sayı olmak kaydıyla

$P(x)$ in $(x - a)^m$ gibi bir çarpanı varsa $x = a$

$P(x)$ in grafiğinin bir dönüm noktasıdır.

ETKİNLİK

$y = (x + 1)^2 \cdot (2 - x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.





UYGULAMA ADIMI



1. $y = x^3 - 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (1 - \frac{3}{x}) = -\infty \cdot 1 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (1 - \frac{3}{x}) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

c) $x = 0$ için $y = 0$ dir.

$$y = 0 \text{ için } x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

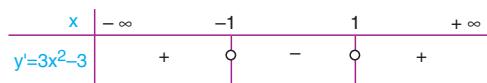
$$x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$(0, 0), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$ noktalarında eksenleri keser.

d) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

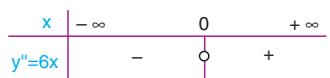
$$f(-1) = -1 + 3 = 2, f(1) = 1 - 3 = -2$$

$\Rightarrow (-1, 2), (1, -2)$ olur.



e) $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

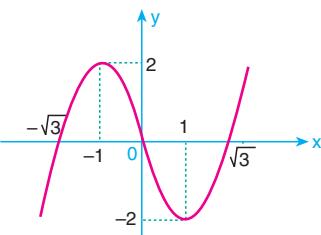


f) Değişim tablosu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	○	-	
y''		-	-	○	+
y		$-\infty$	2	0	-2

maks. Dönüm Noktası min.

Grafik:



2. $y = x(x - 1)^2(x + 4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$ olduğundan, grafik ikinci bölgeden başlar.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ olduğundan birinci bölgeden devam eder.

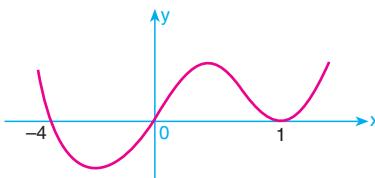
2) $x(x - 1)^2(x + 4) = 0$ ise $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ (çift katlı kök)

$x_4 = -4$ olduğundan, $x = 0$ ve $x = -4$ te

grafik x eksenini keser.

$x = 1$ çift katlı kök olduğundan $x = 1$ de grafik x eksenine teğettir.

$x = 1$ de yerel minimum var.



3. $y = x^2(x - 3)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

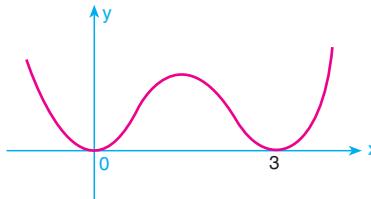
Çözüm

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ olduğundan grafik ikinci bölgeden başlar ve birinci bölgeden devam eder.

2) $x^2(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (çift katlı kök)

$x_3 = x_4 = 3$ (çift katlı kök)

Grafik:





UYGULAMA ADIMI

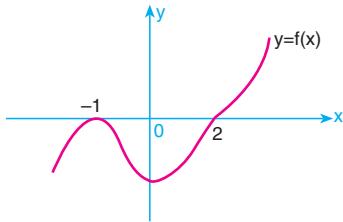


4. $y = 3(x - 2)^3(x + 1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

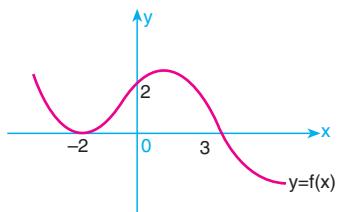
Çözüm

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ olduğundan grafik üçüncü bölgeden gelip birinci bölgeden devam eder.
- 2) $3(x - 2)^3(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (üç katlı kök)
 $x_4 = x_5 = -1$ (çift katlı kök)

$x = 2$ dönüşüm noktasının apsisidir.



- 5.



Şekilde grafiği verilen üçüncü dereceden $y = f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $x = -2$ de x -eksenine teğet olduğundan $(x + 2)^2$ çarpanı vardır. x eksenini $x = 3$ te kestiği için $(x - 3)$ çarpanı vardır.

$f(x) = a(x + 2)^2(x - 3)$ şeklindedir.

Grafik $(0, 2)$ noktasından geçtiğinden

$$2 = a.(0 + 2)^2.(0 - 3) \Rightarrow -12a = 2$$

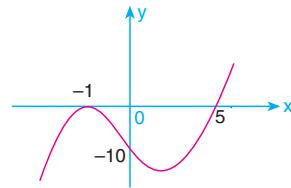
$$a = -\frac{1}{6}$$

$$\text{O halde } f(x) = -\frac{1}{6}(x + 2)^2.(x - 3) \text{ bulunur.}$$

6. Yandaki üçüncü dereceden

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun minimum noktasının ordinatını bulunuz.



Çözüm

$x = -1$ de Ox eksenine teğet olduğu için $(x + 1)^2$ çarpanı vardır. $x = 2$ te Ox kesildiği için fonksiyon $(x - 5)$ çarpanını taşır. Buna göre fonksiyon $y = a.(x + 1)^2.(x - 5)$ yapısında olup

$x = 0$ için $y = -10$ olacağından

$$-10 = a(0 + 1)^2.(0 - 5) \Rightarrow a = 2 \text{ olup fonksiyon}$$

$$y = 2(x + 1)^2.(x - 5) \text{ tir.}$$

$$y' = 2[2(x + 1).(x - 5) + (x + 1)^2]$$

$$y' = 2.(x + 1).(2x - 10 + x + 1) = 2(x + 1).(3x - 9) = 0$$

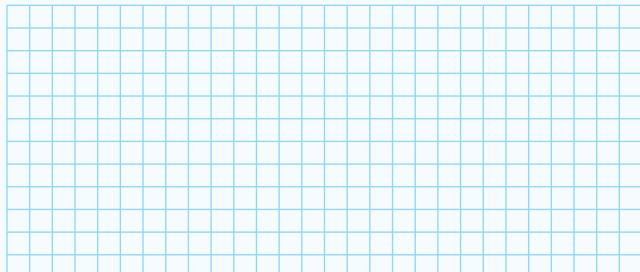
$$\text{ile türev kökleri } x_1 = -1 \text{ ve } x_2 = 3 \text{ olup}$$

$x = 3$ te minimum oluşmuştur. $x = 3$ için

$$y_{\min} = 2.(3 + 1)^2.(3 - 5) = -64 \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. f nin yerel minimum değerinin $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$, yerel maksimum değerinin $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ olduğunu gösteriniz.

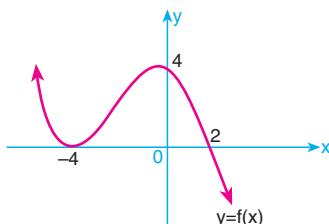




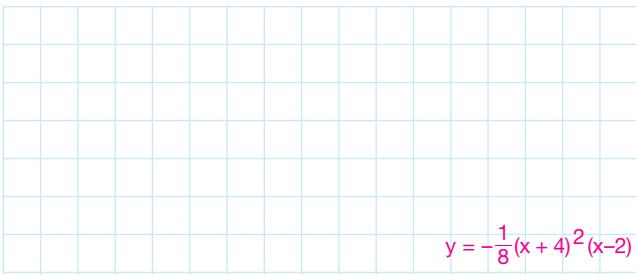
• PEKİŞTİRME ADIMI •



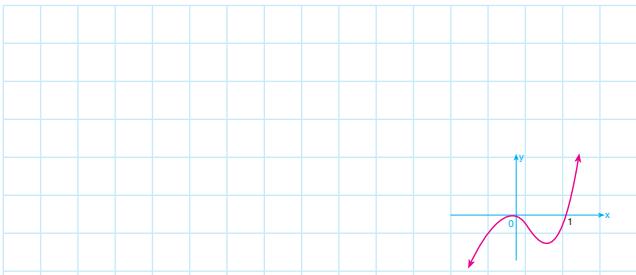
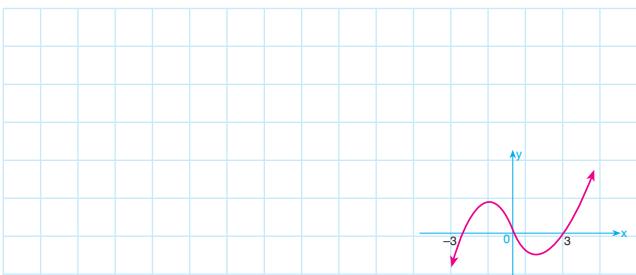
1.



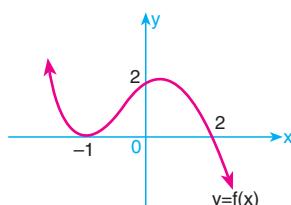
Şekilde grafiği verilen üçüncü dereceden fonksiyonu bulunuz.



$$y = -\frac{1}{8}(x + 4)^2(x - 2)$$

2. $f(x) = x^3 - x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.3. $f(x) = x(x^2 - 9)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

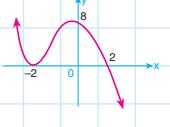
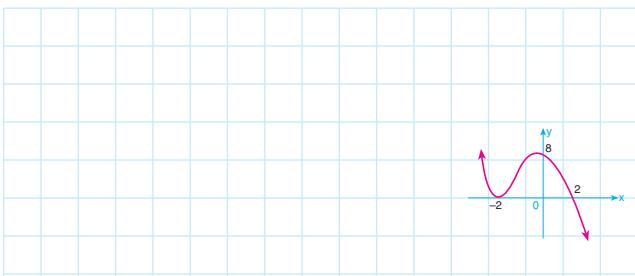
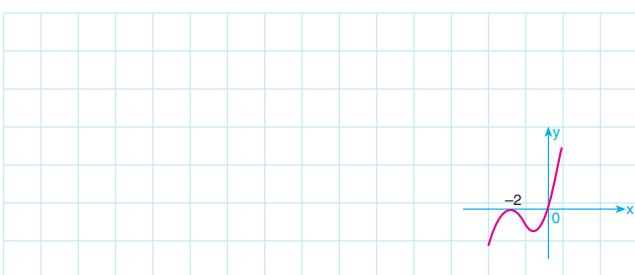
4.



Şekildeki grafiğe ait fonksiyonu bulunuz.



$$y = -(x+1)^2(x-2)$$

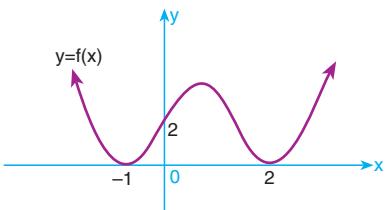
5. $y = (x - 2)(x + 2)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.6. $f(x) = x^3 \cdot (x + 2)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



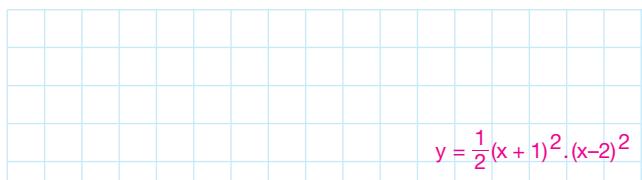
• PEKİŞTİRME ADIMI •



7.

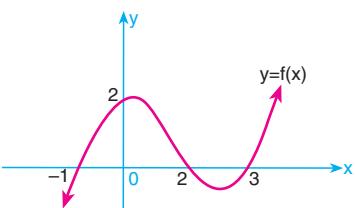


Şekildeki grafik dördüncü dereceden bir fonksiyona ait olduğuna göre, bu fonksiyonu bulunuz.



$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot (x-2)^2$$

8.

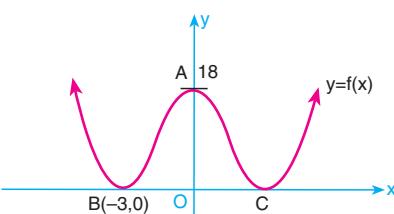


Şekilde $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $a + b + c + d$ toplamının değeri kaçtır?



$$\frac{4}{3}$$

9.



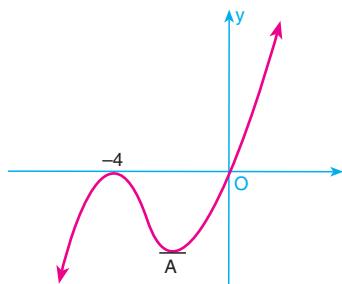
Şekildeki grafik $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ fonksiyonuna aittir.

Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı kaç birimkaredir?



$$54$$

10.

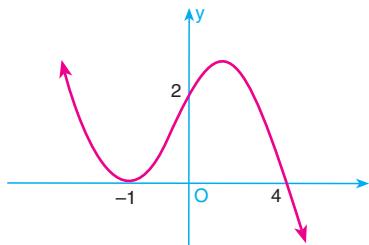


Şekildeki grafik $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna ait olduğuna göre, A noktasının apsisini bulunuz.



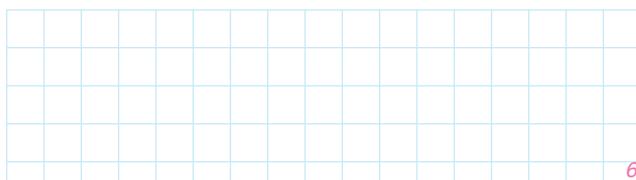
$$-\frac{4}{3}$$

11.



