有限群の表現論の基礎

野田 柊登

2024 年 1 月 10 日

概要

有限群の表現論についてまとめる．3 次と 4 次の対称群の指標表の完成を目標とする．

目次

1　有限群の表現

1.1　表現の定義

定義 1. G を有限群とし, V を係数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. 群 G の V 上の**表現**とは, 準同型 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ のことをいう. すなわち

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

が任意の $g, h \in G$ に対して成り立つものとする.

組 (ρ, V) のこと, あるいはベクトル空間 V のことを表現という場合もある.

命題 2. $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を表現とするとき, 次の性質が成り立つ.

(i) G の単位元 1_G に対して, $\rho(1_G) = E$.　ただし E は単位行列とする.

(ii) G の任意の元 s に対して, $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$.

証明　G の単位元 1_G に対して, 表現の定義より

$$\rho(1_G) = \rho(1_G 1_G) = \rho(1_G)\rho(1_G)$$

が成り立つ. $\rho(1_G) \in \mathrm{GL}(V)$ であるので $\rho(1_G)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ が存在して,

$$\rho(1_G)^{-1}\rho(1_G) = E$$

をみたす. よって

$$\rho(1_G) = \rho(1_G)^{-1}\rho(1_G) = E$$

が成り立ち, 主張の前半を得る. さらに G の任意の元 s に対して,

$$E = \rho(1_G) = \rho(s^{-1}s) = \rho(s^{-1})\rho(s).$$

以上より主張の後半も示された. □

ある元 $g \in G$ に対し, $\rho(g)\colon V \to V$ は線型変換である. したがって, V のある基底に関して, $\rho(g)$ を正則行列と同一視することができる. まず n 次元ベクトル空間 V の基底 $\{e_i\}_{i\in I}$ をひとつ固定する. ただし $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. ベクトル e_i を $\rho(g)$ で写した $\rho(g)(e_i) \in V$ もまた V の基底の一次結合で表わせる.

$$\rho(g)(e_i) = \sum_{i\in I} \rho(g)_{ij} e_i \quad (j \in I)$$

このときの係数 $\rho(g)_{ij}$ を (i,j) 成分にもつ行列 $[\rho(g)_{ij}]$ を考えることが出来る.

$$[\rho(g)_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho(g)_{11} & \rho(g)_{12} & \cdots & \rho(g)_{1n} \\ \rho(g)_{21} & \rho(g)_{22} & \cdots & \rho(g)_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ \rho(g)_{n1} & \rho(g)_{n2} & \cdots & \rho(g)_{nn} \end{bmatrix}$$

この $n \times n$ 行列 $[\rho(g)_{ij}]$ を $\rho(g)$ の $\{e_i\}_{i \in I}$ に関する**行列表示**という.

ここで G の 2 つの表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ と $\rho'\colon G \to \mathrm{GL}(V')$ を考える. もし線形同型 $\tau\colon V \to V'$ が存在して, すべての $g \in G$ で

$$\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$$

をみたすとき表現 ρ と ρ' は**同値な表現**であるという. ρ と ρ' が同値な表現のとき, $\rho \cong \rho'$ または $V \cong V'$ と表す. 注意しておきたいのは, $\rho \cong \rho'$ のとき, 同じ写像であるとは限らない. むしろ, 表現としての性質が同じであるということである.

例 3. $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\mathbb{R}^2$ 上での G の表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ を次のように定める. $g \in G$ に対して,

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^g.$$

さらに $V' = \mathbb{C}$ とする. $\mathbb{C}$ 上での G の表現 $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ を次のように定める.

$$\varphi(g) = i^g \in \mathbb{C}^\times$$

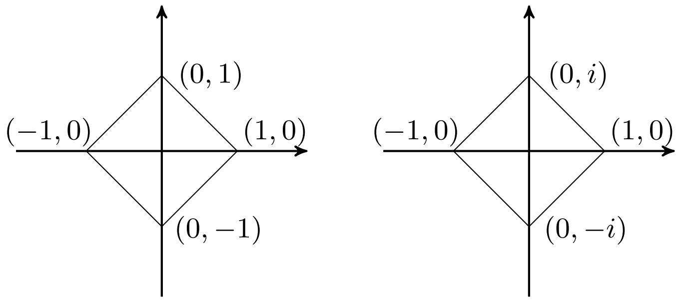
そこで同型写像 $\tau\colon \mathbb{R}^2 \ni \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$ を定めると, $\tau \circ \rho = \varphi \circ \tau$ が成り立つ. 例えば $G \ni g = \bar{1}$ のとき,

$$\tau \circ \rho \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \tau \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \tau \left(\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \right) = -y + ix$$

また

$$\varphi \circ \tau \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \varphi\,(x + iy) = i(x + iy) = -y + ix$$

G の任意の元について成り立つことも示せる. よって ρ と φ は同値な表現となる.



(a) $\rho(g)$ は $\mathbb{R}^2$ 上 $\frac{\pi}{2}g$ 回転　　(b) $\varphi(g)$ は $\mathbb{C}$ 上 $\frac{\pi}{2}g$ 回転

1.2　表現の例

例 4 (自明な表現). 任意の有限群を $(G,\cdot)$,$V=\mathbb{C}$ とする．任意の元 $g\in G$ に対して，$\mathbb{C}$ 上の表現 ρ を次のように定める．

$$\rho(g)=\mathrm{id}_V \qquad V\text{上の恒等写像}$$

ρ は $\mathbb{C}$ 上の 1 次元表現となる．任意の $g,h\in G$ に対して，

$$\rho(g\cdot h)=\mathrm{id}_V=\mathrm{id}_V\,\mathrm{id}_V=\rho(g)\rho(h)$$

が成り立つ．この表現を**自明な表現**という．V_{triv} と表す．□

例 5 (符号表現). $G=(S_n,\circ)$,$V=\mathbb{C}$ とする．$\sigma\in S_n$ に符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が定まっていた．S_n の $\mathbb{C}$ 上の表現 ρ を次のように定める．

$$\rho(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma)\in\mathbb{C}$$

ρ は 1 次元表現となる．任意の $\sigma,\sigma'\in S_n$ に対して，

$$\rho(\sigma\circ\sigma')=\mathrm{sgn}(\sigma\circ\sigma')=\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma')=\rho(\sigma)\rho(\sigma')$$

が成り立つ．この表現を**符号表現**という．V_{sgn} と表す．□

例 6. $G=(\mathbb{Z}_n,+)$,$V=\mathbb{C}$ とする．表現 ρ を次のように定める．

$$\rho(n)=e^{in\theta}\in\mathbb{C}\quad \theta\in[0,2\pi)$$

ρ は 1 次元表現となる．実際 $n,m\in\mathbb{Z}_n$ に対して，

$$\rho(n+m)=e^{i(n+m)\theta}=e^{in\theta}\cdot e^{im\theta}=\rho(n)\rho(m)$$

が成り立つ．□

例 7. $G=(\mathbb{Z}_n,+)$ $V=\mathbb{C}^3$ とする．$\rho\colon G\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ を次のように定める．

$$\rho(g)=\begin{bmatrix}1&0&g\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$$

ρ は 3 次元表現となる．任意の $g,h\in G$ に対して，

$$\rho(g+h)=\begin{bmatrix}1&0&g+h\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&g\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\rho(g)\rho(h)$$

が成り立つ．□

定義 8 (左正則表現 I). G を有限群とし，V を $\dim V=|G|$ であるベクトル空間とする．さらに $\{\mathbf{e}_t\}_{t\in G}$ を G の元でラベル付けられた V の基底とする．任意の元 $g\in G$ に対して ρ を次のように定める．

$$\rho(g)(\mathbf{e}_t)=\mathbf{e}_{gt}$$

これを G の**左正則表現**という．このとき (ρ,V) を (ρ_{reg},V_{reg}) で表す．

任意の $g,h,t\in G$ に対して，

$$\rho_{\mathrm{reg}}(gh)(\mathbf{e}_t)=\mathbf{e}_{ght}=\rho_{\mathrm{reg}}(g)(\mathbf{e}_{ht})=\rho_{\mathrm{reg}}(g)\rho_{\mathrm{reg}}(h)(\mathbf{e}_t)$$

が任意の $\mathbf{e}_t\in V$ について成り立つ．すなわち $\rho_{\mathrm{reg}}(gh)=\rho_{\mathrm{reg}}(g)\rho_{\mathrm{reg}}(h)$ が成り立つ．また G の単位元 $1_G\in G$ に対して，

$$\rho_{\mathrm{reg}}(g)(\mathbf{e}_{1_G})=\mathbf{e}_g$$

であるので，$\{\rho_{\mathrm{reg}}(g)(\mathbf{e}_{1_G})\}_{g\in G}$ は V の基底をなす．

例 9. 群 G を加法群 $\mathbb{Z}_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ とし，V の基底を次のようにとる．

$$\mathbf{e}_{\bar{0}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_{\bar{1}}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_{\bar{2}}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

