1 次独立と 1 次従属

定義 0.1 (1 次独立, 1 次従属). ベクトル空間 V の部分集合 $S \neq \emptyset$ の互いに異なるベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in S$ に対して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Longrightarrow a_i = 0\ ,\ i = 1, \cdots, n$$

が成り立つとき, S は **1 次独立**であるという. 1 次独立でないとき, S は **1 次従属**という.

$\mathbb{C}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}i\\2i\\1\end{bmatrix}$ に対して, 係数 $a_1 = i, a_2 = 1, a_3 = -1$ とすると,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = i\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}i\\2i\\1\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となるので, $\boldsymbol{0}$ と一致する 1 次結合の係数で自明でないものが存在している. よって $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次従属である.

次に $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ とすると,

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = a_1\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\ia_1 + a_2\\a_2\end{bmatrix}$$

であるから, $a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ となるのは, $a_1 = a_2 = 0$ のときに限る. よって $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は 1 次独立である.

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ をベクトル空間 V のベクトルとする.

命題 0.2. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ は互いに相異なる零でないベクトルである.

Proof. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ を 1 次独立とする. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ のうち等しいものを $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ とする.

$$0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 1\boldsymbol{v}_i + \cdots + (-1)\boldsymbol{v}_j \cdots + 0\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

であるから, すべては 0 でないスカラー $a_1 = 0, \cdots, a_i = 1, \cdots, a_j = -1, \cdots, a_p = 0$ によって

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$$

が満たされて, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立であることに反する.

また, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ のうち零ベクトル $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ があるとする.

$$0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 1\boldsymbol{v}_i + \cdots + 0\boldsymbol{v}_p = 1\boldsymbol{v}_i = 1\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となり, 同様に $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立であることに反する. □

命題 0.3. $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立ならば, その部分集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_q\} \subset S$ も 1 次独立である.

Proof. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_q\} \subset S$ が 1 次従属とし, すべては 0 でないスカラー $a_1, \cdots, a_q$ が存在して,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_q\boldsymbol{v}_q = \boldsymbol{0}$$

となるが,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_q\boldsymbol{v}_q + 0\boldsymbol{v}_{q+1} + \cdots + 0\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$$

は $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ の 1 次独立性に反する. □

命題 0.4. ただ一つのベクトル $\boldsymbol{v}$ の組 $\{\boldsymbol{v}\}$ が 1 次独立であるためには, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ となることが必要十分である.

Proof. 命題 0.2 より, $\{\boldsymbol{v}\}$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である.

逆に $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ とすると, $a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となるスカラー a は 0 に限る. もし $a \neq 0$ とすれば

$$a^{-1}(a\boldsymbol{v}) = \left(a^{-1}a\right)\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

となり $a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より

$$a^{-1}(a\boldsymbol{v}) = a^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

すなわち $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となって仮定に反する. □

命題 0.5. $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立であって, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}\}$ が 1 次従属ならば, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合で表せる.

Proof. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立とし, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}\}$ を 1 次従属とする. すべては 0 でないスカラー $a_1, a_2, \cdots, a_p, a$ があって

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_p\boldsymbol{v}_p + a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

とできる. ここでもし $a = 0$ とすると

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$$

となる. $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ の 1 次独立性より $a_1 = \cdots = a_p = 0$ となって, スカラーがすべて 0 となり仮定に反するので $a \neq 0$ である. 1 を変形して

$$\boldsymbol{v} = -\frac{a_1}{a}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{a_p}{a}\boldsymbol{v}_p$$

となる. したがって $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合である. □

命題 0.6. $p \geqslant 2$ のとき, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ が 1 次独立であるためには, どのベクトル $\boldsymbol{v}_i$ も他の $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合になっていないことが必要十分である.

Proof. いま $\boldsymbol{v}_i$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合となっているとする. このとき,

$$\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p$$

とすると

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i + c_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$$

となって $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ は 1 次従属となる.

逆に, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ を 1 次従属とする. すべては 0 ではない $a_1, a_2, \cdots, a_p$ があって

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つようにできる. もし $a_i \neq 0$ とすると,

$$\boldsymbol{v}_i = -\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}\boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - \frac{a_p}{a_i}\boldsymbol{v}_p$$

と $\boldsymbol{v}_i$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合である. □

$\mathbb{C}^n$ の n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して, 1 次結合を考えると,

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

となる. $a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ となるのは, $a_1 = \cdots = a_n = 0$ のときに限るので, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 1 次独立となる.

V を複素ベクトル空間としたとき, スカラーは $\mathbb{C}$ であるから, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次従属であるとは,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

をみたすような全ては 0 でないスカラー $a_i \in \mathbb{C}$ が存在することである. このとき $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{C}$ 上で 1 次従属であるという. これに対して, スカラー a_i がすべて実数でとれるとき, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{R}$ 上で 1 次従属であるという.