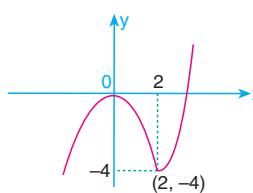
Grafik $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna aittir.

$a + b + c + d$ nin değeri kaçtır?



$$6$$

12.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyonu bulunuz.



$$y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

ETKİNLİK

$f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+7}}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x+7}} = \sqrt{2}$

olduğu için $y = \sqrt{2}$ yatay asimptottur.

ii) $x = -7$ için $f(x) \rightarrow \infty$ olduğundan, $x = -7$ düşey asimptottur.

ASİMPTOLAR

1. $y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - g(x)\} = 0$ ya da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - g(x)\} = 0$ ise

$y = g(x)$ fonksiyonuna $y = f(x)$ in asimptotu denir.

$g(x) = \text{sabit}$ ise **yatay asimptot** $g(x) = mx + n$ biçiminde bir doğru ise **eğik asimptot**, bunların dışında **eğri asimptot adını** alır.

Daha doğrusu; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ise $y = k$ yatay asimptot.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ise eğik ya da eğri asimptot vardır.

$y = mx + n$ biçiminde bir eğik asimptot varsa

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - mx\}$ ile bulunur.

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ya da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ise $x = a$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun **düşey asimptotu** denir.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ biçimindeki fonksiyonlarda $h(x) = 0$ denkleminin köklerinde düşey asimptot vardır.

ÖRNEK – 1

$f(x) = \frac{2x+3}{5x+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2}{5}$ olduğundan $y = \frac{2}{5}$ yatay asimptottur.
- $5x+1=0 \Rightarrow -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$ doğrusu düşey asimptottur.

ÖRNEK – 2

$f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2-1}$ eğrisinin asimptotlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \frac{3}{1} = 3$ olup $y = 3$ doğrusu yatay asimptottur.

ETKİNLİK

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sin x + x$$

fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \cdot \sin x + x) = \infty$
olduğundan, eğik asimptotunun varlığını araştıralım.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \cdot \sin x + x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{x \cdot e^x} + 1 \right] = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 \cdot x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \cdot \sin x + x - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot \sin x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x} = 0$$

olduğu için $x \rightarrow +\infty$ için

$$y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow y = x \text{ eğik asimptottur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{-x} \cdot \sin x}{x} + 1 \right]$$

limitinde ilk terim $x \rightarrow -\infty$ için sınırsız olarak arttığından limit yoktur.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ limiti olmadığından $x \rightarrow -\infty$ için asimptot yoktur.

2. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ doğruları düşey asimptottur.

ÖRNEK – 3

$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x(x-1)} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - 2x\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x-1} - 2x$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ olduğundan}$$

$y = mx + n = 2x + 1$ eğik asimptottur.

2. $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ doğrusu düşey asimptottur.

UYARI

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonunda $a > 0$ ise eğrinin

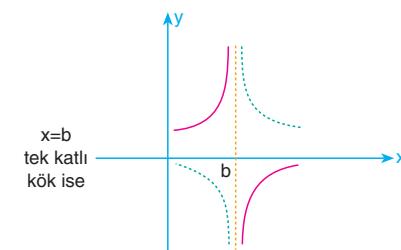
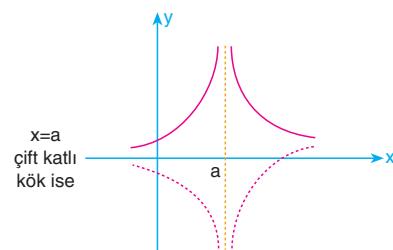
$y = \sqrt{a} \cdot \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ biçiminde bir eğik asimptotu vardır.

$a < 0$ için $x \rightarrow \infty$ durumunda karekök içi negatif olacağından asimptot hesaplanamaz. Bu tür bir eğrinin eğik asimptotu yoktur.

2. KESİRLİ FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bu tür fonksiyonların grafiğinde yatay, eğik ve eğri asimptotlardan sadece birisi vardır. Grafik asimptotların $x \rightarrow -\infty$ ucundan gelir, $x \rightarrow +\infty$ ucuna gider.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ rasyonel fonksiyonunda $h(x) = 0$ denkleminin kökü olan x değerlerinin çift ya da tek katlı oluşuna göre eğri asimptota yaklaşır veya uzaklaşır.



KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

$y = \frac{2x-4}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

- i) Paydayı sıfırlayarak $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ için fonksiyon $y = \pm\infty$ olup tanımsızdır. $x = 1$ de düşey asymptot verir.

$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = \mp\infty \end{pmatrix}$ Düşey asymptottur.

- ii) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} y = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2$ olup

$\begin{pmatrix} x = \mp\infty \\ y = 2 \end{pmatrix}$

Yatay asymptot verir.

$$y' = \frac{2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (2x-4)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

- iii) $y' > 0$ olup fonksiyon daima artandır.

Ekstremum yok.

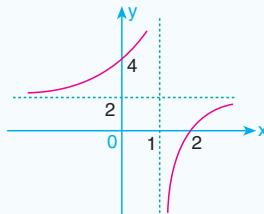
- iv) $x = 0$ için $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ için } \frac{2x-4}{x+1} = 0 &\Rightarrow 2x-4 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 0 \end{pmatrix}$

v)

x	-∞	0	1	2	+∞
y'	+	+	+	+	+
y	2 ↗	4 ↗	+∞ ↗	0 ↗	2 ↗



$y = \frac{g(x)}{h(x)}$ fonksiyonunun değişim tablosu yapılırken

x	-∞				+∞
y'					
y	∞ ↗	∞ ↗	∞ ↗	∞ ↗	∞ ↗

x in değerleri sırasıyla yerleştirilir. Düşey asymptotlara çift çizgi çekilir ve her çizginin ucuna birer sonsuz (∞) yazılır. Soldaki sonsuzun işaretü ile çizginin solundaki türevin işaretü aynı, sağdaki sonsuzun işaretü ile çizginin sağındaki türevin işaretü terstir.

Türevin işaretü incelenirken türevin en büyük kökünün sağına $g'h - g.h'$ deki en yüksek dereceli terimin işaretü yazılır. Türevin tek katlı kökünün soluna sağındaki işaretin tersi, çift katlı kökünün soluna sağındaki işaretin aynısı yazılır.

Önce asymptotlar çizilir, sonra diğer noktalar işaretlenerek grafik tamamlanır.

ÖRNEK – 1

$y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ olup tanım kümesi $R - \{1\}$ dir.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ olup $y = 1$ yatay asymptottur.
- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ olup $x = 1$ doğrusu düşey asymptottur.
- $f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ olup $\forall x \in R - \{1\}$ için $f'(x) < 0$ dir.

Ayrıca $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri yoktur.

Bu nedenle fonksiyonun maksimum veya minimum noktası yoktur.

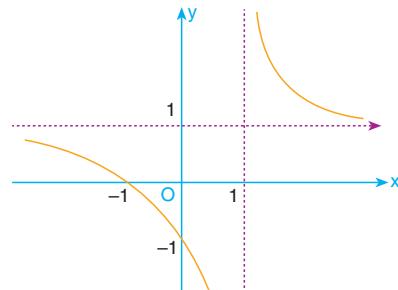
- $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0+1}{0-1} = -1$ olup eğri $A(0, -1)$ den geçer.
- $y = 0 \Rightarrow \frac{0+1}{0-1} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ olduğundan eğri $D(-1, 0)$ noktasından geçer.

6. Tablo

y	-∞	-1	-	0	-	1	+∞
y'	-	-	-	-	-	-	-
y	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	+∞ ↗	1 ↗	

aynı ters

7. Grafik



$y = \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 2x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

- i) $x^2 + 2x - 3 = 0$ için $x_1 = -3$ ve $x_2 = 1$ de fonksiyon tanımsız ve sürekli değildir. Düşey asimptot verir.

Düşey asimptolar $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm\infty \end{cases}$ D.A.
 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\infty \end{cases}$ D.A. dir.

- ii) Yatay asimptot bulalım.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 2 \text{ olup}$$

$\begin{cases} x = \pm\infty \\ y = 2 \end{cases}$ Y.A

iii) $y' = \frac{(4x-4)(x^2+2x-3)-(2x+2).(2x^2-4x+6)}{(x^2+2x-3)^2}$

$$y' = \frac{8x^2 - 24x}{(x^2+2x-3)^2} \text{ dir. } y' = 0 \Rightarrow 8x^2 - 24x = 0$$

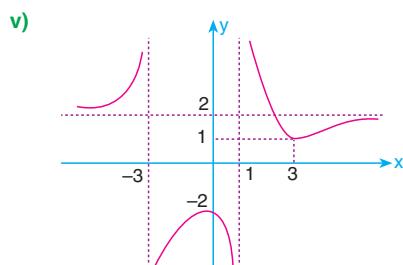
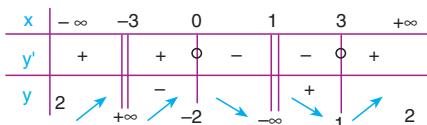
$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$ ekstremum noktalarıdır.

$x_1 = 0$ için $y_1 = -2$ ve $x_2 = 3$ için $y_2 = 1$ dir.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ ekst. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ ekst.

iv) $x = 0$ için $y = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

$y = 0$ için $2x^2 - 4x + 6 = 0$ gerçel kök yok, OX'ı kesmez.



ÖRNEK – 2

$y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

1. $(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ olup tanım kümesi $R - \{1\}$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2} = 1$ olduğundan $y = 1$ yatay asimptottur.

3. $(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (çift katlı) düşey asimptottur.

4. $f'(x) = \frac{(2x-5)(x-1)^2 - (x^2-5x+6).2(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{(x-1)(2x^2-7x+5-2x^2+10x-12)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x-7}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x-7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ tür.}$$

$$y = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{7}{3} + 6}{\left(\frac{7}{3} - 1\right)^2} = \frac{\frac{49}{9} - \frac{35}{3} + 6}{\frac{16}{9}} = -\frac{1}{8}$$

$$A\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{8}\right)$$

5. $y = 0$ için $\frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$ olur.

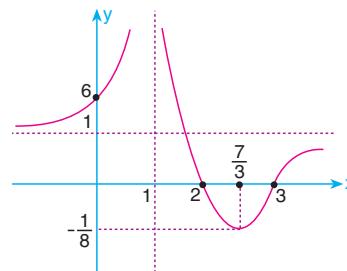
Grafik B(2, 0), C(3, 0) dan geçer. $x = 0$ için $y = 6$ olup D(0, 6) dan geçer.

6. Tablo:

x	$-\infty$	0	1	2	$\frac{7}{3}$	3	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-	0	+
y	1	$+\infty$	-2	$-\infty$	0	$-\frac{1}{8}$	0

$y = \frac{3x-7}{(x-1)^3}$

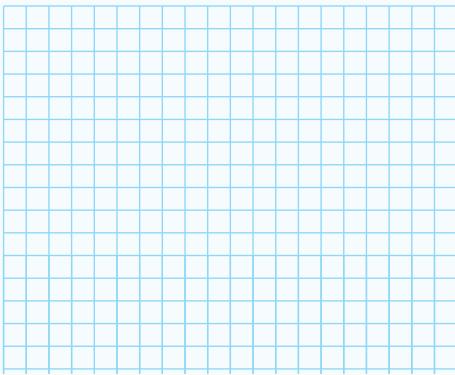
7. Grafik:



KAVRAMSAL ADIM

ETKİNLİK

$y = \frac{x^2}{x+1}$ eğrisi ile $y = mx$ doğrusunun $A(-1, -2)$ noktasına göre simetrik iki noktada kesişebilmesi için m ne olmalıdır?



UYARI

$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ biçimindeki bir fonksiyonun grafiği asimptotların kesim noktasına göre simetiktir. Yani asimptotların kesim noktası eğrinin simetri merkezidir. Bu nokta $\left(-\frac{n}{m}, \frac{bm - 2an}{m^2}\right)$ dir.

ÖRNEK – 3

$y = \frac{mx + 1}{3x + p}$ fonksiyonunun grafiği $(3, 6)$ noktasına göre simetrik ise, $\frac{m}{p}$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Eğri $(3, 6)$ noktasına göre simetrik ise bu nokta asimptotların kesim noktasıdır.

$$3x + p = 0 \Rightarrow 3x = -p \Rightarrow x = -\frac{p}{3} \text{ düşey asimptot,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} y = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{mx + 1}{3x + p} = \frac{m}{3}$$

$$y = \frac{m}{3} \text{ yatay asimptottur.}$$

$$\left(-\frac{p}{3}, \frac{m}{3}\right) = (3, 6) \Rightarrow -\frac{p}{3} = 3 \Rightarrow p = -9$$

$$\frac{m}{3} = 6 \Rightarrow m = 18 \Rightarrow \frac{m}{p} = \frac{18}{-9} = -2 \text{ dir.}$$

ETKİNLİK

$y = \frac{ax - 3}{2x + k}$ fonksiyonunun grafiği $(1, -2)$ noktasına göre simetrik ise, $a + k$ kaçtır?