この基底に関する $\mathbb{Z}_3$ の左正則表現 $\rho_{reg}(g)$ を行列表示する．まず元 $g=\bar{0}$ を固定すると，定義より次が求まる．

$$\begin{aligned}\rho_{reg}(\bar{0})(\mathbf{e}_{\bar{0}})&=\mathbf{e}_{\bar{0}+\bar{0}}=\mathbf{e}_{\bar{0}}\\\rho_{reg}(\bar{0})(\mathbf{e}_{\bar{1}})&=\mathbf{e}_{\bar{0}+\bar{1}}=\mathbf{e}_{\bar{1}}\\\rho_{reg}(\bar{0})(\mathbf{e}_{\bar{2}})&=\mathbf{e}_{\bar{0}+\bar{2}}=\mathbf{e}_{\bar{2}}\end{aligned}$$

したがって $\rho_{reg}(\bar{0})$ は, 行列 $\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$ と同一視できる. 同様にして $g=\bar{1},\bar{2}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{reg}}(\bar{1})(\mathbf{e}_{\bar{0}}) &= \mathbf{e}_{\bar{1}+\bar{0}} = \mathbf{e}_{\bar{1}} & \rho_{\mathrm{reg}}(\bar{2})(\mathbf{e}_{\bar{0}}) &= \mathbf{e}_{\bar{2}+\bar{0}} = \mathbf{e}_{\bar{2}} \\
\rho_{\mathrm{reg}}(\bar{1})(\mathbf{e}_{\bar{1}}) &= \mathbf{e}_{\bar{1}+\bar{1}} = \mathbf{e}_{\bar{2}} & \rho_{\mathrm{reg}}(\bar{2})(\mathbf{e}_{\bar{1}}) &= \mathbf{e}_{\bar{2}+\bar{1}} = \mathbf{e}_{\bar{0}} \\
\rho_{\mathrm{reg}}(\bar{1})(\mathbf{e}_{\bar{2}}) &= \mathbf{e}_{\bar{1}+\bar{2}} = \mathbf{e}_{\bar{0}} & \rho_{\mathrm{reg}}(\bar{2})(\mathbf{e}_{\bar{2}}) &= \mathbf{e}_{\bar{2}+\bar{2}} = \mathbf{e}_{\bar{1}}
\end{aligned}$$

となる. 以上より, $\mathbb{Z}_3$ の左正則表現 $\rho(g)$ を行列表示することが出来た.

$$\rho_{reg}(\bar{0}) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \rho_{reg}(\bar{1}) = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ \rho_{reg}(\bar{2}) = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

正則表現には別の定義が存在する. $\mathbb{C}^G$ を G 上の複素数値関数全体とする.

$$\mathbb{C}^G = \{\varphi \mid \varphi\colon G \to \mathbb{C}\}$$

さらに $g \in G$ の定義関数を次のように定義する.

$$\varphi_g(x) = \begin{cases} 1 & g = x \\ 0 & g \neq x \end{cases}$$

任意の $x, y \in G$ に対して, $\varphi_g(y^{-1}x) = \varphi_{yg}(x)$ が成り立つ. さらに定義関数全体は $\mathbb{C}^G$ の基底をなす. 任意の $f \in \mathbb{C}^G$ と群 $G = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$ に対して,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(g_i)\varphi_{g_i}\colon G \to \mathbb{C}$$

となるためである. $\dim \mathbb{C}^G = |G|$ が成り立つ.

定義 10 (左正則表現 II). 任意の元 $g, x \in G$ に対して, $\mathbb{C}^G$ 上の表現 ρ_l を次のように定める.

$$(\rho_l(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$$

これも G の**左正則表現**という.

例 11. $G = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ とする. 定義関数の集合 $\{\varphi_{\bar{0}}, \varphi_{\bar{1}}, \varphi_{\bar{2}}\}$ は $\mathbb{C}^G$ の基底をなす. 左正則表現 ρ_l の行列表示を求める. まず元 $g = \bar{0}$ を固定すると, 定義より次が求まる.

$$\begin{aligned}
(\rho_l(\bar{0})\varphi_{\bar{0}})(x) &= \varphi_{\bar{0}}(\bar{0}^{-1} + x) = \varphi_{\bar{0}+\bar{0}}(x) = \varphi_{\bar{0}}(x) \\
(\rho_l(\bar{0})\varphi_{\bar{1}})(x) &= \varphi_{\bar{1}}(\bar{0}^{-1} + x) = \varphi_{\bar{0}+\bar{1}}(x) = \varphi_{\bar{1}}(x) \\
(\rho_l(\bar{0})\varphi_{\bar{2}})(x) &= \varphi_{\bar{2}}(\bar{0}^{-1} + x) = \varphi_{\bar{0}+\bar{2}}(x) = \varphi_{\bar{2}}(x)
\end{aligned}$$

したがって $\rho_l(\bar{0})$ は, 行列 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ と同一視できる. 同様にして $g = \bar{1}, \bar{2}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(\rho_l(\bar{1})\varphi_{\bar{0}})(x) = \varphi_{\bar{1}+\bar{0}}(x) = \varphi_{\bar{1}}(x) \\
(\rho_l(\bar{1})\varphi_{\bar{1}})(x) = \varphi_{\bar{1}+\bar{1}}(x) = \varphi_{\bar{2}}(x) \\
(\rho_l(\bar{1})\varphi_{\bar{2}})(x) = \varphi_{\bar{1}+\bar{2}}(x) = \varphi_{\bar{0}}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\rho_l(\bar{2})\varphi_{\bar{0}})(x) = \varphi_{\bar{2}+\bar{0}}(x) = \varphi_{\bar{2}}(x) \\
(\rho_l(\bar{2})\varphi_{\bar{1}})(x) = \varphi_{\bar{2}+\bar{1}}(x) = \varphi_{\bar{0}}(x) \\
(\rho_l(\bar{2})\varphi_{\bar{2}})(x) = \varphi_{\bar{2}+\bar{2}}(x) = \varphi_{\bar{1}}(x)
\end{aligned}
$$

となる. 以上より, $\mathbb{Z}_3$ の左正則表現 $\rho_l(g)$ を行列表示することが出来た.

$$
\rho_l(\bar{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \rho_l(\bar{1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \rho_l(\bar{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

定義 8 と定義 10 によって同じ表現が得られた. 定義 8 では基底を用いているのに対して, 定義 10 では基底に依らずに左正則表現が定義されていることに注意したい.

定義 12 (群の作用). 群 G が集合 X に左から**作用する**とは, 写像

$$G \times X \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \in X$$

が存在して, 任意の $x \in X$ に対して次の条件をみたすときをいう.

- 任意の $g, h \in G$ に対して, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$
- G の単位元 e に対して, $e \cdot x = x$

群の作用を用いて表現を定義することが出来る.

定義 13 (置換表現). 群 G が有限集合 X に左から作用するとする. V の元は X によってラベルづけられているとする. 特に V の基底を $\{e_x\}_{x \in X}$ とする. 任意の $g \in G$ に対して, 表現 $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を

$$\rho(g)(e_x) = e_{gx}$$

と定めると ρ は n 次元表現となる. これを G の**置換表現**という. このとき (ρ, V) を (ρ_{perm}, V_{perm}) で表す.

置換表現の行列表示は, 置換行列となる.

定義 14 (置換行列). $n \times n$ 行列 P_σ が **置換行列**であるとは, 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して, 行列 P_σ の $(\sigma(i), i)$ 成分が 1 でそれ以外が 0 であるもの.

例 15 (置換表現の例). $G = S_3$ が集合 $X = \{1, 2, 3\}$ に作用しているとする. 置換 $\sigma = (12) \in S_3$ に関する置換表現 $\rho_{perm}(\sigma)$ は, 次の置換行列と同一視できる.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sigma(i) = i$ であることと, 置換行列 P_σ の対角成分 (i, i) が 1 であることは同値である.

定義 16 (表現の直和). 群 G の表現 $\rho_V \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ と $\rho_W \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ に対して,

$$\rho_{V \oplus W}(g) \colon V \oplus W \ni (v, w) \mapsto (\rho_V(g), \rho_W(g)) \in V \oplus W$$

と定めると $\rho_{V \oplus W}$ は $V \oplus W$ 上の表現となる. これを**表現の直和**という.

定義 17 (表現のテンソル積). 群 G の表現 $\rho_V\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ と $\rho_W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ に対して,

$$\rho_{V\otimes W}(g)\colon V \otimes W \ni (v, w) \mapsto \rho_V(g) \otimes \rho_W(g) \in V \otimes W$$

と定めると $\rho_{V\otimes W}$ は $V \otimes W$ 上の表現となる. これを**表現のテンソル積**という.

定義 18 (双対表現). 群 G の表現 $\rho_V\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ に対して, $\rho^*(g)\colon G \to \mathrm{GL}(V^*)$ を次のように定める. $g \in G, v \in V$ と $f \in V^*$ に対して,

$$(\rho^*(g)f)(v) = f(\rho(g^{-1})v)$$

すると ρ^* は表現となる. これを**双対表現**という.

$\rho_V\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ と $\rho_W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ をそれぞれ G の有限次元表現とする. さらに V から W への線形写像全体を $\mathrm{Hom}(V, W)$ で表す. 双対表現と表現のテンソル積を使って, $\mathrm{Hom}(V, W)$ 上の表現を作ることが出来る. 有限次元のとき $\mathrm{Hom}(V, W)$ は $V^* \otimes W$ と同一視出来る. よって $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して,

$$\left(\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)f\right)(v) = \rho_W(g)f(\rho_V(g^{-1})v)$$

と定めると $\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}$ は G の $\mathrm{Hom}(V, W)$ 上の表現となる. このとき, 以下の図が可換となる.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)f"'] & W \end{tikzcd}$$

$W = \mathbb{C}$ とし $\rho_W\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ を自明な表現とする. このとき $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) = V^*$ であるから, 双対表現は $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ 上の表現として捉えることも出来る.

