次元と基底

次元の定義

定義 0.1. ベクトル空間 V において, $p \geq 0$ となる整数 p があって, どの $p+1$ 個のベクトルの組も必ず 1 次従属であるとき, V は**有限次元**であるといって, そのときの p の最小値をその**次元**という. 有限次元でないとき, 無限次元であるという.

ベクトル空間 V の次元を $\dim V$ と書く. また無限次元のとき $\dim V = \infty$ と書き, 有限次元のとき $\dim V < \infty$ と書く.

V が無限次元であるというのは, どんなに大きい n をとってきても, 1 次独立な n 個のベクトルの組が存在しているということである.

命題 0.2. V を有限次元ベクトル空間とする. このとき $\dim V$ は V に属する 1 次独立なベクトルの最大個数である.

Proof. V が有限次元で, その次元を n とする. 次元の定義より, どの $n+1$ 個のベクトルの組も 1 次従属となるが, 更に $m > n$ なる m に対しても, m 個のベクトルの組は必ず 1 次従属となる. 実際, もし m 個のベクトルの組で 1 次独立なものがあったとする. その中から $n+1$ 個のベクトルを取り出して作った組は 1 次独立となるが, 一方, $n+1$ 個のベクトルの組は 1 次従属とならなければならないので矛盾である. □

もし $\dim V = 0$ とすると, どのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても $\boldsymbol{v}$ は 1 次従属となるから $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ である. したがって, 0 次元のベクトル空間は零ベクトルだけからなる空間となる.

$$\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{\mathbf{0}\}$$

また $\dim V = n \geqslant 1$ のときは, n 個のベクトルの組で 1 次独立なものが存在する. 何故ならば, n 個のベクトルの組で 1 次独立なものがないとすると, $n-1=p$ として $p+1$ 個のベクトルの組はすべて 1 次従属となるから V の次元は p より小さいことになり矛盾である.

基底の定義

定義 0.3. ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ があって, V の任意のベクトルが $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合として一意的に表されるとき, これらの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の**基底**という.

基底の要素の個数が n 個のとき, $\dim_F V = n$ である.

組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を簡単に $\{\boldsymbol{e}_i\}$ と書く.

V における基底の取り方は一意的とは限らない.

定理 0.4. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底であるためには，次の (i),(ii) をみたすことが必要十分である．

$$\{\boldsymbol{e}_i\} \text{ が基底 } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = V \\ \text{(ii)} & \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\} \text{ が 1 次独立} \end{cases}$$

Proof. ($\Rightarrow$ の証明) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底であるとき，V の任意のベクトルは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表されるから $\mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = V$ である．もし

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

であったとする．一方，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ は

$$0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

と書けるが，基底の定義より，$\boldsymbol{0}$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合での表し方は一意的であることより，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となる．よって $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 1 次独立である．

($\Leftarrow$ の証明) 逆に (i) と (ii) が成り立つとする．(i) から V の任意のベクトルは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表せる．1 次結合で表したとき表し方が一意的であることを示せば良い．もし

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = d_1\boldsymbol{e}_1 + d_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{e}_n$$

と表せたとする．

$$(c_1 - d_1)\boldsymbol{e}_1 + (c_2 - d_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

とできるので 1 次独立性から，$c_i - d_i = 0$，すなわち $c_i = d_i$ となる．よって $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合として表す表し方は一意的である． □

$\mathbb{C}^n$ の n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

を考えると，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 1 次独立であって，しかも $\mathbb{C}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

となるから $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である．この基底を $\mathbb{C}^n$ の**標準基底**という．

一般に $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ がベクトル空間 V の基底であるとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，スカラー $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が一意的に定まって

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

と表される．$v_1, v_2, \cdots, v_n$ を，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$ に関する**成分**という．

ベクトル $\boldsymbol{w}$ の成分を $w_1, w_2, \cdots, w_n$ とすると

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1)\,\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (v_n + w_n)\,\boldsymbol{e}_n$$

となるので $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ の成分は $v_1 + w_1, \cdots, v_n + w_n$ となる．

またスカラー $a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$a\boldsymbol{v} = av_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + av_n\boldsymbol{e}_n$$

となるから $a\boldsymbol{v}$ の成分は $av_1, \cdots, av_n$ となる.