$(1, -2)$ noktası asimptotların kesim noktası demektir.

$$x = -\frac{k}{2} \text{ düşey asimptot,}$$

$$y = \frac{a}{2} \text{ yatay asimptot olduğundan,}$$

$$\left(\frac{-k}{2}, \frac{a}{2}\right) = (1, -2)$$

$$\Rightarrow \frac{-k}{2} = 1 \wedge \frac{a}{2} = -2$$

$\Rightarrow k = -2 \wedge a = -4$ bulunur.

$$a + k = -4 + (-2) = -6 \text{ dir.}$$

ÖRNEK – 4

$y = \frac{ax^2}{x+2}$ fonksiyonunun simetri merkezinin ordinatı 4 ise, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$$y = \frac{ax^2}{x+2} = \frac{ax^2 + 0x + 0}{1.x + 2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m \quad n$$

$$\text{simetri merkezi } \left(-\frac{n}{m}, \frac{bm - 2an}{m^2}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{1}, \frac{0 - 2.a.2}{1^2}\right) = (-2, -4a) \text{ ve } -4a = 4 \Rightarrow a = -1 \text{ dir.}$$

ETKİNLİK

$y = e^{\frac{1}{1-x}}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$u = \frac{1}{1-x}$ diyelim $y = e^u$ olur.

- i) u ve $y = e^u$ fonksiyonları $x = 1$ de tanımsızdır.

Tanım kümesi $R - \{1\}$ dir.

- ii) y nin yatay asymptotu $y = e^0 = 1$ dir.

yani $x \rightarrow \pm\infty$ için

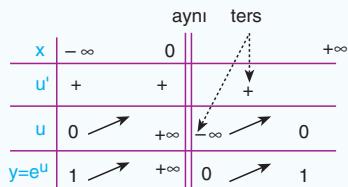
$u = 0 \Rightarrow y = 1$ dir.

- iii) $x = 1$ düşey asymptottur.

- iv) $u' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ olduğundan,

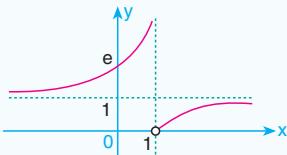
$R - \{1\}$ de u artan $\Rightarrow y$ artandır.

- v) $x = 0$ için $u = 1 \Rightarrow y = e^1 = e$ dir.



- iv) $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$

olduğuna dikkat ediniz.



3. ÜSTEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$a > 1$ olmak üzere $y = a^{f(x)}$ biçimindeki üstel fonksiyonların değişimi incelenirken $u = f(x)$ fonksiyonu incelenir. Çünkü $y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$ türev fonksiyonunda $a^{f(x)} > 0$ ve $\ln a > 0$ olduğundan y' ile $f'(x)$ aynı işaretre sahiptir. $y = a^{f(x)}$ fonksiyonunda:

1. $y = a^{f(x)}$ ile $u = f(x)$ fonksiyonlarının tanım kümeleri aynıdır.
2. $u = f(x)$ in yatay asymptotu $u = k$ ise $y = a^{f(x)}$ in yatay asymptotu $y = a^k$ dir.
3. $u = f(x)$ in düşey asymptotu, $y = a^{f(x)}$ in düşey asymptotu ile aynıdır.
4. $u = f(x)$ in eğik asymptotu $u = mx + n$ ise $y = a^{f(x)}$ in eğik asymptotu $y = a^{mx+n}$ dir.
5. $y = a^{f(x)}$ ve $u = f(x)$ fonksiyonları aynı aralıkta azalır, aynı aralıkta artar ve aynı noktalarda maksimum ya da minimum değerini alırlar.

ÖRNEK – 1

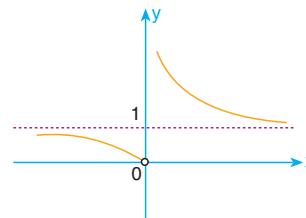
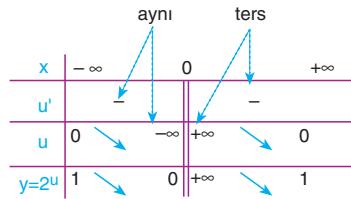
$y = 2^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$u = \frac{1}{x}$ olsun. $y = 2^u$ olur.

1. $x = 0$ da $u = \frac{1}{x}$ tanımsız olduğundan $y = 2^u$ fonksiyonunun tanım kümesi $R - \{0\}$ dir.
2. $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} u = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğundan $u = \frac{1}{x}$ in yatay asymptotu $u = 0$ ve $y = 2^u$ nun yatay asymptotu $y = 2^u = 2^0 = 1$ dir.
3. $u = \frac{1}{x}$ in düşey asymptotu $x = 0$ olduğundan $y = 2^u$ nun düşey asymptotu da $x = 0$ dir.
4. $u' = -\frac{1}{x^2} < 0$ olduğundan $u = \frac{1}{x}$ $R - \{0\}$ da azalandır. Dolayısıyla $y = 2^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonu $R - \{0\}$ da azalandır.
5. Tablo:

6. Grafik:



$$1^{-\infty} = 0$$

$2^{+\infty} = +\infty$ olduğuna dikkat ediniz.

$y = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$ fonksiyonunun değişimini inceleyerek grafiğini çizelim.

- 1) $\frac{x+1}{2-x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi fonksiyonun tanım kümesi olduğundan, tanım kümesi $-1 < x < 2$ dir.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ \hline \frac{x+1}{2-x} & - & 0 & + & - \end{array}$$

2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{-1+h+1}{2+1-h}\right)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{h}{3-h}\right) = \ln 0 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{2-h+1}{2-2+h}\right)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{3-h}{h}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$ olur.

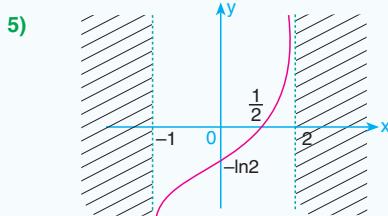
3) $y' = \frac{\frac{1}{(2-x)} + 1 \cdot (x+1)}{(2-x)^2}$
 $= \frac{\frac{x+1}{2-x}}{(x+1)(2-x)}$ tir.

4) $x = 0$ için $y = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$y = 0$ için $0 = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$

$\Rightarrow \frac{x+1}{2-x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ bulunur.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \hline y' & + & + & + & + & \\ y & -\infty & -\ln 2 & 0 & +\infty & \end{array}$$



4. LOGARİTMALI FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$y = \log_a f(x)$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerinin çizimi için:

- Tanım kümesi bulunur. $f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi y nin tanım kümesidir.
- Varsa $x \rightarrow -\infty$ için $y = ?$
 $x \rightarrow +\infty$ için $y = ?$ değerleri bulunur.
- y' türevi alınarak $y' = 0$ denkleminin köklerine bakılır. Ekstremumlar araştırılır.
- Varsa $x = 0$ için y , $y = 0$ için x değerleri bulunur.
- Değişim tablosu yapılır.
- Grafik çizilir.

ÖRNEK

$y = \log_3(x-2)$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

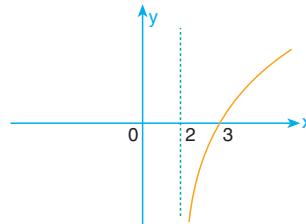
- $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$ dir. Tanım kümesi $(2, \infty)$ aralığıdır.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3(x-2) = +\infty$ olduğundan $x \rightarrow +\infty$ için $y \rightarrow +\infty$ olur.
- $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \log_3(x-2)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \log_3(2+h-2)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \log_3 h = -\infty$ olur.
- $y' = \frac{1}{x-2} \cdot \log_3 e$ dir. $x-2 > 0$ ve $\log_3 e > 0$ olduğundan $y' > 0$ dir.
- $x = 0$ için $\log(-2)$ tanımsız olup y değeri bulunamaz.

$$y = 0 \text{ için } \log_3(x-2) = 0 \Rightarrow x-2 = 3^0 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

5. Tablo:

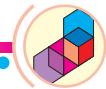
6. Grafik:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & 2 & 3 & +\infty \\ \hline y' & -\infty & 0 & + & + \\ y & -\infty & 0 & +\infty & \end{array}$$





UYGULAMA ADIMI



1. $y = \tan x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığında düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ olur.}$$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$ düşey asimptotlardır.

2. $f(x) = \ln(x-2)$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

Çözüm

$f(x) = \log_a(g(x))$ fonksiyonunda $g(x) = 0$ olacak şekildeki x değeri $f(x)$ in düşey asimptotudur.

O halde, $x-2=0 \Rightarrow x=2$ düşey asimptottur.

3. $y = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{-x+1}$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını araştırınız.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{-x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{3}{x})}}{-x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{x(-1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{x(-1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{-1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1}}{-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{x(-1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{-1 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{-1} = -1$$

Buna göre, $y = -1$ ve $y = 1$ doğruları yatay asimptotlardır.

4. $y = \frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1. $x+1=0, x=-1$ de tanımsız, tanım kümesi $= R - \{-1\}$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \infty \Rightarrow x = -1$ düşey asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ yatay asimptot}$$

3. $x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad y = 0 \Rightarrow x = 1$

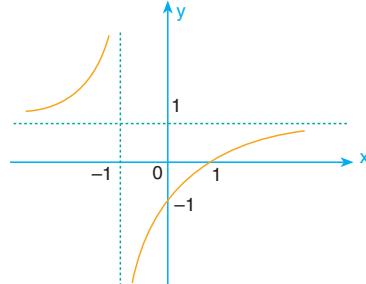
$$4. y' = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$\forall x \in R$ için $y' > 0$ olduğundan grafik her yerde artandır.

5. Tablo:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	+	+
y	1	$+\infty$	-1

6. Grafik:



5. $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

- a. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

Buna göre tanım kümesi $R \setminus \{-1, 1\}$ dir.

- b. Paydayı sıfır yapıp payı sıfır yapmayan $x = -1$ düşey asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \text{ dur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ yatay asimptottur.}$$

Eğik ve eğri asimptot yoktur.





UYGULAMA ADIMI



c. $x = 0$ için $y = 1 \Rightarrow (0, 1)$ noktası bulunur.

$y = 0$ için x bulunamaz. (Ya da $x = \mp\infty$ dur.)

$$y = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \text{ dir.}$$

$x = 1$ için $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ olur. $\Rightarrow (1, \frac{1}{2})$ boştutur.

d. $y' = \frac{x^2-1-2x(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2+2x}{(x^2-1)^2}$

$$y' = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \text{ olur.}$$

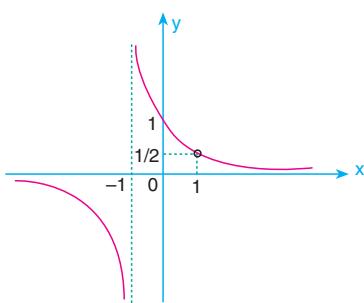
$\frac{-1}{(x+1)^2} = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri yoktur.

O halde, ekstremum yok. Üstelik, $x = -1$ için $\frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ olduğundan fonksiyon azalandır.

e. Tablo

x	—∞	-1	1	+∞	
y'	-	-	-	-	
y	0	—∞	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0

f. Grafik



6. $y = \frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1. $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$
 \Rightarrow Tanım kümesi $R \setminus \{-1\}$ dir.

2. $x = -1$ düşey asimptottur. (Payı sıfır yapmaz.)
 $\lim_{x \rightarrow -1} y = +\infty$ dur.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ yatay asimptottur.}$$

3. $x = 0$ için $y = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow (0, 2)$ noktası bulunur.

$$y = 0 \text{ için } \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x-1=0 \vee x-2=0$$

$\Rightarrow x = 1 \vee x = 2$ dir. $\Rightarrow (1, 0), (2, 0)$ noktaları bulunur.

O halde, $(0, 2), (1, 0), (2, 0)$ eksenleri kestiği noktalardır.

4. $y' = \frac{(2x-3)(x^2+2x+1)-(2x+2)(x^2-3x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$$= \frac{5x^2-2x-7}{(x+1)^4}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 5x^2-2x-7 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{7}{5}$$

$x = -1$ asimptot olduğundan ekstremum olmaz.