1.3 部分表現

定義 19 (部分表現). G の有限次元表現を $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ とする．V の部分ベクトル空間 W が G の**部分表現**であるとは，任意の $w \in W$ に対して，$\rho(g)w \in W$ が成り立つときをいう．

G の任意の表現 V に対して，V 自身と $\{0\}$ は常に部分表現となる．これらを**自明な部分表現**という．

定義 20 (既約). G の有限次元表現 V が自明な部分表現以外の部分表現を持たないとき，V を**既約**であるという．

$\dim V = 1$ のとき明らかに表現 V は既約である．

定理 21 (マシュケの定理). 有限群 G に対して，$\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を V 上の表現とする．$W \subset V$ を部分表現とする．このとき，ある部分表現 $W_1 \subset V$ が存在して $V = W \oplus W_1$ をみたす．

証明　はじめに $\pi \colon V \to W$ を任意の V から W への射影とする．すなわち線形写像であって $\pi(w) = w$ が任意の $w \in W$ に対して成り立つものとする．ここで核 $\ker(\pi) \subset V$ は W の補空間であり，直和 $V = W \oplus \ker(\pi)$ が成り立つ．ただし $\ker(\pi)$ は必ずしも V の部分表現とは限らない．そこで次の写像を考える．

$$\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi \rho(g)^{-1}$$

すると $\pi' \colon V \to V$ は線形写像で次をみたす．もし $w \in W$ ならば

$$\begin{aligned}\pi'(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi \rho(g)^{-1}(w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g)^{-1}(w) \\ &= \frac{1}{|G|} |G| w = w.\end{aligned}$$

さらに π が射影だったので，任意の $v \in V$ に対して $\pi'(v) \in W$ が成り立つ．よって π' は V から W への射影であり $V = W \oplus \ker(\pi')$ が成り立つ．最後に $\ker(\pi')$ が部分表現と

なることを示す．任意の $h \in G, v \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
\pi'(\rho(h)v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\pi\rho(g)^{-1}(\rho(h)v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\pi\rho(g^{-1}h)(v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\pi\rho(h^{-1}g)^{-1}(v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(h^{-1})\rho(g)\pi\rho(h^{-1}g)^{-1}(v) \\
&= \rho(h)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h^{-1}g)\pi\rho(h^{-1}g)^{-1}(v) \\
&= \rho(h)\pi'(v)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし g は G の元全体を動くので，$h^{-1}g$ も G の元全体を動く．もし $v \in \ker(\pi')$ ならば $\rho(h)v \in \ker(\pi')$ が成り立つ．実際 $\pi'(\rho(h)v) = \rho(h)\pi'(v) = 0$ が成り立つ．以上より $W_1 = \ker(\pi')$ が部分表現となる． □

定理 22. 有限群 G の有限次元表現 V は，G の既約表現 V_i の直和に分解できる．

$$V = \bigoplus_i V_i$$

証明　$\dim V = 0$ のとき，$V = \{0\}$ ．$\dim V \geqslant 1$ のとき，V が既約ならば，$V = V \oplus \{0\}$ と分解できる．V が既約でないならば，定理 21 より $V = W_1 \oplus W_2$ と分解できる．ただし $\dim W_1 \geqslant \dim W_2$ とする．$\dim W_1 \geqslant 1$ と $\dim W_2 \geqslant 1$ である．定理 21 より有限回同じ操作を繰り返して W_i が既約になるまで分解出来る．以上より主張が示せた． □

注意　係数体 $F = \mathbb{C}$ が標数 0 であり代数閉体であることに注意．F の標数が 0 でない場合はより複雑である．

例 23 (既約分解の例と標準表現). $G = S_3$ の $V = \mathbb{C}^3$ 上の置換表現 π に関する既約表現を求める．置換 $\sigma \in S_3$ の表現 π に関して 不変な $\mathbb{C}^3$ の部分ベクトル空間を構成すればよい．$\mathbb{C}^3$ の基底を $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ をとる．すると表現 $\pi(\sigma)$ は, 基底の和 $v = e_1 + e_2 + e_3$ に対して,

$$\pi(\sigma)(v) = \pi(\sigma)(e_1 + e_2 + e_3) = e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} + e_{\sigma(3)} = v$$

のように作用する．v で生成される *1* 次元部分空間 $U \subset \mathbb{C}^3$ で表すと, U は, $\pi(\sigma)$ に関して不変な部分空間である．

$$U = \left\{\lambda v \mid v \in \mathbb{C}^3, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$$

$\dim U = 1$ より U は既約表現である．また U の直交補空間 $W \subset \mathbb{C}^3$ を考える．W は, $\mathbb{C}^3$ 上の超平面で U と直交するものである．

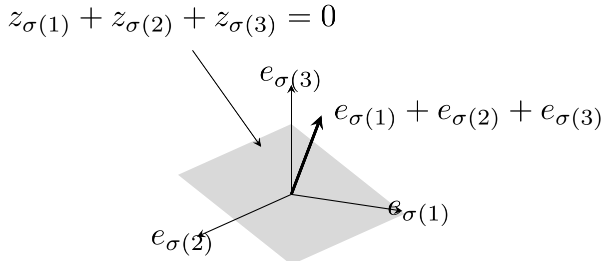
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$$

任意の点 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \in W$ に対して, 次が成り立つ．

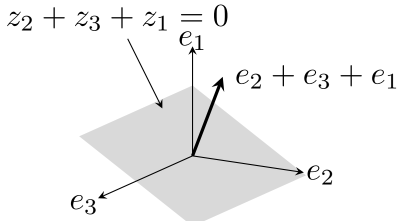
$$\pi(\sigma)\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z_{\sigma^{-1}(1)} \\ z_{\sigma^{-1}(2)} \\ z_{\sigma^{-1}(3)} \end{bmatrix} \in W$$

したがって W は, $\pi(\sigma)$ に関して不変な部分空間である．実は W は *2* 次元の既約表現となる．既約であることは, 指標の理論を用いて説明できる．よって $\mathbb{C}^3 = U \oplus W$ と分解される．このとき W を $\mathbb{C}^3$ における**標準表現**といい, V_{std} と表す．

下の図は $\mathbb{C}^3$ に $\pi(\sigma)$ を作用させたときの様子である．置換 $\sigma = (123)$ とした．$\pi(\sigma)$ を作用させても変化しない部分空間は U, W とわかる．



(a) Before



(b) After

図 1: 直観的なイメージ

1.4 シューアの補題

定義 24 (G-線形写像). $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1), \rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ を G の V_1, V_2 上の表現とする．線形写像 $f : V_1 \to V_2$ が G-**線形写像**であるとは, 任意の $v_1 \in V_1, g \in G$ に対して

$$f(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)f(v_1)$$

が成り立つときをいう.

f が G-線形写像であるとき, 以下の図が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \arrow[d, "f"] \\
V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

G-線形写像 f が線型同型であるとき, 表現 ρ_1, ρ_2 は同値な表現である. V_1 から V_2 への G-線形写像全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ で表す.

例 25 (G-線形写像の例). ρ_1, ρ_2 を G の V_1, V_2 上の表現とする． 任意の線形写像 $F\colon V_1 \to V_2$ に対して, F^0 を次のように定める:

$$F^0 = \frac{1}{|G|}\sum_{t \in G} \rho_2(t)^{-1} F \rho_1(t).$$

F^0 は G-線形写像となる. 任意の $s \in G$ に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\rho_2(s)^{-1}F^0\rho_1(s) &= \frac{1}{|G|}\sum_{t \in G} \rho_2(s)^{-1}\rho_2(t)^{-1} F \rho_1(t)\rho_1(s) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{t \in G} \rho_2(ts)^{-1} F \rho_1(ts) \\
&= F^0.
\end{aligned}$$

よって F^0 は G-線形写像となる.□

補題 26 (シューアの補題 I). G を有限群,V_1, V_2 を係数体 $\mathbb{C}$ 上有限次元ベクトル空間とする．ρ_1, ρ_2 をそれぞれ G の V_1, V_2 上の既約表現とする．任意の G-線形写像 $f : V_1 \to V_2$ に対して, 次が成り立つ.

(i) ρ_1 と ρ_2 が異なる表現のとき, $f = 0$.

(ii) ρ_1 と ρ_2 が同値表現で $V = V_1 = V_2$ のとき, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $f = \lambda\, \mathrm{id}_V$.

証明　まず $\ker(f), \mathrm{Im}(f)$ がそれぞれ V_1, V_2 の部分表現であることを示す．任意の $g \in G, v_1 \in \ker(f)$ に対して,

$$f(\rho(g)v_1) = \rho(g)f(v_1) = 0.$$

よって $\rho(g)v_1 \in \ker(f)$ が成り立つので $\ker(f)$ は V_1 の部分表現である．同様に, 任意の $g \in G, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ に対して, $v_1 \in V_1$ が存在して $f(v_1) = v_2$ をみたし,

$$\rho_2(g)v_2 = \rho_2(g)f(v_1) = f(\rho_2(g)v_1).$$

よって $\rho_2(g)v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ が成り立つので $\mathrm{Im}(f)$ は V_2 の部分表現である．仮定より, 既約表現 V_1, V_2 の部分表現 $\ker(f), \mathrm{Im}(f)$ は自明なものに限られるので,

(i) $\ker(f) = V_1$ または $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ が成り立ち, $f = 0$ となる.