このことから V の基底を一つ固定して考えれば, ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, その成分 $v_1, \cdots, v_n$ を成分とする $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ が唯一決まって, V における加法とスカラー倍がすべて $\mathbb{C}^n$ におけるそれらの演算と一致していることがわかる. V の一つの基底を固定すれば V と $\mathbb{C}^n$ は同じものとみなしても良いことがわかる. V のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, ベクトル $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ による $\boldsymbol{v}$ の表現という.

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

で表す.

さて V の次元が $n(\geqslant 1)$ の有限次元ベクトル空間とすると, V には n 個のベクトルからなる 1 次独立な組が少なくとも一つ存在する. いま, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$ を 1 次独立とする. $\boldsymbol{v}$ を V の任意のベクトルとすると, $n+1$ 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{v}\}$ は 1 次独立ではないので, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表せる. したがって定理 0.4 より, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$ は V の基底である. よって次の定理が得られた.

定理 0.5. *V を次元 $n \geqslant 1$ の有限次元ベクトル空間とすると, V の 1 次独立な n 個のベクトルの組は V の基底である.*

この定理によって, V が有限次元のベクトル空間 $\dim V \geqslant 1$ ならば, 必ずその次元と等しい個数のベクトルからなる基底があることがわかった.

次の定理が成り立つ.

定理 0.6. $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots \boldsymbol{e}_n\}$ をベクトル空間 V の基底とし, n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_n$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ に関して $\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ とする. $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立であるためには, これらの成分からなる正方行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ が正則であることが必要十分である.

以前 $\mathbb{C}^n$ で示した方法と同じ方法で示せる. この定理 0.6 より次の定理を得る.

定理 0.7. 有限次元のベクトル空間 V が n 次元であるためには, V が n 個のベクトルからなる基底を持つことが必要十分である.

Proof. V が n 次元ならば, 定理 0.5 によって, V は n 個のベクトルからなる基底を持っている.

逆に V が n 個のベクトルからなる基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を持っていたとする. $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 1 次独立だから, V の次元が n であることを言うためには, $n+1$ 個のベクトルの組が 1 次従属であることを示せば十分である. いま $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ を V の $n+1$ 個のベクトルとする. もし $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次従属ならば, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}\}$ も 1 次従属であ

る．そこで $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次独立とする．いま

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

とおくと, 定理 0.6 より $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ は正則で, 連立方程式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i\ n+1}$$

は一意的な解を持つ．係数 $a_{ij} \in F$ ならば解の成分も F に属する．そのような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ なる 1 次結合を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i\ n+1}\boldsymbol{e}_i \\ &= \boldsymbol{a}_{n+1} \end{aligned}$$

となる． したがって $\boldsymbol{a}_{n+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合となるから, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+1}\}$ は 1 次従属である． □

命題 0.8. $F = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする．$n \geqslant 1$ のとき, $\dim(F^n) = n$ であって,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

を F^n の n 個のベクトルとするとき, $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が F^n の基底となるためには, 行列 $[a_{ij}]$ が正則であることが必要十分である．

$\mathbb{C}^3$ において $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 2i \\ 1-2i \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると, これらのベクトルの成分から作った行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1-i & 1-2i \\ i & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

だから $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1-i & 1-2i \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}$ は正則である．したがって $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底となる．

基底の変換

$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ と $\{\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_n\}$ を n 次元のベクトル空間 V の基底とすると, $\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_n$ はそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表される. それを,

$$\boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i \quad (j = 1,\cdots,n) \tag{1}$$

とする. このとき行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ への**変換行列**という.

$\mathbf{B} = [b_{ij}]$ を基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}''_i\}$ への変換行列とする. すなわち

$$\boldsymbol{e}''_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{e}'_i \quad (j = 1,\cdots,n) \tag{2}$$

とする. (1) を (2) に代入して,

$$\boldsymbol{e}''_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}\right)\boldsymbol{e}_k$$

となるから, 基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}''_i\}$ への変換行列を $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ とすると

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}$$

となる. これは行列を用いて書けば

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

である.

- $\mathbf{A}$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ への変換行列
- $\mathbf{B}$ を基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}''_i\}$ への変換行列
- このとき, 基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}''_i\}$ への変換行列は積 $\mathbf{AB}$ となる.

特に $\boldsymbol{e}''_i = \boldsymbol{e}_i$ とすると, $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ なので $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ である.

- $\mathbf{A}$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ への変換行列とすると,
- 基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ から基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ への変換行列は $\mathbf{A}^{-1}$ である.