(Zaten, $x = -1$ değeri türevin paydasını sıfır yapar.) O halde,

$$x = \frac{7}{5} \text{ için } y = -\frac{1}{24} \text{ olduğundan,}$$

$(\frac{7}{5}, -\frac{1}{24})$ ekstremumdur.

x	—∞	-1	$\frac{7}{5}$	+∞	
$5x^2-2x-7$	+	o	-	o	+
$(x+1)^4$	+	o	+	+	+
y'	+	—	o	+	+

5. $y'' = \frac{(10x-2)(x+1)^4 - 4(x+1)^3(5x^2-2x-7)}{(x+1)^8}$

$$= \frac{(10x-2)(x+1) - 4(5x^2-2x-7)}{(x+1)^5}$$

$$= \frac{(10x-2)(x+1) - 4(x+1)(5x-7)}{(x+1)^5}$$

$$= \frac{10x-2-4(5x-7)}{(x+1)^4} = \frac{-10x+26}{(x+1)^4}$$

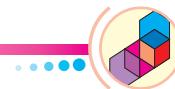
$$y'' = 0 \Rightarrow -10x+26 = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$$

$f(\frac{13}{5}) = \frac{2}{27}$ olduğundan dönenm noktası $(\frac{13}{5}, \frac{2}{27})$ dir.

x	—∞	-1	$\frac{13}{5}$	+∞
$-10x+26$	+	+	+	—
$(x+1)^4$	+	+	+	+
y''	+	+	—	—

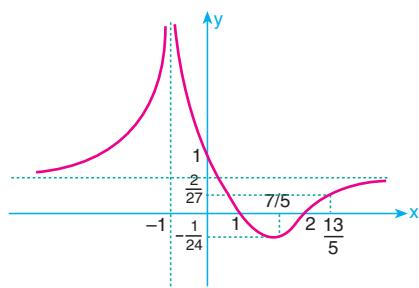


UYGULAMA ADIMI



6. Değişim tablosu:

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{5}$	$\frac{13}{5}$	$+\infty$
y'	+	-	o	+	+
y''	+	+	+	-	
y	1 +∞ +∞	- -1/24	2/27	13/5	1 +∞



7. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1. $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Tanım kümesi $R \setminus \{1\}$

2. $x = 1$ düşey asymptottur.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

yatay asymptot yok.

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ \underline{- x^2 \pm x} \\ \hline x + 1 \\ \underline{- x \pm 1} \\ \hline 2 \end{array} \Rightarrow y = x + 1 \text{ eğik asymptottur.}$$

3. $x = 0$ için $y = -1 \Rightarrow (0, -1)$ noktası bulunur.

$y = 0$ yapan x değeri yoktur. \Rightarrow Ox eksenini kesmez.

4. $y' = \frac{2x(x-1) - 1 \cdot (x^2 + 1)}{(x-1)^2}$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - \sqrt{2} \text{ için } y = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_2 &= 1 + \sqrt{2} \text{ için } y = 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$(1 - \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$ ve $(1 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ noktaları ekstremumudur.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$	+	o	-	-	o
$(x-1)^2$	+	+	o	+	+
y'	+	o	-	-	o

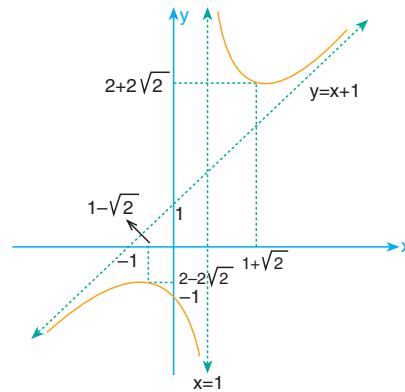
$$\begin{aligned} 5. \quad y''' &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot (x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3} \\ &= \frac{4}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow \text{Çözüm yok. Dönüm noktası yok.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
4	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	o
y''	-	-	+

6. Değişim tablosu

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'	+	o	-	-	o
y''	-	-	+	+	
y	$-\infty$ $2-2\sqrt{2}$	$-\infty$ 1	$+\infty$	$+\infty$ $2+2\sqrt{2}$	$+\infty$

7. Grafik





UYGULAMA ADIMI



8. $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$ eğrisinin varsa, düşey asimptotlarını bulalım.

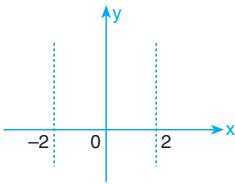
Çözüm

$$y = \frac{2x+1}{x^2-4}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

düşey asimptottur.



9. $y = \frac{x+2}{x^3+8}$ eğrisinin (varsı) düşey asimptotlarını bulalım.

Çözüm

$$x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ düşey asimptot.}$$

10. $y = \frac{x+3}{x^2+x+1}$ eğrisinin varsa düşey asimptotunu bulalım.

Çözüm

$x^2 + x + 1 = 0$ ise $\Delta < 0$ olduğundan kök yok, yani düşey asimptot yok.

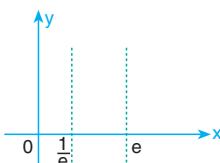
11. $y = \frac{3x+2}{1-\ln^2 x}$ eğrisinin varsa düşey asimptotunu bulalım.

Çözüm

$$1 - \ln^2 x = 0 \Rightarrow \ln^2 x = 1 \Rightarrow \ln x = 1 \vee \ln x = -1$$

$$x = e \vee x = \frac{1}{e}$$

düşey asimptotlarıdır.



12. $y = \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x}$ fonksiyonunun varsa düşey asimptotlarını bulalım.

Çözüm

$$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

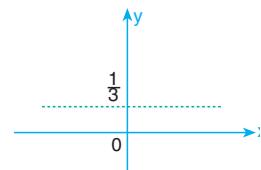
düşey asimptolardır.

13. $y = \frac{x^3+2x^2+1}{3x^3+2x-3}$ eğrisinin varsa yatay asimptotunu bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{3x^3+2x-3} = \frac{1}{3} \text{ olup}$$

$y = \frac{1}{3}$ doğrusu yatay asimptottur.

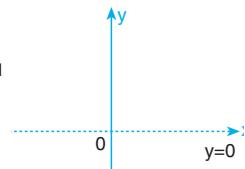


14. $y = \frac{x+1}{x^2-9}$ eğrisinin varsa, yatay asimptotunu bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0 \text{ olup } y = 0 \text{ doğrusu}$$

yatay asimptottur.



15. $y = \frac{|x|+3x+2}{4x+1}$ eğrisinin varsa, yatay asimptotlarını bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|+3x+2}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3x+2}{4x+1} = \frac{1}{2} = y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|+3x+1}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3x+2}{4x+1} = 1 = y$$

$y = \frac{1}{2}$ ve $y = 1$ yatay asimptotlarıdır.

16. $y = \frac{\sqrt{4x^2+x+1} + 2x+1}{3x+2}$ eğrisinin varsa yatay asimptotlarını bulalım.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|+...+2x+1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+...+2x+1}{3x+2} = 0 = y$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|x|+...+2x+1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+...+2x+1}{3x+1} = \frac{4}{3} = y$$

$y = 0$ ve $y = \frac{4}{3}$ doğruları yatay asimptottur.

17. $y = e^{1/x} + \frac{\ln x}{e^x}$ eğrisinin varsa, yatay asimptotlarını bulalım.

Çözüm

$x < 0$ için $\ln x$ tanımlı değil, limit yoktur.

yani $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} + \frac{\ln x}{e^x}$ yoktur.

$x > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} + \frac{\ln x}{e^x} = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ yatay asimptottur.}$$


• PEKİŞTİRME ADIMI •


1. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 4}$ eğrisinin asimptotlarının x eksenile oluşturduğu kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?



9

2. $0 < k < 3$ olmak üzere $y = x + \frac{1}{x}$ ve $y = \frac{3x + 1}{x - k}$ eğrilerinin asimptotlarının oluşturduğu dörtgenin alanı 4 birimkare olduğuna göre, **k kaçtır?**



2

3. $y = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$ eğrisinin asimptotları ile $y = 2$ doğrusu arasında kalan alan kaç birimkaredir?



4

4. $y = \frac{mx + 4}{nx - 2}$ eğrisinin asimptotları $y = x^2 - 4x$ parabolünün tepe noktasında kesiştiğine göre, **m + n toplamı kaçtır?**



-3

5. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x + 7}{x - 2}$ eğrisinin asimptotlarının kesim noktası $K(m, n)$ ise, **m + n toplamı kaçtır?**



10

6. $f(x) = \frac{kx^2 + (m - k)x + 2 - m}{x - 1}$ fonksiyonunun eğik asimptoti $y = 4 - 2x$ olduğuna göre, **m.k çarpımı kaçtır?**



-8



• PEKİŞTİRME ADIMI •



7. $f(x) = \frac{ax+k}{2x-b}$ fonksiyonunun grafiğinin simetri merkezi $P(3, 2)$ olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?



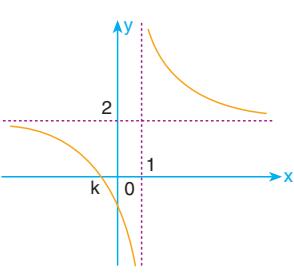
10

8. $f(x) = 2x - \sqrt{(x-3)^2 - 6}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarının kesim noktası $K(m, n)$ ise, $m + n$ toplamı kaçtır?



9

9. Şekilde verilen grafiğin fonksiyonu $y = \frac{ax+b}{bx+c}$ ise, k kaçtır?

-1
2

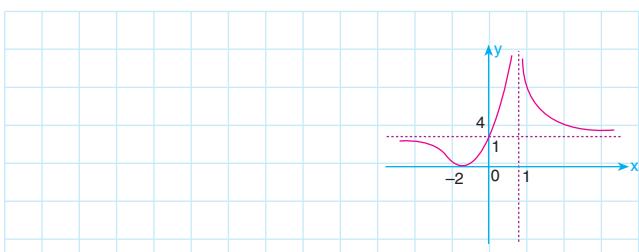
Şekilde verilen grafiğin fonksiyonu $y = \frac{ax+b}{bx+c}$ ise,

k kaçtır?

10. $f(x) = \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$ fonksiyonunun grafiği yatay asimptotunu hangi apsisli noktada keser?

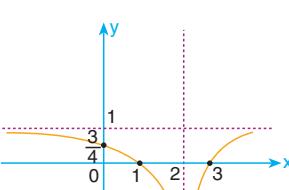
1
2

11. $y = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



12.

- Şekildeki grafiğin hangi fonksiyona ait olduğunu bulunuz.



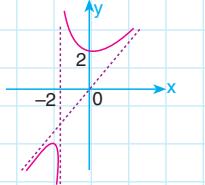
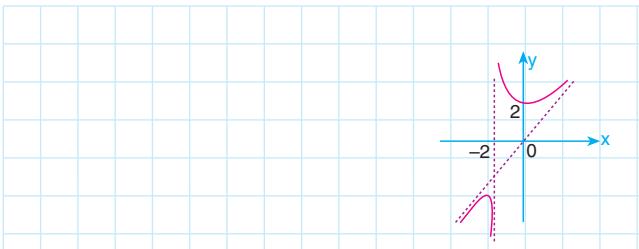
$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$$



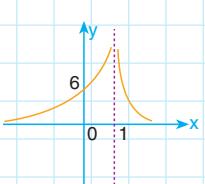
• PEKİŞTİRME ADIMI •



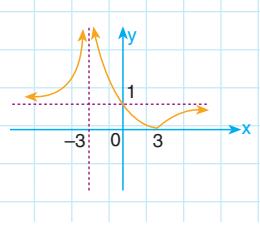
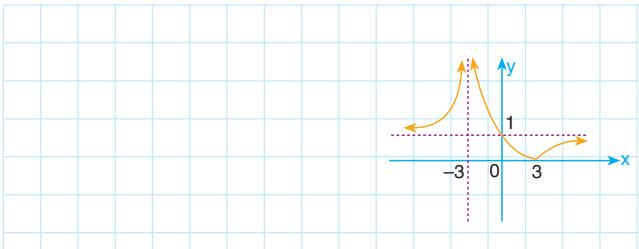
13. $y = \frac{(x+1)^2 + 3}{x+2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



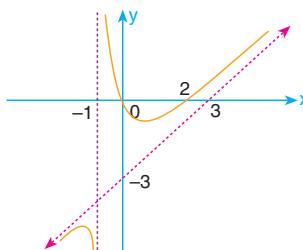
14. $y = \frac{6}{(x-1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



15. $y = \left| \frac{x-3}{x+3} \right|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



16.

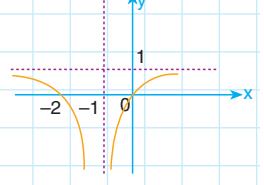


Şekildeki grafiğin hangi fonksiyona ait olduğunu bulunuz.



$$y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$$

17. $y = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



18. $y = \frac{ax - x + 4}{x - a}$ eğrilerinin asimptotlarının kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.



$$y = x - 1$$



SINAMA ADIMI



1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x + 1$ B) $y = x - 1$ C) $y = 2 - x$
 D) $y = 1 - x$ E) $y = 2 + x$

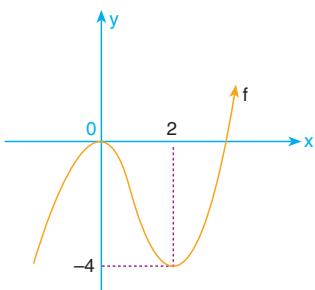
2. $f(x) = \frac{2mx + n}{x - n}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası $(1, 2)$ ise, $m + n$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

3. $y = \frac{x^2 - 2}{3x + 1}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasıının ordinatı kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

4. Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?