(ii) $\ker(f) = \{0\}$ かつ $\mathrm{Im}(f) = V_2$ が成り立ち, f が同型写像となる.

のいずれかが成り立つ.

さらに f が同型写像となるとき, $\rho_1 \cong \rho_2$ となる．簡単のため $\rho = \rho_1 = \rho_2, V = V_1 = V_2$ とする．係数体 $\mathbb{C}$ が代数閉体であるから, f の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．固有値 λ に対する固有ベクトル $v \in V$ $(v \neq 0)$ も存在して $f(v) = \lambda v$ をみたす．そこで f の固有空間 $\mathcal{E}_\lambda \subset V$ を考える.

$$\{0\} \neq \mathcal{E}_\lambda = \{v \in V \mid (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v) = 0\}$$

任意の $g \in G, v \in \mathcal{E}_\lambda$ に対して,

$$f(\rho(g)v) = \rho(g)f(v) = \rho(g)\lambda v = \lambda\rho(g)v$$

が成り立つ．$v \in \mathcal{E}_\lambda$ に対して $\rho(g)v \in \mathcal{E}_\lambda$ が成り立つ．すなわち $\mathcal{E}_\lambda$ は V の部分表現である．($\mathcal{E}_\lambda = \ker(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)$ と考えても示せる.) 仮定より, V が既約表現なので, その部分表現 $\mathcal{E}_\lambda \neq \{0\}$ は $\mathcal{E}_\lambda = V$ に限られる．すなわち $f = \lambda\, \mathrm{id}_V$ が成り立つ．以上より主張が示せた. $\square$

V_1 から V_2 への G-線形写像全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ で表した．$V_1 \cong V_2$ のとき，G-同型写像 $\Phi\colon V_1 \to V_2$ を一つ固定して，任意の $f \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ に対して，$\Phi^{-1}f\colon V_1 \to V_1$ を考えると $\Phi^{-1}f = \lambda\,\mathrm{id}_{V_1}$ となる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．よって $f = \lambda\Phi$ と表せる．

このとき次が成り立つ．

補題 27 (シューアの補題 II). *V_1, V_2 が G の既約表現であるとき，以下が成り立つ．*

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & V_1 \cong V_2 \\ 0 & V_1 \not\cong V_2 \end{cases}$$

次の命題はシューアの補題の簡単な応用例である．今後の証明に用いる．

命題 28. *ρ_1, ρ_2 をそれぞれ V_1, V_2 の既約表現とする．例 25 の F^0 に対して次が成り立つ．*

(i) ρ_1, ρ_2 が異なる表現のとき，$F^0 = 0$

(ii) $\rho_1 = \rho_2$ で $V = V_1 = V_2$ のとき，$F^0 = \frac{1}{\dim V}\,\mathrm{tr}(F)\,\mathrm{id}_V$

証明　例 25 より F^0 は G-線形写像だったので，シューアの補題より ρ_1, ρ_2 が異なる表現のとき，$F^0 = 0$ が成り立つ．

同様にシューアの補題より，$\rho_1 = \rho_2$，$V = V_1 = V_2$ のとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $F^0 = \lambda\,\mathrm{id}_V$ が成り立つ．両辺のトレースを考えると

$$\mathrm{tr}\bigl(F^0\bigr) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \lambda\dim(V)$$

を得る．また F^0 の定義の両辺のトレースを取ると

$$\mathrm{tr}\bigl(F^0\bigr) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\mathrm{tr}\bigl(\rho(t)^{-1}F\rho(t)\bigr) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\mathrm{tr}(F) = \mathrm{tr}(F).$$

以上より係数 λ が求まる．

$$\lambda = \frac{1}{\dim V}\,\mathrm{tr}(F)$$

よって主張が示せた．□

2 指標の理論

2.1 指標の定義と性質

定義 29 (指標). $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を有限群 G の表現とする．ρ の**指標** $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ を次のように定義する．$s \in G$ に対して，

$$\chi_\rho(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$$

特に既約表現の指標を**既約指標**という．場合によって表現 (ρ, V) の指標を χ_V と表す．

命題 30 (指標の性質). G を有限群, V を $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間とし, $n = \dim V$ とする．$s \in G$ に対して, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ の指標を $\chi_\rho(s)$ とする．次が成り立つ．

(i) $\chi_\rho(1_G) = n$　1_G は G の単位元

(ii) $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$　ただし $\overline{z} \in \mathbb{C}$ は z の複素共役

(iii) $\chi_\rho(tst^{-1}) = \chi_\rho(s)$　が任意の $s, t \in G$ に対して成り立つ．

証明　$\rho(1_G)$ の行列表示は単位行列 E_n である．よってトレースは $\mathrm{tr}(E_n) = \dim(V) = n$ より $\chi_\rho(1_G) = n$ が成り立つ． 次に $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $g \in G$ の位数とし, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ を $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$ の固有値とする．ただし $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$．このとき各固有値 λ_i に対して, ある固有ベクトル $v \in V (v \neq 0)$ が存在して $\rho(g)v = \lambda_i v$ が成り立つ．$g^m = 1_G$ なので

$$\rho(g^m)(v) = \rho(1_G)(v) = E_n v = v$$

を得る．さらに ρ は準同型なので,

$$\rho(g^m)(v) = \rho(g)^m(v) = \lambda_i^m v$$

が成り立つ．よって $|\lambda_i| = 1$ を得る．$\lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$ すなわち $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$ が成り立つ．$\mathrm{tr}(\rho(s))$ は $\rho(s)$ の固有値の和なので, 次が成り立つ．

$$\overline{\chi_\rho(s)} = \overline{\mathrm{tr}(\rho(s))} = \sum_{i \in I} \overline{\lambda_i} = \sum_{i \in I} \lambda_i^{-1} = \mathrm{tr}\big(\rho(s)^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(\rho(s^{-1})\big) = \chi_\rho(s^{-1})$$

最後に, トレースの性質 $\mathrm{tr}\big(B^{-1}AB\big) = \mathrm{tr}(A)$ より次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\chi_\rho(tst^{-1}) &= \mathrm{tr}\big(\rho(tst^{-1})\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\rho(t)\rho(s)\rho(t)^{-1}\big) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(s)) \\ &= \chi_\rho(s)\end{aligned}$$

□

命題 31 (指標の直和, テンソル積). V と W を G の有限次元表現とし, それぞれの指標を χ_V, χ_W とする. $g \in G$ とする. 次が成り立つ.

(i) 表現 $V \oplus W$ の指標は和 $\chi_V + \chi_W$.

(ii) 表現 $V \otimes W$ の指標は積 $\chi_V \cdot \chi_W$.

(iii) 表現 V^* の指標は $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.

(iv) 表現 $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ の指標は $\chi_{V^*} \cdot \chi_W = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W$.

証明 V, W 上の G の表現をそれぞれ $\rho_V \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ と $\rho_W \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ とする. $\rho_V(g), \rho_W(g)$ の行列表示を, それぞれ A, B とする. このとき $V \oplus W$ 上の表現の行列表示は, 次のようになる.

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$$

したがって, 表現 $V \oplus W$ の指標は $\chi_V + \chi_W$ となる. 表現のテンソル積の場合は, 行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{kl})$ のクロネッカー積を考える.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A \otimes B) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}_{\text{Block}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_{ii}B) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\mathrm{tr}(B) \\
&= \mathrm{tr}(B) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
&= \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B)
\end{aligned}$$

したがって

$$\chi_{V \otimes W} = \mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B) = \chi_V \cdot \chi_W.$$

また双対表現の定義より, $f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\rho^*(g) = f\rho(g^{-1})^{-1}$$

したがって,

$$\chi_{V^*}(g) = \mathrm{tr}(\rho^*(g)) = \mathrm{tr}\big(f\rho(g^{-1})f^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(\rho(g^{-1})\big) = \chi_V(g^{-1})$$

が成り立つ. 表現 $\mathrm{Hom}(V,W)$ の指標 $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}$ を求める. $\mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W$ より,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} &= \chi_{V^*\otimes W}\\ &= \chi_{V^*}\cdot\chi_W\\ &= \chi_V(g^{-1})\cdot\chi_W\\ &= \overline{\chi_V(g)}\cdot\chi_W\end{aligned}$$

が成り立つ. □

命題 32. G の V, W 上の表現 ρ_V, ρ_W が同値な表現であるとき, 次が成り立つ.

$$V \cong W \Rightarrow \chi_V = \chi_W$$

証明 $V \cong W$ とする. このとき V から W への G-同型写像 f が存在する. すなわち, 任意の $g \in G$ に対して, $f\rho_V(g) = f\rho_W(g)$ が成り立つ. したがって

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}\big(f\rho_W(g)f^{-1}\big) = \mathrm{tr}(\rho_W(g)) = \chi_W(g)$$

が示された. □

2.2　既約指標の直交関係

G 上複素数値関数全体を $\mathbb{C}^G$ で表す.

$$\mathbb{C}^G = \{\varphi \mid \varphi\colon G \to \mathbb{C}\}$$

$\mathbb{C}^G$ は有限次元ベクトル空間となる.