部分空間の次元

W を V の部分ベクトル空間とする. すると次元の定義より, $\dim W \leqq \dim V$ が成り立つことが容易にわかる. したがって, V が有限次元ならば W も有限次元である.

もし V が有限次元で $n = \dim V = \dim W$ だったとする. W の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ をとると, これは 1 次独立でしかも $\dim V = n$ となることから, $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ は V の基底でもある. したがって $V = W$ である.

定理 0.9. W をベクトル空間 V の部分空間とすると,

$$\dim W \leqq \dim V$$

が成り立つ. V が有限次元のとき, $\dim V = \dim W$ であるためには $V = W$ であることが必要十分である.

生成される空間と基底

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ をベクトル空間 V の p 個のベクトルとする．これらによって張られる V の部分空間 $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ の次元をベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ の**階数**または**ランク**といって, $\mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ で表す．

$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}$ ならば, $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p) = \{\boldsymbol{0}\}$ より階数 $\mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p) = 0$ である．

もし $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の中に $\boldsymbol{0}$ でないベクトルがあったとする．例えば $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{a}_1 \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ とすれば, $\{\boldsymbol{a}_1\}$ は 1 次独立であるから $\dim \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p) \geqq 1$ となる．すなわち $\mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p) \geqq 1$ である．

一般に $\mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ に関して次の定理が成り立つ．

定理 0.10. ベクトル空間 V のすべての $\boldsymbol{0}$ ではない p 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ に対して, $\mathrm{rk}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p) = r$ とすると, $1 \leqq r \leqq p$ であって, さらに $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の中から適当な r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を選んで $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ が 1 次独立となるようにできる．このとき, $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ は $\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ の基底である．

Proof. p に関する数学的帰納法で証明する．$p = 1$ の場合, $\boldsymbol{a}$ を V の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとすると, $\{\boldsymbol{a}\}$ は 1 次独立で, $\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}\}$ の基底となるから, $\dim \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}\} = \mathrm{rk}\,\{\boldsymbol{a}\} = 1$ となる．ゆえに $1 = r = p$ となって定理をみたす．

p 個のベクトルに対して定理が成り立つとして, $p+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}$ に対して定理が成り立つことを示そう．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}\}$ が 1 次独立ならば, これは $\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}\}$ の基底で $\dim \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}) = p+1$ となるから $1 \leqq r = p+1$ で $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ としては, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}$ を全部取ればよい．

次に $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}\}$ が 1 次従属とする．$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}$ の中のあるベクトルは, 残りのベクトルの 1 次結合となっているから, 適当に番号を取り替えて, $\boldsymbol{a}_{p+1}$ が $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次結合であるとする．このとき,

$$\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}) = \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$$

であることを示そう．一般に $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}) \supset \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ であるが, いま $\boldsymbol{v}$ を $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1})$ の任意のベクトルとする．

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_{p+1}\boldsymbol{a}_{p+1}$$

と書ける．$\boldsymbol{a}_{p+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次結合であるから,

$$\boldsymbol{a}_p = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{a}_p$$

として, これを用いて $\boldsymbol{v}$ を表すと,

$$\boldsymbol{v} = (v_1 + c_1v_{p+1})\boldsymbol{a}_1 + (v_2 + c_2v_{p+1})\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (v_p + c_pv_{p+1})\boldsymbol{a}_p$$

となるから $\boldsymbol{v} \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ である．したがって $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}) = \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ が成り立つ．

このことから, $\dim \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p) = \dim \mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1})$ となる．すなわち, $\mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}) = \mathrm{rk}\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p)$ で, この値を r とおく．帰納法の仮定より, p 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ には定理が成り立つ．$1 \leqq r \leqq p < p+1$ より $1 \leqq r \leqq p+1$ である．また $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ の中から r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を選んで $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ が 1 次独立であるようにできる．この $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}$ から選んだと思えば, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{p+1}$ に対しても定理が成り立つとわかる．□

基底の延長

さて V を有限次元のベクトル空間とし, $\dim V = n < \infty$ とする. V の p 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ が 1 次独立であるとすれば, 次元の定義より明らかに, $1 \leqq p \leqq n$ が成り立つ.

$p = n$ ならば $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ は V の基底である.