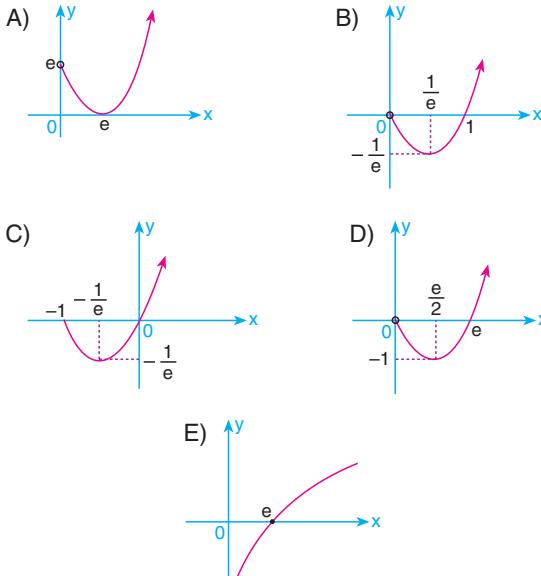
A) $f(x) = x^3 + 3x^2$ B) $f(x) = 2x^3 - x^2$
 C) $f(x) = x^3 - 3x^2$ D) $f(x) = x^3 - 4x^2$
 E) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

5. $f(x) = \frac{3x - 1}{mx + n}$ fonksiyonu veriliyor.

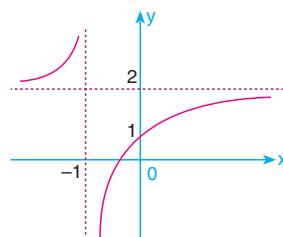
$f^{-1}(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu $x = 3$ ise, m kaçtır?

A) -4 B) -3 C) 1 D) 2 E) 3

6. $y = x \ln x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



7. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ B) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ C) $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 4}$
 D) $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$ E) $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$



SINAMA ADIMI



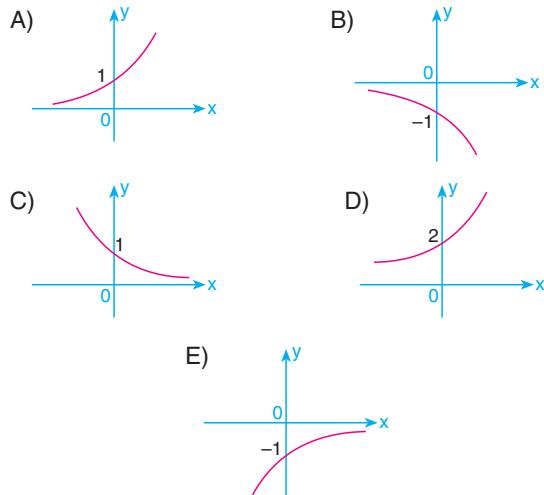
8. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 3}$ fonksiyonunun eğik asymptotu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = |x + 1|$ B) $y = 2|x + 3|$ C) $y = |x - 2|$
 D) $y = 2|x - 4|$ E) $y = 2|x - 1|$

9. $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 2x}$ fonksiyonunun belirtilen eğriinin eğik asymptotu $y = mx + n$ ise, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

10. $f(x) = 2^{-x}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



11. $y = \frac{x+1}{ax+1}$ ve $y = \frac{x-3}{ax+2}$ eğrileri $x = 2$ apsisli noktada kesiştiğine göre, a kaçtır?

- A) -3 B) $-\frac{3}{2}$ C) -1 D) $-\frac{7}{8}$ E) $-\frac{1}{2}$

12. $y = \frac{mx^2 + nx + 4}{mx + n}$ eğrisinin simetri merkezinden geçen doğru aşağıdakilerden hangisidir? ($m \neq 0$)

- A) $y = mx + 1$ B) $y = 3x - 1$ C) $y = -x$
 D) $y = x$ E) $y = mx + -1$

13. $y = \frac{mx^3 + 1}{2x + 1}$ fonksiyonunun eğri asymptotu $y = 4x^2 - 2x + 1$ ise, eğrinin x eksenini kestiği noktanın apsisi nedir?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

14. $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 - 2x + 1}$ fonksiyonu veriliyor.

Eğrinin asymptotu kestiği noktanın apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ eğrisinin asymptotunun eğriyi kestiği noktadaki teget denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x + 2y = 1$ B) $y + 2x = 1$ C) $x + y = 2$
 D) $2x + y = 2$ E) $x + y = 1$

16. $y = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$ eğrisinin asymptotunun eğriyi kestiği noktadaki teğeti x- eksenini hangi apsisli noktada keser?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2



SINAMA ADIMI

2

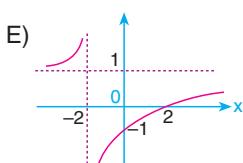
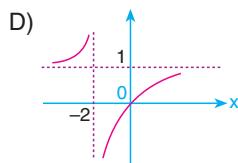
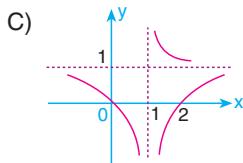
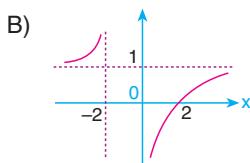
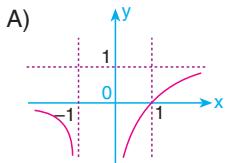


1. $y = \frac{mx+n}{nx+m}$ eğrisinin geçtiği sabit nokta aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(-1, 1)$ B) $(1, 2)$ C) $(2, 2)$
 D) $(1, 1)$ E) $(-1, -2)$
2. $y = \frac{ax+b}{x+2}$ eğrisi $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ eğrisinin asimptolarının kesim noktasından geçtiğine göre, $a+b$ toplamı kaçtır?
- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0
3. $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ fonksiyonunun yatay asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $y = e$ B) $y = e^2$ C) $y = e^3$
 D) $y = \frac{1}{e}$ E) $y = e^{-3}$
4. $y = \log_3(x-3)$ fonksiyonunun x -eksenini kestiği nokta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ doğrusu üzerinde ise, a kaçtır?
- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
5. $y = \frac{ax+b}{x-3}$ eğrisi $A(1, 2)$ noktasından geçiyor.
- Eğrinin simetri merkezi $(?, 1)$ olduğuna göre, b kaçtır?
- A) -7 B) -6 C) -5 D) -4 E) -3
6. $y = \frac{x^2 - mx + 1}{x - 1}$ fonksiyonunun maksimum veya minimum noktasının olmaması için m hangi kümenin elemanı olmalıdır?
- A) $[2, \infty)$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(-\infty, 1)$
 D) $(2, \infty)$ E) $(-\infty, 0)$
7. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ eğrisinin asimptolarının kesim noktası $mx - y = 3$ doğrusu üzerinde ise, m kaçtır?
- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1
8. Şekilde taralı alan kaç birimkaredir?
- A) 9 B) 6 C) 5
 D) 4 E) 3
-
9. $y = \frac{3x^2 - 1}{ax^2 + 2x - 3}$ eğrisinin yatay asimptotu $y = x + 2$ doğrusu ile $x = 1$ apsisli noktada kesiştiğine göre eğrinin düşey asimptotları arasındaki uzaklık kaç birimdir?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
10. $y = e^{\frac{1-x^2}{2-x^2}}$ eğrisinin yatay asimptotu ile $y = 2e - x$ doğrusunun ortak noktaları aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(e, 2e)$ B) $(2e, e)$ C) (e, e)
 D) $(1, e)$ E) $(e, 1)$

SINAMA ADIMI

2

11. $y = \frac{x-2}{x+2}$ eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



12. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ eğrisinin x- eksenine teğet olduğu noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?

- A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13. $y = 2x^2 - 8x + 9$ eğrisinin minimum noktasının x- eksenine uzaklışı kaç birimdir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

14. $y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ eğrisinin maksimum noktası x- eksenine kaç birim uzaklıktadır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

15. $y = \frac{x-1}{(x-2)^2}$ eğrisinin eksenleri kestiği noktadan geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - \frac{1}{4}$ B) $y = 2x - 1$ C) $y = \frac{x-1}{4}$
D) $y = 1 - 2x$ E) $y = 4x - 1$

16. $x^2 + y^2 = 3x$ ve $y^2 = 2x$ eğrilerinin kesim noktalarından geçen doğrulardan birinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \sqrt{2}x$ B) $y = \sqrt{3}x$ C) $y = 2x$
D) $y = x + 1$ E) $y = 1 - x$

17. $y = \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}$ eğrisinin x- eksenini kesmemesi için, m aşağıdakilerden hangisini sağlamalıdır?

- A) $-4 < m < 4$ B) $-2 < m < 2$ C) $\sqrt{2} < m < 2$
D) $0 < m < 2$ E) $0 < m < 1$

18. $y = \frac{x^2 - m}{x + m}$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada x- eksenine paralel teğeti varsa, m kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

19. $y = \log_2\left(\frac{x+1}{4x-1}\right)$ eğrisinin yatay asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 4$ B) $y = -4$ C) $y = \frac{1}{2}$
D) $y = -2$ E) $y = \frac{1}{4}$

20. $y = \frac{x^2 - ax}{ax - 1}$ eğrisinin eğik asimptotu 1. açıortay doğrusu olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4



SINAMA ADIMI

3



1. $f(x) = x^3 + 3x^2$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{9x - 9}$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 9 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

2. $f(x) = \sin(x-1) - 4\cos(\frac{\pi}{2}x)$ ise, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 1 B) π C) $2 - \pi$
D) $1 + 2\pi$ E) 3π

3. $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \geq -1 \\ 4x^2 & , x < -1 \end{cases}$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 16}{x + 2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 6}{x - 2}$ çarpımının sonucu kaçtır?

- A) -48 B) -36 C) -12 D) 12 E) 48

4. $y = x^3 e^{3x}$

olduğuna göre, $e^{-3x} \frac{dy}{dx}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $3x^3 + x^2$ B) $x^3 + 3x^2$ C) $x^2(x+2)$
D) $x^2(1+x)$ E) $3x^2(1+x)$

5. $f(x) = x \cdot |x|$ olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

6. $f(x) = 8x^{\frac{1}{2}} - 16x^{\frac{3}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}}$ olduğuna göre, $f'(4)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{93}{2}$ B) -46 C) $-\frac{91}{2}$
D) -45 E) $-\frac{89}{2}$

7. $f(x+1) = x^2 + 2x$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 8}{x - 3}$ değeri kaçtır?

- A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

8. $f(x) = \frac{4}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$

olduğuna göre, $f'(2)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{32}$ B) $-\frac{1}{16}$ C) $-\frac{1}{8}$
D) $-\frac{3}{16}$ E) $-\frac{1}{4}$



SINAMA ADIMI

3



9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $-\sqrt{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

10. $y = \frac{ax - 3}{bx + 2}$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası aynı zamanda $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ fonksiyonunun dönüm noktası ise, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

11. $y = ax + 1 + \frac{a}{x}$

fonksiyonunun eğik asimptotu $y = 3x + 1$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

12. $f(x) = (a - 1)x + \frac{a + 4}{x}$

fonksiyonunun eğik asimptotu $y = x$ olduğuna göre, $f(a)$ kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$

fonksiyonunun eğri asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x^2 + x + 1$ B) $y = x^2 + x$
C) $y = x^2 + x - 1$ D) $y = x^2 + x - 2$
E) $y = x^2 + x - 4$

14. $y = \sqrt[3]{u}$, $u = \frac{4t}{t - 1}$, $t = \sqrt{3x + \sqrt{x}}$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x = 1$ için değeri kaçtır?

- A) $-\frac{11}{24}$ B) $-\frac{7}{24}$ C) $-\frac{5}{24}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

15. $y = (u^3 - 1)^3$, $u = \sqrt[3]{t - 3}$, $t = |x^2 - x|$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x = 2$ için değeri kaçtır?

- A) 12 B) 24 C) 32 D) 36 E) 41

16. $y = (x^2 - x)^3$, $x = u^2 - 15$, $u = (t^2 - t)^2$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nin $t = 2$ için değeri kaçtır?

- A) 24 B) 17 C) 12 D) 5 E) 0



SINAMA ADIMI

4

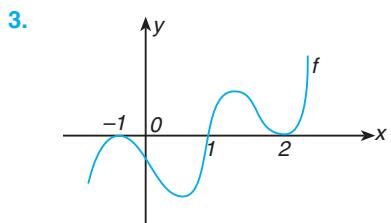


1. $f(x) = 2x^3 - 6x + 9$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ aralığında alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 13

2. $f(x) = (x - 1)^{\cos x}$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$
 D) $\ln(\pi - 2)$ E) $\ln\left(\frac{3\pi - 2}{2}\right)$



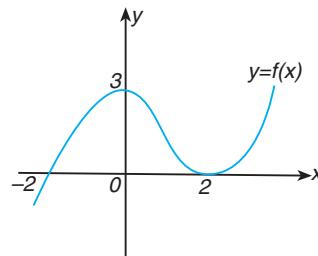
- Şekildeki grafik
 $f(x) = (x + 1)^2 \cdot (ax - 3) \cdot (bx + 4)^2$ fonksiyonuna ait ise, $a + b$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

4. $f(x) = 2^x - (\ln 2) \cdot x$ fonksiyonunun minimum noktası nedir?