定義 33. ϕ, φ を G 上の複素数値関数とする．このとき

$$(\phi \mid \varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\phi(g)\overline{\varphi(g)}$$

を $\mathbb{C}^G$ 上の内積とする.

既約指標は正規直交系をなす．その証明のためには, 命題 28 を行列表示に書き直す必要がある．行列 A の (i,j) 成分を A_{ij} で表す．つまり $A=(A_{ij})$. クロネッカーのデルタ δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

を使って, トレースは次のように書ける.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i\in I} A_{ii} = \sum_{i,j\in I}\delta_{ij}A_{ij}$$

ただし $i,j \in I = \{1,2,\ldots,n\}$.

$(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ をそれぞれ G の表現とする．$n=\dim V_1, m=\dim V_2$ とする．ρ_1, ρ_2 の行列表示をそれぞれ

$$\rho_1(g) = [\rho_1(g)_{ij}]\ ,\ \rho_2(g) = [\rho_2(g)_{kl}]$$

で表す．ただし $i,j\in I=\{1,2,\ldots,n\}, k,l \in J = \{1,2,\ldots,m\}$. 例 25 より, F の行列表示を $f_{\mu j}$ で表すと, F^0 の行列表示 $f^0_{\nu i}$ は次のようになる.

$$f^0_{\nu i} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{j\in I,\mu\in J}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}f_{\mu j}\rho_1(g)_{ji} \tag{1}$$

ただし $i,j\in I, \mu,\nu\in J$. ρ_1,ρ_2 が異なる表現のとき, 命題 28 より $F^0=0$ であるので

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{j\in I,\mu\in J}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}f_{\mu j}\rho_1(g)_{ji} = 0$$

が成り立つ. $F=(f_{\mu j})$ は任意だったから $i,j\in I,\mu,\nu\in J$ に対して,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}\rho_1(g)_{ji}=0 \tag{2}$$

が成り立つ.

また $\rho_1=\rho_2$, $V=V_1=V_2$ のとき, 命題 28 より $F^0=\lambda\,\mathrm{id}_V$ であるので

$$f^0_{\nu i}=\lambda\delta_{\nu i} \tag{3}$$

が成り立つ. さらに

$$\lambda=\frac{1}{n}\operatorname{tr}(F)=\frac{1}{n}\sum_{\mu,j\in I}\delta_{\mu j}f_{\mu j} \tag{4}$$

が成り立つ. (3),(4) より

$$f^0_{\nu i}=\frac{\operatorname{tr}(F)}{n}\delta_{\nu i}=\frac{1}{n}\sum_{\mu,j\in I}\delta_{\mu j}f_{\mu j}\delta_{\nu i} \tag{5}$$

が成り立つ. (1),(5) より

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\mu,j\in I}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}f_{\mu j}\rho_1(g)_{ji}=\frac{1}{n}\sum_{\mu,j\in I}\delta_{\mu j}f_{\mu j}\delta_{\nu i}$$

が成り立つ. $F=(f_{\mu j})$ は任意だったから, $i,j,\mu,\nu\in I$ に対して,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}\rho_1(g)_{ji}=\frac{1}{n}\delta_{\mu j}\delta_{\nu i} \tag{6}$$

を得る. (2),(6) より, 命題 28 の行列表示は次の (7) である.

$$\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}\rho_1(g)_{ji}=0 & \rho_1,\rho_2\text{ は異なる表現}\\ \displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g^{-1})_{\nu\mu}\rho_1(g)_{ji}=\frac{1}{n}\delta_{\mu j}\delta_{\nu i} & \rho_1=\rho_2\quad\text{ただし } n=\dim V\end{cases} \tag{7}$$

定理 34 (シューア直交関係). $(\rho, V), (\rho', W)$ をそれぞれ G の既約表現とする. $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ をそれぞれの指標とする. このとき次が成り立つ.

$$(\chi_\rho \mid \chi_{\rho'}) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \ncong W \end{cases}$$

証明 $g \in G$ に対して ρ, ρ' の行列表示をそれぞれ

$$\rho(g) = (\rho(g)_{ij}) \ , \ \rho'(g) = (\rho'(g)_{kl})$$

で表し, それぞれの指標 $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ のを

$$\chi_\rho(g) = \sum_{i \in I} \rho(g)_{ii} \ , \ \chi_{\rho'}(g) = \sum_{k \in J} \rho'(g)_{kk}$$

で表す. ただし $i, j \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, k, l \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $n = \dim V, m = \dim W$ とする. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(\chi_\rho \mid \chi_{\rho'}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i \in I, k \in J} \rho(g)_{ii} \overline{\rho'(g)_{kk}} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i \in I, k \in J} \rho(g)_{ii} \rho'(g^{-1})_{kk} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{i \in I, k \in J} \rho(h^{-1})_{ii} \rho'(h)_{kk} \quad \text{ただし} h = g^{-1}
\end{aligned}$$

$g, h \in G$ はともに G 上全体を動くので, 次を得る.

$$(\chi_\rho \mid \chi_{\rho'}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i \in I, k \in J} \rho(g^{-1})_{ii} \rho'(g)_{kk} \tag{8}$$

命題 28 の行列表示 (7) より,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \rho(g^{-1})_{ii} \rho'(g)_{kk} = 0 & \rho, \rho' \text{ は異なる表現} \\ \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \rho(g^{-1})_{ii} \rho'(g)_{kk} = \dfrac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{ik} = \dfrac{1}{n} \delta_{ik} & \text{ただし } \rho = \rho', \quad n = \dim V = \dim W \end{cases} \tag{9}$$

$V \neq W$ で ρ, ρ' が異なる表現のとき, (8),(9) より,

$$(\chi_\rho \mid \chi_{\rho'}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i \in I, k \in J} \rho(g^{-1})_{ii} \rho'(g)_{kk} = 0.$$

また $V=W$ で ρ,ρ' が同値な表現のとき, (8),(9) より,

$$(\chi_\rho \mid \chi_{\rho'}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,k\in I}\rho(g^{-1})_{ii}\rho'(g)_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{i,k\in I}\delta_{ik} = \frac{n}{n} = 1.$$

以上より既約指標は直交性をもつ. □

既約指標の直交関係 別の証明

直交関係を別の方法で証明する. ρ を G 上の V 上の表現とする. 次の集合を定義する.

$$V^G = \{v \in V \mid \rho(g)v = v \quad \forall g \in G\}$$

V^G の元を G-不変な元という.

V_1 から V_2 への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ で表す. その G-不変な元の集合 $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$ を考える.

補題 35. 係数体 $\mathbb{C}$ において $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2) = \mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$.

つまり V_1 から V_2 への G-線形写像全体 $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ と, G-不変な V_1 から V_2 への線形写像全体 $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$ は一致する.

証明 $f \in \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ とする. f は G-線型なので,

$$\begin{aligned} f(\rho_1(g)v_1) &= \rho_2(g)f(v_1) \\ \rho_2(g)^{-1}f(\rho_1(g)v_1) &= f(v_1) \\ \rho_2(g^{-1})f(\rho_1(g)v_1) &= f(v_1) \end{aligned}$$

を得る. ここで g^{-1} を g と置き換えると,

$$\rho_2(g)f(\rho_1(g^{-1})v_1) = f(v_1)$$

左辺は $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ 上の表現 $(\rho_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g)f)(v_1) = \rho_2(g)f(\rho_1(g^{-1})v_1)$ となる. したがって

$$(\rho_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g)f)(v_1) = f(v_1).$$

つまり $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ 上の表現に関して, f が G-不変な元である事が示せた. 逆に $f' \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G$ とする.

$$(\rho_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g)f')(v_1) = f'(v_1)$$

が成り立つ．前半の議論を遡ることで

$$f'(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)f'(v_1)$$

が示せる． □

補題 36. $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を表現とする．

$$\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\colon V \to V^G$$

と定めると π は G-線形で V^G への射影となる．

証明 任意の $g \in G$ and $v \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
\pi(\rho(h)v) &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\rho(h)\right)(v) \\
&= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(gh)\right)(v) = \pi(v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g) = \rho(h)\pi(v)
\end{aligned}$$

が成り立つ．g は G 上全体を動くので gh, hg も G 上全体を動く．$\pi(\rho(h)v) = \rho(h)\pi(v)$ なので π は G-線型である．また $\rho(h)\pi(v) = \pi(v)$ より，$\pi(v)$ は G-不変な元である．さらに $v \in V^G$ に対して，

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}v = v$$

よって π は V^G への射影となる． □

定理 37. 表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ の指標 χ_V で表す.

$$\dim V^G = \mathrm{tr}(\pi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

が成り立つ.