$p < n$ とすると, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ は $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p)$ の基底となり, $\dim \mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p) = p < n$ だから, $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p) \neq V$ である. したがって, $\mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p)$ に属していない V のベクトル少なくとも一つは存在するから, その一つを $\boldsymbol{e}_{p+1}$ としよう. このとき, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}\}$ は 1 次独立となる.

もし $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}\}$ が 1 次従属とすると, $\boldsymbol{e}_{p+1}$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ の 1 次結合であるから, $\boldsymbol{e}_{p+1} \in \mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p)$ となってしまって, $\boldsymbol{e}_{p+1}$ の取り方に反する. したがって, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}\}$ は 1 次独立となる.

$p + 1 = n$ ならば $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{p+1}\}$ は V の基底である.

$p + 1 < n$ とすると, 同様にして $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{p+2}\}$ は 1 次独立となる.

この操作を有限回繰り返せば,

$$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

が V の基底となるように作れる. したがって, 次の定理を得る.

定理 0.11. 有限次元のベクトル空間 $V(\dim V = n)$ の 1 次独立な p 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ が与えられたとき, V の $n - p$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_{p+1}, \boldsymbol{e}_{p+2}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を適当に選んで, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底となるようにできる.

ベクトル空間 V が, V の二つの部分空間 W と W' の直和になっているとき, W と W' は V において互いに**補空間**である.

定理 0.12. V を有限次元のベクトル空間とするとき, その任意の部分空間 W の V における補空間は必ず存在する.

Proof. $\dim V = n$, $\dim W = p$ とし, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ を W の基底とする. これは 1 次独立であるから $\boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を適当に選んで, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底となるようにできる. このとき $W' = \mathrm{span}\,(\boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とおくと, この W' が W の補空間になる. 実際, V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_p\boldsymbol{e}_p + v_{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

としたとき,

$$\boldsymbol{w} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_p\boldsymbol{e}_p\ ,\ \boldsymbol{w}' = v_{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

とすると, $\boldsymbol{w} \in W, \boldsymbol{w}' \in W'$ であって, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$ となるので, $V = W + W'$ である. 直和であることを示すには $W \cap W' = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せばよい.

$\boldsymbol{x} \in W \cap W'$ とすると, $\boldsymbol{x} \in W$ かつ $\boldsymbol{x} \in W'$ より

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_p\boldsymbol{e}_p = x_{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

となるから,

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_p\boldsymbol{e}_p - x_{p+1}\boldsymbol{e}_{p+1} - \cdots - x_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

となって, $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次独立性より, $x_1 = \cdots = x_p = x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$ を得る. したがって, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから $W \cap W' = \{\boldsymbol{0}\}$ が示された. □

定理 0.13. W_1, W_2 をベクトル空間 V の有限次元の部分空間とすると, $W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2$ も有限次元であって

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つ.

Proof. $\dim W_1 < \infty$ および $\dim W_2 < \infty$ なので, $\dim(W_1 \cap W_2) < \infty$ である. $\dim W_1 = p$, $\dim W_2 = q$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$ とする. $W_1 + W_2$ の次元を求めたい.

$W_1 \cap W_2$ の基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r\}$ とする. $W_1 \cap W_2 \subset W_1$ なので, 定理 0.11 より W_1 のベクトル $\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ を適当に選んで, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ が W_1 の基底となるようにできる. 同様に $W_1 \cap W_2 \subset W_2$ なので, 定理 0.11 より W_2 のベクトル $\boldsymbol{e}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_q$ を適当に選んで, $\left\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_q\right\}$ が W_2 の基底となるようにできる. このとき, $p+q-r$ 個のベクトルの組

$$\mathcal{B} = \left\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_q\right\}$$

が $W_1 + W_2$ の基底となることを示す. 生成性と 1 次独立性を示せばよい.

(**生成性**) $W_1 + W_2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して, $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ と $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ がとれて,

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と書ける. $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$ が W_1 の基底なので

$$\boldsymbol{w}_1 = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{e}_r + c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + c_p\boldsymbol{e}_p$$

と書ける. 同様に, $\left\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_q\right\}$ が W_2 の基底なので

$$\boldsymbol{w}_2 = d_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + d_r\boldsymbol{e}_r + d_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} + \cdots + d_q\boldsymbol{e}'_p$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= (c_1 + d_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (c_r + d_r)\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + c_p\boldsymbol{e}_p + d_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} + \cdots + d_q\boldsymbol{e}'_p\end{aligned}$$

となる. したがって $W_1 + W_2$ の任意のベクトルは $\mathcal{B}$ によって生成される.