A) $(1, 0)$ B) $(0, 1)$ C) $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$
 D) $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ E) $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

5.



Şekilde; 3. dereceden bir f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $x = 2$ için $f(x) = 0$ dır.
 B) $x = 2$ için $f'(x) = 0$ dır.
 C) $x = 0$ için $f(x) = 3$ tür.
 D) $x = -2$ için $f(x) = 0$ dır.
 E) $x = 1$ için $f'(x) > 0$ dır.

6. $f(x) = \cos(\sin^2 x)$ olduğuna göre, $\frac{d}{dx} f(x)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\sin 2x \cdot \sin(\sin^2 x)$
 B) $-\sin 2x \cdot \cos(\sin^2 x)$
 C) $-\cos 2x \cdot \sin(\sin^2 x)$
 D) $\sin 2x \cdot \cos(\cos^2 x)$
 E) $\sin 2x \cdot \sin(\cos^2 x)$

7. $f(x) = x^3 - |x^2 - 4|$ eğrisinin $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x + 5$ B) $y = x + 3$
 C) $y = x + 1$ D) $y = x - 3$
 E) $y = x - 2$

SINAMA ADIMI

4

8. $f(x) = mx^3 + 2x^2 - 4nx + 2$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 dir. $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisı -1 olduğunu göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{5}{3}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{1}{3}$

9. $f(x) = \sin[\ln(\sin x)]$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\tan x \cos[\ln(\cos x)]$
 B) $\cot x \cos[\ln(\sin x)]$
 C) $\tan x \sin[\ln(\cos x)]$
 D) $\cot x \sin[\ln(\cos x)]$
 E) $\tan x \cos[\ln(\sin x)]$

10. $f'(2) = 0, f(2) = -5$

 $g(3x) = (x+1)^2 \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(6)$ kaçtır?

- A) -30 B) -15 C) -10 D) 0 E) 5

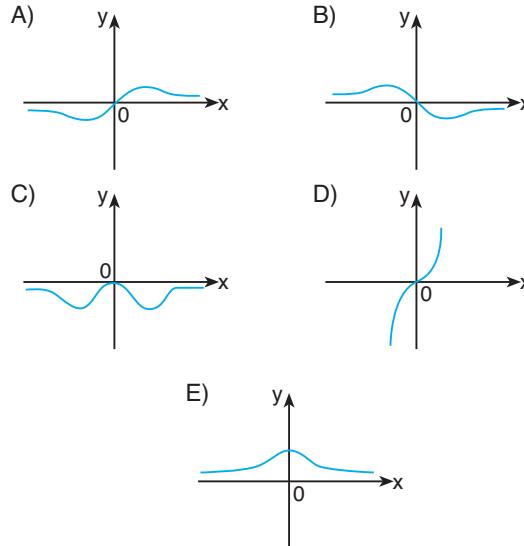
11. $y = \frac{x^2 + bx + c}{x - 2}$

fonksiyonunun grafiği Ox eksenini 1 ve 4 noktalarında kestiğine göre eğrinin simetri merkezinin ordinatı nedir?

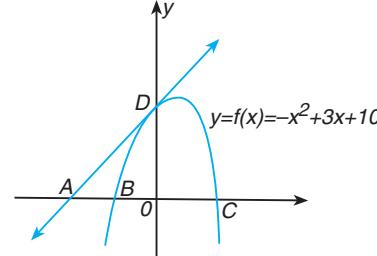
- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

12. $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



13.

Şekilde $y = f(x) = -x^2 + 3x + 10$ eğrisi x eksenini B ve C, y eksenini D noktasında kesmektedir. D noktasından eğriye çizilen teğet x eksenini A noktasında kestiğine göre **IABI . IOCI çarpımı nedir?**

- A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{20}{3}$

14. $f(x) = (x-1)^2(x-a)$

 $f''(1) = 8$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -1 D) 3 E) 4



SINAMA ADIMI

5



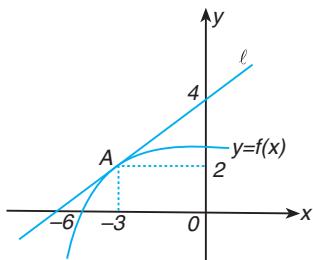
1. $e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2 x \cdot e^x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\cos x + \sin x$
B) $\cos^2 x + \sin x$
C) $\sin 2x + \sin^2 x$
D) $\cos 2x$
E) $\sin 2x$

2. $f(x) = \ln(2^{\cos 3x})$ olduğuna göre, $f'(\frac{\pi}{6})$ kaçtır?

- A) $-\ln 64$
B) $-\ln 16$
C) $-\ln 8$
D) 0
E) $\ln 4$

3.



Şekildeki l doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine A(-3, 2) noktasında teğettir.

$h(x) = x^2 \cdot f(x)$ ise, $h'(-3)$ kaçtır?

- A) -6 B) -3 C) 0 D) 6 E) 10

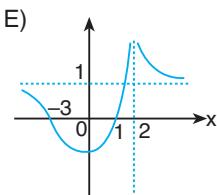
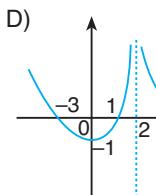
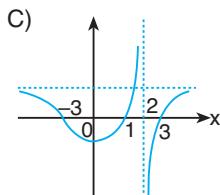
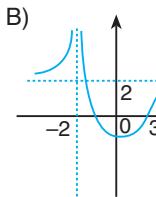
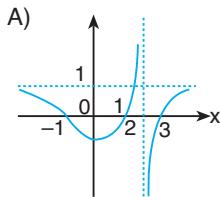
4. $f(3) = 6$, $f'(3) = 2$, $g'(6) = -3$ olduğuna göre,

$$\left[\frac{d}{dx}(g \circ f)\right](3) \text{ kaçtır?}$$

- A) -18 B) -6 C) 6 D) 9 E) 12

5. $y = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$

fonksiyonunun grafiği hangisi olabilir?



6. $y = \frac{x^2 + ax + 2}{x - b}$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası (1, 2) olduğuna göre, a . b çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. $y = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$

egrısine ait asimptotlarla koordinat eksenleri arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$





SINAMA ADIMI

5



8. $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) $\ln 4$ B) $4 + \ln 4$ C) $2 + \ln 4$
 D) $4 + \ln 2$ E) $8 + \ln 2$

9. $f(x) = \arcsin(\cos x)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ kaçtır?

- A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

10. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8$

fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığındaki en küçük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 7

11. $y = 3$ ve $x = -1$

doğrularını asimptot kabul eden; y ekseni $(0, -1)$ noktasında kesen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \frac{2x+1}{x+1}$ B) $y = \frac{3x+5}{x-1}$ C) $y = \frac{-3x+2}{x+2}$
 D) $y = \frac{3x+2}{x+1}$ E) $y = \frac{3x-1}{x+1}$

12. $y = \frac{ax+3}{x+b}$

daima azalan bir fonksiyon olması için a ve b arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

- A) $a+b=3$ B) $a-b=3$ C) $\frac{b}{a}=3$
 D) $a \cdot b < 3$ E) $a \cdot b > 3$

13. $f(x) = x^2 \cdot e^x$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{e^2}$ B) $\frac{2}{e^2}$ C) $\frac{3}{e^2}$ D) $\frac{4}{e^2}$ E) e^2

14. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 - 7$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

15. $y = \frac{1}{x-2}$

fonksiyonunun düşey asimptotunun denklemi nedir?

- A) $x = -2$ B) $x = -1$ C) $x = 0$
 D) $x = 1$ E) $x = 2$



SINAMA ADIMI

6



1. $f(x) = |9 - x^2|$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?
A) -6 B) -4 C) -2 D) 0 E) 4
2. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & , \quad x \geq 1 \text{ ise} \\ 3x + b & , \quad x < 1 \text{ ise} \end{cases}$
 $f(x)$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için türevli olduğuna göre, b kaçtır?
A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) -1 E) $-\frac{3}{2}$
3. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ fonksiyonunun simetri merkezi $(1, 1)$ olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
4. $f(x) = x^2 + mx - 12$ ile tanımlanan f fonksiyonu için
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 16$ olduğuna göre, m kaçtır?
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10
5. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^2$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?
A) 30 B) 40 C) 60 D) 80 E) 100
6. $g(x) = f(5x)$ ve $f'(5) = 4$ olduğuna göre,
 $g'(1)$ kaçtır?
A) 5 B) 10 C) 15 D) 16 E) 20
7. $f(x) = x^2 + 6x$ olduğuna göre, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(4+a) - f(4)}{a}$ değeri kaçtır?
A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4
8. $f(x) = \cos(\arctan 2x)$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1



SINAMA ADIMI

6



9. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$

fonksiyonunun $y = 3x - 5$ doğrusuna paralel teğetlerinden birinin **değme noktası**nın apsisini kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

10. $f(x) = x^3 - |x^2 - 4|$

olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 5

11. Her x gerçek sayısı için, $f(x) = \frac{mx - 2}{x + 1}$ fonksiyonunun daima artan olması için m 'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

12. A(a, b) noktası $f(x) = x(7 - x)$ parabolünün üzerindedir. a 'nın hangi değeri için $a + b$ toplamı maksimum olur?

- A) 5 B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

13. $3y^2 = x$ eğrisine üzerindeki A(12, 2) noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x - 12y - 6 = 0$ B) $x - 12y + 12 = 0$
 C) $x - 12y + 6 = 0$ D) $x - 6y + 12 = 0$
 E) $x - 6y + 24 = 0$

14. $f(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 17}{2x - 8}$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının ordinatı kaçtır?

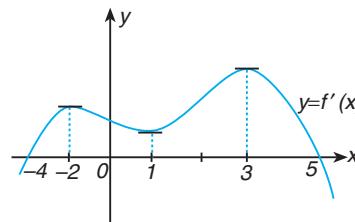
- A) -10 B) -8 C) -6 D) 2 E) 4

15. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında dönüm noktası olduğuna göre, a kaçtır?

- A) -9 B) -6 C) -3 D) 2 E) 5

16.



Türevinin grafiği verilen f fonksiyonu, hangi x değeri için maksimum değerini alır?

- A) -4 B) -2 C) 1 D) 3 E) 5



SINAMA ADIMI

7



1. Denklemi $y = x^3 + mx^2 + (m+5)x - 3$ olan eğrinin dönüm (büküm) noktasının apsisı 2 ise, ordinatı kaçtır?

A) -7 B) -11 C) -13 D) -21 E) -25

2. $x^2 - (a-1)x + a + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1^2 + x_2^2$ toplamının minimum olması için, a kaç olmalıdır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

3. m nin hangi aralıktaki değerleri için $f(x) = \frac{mx+4}{x+m}$ fonksiyonu daima azalandır?

A) $(-\infty, 2)$ B) $(-2, 2)$ C) $(-2, \infty)$
D) $(2, \infty)$ E) $(-1, 4)$

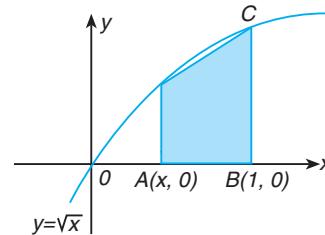
4. $y = f(x) = (x+2)^3$ fonksiyonunun dönüm (büküm) noktasının apsisi kaçtır?

A) 8 B) 4 C) 2 D) 0 E) -2

5. 3 cm yarıçaplı küre içine çizilen maksimum hacimli silindirin hacmi kaç π cm³ tür?

A) $6\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{3}$

6.



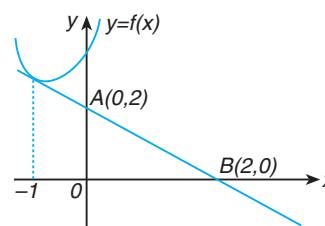
Şekilde $y = \sqrt{x}$ grafiği çizilmiştir. A($x, 0$), B(1, 0) olduğuna göre, ABCD yamuğunun alanı en çok kaç birimkaredir?

A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{16}{27}$ E) $\frac{7}{9}$

7. $y = 1$ ve $x = 2$ doğrularını asimptot kabul eden ve y ekseni -1 noktasında kesen eğrinin fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{x+1}{x-1}$ B) $y = \frac{x+2}{x-2}$ C) $y = \frac{x+2}{x-1}$
D) $y = \frac{x+1}{x+2}$ E) $y = \frac{x}{x-2}$

8.



Şekilde f(x) fonksiyonunun x = -1 noktasındaki teğeti çizilmiştir.

A(0, 2), B(2, 0) ve $g(x) = x^2 + \frac{f(2x-3)}{x}$ şeklinde tanımlanan g(x) fonksiyonunun x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 3 E) 4

SINAMA ADIMI

7



9. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

parabolünün koordinatları toplamının minimum olduğu noktanın ordinatı kaçtır?

- A) -12 B) -10 C) -8 D) -6 E) -2

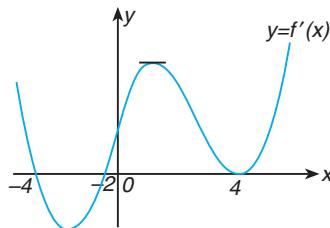
10. $y = x^2$ fonksiyonuna A(3, -7) noktasından çizilen teğetlerinden birinin deeme noktasının apsisi kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

11. $f(x) = \sin(\cos 5x)$ olduğuna göre, $f'(\frac{\pi}{10})$ kaçtır?