証明 π は V^G への射影なので, $\dim V^G = \mathrm{tr}(\pi)$ が $\dim V^G < \infty$ で成り立つ. さらに

$$\mathrm{tr}(\pi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

□

定理 38 (シューア直交関係). $(\rho, V), (\rho', W)$ をそれぞれ G の既約表現とする. χ_V, χ_W をそれぞれの指標とする. このとき次が成り立つ.

$$(\chi_V \mid \chi_W) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

証明 補題 35, 定理 37 と命題 31 より, $\pi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W)^G$ に注意して,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) &= \dim \mathrm{Hom}(V, W)^G \\ &= \mathrm{tr}(\pi) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V}\cdot\chi_W \\ &= (\chi_V \mid \chi_W) \end{aligned}$$

ここでシューアの補題 27 より

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 1 & V_1 \cong V_2 \\ 0 & V_1 \not\cong V_2 \end{cases}$$

なので, 直交関係が示された. □

2.3 既約条件

定理 39. 有限群 G の表現 V の指標を χ_V とする．V が既約表現 W_i の直和に分解されたとする．

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

ここで V の既約表現の一つを S, その指標を χ_S とする．内積 $(\chi_V \mid \chi_S)$ の値は, 既約表現 S と同値な既約表現 W_i の数と一致する．

証明　$W_1, W_2, \cdots, W_k$ の既約指標をそれぞれ $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_k$ とする．$V = \bigoplus_i W_i$ なので, 命題 31 より

$$\chi_V = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_k$$

が成り立つ．χ_V と χ_S の内積を取ると, 線型性より

$$(\chi_V \mid \chi_S) = (\chi_1 \mid \chi_S) + (\chi_2 \mid \chi_S) + \cdots + (\chi_k \mid \chi_S) = \sum_{i=1}^{k} (\chi_i \mid \chi_S)$$

が成り立つ．定理 34 より既約指標には直交関係が成り立つ．

$$(\chi_i \mid \chi_S) = \begin{cases} 1 & W_i \cong S \\ 0 & W_i \ncong S \end{cases}$$

したがって $(\chi_V \mid \chi_W)$ の値は, $W_i \cong S$ となるような W_i の数と一致する．　□

定理 22 より, 表現 V がその既約表現 V_i に分解されたとする．

$$V = \bigoplus_i V_i$$

この既約分解は, 一意的ではない．既約表現のひとつ V_j と同型な表現がいくつか含まれているためである．V_j と同型な表現の直和を $V_j^{\oplus a_j}$ で表す．$V_j^{\oplus a_j}$ のことを *isotypic component* という．このとき表現 V の *isotypic components* への分解を**標準分解**という．

$$V = \bigoplus_{j=1}^{h} V_j^{\oplus a_j}$$

a_j を V_j の**重複度**という．χ_V を V の指標とし, $\chi_1, \ldots, \chi_h$ を $V_1, \ldots, V_h$ の異なる既約指標とする．定理 39 より重複度 $a_j = (\chi_V \mid \chi_j)$ が成り立つ．また

$$\chi_V = a_1\chi_1 + \cdots + a_h\chi_h$$

より χ_V と χ_V の内積を計算すると,

$$(\chi_V \mid \chi_V) = \sum_{j=1}^{h} a_j^2$$

$(\chi_V \mid \chi_V) = 1$ となるのは, ある一つの重複度が $a_j = 1$ である場合のみ. そのとき V は既約である. よって次の命題が成り立つ.

命題 40. V を有限群 G の表現とする. V の指標 χ_V とする. 以下は同値となる.

(i) V が既約表現である.

(ii) 内積 $(\chi_V \mid \chi_V) = 1$.

2.4 正則表現の指標

$(\rho_{\mathrm{reg}}, V_{\mathrm{reg}})$ を G の左正則表現 (例 8) とする. G の位数を $|G|$ とし, 単位元を 1_G で表す. V_{reg} の基底 $\{e_t\}_{t\in G}$ に対して, $\dim V_{\mathrm{reg}} = |G|$ かつ $\rho_{\mathrm{reg}}(g)e_t = e_{gt}$ が成り立つ. $G \ni g \neq 1_G$ に対して $gt \neq t$ が成り立つ. つまり $\rho_{\mathrm{reg}}(g)e_t = e_{gt} = e_t$ が成り立つような g は G の単位元のみ. そのとき $\rho_{\mathrm{reg}}(1_G)$ は単位行列 E である.

定理 41. 正則表現の指標 χ_{reg} に対して次が成り立つ.

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & g = 1_G \\ 0 & g \neq 1_G \end{cases}$$

証明 $g = 1_G$ のとき,

$$\chi_{\mathrm{reg}}(1_G) = \mathrm{tr}(\rho_{\mathrm{reg}}(g)) = \mathrm{tr}(E) = \dim(V_{\mathrm{reg}}) = |G|$$

が成り立つ. また $g \neq 1_G$ のとき, $\rho_{\mathrm{reg}}(g)$ の行列表示は対角成分がすべて 0 なので $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \mathrm{tr}(\rho_{\mathrm{reg}}(g)) = 0$ が成り立つ. □

命題 42. V_{reg} の既約表現 V_i の重複度は $\dim V_i$ である.

証明 V_{reg} の既約分解を $V_{\mathrm{reg}} = \bigoplus_i V_i$ とする. V_i の既約指標をそれぞれ χ_i とする. 定

理 39 より, V_i の重複度は $(\chi_{\mathrm{reg}}|\chi_i)$ である.

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{reg}}|\chi_i) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{reg}}(g^{-1})\chi_i(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\chi_{\mathrm{reg}}(1_G)\chi_i(1_G) \quad g=1_G \text{ 以外の項はゼロ} \\
&= \frac{1}{|G|}|G|\ \chi_i(1_G) \\
&= \chi_i(1_G) = \dim V_i
\end{aligned}$$

よって V_i の重複度は $\dim V_i$ と等しい. □

一般に既約分解 $V_{\mathrm{reg}} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ に対して,

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{i=1}^{k}\chi_i(g) \qquad (g\in G)$$

V_i の重複度は $\dim(V_i)$ だったので互いに異なる $h \leqslant k$ 個の既約表現 V_j に対して,

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{i=1}^{k}\chi_i(g) = \sum_{j=1}^{h}(\dim V_j)\chi_j(g)$$

が成り立つ. よって任意の $g\in G$ に対して,

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \sum_{i=1}^{h}(\dim V_i)\chi_i(g) \tag{10}$$

が成り立つ. 定理 41 と命題 42 より次の命題を得る.

命題 43. G の互いに異なる既約表現 V_i に対して,

$$(\dim V_1)^2 + (\dim V_2)^2 + \cdots + (\dim V_h)^2 = |G|.$$

が成り立つ. さらに $G \ni g \neq 1_G$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sum_{j=1}^{h}(\dim V_j)\chi_j(g) = 0$$

証明　等式 (10) より, $g = 1_G$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}|G| = \chi_{\mathrm{reg}}(1_G) &= \sum_{j=1}^{h} (\dim V_j)\chi_j(1_G) \\ &= \sum_{j=1}^{h} (\dim V_j)(\dim V_j) \\ &= \sum_{j=1}^{h} (\dim V_j)^2\end{aligned}$$

また $g \neq 1_G$ のとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{j=1}^{h} (\dim V_j)\chi_j(g) = \chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0$$

□

2.5　既約指標の数

$g, h \in G$ が共役であるとは, $k \in G$ が存在して $h = kgk^{-1}$ が成り立つときである. $x \in G$ と共役な元をすべて集めた集合 $C_G(x) = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$ のことを共役類といった. G 上の類関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ とは $s, t \in G$ に対して,

$$f(sts^{-1}) = f(s)$$

をみたす G 上の関数であった. つまり類関数 $f\colon G \to \mathbb{C}$ は, G の共役類上で定数値となる. G 上の類関数全体を $\mathcal{C}(G)$ とする. 任意の元 $g \in G$ に対して, 類関数 $\chi, \varphi \in \mathcal{C}(G)$ の和, 積, スカラー倍を次のように定める.

$$\begin{aligned}(\chi + \varphi)(g) &= \chi(g) + \varphi(g) \\ (\chi \cdot \varphi)(g) &= \chi(g) \cdot \varphi(g) \\ (\lambda \cdot \chi)(g) &= \lambda \cdot \chi(g) \quad (\lambda \in \mathbb{C})\end{aligned}$$

すると $\mathcal{C}(G)$ は有限次元ベクトル空間となる. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ より, 指標 χ は類関数であるので $\chi \in \mathcal{C}(G)$.