$\mathbb{C}$ 上で 1 次従属でないとき, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立といい, $\mathbb{R}$ 上で 1 次従属でないとき, $\mathbb{R}$ 上 1 次独立という.

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であるということは, (2) をみたすような $a_1, \cdots, a_n$ は実数の範囲だけで考えれば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ しかないということで, 複素数の範囲で考えると (2) をみたすようなすべては 0 でない $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が存在するかもしれない. したがって $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であっても $\mathbb{C}$ 上 1 次独立とは限らない. あるいは $\mathbb{C}$ 上 1 次従属であっても $\mathbb{R}$ 上 1 次従属になるとは限らない.

逆に $\mathbb{R}$ 上 1 次従属であれば $\mathbb{C}$ 上 1 次従属であるから, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立ならば $\mathbb{R}$ 上 1 次独立である.

例えば, $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -2 \end{bmatrix}$ において

$$2\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

だから $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次従属である. 一方 x_1, x_2 を実数としたとき,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ix_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2ix_2 \\ ix_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

だから $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ となるのは実数 x_1, x_2 は $x_1 = x_2 = 0$ のときに限る. したがって, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立である.

複素ベクトル空間においては, 1 次独立, 1 次従属といえば, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立, $\mathbb{C}$ 上 1 次従属ということである. 一般の実ベクトル空間においては, 1 次独立あるいは 1 次従属については, $\mathbb{R}$ 上と $\mathbb{C}$ 上の区別はない. 実ベクトル空間においては実数以外の複素数とベクトルとの積は考えられないから 1 次結合の係数は常に実数である. しかし数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ だけは事情がちがって, $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の部分集合と考えられるから, $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合 $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の範囲で考えていれば $x_1, \cdots, x_n$ は実数であるが, $\mathbb{C}^n$ の範囲で考えれば $x_1, \cdots, x_n$ は複素数としてよい.

$\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}$ 上の 1 次独立と $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}$ 上の 1 次独立は区別すべきではあるが, 実際はその必要が無いことが次の定理で示される.

定理 0.7. $\mathbb{C}^n$ の p 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_p$ の成分がすべて実数であるとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_p\}$ が $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であるならば, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立である.

Proof. $\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ として, $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ はすべて実数とする. いま複素数 $z_1, \cdots, z_p$ に対して,

$$z_1\boldsymbol{a}_1 + z_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + z_p\boldsymbol{a}_p = \sum_{j=1}^{p} z_j\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

となったとする. これを成分ごとに書くと,

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}z_j = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

となる. ここで x_j, y_j を実数として, $z_j = x_j + iy_j$ とすると,

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}z_j = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}x_j + i\left(\sum_{j=1}^{p} a_{kj}y_j\right) = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{5}$$

となって, a_{kj} が実数だから, (5) が成り立つのは

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj}x_j = 0 \text{ かつ } \sum_{j=1}^{p} a_{kj}y_j = 0 \tag{6}$$

のときである．これを列ベクトルに戻すと，

$$\sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{a}_j = \mathbf{0} \text{ かつ } \sum_{j=1}^{p} y_j \boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$$

ここで x_j, y_j はすべて実数であって，$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であって，

$$x_1 = \cdots = x_p = y_1 = \cdots = y_p = 0 \Rightarrow z_1 = \cdots = z_n = 0$$

となる． したがって，(4) に対して $z_1 = \cdots = z_p = 0$ となるから $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立となる． □

この定理 0.7 より，実数を成分とする数ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ は $\mathbb{R}^n$ の組と考えて 1 次独立ならば，$\mathbb{C}^n$ のベクトルの組と考えても 1 次独立であることがわかった．逆に $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ を $\mathbb{C}^n$ のベクトルの組と考えて 1 次独立ならば，$\mathbb{R}^n$ の組と考えても 1 次独立となる．

したがって数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次独立性あるいは 1 次従属性に関しては，すべて $\mathbb{C}^n$ のベクトルと考えてよい．

次の定理は 1 次独立かどうかの判定に有効である．

定理 0.8. n 個の n 次元の数ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

の組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立であるためには，これらのベクトルの成分からなる正方行列 $A = [a_{ij}]$ が正則であることが必要十分である．

Proof. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立であるということは，

$$\sum x_j \boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$$

をみたすスカラー $x_1, \cdots, x_n$ はすべて 0 であるということ．列ベクトルを成分で書くと，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が自明な解しかもたないということである．

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が自明ではない解を持つ} \Leftrightarrow A \text{ が正則でない}$$

だったので対偶をとると，

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が自明な解しか持たない} \Leftrightarrow A \text{ が正則である}$$

したがって題意を得る． □