- A) 5 B) 1 C) 0 D) -5 E) -10

12.



Şekilde, $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlışlıtır?

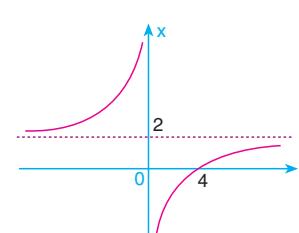
- A) $f''(-6) < 0$
 B) $(-\infty, -4)$ aralığında $f(x)$ artandır.
 C) $(-2, f(-2))$ noktası $f(x)$ in yerel minimum noktasıdır.
 D) $f''(0) \cdot f''(6) > 0$
 E) $(4, f(4))$ noktası $f(x)$ in yerel minimum noktasıdır.

13. $f(x) = x^3 - 6x + 2$

fonksiyonunun $y = 6x - 1$ doğrusuna paralel teğetlerinden birinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = 6x - 3$ B) $y = 6x - 6$
 C) $y = 6x - 10$ D) $y = 6x - 14$
 E) $y = 6x - 18$

14.



Şekilde; $y = \frac{ax - b}{x - c}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

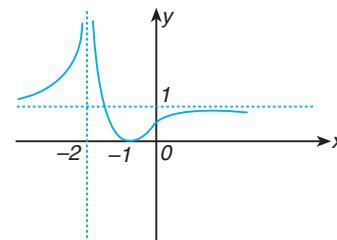
- A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

15. $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığında alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 0 E) 1

16.



Şekildeki grafiğin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 2)^2}$ B) $y = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$
 C) $y = \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2}$ D) $y = \frac{x + 1}{(x + 2)^2}$
 E) $y = \frac{(x + 2)^2}{x + 1}$



SINAMA ADIMI

8



1. $f(x) = (1 - 2x^2)(x^3 + 2x)$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?
- A) -194 B) -180 C) -160
D) -142 E) -84

2. $f(x) = 4\sin 2x \cdot \cos x$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) $-3\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

3. $f(x) = \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ olduğuna göre,
 $f'(\sqrt{3})$ kaçtır?
- A) $\frac{13}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{7}{3}$

4. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$ olduğuna göre,
 $(fog)'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) $12 \cdot e^8$ B) $8 \cdot e^8$ C) $12 \cdot e^4$
D) $8 \cdot e^4$ E) $16 \cdot e^4$

5. $f(x) (0, \infty)$ aralığında azalan bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artandır?
- A) $f^2(x)$ B) $2f(x)$ C) $f(x^2)$
D) $-x + f(x)$ E) $x - f(x)$

6. $f(x) = x^2 - x^3$ eğrisinin yerel maksimum noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $4x = 3$ B) $4y = 9$ C) $3y = 4x$
D) $27y = 4$ E) $9y = 8$

7. $y = 3$ ve $x = 2$ doğrularını asimptot kabul eden ve y eksenini -3 noktasında kesen eğrinin fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{3x + 6}{x - 2}$	B) $y = \frac{3x - 6}{x - 2}$
C) $y = \frac{3x - 4}{x - 2}$	D) $y = \frac{3x + 1}{x + 2}$
E) $y = \frac{3x + 4}{x + 2}$	

8. $x^2 + 2y^2 - x - y - 3 = 0$ eğrisinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $y + x = 0$ B) $x + 2y - 2 = 0$
C) $y - 2x = 0$ D) $y - x - 2 = 0$
E) $3x + 4y - 1 = 0$

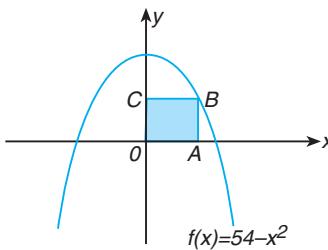
9. $f: R^+ \rightarrow R$ $f(x) = x \cdot \ln x - x$ fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

SINAMA ADIMI

8



10.

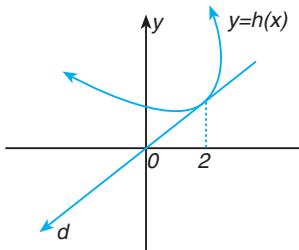


Şekilde;
 $f(x) = 54 - x^2$ fonksiyonunun
grafiği verilmiştir.

OABC dikdörtgeninin alanı en fazla kaç birimkaredir?

- A) $72\sqrt{2}$ B) 96 C) $108\sqrt{2}$
D) 128 E) 136

11.



Şekilde orijinden geçen d doğrusu $y = h(x)$ eğrisine
 $x = 2$ apsisli noktada teğettir.
 $f(3x - 5) = x \cdot h(x)$ ve
 $f'(1) = 4$ olduğuna göre,
d doğrusunun denklemi
nedir?

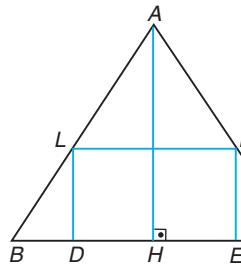
- A) $y = 3x$ B) $y = 2x$ C) $y = x$
D) $y = \frac{x}{2}$ E) $y = \frac{x}{3}$

12. $f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x + 3}$

fonksiyonunun $x = -1$ noktasında ekstremum noktasının
olması için, a kaç olmalıdır?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) 3

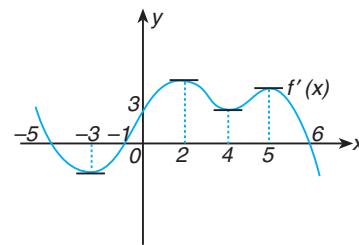
13.



Şekilde;
 $IBCI = 20$ cm
 $IAHI = 12$ cm,
 $IABI = IACI$
olduğuna göre,
ABC üçgeninin içine çizilebilecek dikdörtgenlerden
alanı en büyük olanının alanı
kaç cm^2 dir?

- A) 90 B) 80 C) 75 D) 60 E) 45

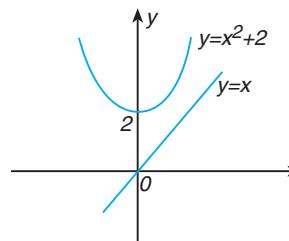
14.



Şekilde türevinin grafiği verilen, $f(x)$ fonksiyonu, **hangi x** değeri için minimum değerini alır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 5 E) 6

15.



Şekildeki $y = x^2 + 2$ parabolünün $y = x$ doğrusuna en
kısa uzaklığı kaç birimdir?

- A) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$



SINAMA ADIMI

9



1. $f: R - \{1\} \rightarrow R$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$
 olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -8 B) -5 C) -3 D) 2 E) 6

2. $x = \arctant$
 $y = \ln(t+1)$

$t = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3. $\frac{d}{dx} (\ln x^2)^2$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{16}{x} \ln x^2$ B) $\frac{8}{x} \ln x^2$ C) $\frac{4}{x} \ln x^2$
 D) $\frac{2}{x} \ln x^2$ E) $\frac{\ln x^2}{x}$

4. $y = 2e^{2t}$ ve $x = e^{-t}$ olduğuna göre,

$\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-2e^{2t}$ B) $-4e^{2t}$ C) $-4e^{3t}$
 D) $2e^{3t}$ E) $4e^{3t}$

5. $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 2$ ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için, $f'(3)$ kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) $-\frac{4}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 0

6. $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$ olduğuna göre,
 $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{1}{2\ln 3}$ B) $\frac{1}{3\ln 3}$ C) $\frac{2}{\ln 3}$
 D) $\frac{4}{3\ln 3}$ E) $\frac{2}{3\ln 3}$

7. $y = 2x^x \cdot \ln x$ fonksiyonu için,

$\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $x^x(\ln x)^2$ B) $\ln x + 2$ C) $2\ln x + x$
 D) $x^x(\ln x + x)$ E) $2x^x \left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right]$

8. $f(x) = \arctan \frac{x}{a} + \operatorname{arccot} \frac{x}{a}$ olduğuna göre,

- $f'(a)$ kaçtır?
 A) 0 B) 1 C) 3 D) a E) $2a$



SINAMA ADIMI

9



9. $f(x) = 14 \cdot \sin 7x \cdot \cos 7x$ fonksiyonu için,

$f'(\frac{\pi}{42})$ kaçtır?

- A) 98 B) 49 C) 45 D) 42 E) 28

10. $f(x) = \ln(\tan 2x)$ ise, $f'(\frac{\pi}{12})$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C) $3\sqrt{3}$
 D) $4\sqrt{3}$ E) 8

11. $x^2 + y^2 = 5$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ nin A(2, 1) noktasındaki değeri kaçtır?

- A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

12. $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 - x + 1}$ fonksiyonunda

$f'(0) = f'(1)$ olduğuna göre, a kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

13. $y = \frac{x+1}{x-1}$

fonksiyonunun simetri merkezi nedir?

- A) (1, 1) B) (-1, 1) C) (-1, -1)
 D) (0, -1) E) (-1, 0)

14. $f(x) = \sin 2x$ olduğuna göre,

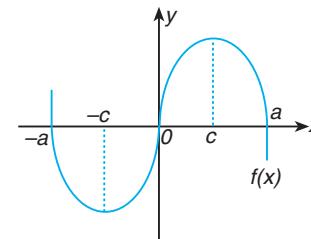
$(f' \circ f^{-1})(\frac{3\pi}{2})$ kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

15. $f(x) = e^{3x}$ olduğuna göre, $f^5(0)$ kaçtır?

- (f^5 , f in 5. türevini göstermektedir.)
 A) e^5 B) e^3 C) 3^4 D) 3^5 E) 3^6

16.



Grafiği verilen fonksiyonun birinci türevinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) B)
 C) D)
 E)



SINAMA ADIMI

10



1. $f(2x - 3) = 3x^2 + 2x - 4$ olduğuna göre,
 $f'(1)$ kaçtır?
- A) 11 B) 9 C) 7 D) 6 E) 4
2. $f(x) = \sin^3 4x$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ kaçtır?
- A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{9}{2}$ D) 9 E) 18
3. $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln x^2$ fonksiyonunun $x = e$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?
- A) 0 B) $\frac{1}{e}$ C) e D) $\frac{2}{e}$ E) $\frac{3}{e}$
4. Köşeleri $0x$ ekseni ve $y = -x^2 + 6$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanının alanı kaç birimkaredir?
- A) $24\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{2}$
 D) $12\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx$ fonksiyonunun daima artan olması için m 'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
6. $f(x) = x^2 - 5x + 12$ parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8
7. $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$ ile tanımlı
 $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki noktalardan hangisine göre simetiktir?
- A) (2, 1) B) (2, 3) C) (-2, 3)
 D) (-2, 1) E) (1, 2)
8. f ve g reel sayılarda türevi alınabilen fonksiyonlardır. $A(3, -2)$ noktasında f fonksiyonunun yerel ekstremumu vardır.
 $g(2x) = x^2 \cdot f(x)$ olduğuna göre, $g'(6)$ kaçtır?
- A) -12 B) -9 C) -6 D) -3 E) -1



SINAMA ADIMI

10



9. $x = u^3 + 3u$, $y = u^3 - 3u$ ise,

$u = 1$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 6

10. $f(x) = x + 3 \sin^2x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{4}$ teki normalinin eğimi nedir?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

11. $f(x) = |x^3 - 5x| + \ln(x^2 + 1)$ olduğuna göre,

$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ nin $x = -1$ için değeri kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 0 D) -2 E) -6

12. $f(2x + 3) = x^2 + 2x - 5$ olduğuna göre,

$f'(-1)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f(x) = |x^2 + x - 3|$ olduğuna göre,
 $f'(-1)$ kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $f(3x - 2) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ise

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

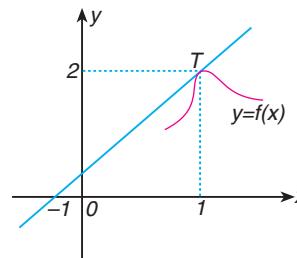
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

15. $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ ve $g(x) = ax^2 + bx + 3$ fonksiyonları veriliyor.

Bu fonksiyonların eğrilerinin üzerindeki aynı apsisli noktalardaki teğetler birbirine paralel ise, $a + b$ kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

- 16.



Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun $T(1, 2)$ noktasındaki teğeti çizilmiştir.