命題 44. $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を表現とする．任意の G 上の類関数 $f \in \mathcal{C}(G)$ に対して, 新たに写像 $\varphi_f\colon V \to V$ を次のように定める．

$$\varphi_f = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)$$

このとき φ_f は G-線形写像である．

証明

$$\begin{aligned}
\rho(h)^{-1}\varphi_f\rho(h) &= \sum_{g\in G} f(g)\rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h) \\
&= \sum_{g\in G} f(g)\rho(h^{-1}gh) \\
&= \sum_{s\in G} f(hsh^{-1})\rho(s) \qquad (s = h^{-1}gh) \\
&= \sum_{s\in G} f(s)\rho(s) \\
&= \varphi_f
\end{aligned}$$

ただし g は G 上全体を動くので $s = h^{-1}gh$ も G 上全体を動く．よって $\varphi_f \circ \rho = \rho \circ \varphi_f$ が成り立ち, φ_f は G-線形写像である． □

命題 45. $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を G の V 上既約表現とする．既約指標を χ で表すと,

$$\varphi_f = \frac{|G|}{\dim V}\,(f|\overline{\chi})\,\mathrm{id}_V$$

が成り立つ．

証明　V は G の既約表現であり $\varphi_f\colon V \to V$ は G-線型写像なので, シューアの補題 26 より, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\varphi_f = \lambda\,\mathrm{id}_V$$

が成り立つ．λ を求める．両辺のトレースを取ると, $\mathrm{tr}(\varphi_f) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \lambda \dim V$ が成り立つ．また, 定義より $\varphi_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho(t)$ だったので両辺のトレースを取ると,

$$\mathrm{tr}(\varphi_f) = \mathrm{tr}\left(\sum_{t\in G} f(t)\rho(t)\right) = \sum_{t\in G} f(t)\,\mathrm{tr}(\rho(t)) = \sum_{t\in G} f(t)\chi(t)$$

よって λ が求まる.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\dim V}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)\\ &= \frac{|G|}{\dim V}\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} f(t)\overline{\chi(t^{-1})}\\ &= \frac{|G|}{\dim V}(f|\overline{\chi}) \quad (\cdot|\cdot)\text{ は}\mathbb{C}^G\text{の内積}\end{aligned}$$

以上より

$$\varphi_f = \frac{1}{\dim V}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)\,\mathrm{id}_V = \frac{|G|}{\dim V}(f|\overline{\chi})\,\mathrm{id}_V$$

が成り立つ. □

定理 46. 既約指標 $\{\chi_1,\ldots,\chi_h\}$ は $\mathcal{C}(G)$ の正規直交基底となる.

証明 既約指標の直交関係より, $\{\chi_1,\ldots,\chi_h\}$ は正規直交系であり一次独立である. $\mathcal{C}(G)$ の任意の元が, $\{\chi_1,\ldots,\chi_h\}$ で生成されることを示す. K を χ_i で生成される $\mathcal{C}(G)$ の部分空間とし, その直交補空間を $K^\perp = \{f\in\mathcal{C}(G) \mid (f|\chi_i)=0 \quad i=1,\ldots,h\}$ と表す. 直和 $\mathcal{C}(G) = K\oplus K^\perp$ が成り立つ. 次を示せばよい.

$$f\in\mathcal{C}(G)\text{が }(f|\chi_i)=0\ (i=1,\ldots,h)\text{ をみたす}\Longrightarrow f=0\text{が成り立つ.}$$

そこで $f\in\mathcal{C}(G)$ が $(f|\chi_i)=0$ をみたすと仮定する. G の任意の既約表現 $\rho\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ に対して, 写像 $\varphi_f\colon V\to V$ を

$$\varphi_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)$$

と定める. ρ が既約であるから, 命題 45 より

$$\varphi_f = \frac{|G|}{\dim V}(f|\overline{\chi})\,\mathrm{id}_V$$

が成り立つ. 仮定より $(f|\chi)=0$ なので $\varphi_f=0$ が成り立つ. どんな表現も既約表現の直和に分解できることから, 特に左正則表現 ρ_l に対しても

$$\varphi_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho_l(g) = 0$$

が成り立つ．ここで V の基底を $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ と表す．

$$\varphi_f(e_1) = \sum_{g \in G} f(g)\rho_l(g)(e_1) = \sum_{g \in G} f(g)e_g = 0$$

なので $f(g) = 0$ が任意の $g \in G$ について成り立つ．よって $f = 0$ が成り立つ． □

定理 47. G の同値でない既約表現の数は, G の共役類の数と等しい．

証明 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ を G の互いに異なるすべての共役類とする．$f\colon G \to \mathbb{C}$ が G 上の類関数であるとき, C_i 上で定数値関数となる．元 $x \in G$ の共役類 $C_i(x)$ 上での $f(x)$ の値を λ_i とする．$(\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ の値を決めれば, 類関数 f が定まる．よって $\dim \mathcal{C}(G) = h$ が成り立つ．定理 46 より主張を得る． □

命題 48. $s \in G$ の共役類 $C_G(s)$ の個数を $|C_G(s)|$ で表す．次が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{|G|}{|C_G(s)|}$$

さらに s と共役でない $t \in G$ に対して, 次が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$$

証明 関数 $f_s\colon G \to \mathbb{C}$ を次のように定める．

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & s\text{と}t\text{が共役} \\ 0 & s\text{と}t\text{が共役でない} \end{cases}$$

明らかに $f_s \in \mathcal{C}(G)$ である．定理 46 より, 既約指標 $\{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$ の一次結合で表すと $f_s = \sum_j \lambda_j \chi_j$ となる．χ_i との内積を計算すると,

$$(f_s \mid \chi_i) = \sum_j \lambda_j (\chi_j \mid \chi_i) = \lambda_i$$

ここで $C_G(g)$ 上で $f_s(g)=1$ であるから, 内積の定義より,

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= (f_s \mid \chi_i) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_s(g)\overline{\chi_i(g)} \\
&= \frac{1}{|G|}|C_G(g)|\overline{\chi_i(g)}
\end{aligned}
$$

したがって任意の $s,t\in G$ に対して,

$$f_s(t)=\sum_i \lambda_i\chi_i(t)=\frac{|C_G(s)|}{|G|}\sum_i \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)$$

を得る. 関数 f_s の定義より

$$\frac{|C_G(s)|}{|G|}\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)=f_s(t)=\begin{cases}1 & s\text{と}t\text{が共役}\\ 0 & s\text{と}t\text{が共役でない}\end{cases}$$

よって主張は示された. □

2.6 指標の理論のまとめ

指標の理論で現れた基本的な定理・命題を再度挙げる.

- 既約指標 χ_ρ, χ_φ は内積 $(\chi_\rho \mid \chi_\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_\varphi(g)}$ に関して直交関係にある (定理 34).

$$(\chi_\rho|\chi_\varphi) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \ncong W \end{cases}$$

- 表現 V の指標 χ_V に対して, 次が成り立つ (命題 40).

$$(\chi_V|\chi_V) = 1 \Leftrightarrow V\text{が既約表現}$$

- 正則表現の指標 χ_{reg} に対して, 次が成り立つ (定理 41).

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & g = 1_G \\ 0 & g \neq 1_G \end{cases}$$

- 正則表現 V_{reg} の既約表現 V_i の重複度 m_i は $\dim(V_i)$ である (命題 42).
- 既約分解 $V_{\mathrm{reg}} = \bigoplus_{i=1}^h V_i^{m_i}$ に対して既約指標 χ_i は次を満たす (命題 31,42).

$$\chi_{\mathrm{reg}} = (\dim V_1)\chi_1 + (\dim V_2)\chi_2 + \cdots + (\dim V_h)\chi_h$$

- 既約表現の次数の二乗の和は G の位数と等しい (命題 43).

$$(\dim V_1)^2 + (\dim V_2)^2 + \cdots + (\dim V_h)^2 = |G|.$$

- 既約指標 $\{\chi_i\}$ は類関数全体 $\mathcal{C}(G)$ の基底をなす (定理 46).
- 同値でない既約表現の数は共役類の数と等しい (定理 47).
- 既約指標 χ_i の第二の直交関係が成り立つ (命題 48).

$$\sum_{i=1}^h \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_G(s)|} & s\text{と}t\text{が共役} \\ 0 & s\text{と}t\text{が共役でない} \end{cases}$$

3　指標表

3.1　指標表の定義

有限群 G の指標表とは, 指標の値を次のように並べた表である.

- 行に G の既約表現を並べる.
- 列に G の共役類を並べる.
- 成分を共役類上での既約表現の指標の値とする.

3.2　3 次対称群の指標表

3 次対称群 S_3 の指標表を調べる.

$$S_3 = \{(), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

S_3 は, 3 つの要素 (a, b, c) の置換全体である. たとえば,

$$\begin{aligned} ()\,(a, b, c) &= (a, b, c) \\ (12)\,(a, b, c) &= (b, a, c) \\ (123)\,(a, b, c) &= (c, a, b) \end{aligned}$$

元 $\sigma \in S_3$ を含む共役類を $C_G(\sigma)$ で表す. 群論の知識より, S_3 の共役類は 3 つ存在する.

$$\begin{aligned} C_G(()) &= \{()\} \\ C_G((12)) &= \{(12), (13), (23)\} \\ C_G((123)) &= \{(123), (132)\} \end{aligned}$$

定理 47 より既約表現の数は共役類の数と等しいので, 3 つの既約表現が存在する. はじめに 1 次元表現である自明な表現 V_{triv} を考える. 自明な表現の指標は, 任意の $\sigma \in S_3$ に対して $\chi_{\mathrm{triv}}(\sigma) = 1$ なので, 指標表の 1 行目を得る.