$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ olduğuna göre, $g'(1)$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$



SINAMA ADIMI

11



1. $f(x) = (3)^{x^2}$ olduğuna göre,
 $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) $27 \cdot \ln 3$ B) $81 \cdot \ln 3$ C) $324 \cdot \ln 3$
D) $27 \cdot \log_3 e$ E) $81 \cdot \log_3 e$

2. $f(x) = \arctan(|\ln x|)$ olduğuna göre,
 $f'(e)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) $\frac{2}{e}$ B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) e E) $2e$

3. $f(x) = 3x^3 - 1$ ve $g(x) = a^2 x + 1$ fonksiyonları için
 $(f - g)'(1) = 0$ olduğuna göre, a 'nın pozitif değeri kaçtır?
- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. $x \cdot y + y^2 - x + y = 0$ olduğuna göre,
 $\frac{dy}{dx}(1, 2)$ kaçtır?
- A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

5. $f(x) = |x + 2| + |2x - 5| + 3x$ olduğuna göre,
 $f'(-1)$ kaçtır?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 7

6. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ olduğuna göre,
 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\frac{4}{\pi}$ B) $-\frac{2}{\pi}$ C) 0 D) $\frac{1}{\pi}$ E) 2

7. $f(x) = |x^2 - 2x| + 3x$ olduğuna göre,
 $f'(3)$ kaçtır?
- A) 8 B) 7 C) 6 D) 3 E) 1

8. $f(x) = \cos(\arcsinx) + \sin(\arccos x)$ fonksiyonu için,
 $f'(0)$ kaçtır?
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

SINAMA ADIMI

11



9. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

fonksiyonunun tanımlı olduğu değerler için $(f^{-1})'(8)$ kaç olabilir?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

10. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ olduğuna göre,

$x = \frac{3}{2}$ ve $y = -\sqrt{3}$ için $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?

- A) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 D) $\frac{-\sqrt{3}}{6}$ E) $-2\sqrt{3}$

11. $f(1-x) = x^2 - 2x - 3$ olduğuna göre,

$f'(-5)$ kaçtır?

- A) -10 B) -6 C) -5 D) -1 E) 0

12. A(1, a) ve B(2a - 1, 3) noktaları veriliyor.

İABI nin en küçük olması için, a kaç olmalıdır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) 1 C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 3

13. $f(x) = x^2 + 4x - 6$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

14. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) -5 B) $-\frac{1}{5}$ C) 5 D) 1 E) $\frac{1}{5}$

15. $y = x + \sin^2 x$ eğrisi veriliyor.

Buna göre, $\left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=\frac{\pi}{12}}$ kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) -1 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

16. $y = x^3 - 3x + 21$ eğrisinin $x = 2$ apsisli noktasındaki

teğeti bu eğriyi hangi noktada keser?

- A) (0, 21) B) (4, 73) C) (-1, 23)
 D) (-2, 19) E) (-4, 31)



SINAMA ADIMI

12



1. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}$ ise,

$f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $e^{-x}\cos x$ B) $e^{-x}\sin x$ C) $2e^{-x}\cos x$

D) $2e^{-x}\sin x$ E) $e^{-x}(\cos x - \sin x)$

2. $f(x) = e^{\sin 2x}$ olduğuna göre,

$\frac{f'(0)}{2}$ kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

3. $x = \sqrt{3t+1}$
 $y = \ln(t+1)$ olduğuna göre,

$t = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

4. $f(x) = x^2 + |4 - x^2|$

fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

5. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ olduğuna göre, $f'(e)$ kaçtır?

A) $\frac{3\sqrt{e}}{2e}$ B) $\frac{2\sqrt{e}}{e}$ C) $\frac{3\sqrt{e}}{2}$

D) $\frac{2\sqrt{e}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{e}}{2}$

6. $f(x) = x \cdot \sin x$ olduğuna göre,

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

7. $f(x) = \frac{e^{3\ln x}}{3}$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) 4 B) 2 C) $2e$ D) $4e$ E) $\frac{1}{2e}$

8. $x^3y - y^2x + 2 = 0$

fonksiyonunun birinci türevinin (1, 2) noktasındaki değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

9. $f(x) = x^2 \cdot g(1-x)$, $f'(-1) = 8$ ve $g(2) = -3$

olduğuna göre, $g'(2)$ kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 4

SINAMA ADIMI

12



10. $f(x) = 3x^2 + 4$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

değeri kaçtır?

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

11. $f(x) = x \cdot \ln x$ olduğuna göre,

$f'(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

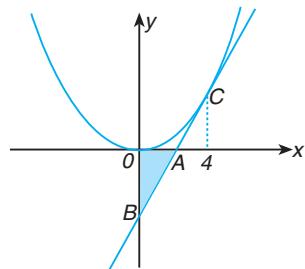
- A) $(-\infty, 0)$ B) $(1, -\infty)$ C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$
 D) $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ E) $(1, e)$

12. $y = \frac{ax+2}{x+3b}$ eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının koordinatları A(-12, 5)

ise, $a - b$ farkı kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

13.

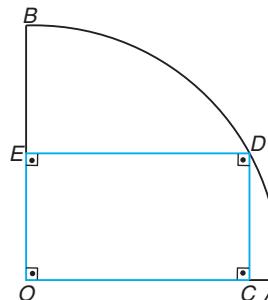


Şekildeki grafik;

$f(x) = x^2$ fonksiyonuna aittir. Grafiğe üzerindeki $x = 4$ apsisli C noktasından çizilen teğet eksenleri A ve B noktalarını kesmektedir. Buna göre, taralı AOB üçgeninin alanı kaç birimkaredir?

- A) 20 B) 16 C) 12 D) 9 E) 8

14.



Şekilde merkezi O, yarıçapı $|OA| = |OB| = 2\sqrt{2}$ cm olan dörtte bir çember yayı üzerindeki bir D noktasından yarıçaplara inen dikme ayakları C ve E'dir.

Buna göre, OCDE dikdörtgeninin en büyük alanı kaç cm^2 dir?

- A) $2\sqrt{6}$ B) 5 C) 6
 D) 4 E) $5\sqrt{2}$

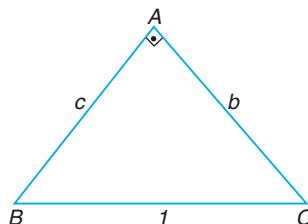
15. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$

fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum değerleri sırasıyla m ve n dir.

m ile n arasında $3m + 5n = 0$ bağıntısı olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

16.



Şekilde; $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$|BC| = 1$ birim, $|AB| = c$ birim ve $|AC| = b$ birim olduğuna göre, $c + 2b$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

TEKRAR TESTİ

1



1. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonu için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

liminin değeri nedir?

- A) $2x$ B) 3 C) $2x + 6$
 D) $x + 3$ E) $2x + 3$

2. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 3x^2 - 4x$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

liminin değeri kaçtır?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

3. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$ fonksiyonu için $f'(-2) + f(3)$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 32 B) 31 C) 30 D) 29 E) 28

4. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 3x^2 + ax^2 + 3x + 2$

fonksiyonu için $f'(2) = 7$ ise, a nın değeri kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

5. $f: R - \{0\} \rightarrow R$ $f(x) = 2x^3 + 4x + \frac{1}{x}$ fonksiyonu için

$f'(-1)$ değeri kaçtır?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$ fonksiyonu için $f'(a + 1) = 16$

ise, a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

7. $f: R - \{-1\} \rightarrow R - \{1\}$, $f(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$ fonksiyonu için

$f'(2)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{14}$ B) $-\frac{1}{36}$ C) $-\frac{4}{25}$ D) $-\frac{1}{16}$ E) $-\frac{1}{25}$

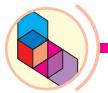
8. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (2x^2 + 3)^3$ fonksiyonu için

$f'(-1)$ değeri kaçtır?

- A) -325 B) -300 C) -280 D) -250 E) -200

TEKRAR TESTİ

1



9. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 4x(x+1)^3$ fonksiyonu için

$f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) 64 B) 72 C) 76 D) 80 E) 84

10. $f: R - \{0\} \rightarrow R$, $f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{3a}{x^2}$ fonksiyonu için

$f'(-1) = 11$ ise, a kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

11. $f: R - \{2\} \rightarrow R - \{1\}$, $f(x) = \frac{x+m}{x-2}$ fonksiyonu için

$f'(3) = -4$ olduğuna göre, m kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (x+a)^2$ fonksiyonu için

$f'(-2) = 6$ ise, a kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = e^{x+1}$ fonksiyonu için

$f'(-1)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

14. $f: R - \{0\} \rightarrow R$, $f(x) = \ln x$ fonksiyonu için

$f''(e^2)$ değeri kaçtır?

- A) $-e^{-4}$ B) $-e^{-2}$ C) $-e^4$ D) e^4 E) e^{-4}

15. $f: R \rightarrow R$, $g(x) = x^2 + 3x + 2f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

$f(x)$ in $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{1}{2}$ olduğuna göre, $g(x)$ in $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

16. $f(x) = 2x + f'(x)$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $x = 3$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi 2 ise, $f(3)$ kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

TEKRAR TESTİ

2



1. Köşeleri yarıçapı 4 cm olan bir çember üzerinde bulunan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın alanı kaç cm^2 dir?

A) 36 B) 32 C) 30 D) 28 E) 24

2. 600 metre uzunluğundaki tel kullanılarak bir tarladan, dikdörtgen şeklinde bir bahçe yapılip etrafı 2 kat tel ile çevrilecektir. Bu bahçenin alanının en büyük olduğu durumda köşegen konumundaki uzunluk kaç metredir?

A) 150 B) $75\sqrt{3}$ C) $80\sqrt{2}$ D) 90 E) $75\sqrt{2}$

3. $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü üzerinde A(6, 0) noktasına en yakın nokta B ise, B nin apsisi kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

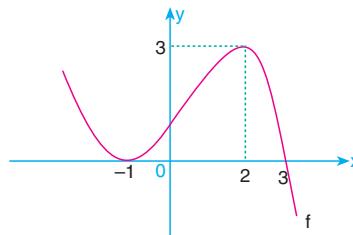
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

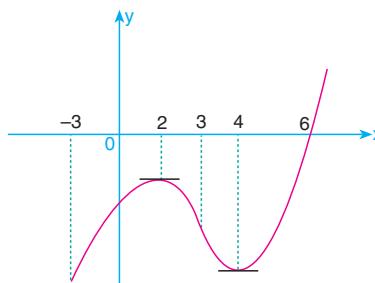
5.



Şekilde üçüncü dereceden bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f'(-1) = 0$ B) $f'(0) > 0$ C) $f'(2) = 0$
 D) $f'(3) > 0$ E) $f(3) = 0$

6.



Şekilde, $[-3, 6]$ aralığında türevinin grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $[-3, -2]$ de f artandır.
 B) $(2, 3]$ aralığında f artandır.
 C) f nin $x = 3$ de yerel minimumu var.
 D) f nin $x = -2$ de yerel ekstremumu vardır.
 E) $f''(2) = 0$

7. $y^2 = 2x$ eğrisi üzerinde $M(x_1, y_1)$ noktası alınıyor.

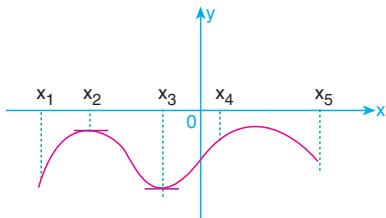
$4x_1^3 - 3y_1^2$ ifadesinin maksimum değeri kaçtır?

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

TEKRAR TESTİ

2

8.



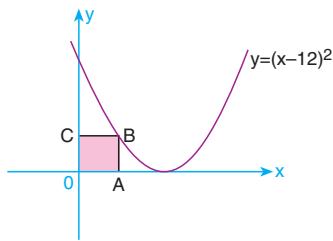
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $f'(x_1) > 0$ B) $f'(x_2) = 0$ C) $f'(x_3) = 0$
 D) $f'(x_4) = 0$ E) $f'(x_5) < 0$

9. Şekilde $y = (x - 12)^2$

parabolünün grafiği veriliyor.

OABC dikdörtgeninin alanı **en çok kaç birimkaredir?**



- A) 64 B) 80 C) 144 D) 256 E) 512

10. $x^3 + (m + 1)x^2 + (2m - 1)x + 2 = 0$ denkleminin kökleri

x_1, x_2, x_3 tür. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ toplamının minimum olması için m kaç olmalıdır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

11. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + mx + 6$ fonksiyonunun yerel ekstremlarına sahip olmaması için m nin alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(-\infty, 0)$ B) $(-\infty, 3]$ C) $[3, \infty)$
 D) $(0, \infty)$ E) $(1, \infty)$

12. $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \text{Arccos}x$

fonksiyonunun azalan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(2, -1)$ B) $(-1, 1)$ C) $(-\infty, 0)$
 D) $(-\infty, 1)$ E) $(1, \infty)$

13. $y = \frac{3x+2}{x^2+mx+9}$ eğrisinin düşey asymptotunun olmaması için m hangi aralıktaki olmalıdır?

- A) $(-8, 4)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $(-2, 8)$
 D) $(-4, 8)$ E) $(-6, 6)$

14. $x < 0$ olmak üzere $f(x) = e^x \cdot \cos x + x$ eğrisinin eğik asymptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = -x$ B) $y = x$ C) $y = x + 1$
 D) $y = x - 2$ E) $y = x + 3$

15. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ aralığında ortalamaya değer teoremini gerçekleyen x_0 değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x_1 x_2$ B) $\frac{x_1 - x_2}{2}$ C) $\frac{x_1 + x_2}{2}$
 D) $\frac{x_1 x_2}{2}$ E) $x_1 + x_2$