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$
V_{triv}	1	1	1

次に, 1 次元表現である符号表現 V_{sgn} を考える．$C_G(())$ と $C_G((123))$ の元は偶置換なので, $\sigma \in C_G(()) \cup C_G((123))$ に対して, 符号は $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である．$\sigma \in C_G((12))$ に対して, 符号は $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である．したがって指標 $\chi_{\mathrm{sgn}}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ より次が分かる．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$
V_{triv}	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1

命題 43 より, $1^2 + 1^2 + n^2 = |S_3| = 3! = 6$ なので, 最後の既約表現は 2 次元表現とわかる．不明な 2 次元表現を W で表すと, 単位元 $() \in S_3$ の指標は, $\chi_W(()) = 2$ だけわかる．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$
V_{triv}	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1
W	2	x	y

指標の直交関係 (定理 34) より, 残りの指標の値 x, y を計算できる．共役類の要素の個数はそれぞれ

$$|C_G(())| = 1\,, \quad |C_G((12))| = 3\,, \quad |C_G((123))| = 2$$

である．共役類の要素の数だけ倍にするのに注意して, 内積を計算すると,

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{triv}} \mid \chi_W) &= \frac{1}{|S_3|}\{\chi_{\mathrm{triv}}(()) \cdot \chi_W(()) \cdot |C_G(())| + \chi_{\mathrm{triv}}((12)) \cdot \chi_W((12)) \cdot |C_G((12))| \\
&\quad + \chi_{\mathrm{triv}}((123)) \cdot \chi_W((123)) \cdot |C_G((123))|\} \\
&= \frac{1}{6}\{1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot 3 + 1 \cdot y \cdot 2\} \\
&= \frac{1}{6}\{2 + 3x + 2y\} = 0
\end{aligned}$$

を得る．同様にして,

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{sgn}} \mid \chi_W) &= \frac{1}{|S_3|}\{\chi_{\mathrm{sgn}}(()) \cdot \chi_W(()) \cdot |C_G(())| + \chi_{\mathrm{sgn}}((12)) \cdot \chi_W((12)) \cdot |C_G((12))| \\
&\quad + \chi_{\mathrm{sgn}}((123)) \cdot \chi_W((123)) \cdot |C_G((123))|\} \\
&= \frac{1}{6}\{1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot x \cdot 3 + 1 \cdot y \cdot 2\} \\
&= \frac{1}{6}\{2 - 3x + 2y\} = 0
\end{aligned}$$

である．したがって $x=0, y=-1$ を得る．以上より S_3 の指標表を得る．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$
V_{triv}	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1
W	2	0	-1

表 1: S_3 の指標表

3.3　4 次対称群の指標表

4 次対称群 S_4 の指標表を調べる．

$$
\begin{aligned}
S_4 = \{&(),\\
&(12),(13),(14),(23),(24),(34),\\
&(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),\\
&(12)(34),(13)(24),(14)(23),\\
&(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\}
\end{aligned}
$$

S_4 は, 4 つの要素 (a,b,c,d) の置換全体である．元 $\sigma \in S_4$ を含む共役類を $C_G(\sigma)$ で表す．群論の知識より, S_4 の共役類は 5 つ存在する．

$$
\begin{aligned}
C_G(()) &= \{()\}\\
C_G((12)) &= \{(12),(13),(14),(23),(24),(34)\}\\
C_G((123)) &= \{(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\}\\
C_G((12)(34)) &= \{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}\\
C_G((1234)) &= \{(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\}
\end{aligned}
$$

定理 47 より既約表現の数は共役類の数と等しいので, 5 つの既約表現が存在する．はじめに 1 次元表現である自明な表現 V_{triv} を考える．自明な表現の指標は, 任意の $\sigma \in S_4$ に対して $\chi_{\mathrm{triv}}(\sigma)=1$ なので, 指標表の 1 行目を得る．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1

次に, 1 次元表現である符号表現 V_{sgn} を考える. $C_G(())$ と $C_G((123))$ と $C_G((12)(34))$ の元は偶置換なので, それ以外は奇置換である. 指標 $\chi_{\mathrm{sgn}}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ より次が分かる.

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1	1	-1

ここで S_4 の標準表現 V_{std} の指標を求める. まず $\mathbb{C}^4$ 上の置換表現 V_{perm} を考える. 置換表現の行列表示は置換行列となる. 置換行列のトレースは, 置換の前後で変化しない数字の数と一致する. そのため指標 χ_{perm} は次のようになる.

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
$V_{\mathbb{C}^4}$	4	2	1	0	0

表 2: V_{perm} の指標表

例 23 と同じように, $\mathbb{C}^4 = U \oplus V_{\mathrm{std}}$ と既約分解できる. 実は $U \cong V_{\mathrm{triv}}$ である. それぞれの指標 $\chi_U, \chi_{\mathrm{triv}}$ の内積を計算する.

$$(\chi_U \mid \chi_{\mathrm{triv}}) = \frac{1}{24}\{4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 8\} = 1$$

なので $U \cong V_{\mathrm{triv}}$ とわかる. 指標は $\chi_{\mathrm{perm}} = \chi_{\mathrm{triv}} + \chi_{\mathrm{std}}$ であるので,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{std}} &= \chi_{\mathrm{perm}} - \chi_{\mathrm{triv}} \\ &= (4, 2, 1, 0, 0) - (1, 1, 1, 1, 1) \\ &= (3, 1, 0, -1, -1).\end{aligned}$$

また $(\chi_{\mathrm{std}} \mid \chi_{\mathrm{std}}) = \frac{1}{24}\{9 + 6 + 3 + 6\} = 1$ より, V_{std} は既約表現である.

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1	1	-1
V_{std}	3	1	0	-1	-1

またテンソル積 $\Lambda_{\mathrm{std}} = V_{\mathrm{std}} \otimes V_{\mathrm{sgn}}$ を考える．表現 Λ_{std} の指標 $\chi_{\Lambda_{\mathrm{std}}}$ は,

$$\begin{aligned}\chi_{\Lambda_{\mathrm{std}}} &= \chi_{V_{\mathrm{std}}} \cdot \overline{\chi_{V_{\mathrm{sgn}}}} \\ &= (3 \cdot 1, 1 \cdot (-1), 0 \cdot 1, -1 \cdot 1, -1 \cdot (-1)) \\ &= (3, -1, 0, -1, 1).\end{aligned}$$

また $(\chi_{\Lambda_{\mathrm{std}}} \mid \chi_{\Lambda_{\mathrm{std}}}) = 1$ も同様に成り立ち, Λ_{std} は既約表現である．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1	1	-1
V_{std}	3	1	0	-1	-1
Λ_{std}	3	-1	0	-1	1

命題 43 より, $1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + n^2 = |S_4| = 4! = 24$ なので, 最後の既約表現は 2 次元表現とわかる．不明な 2 次元表現を W で表すと, 単位元 $() \in S_4$ の指標は, $\chi_W(()) = 2$ だけわかる．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1	1	-1
V_{std}	3	1	0	-1	-1
Λ_{std}	3	-1	0	-1	1
W	2	x	y	z	w

指標の直交関係 (定理 34) より, 残りの指標の値 x, y, z, w を計算できる．共役類の要素の個数はそれぞれ

$$|C_G(())| = 1,\ |C_G((12))| = 6,\ |C_G((123))| = 8,\ |C_G((12)(34))| = 3,\ |C_G((1234))| = 6$$

である．共役類の要素の数だけ倍にするのに注意して, 内積を計算すると,

$$\begin{aligned}(\chi_{\mathrm{std}} \mid \chi_W) &= \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_{\mathrm{std}}(\sigma) \cdot \overline{\chi_W(\sigma)} \\ &= \frac{1}{24} \{3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot 6 + 0 + (-1) \cdot z \cdot 3 + (-1) \cdot w \cdot 6\} \\ 0 &= 2 + 2x - z - 2w\end{aligned}$$

を得る．同様にして，

$$0 = (\chi_{\Lambda_{\mathrm{std}}} \mid \chi_W) = \frac{1}{8}\{2 - 2x - z + 2w\}$$

を得る．上 2 式より $x = w, z = 2$ がわかる．また

$$0 = (\chi_{\mathrm{triv}} \mid \chi_W) = \frac{1}{24}\{2 + 6x + 8y + 3z + 6w\}$$

であるので，先ほどの結果より $3x + 2y + 2 = 0$ を得る．同様にして，

$$0 = (\chi_{\mathrm{sgn}} \mid \chi_W) = \frac{1}{24}\{2 - 6x + 8y + 3z - 6w\}$$

から $3x + 2y + 2 = 0$ を得る．したがって，$x = 0, y = -1, z = 2, w = 0$ がわかる．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
W	2	$x = 0$	$y = -1$	$z = 2$	$w = 0$

$$(\chi_W \mid \chi_W) = \frac{1}{24}\left\{2^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 8 + 2^2 \cdot 3\right\} = 1$$

確かに W は既約表現である．以上より S_4 の指標表を得る．

	$C_G(())$	$C_G((12))$	$C_G((123))$	$C_G((12)(34))$	$C_G((1234))$
V_{triv}	1	1	1	1	1
V_{sgn}	1	-1	1	1	-1
V_{std}	3	1	0	-1	-1
Λ_{std}	3	-1	0	-1	1
W	2	0	-1	2	0

表 3: S_4 の指標表

参考文献

[1] 高瀬幸一, 群の表現論 序説, 岩波書店, 2013

[2] 池田岳, テンソル代数と表現論, 東京大学出版, 2022

[3] 桂利行, 代数学 II 環上の加群, 東京大学出版, 2007

[4] 雪江明彦 , 代数学 3 代数学のひろがり, 日本評論社, 2011

[5] 高橋礼司, 対称性の数学, ちくま学芸文庫, 2022

[6] J.P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, 1977

[7] Peter Webb, *A Course in Finite Group Representation Theory*, Cambridge University Press, 2017

[8] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer, 2004

[9] Steven Roman, *Advanced linear algebra*, Springer, 2008

[10] Bernd Sturmfels, Mateusz Michałek, *Invitation to Nonlinear Algebra*, American Mathematical Society, 2021