(**1 次独立性**) 次に $\mathcal{B}$ が 1 次独立であることを示そう.

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + x_p\boldsymbol{e}_p + x'_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} + \cdots + x'_q\boldsymbol{e}'_q = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

とする. 前半の p 個の項の 1 次結合を

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + x_p\boldsymbol{e}_p \tag{4}$$

とおく. $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ の 1 次結合なので $\boldsymbol{v} \in W_1$ であり, (3) より

$$\boldsymbol{v} = -x'_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} - \cdots - x'_q\boldsymbol{e}'_q$$

とも書けるので, $\boldsymbol{v} \in W_2$ である. したがって, $\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ であり, $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の 1 次結合でなければならない. よって (4) において, $x_{r+1} = \cdots = x_p = 0$ である. よって (3) は

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r x'_{r+1}\boldsymbol{e}'_{r+1} + \cdots + x'_q\boldsymbol{e}'_q = \boldsymbol{0}$$

となるが W_2 の基底 $\left\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}'_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}'_q\right\}$ の 1 次独立性から,

$$x_1 = \cdots = x_r = x_{r+1} = \cdots = x_p = x'_{r+1} = \cdots = x'_q = 0$$

となり, $\mathcal{B}$ は 1 次独立である.

$\mathcal{B}$ は $p+q-r$ 個のベクトルからなる $W_1 + W_2$ の基底である. よって $\dim(W_1 + W_2) = p + q - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ となり定理が示された. □

定理 0.14. $W_1, W_2, \cdots, W_p$ をベクトル空間 V の有限次元の部分空間とする．このとき

$$\dim(W_1 + \cdots + W_p) \leqslant \dim W_1 + \cdots + \dim W_p \tag{5}$$

となる．また等号成立となるのは, $W_1 + \cdots + W_p$ が直和であるときに限る．

Proof. **不等式 (5) の証明**自然数 p に関する数学的帰納法を用いる．

$p = 1$ のとき, 明らかに定理は成り立つ．

$p \geqslant 2$ のとき $p-1$ に関して定理が成り立つと仮定する．

$$\dim(W_1 + \cdots + W_{p-1}) \leqslant \dim W_1 + \cdots + \dim W_{p-1} \tag{6}$$

このとき

$$W_1 + \cdots + W_{p-1} + W_p = (W_1 + \cdots + W_{p-1}) + W_p$$

であるから, 定理 0.13 より

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + \cdots + W_p) &= \dim(W_1 + \cdots + W_{p-1}) + \dim W_p \\ &\quad - \dim\{(W_1 + \cdots + W_{p-1}) \cap W_p\} \\ &\leqslant \dim(W_1 + \cdots + W_{p-1}) + \dim W_p\end{aligned}$$

を得る．帰納法の仮定 (6) より

$$\dim(W_1 + \cdots + W_{p-1} + W_p) \leqslant \dim W_1 + \cdots + \dim W_{p-1} + \dim W_p$$

を得る．

等式成立の証明

もし $W_1, \cdots, W_p$ に対して,

$$\dim(W_1 + \cdots + W_p) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_p \tag{7}$$

と等号が成り立ったとする．任意の $i\,(1 \leqslant i \leqslant p)$ に対して,

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + \cdots + W_p) &= \dim(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) + \dim W_i \\ &\quad - \dim\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\} \\ &\leqslant \dim W_1 + \cdots + \dim W_{i-1} + \dim W_{i+1} + \cdots + \dim W_p \\ &\quad \dim W_i - \dim\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\}\end{aligned}$$

であるから, (7) によって

$$0 \leqslant -\dim\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\}$$

である．次元は負にならないから

$$\dim\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\} = 0$$

よって

$$\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\} = \{\mathbf{0}\}$$

となって, $W_1 + \cdots + W_p$ は直和となる．

逆に, $W_1 + \cdots + W_p$ が直和とすると

$$\{(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + W_p) \cap W_i\} = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立つから, 任意の $i\,(1 \leqslant i \leqslant p)$ に対して,

$$(W_1 + \cdots + W_{i-1}) \cap W_i = \{\mathbf{0}\}$$

も成り立って, 定理 0.13 より

$$\dim(W_1 + \cdots + W_i) = \dim(W_1 + \cdots + W_{i-1}) + \dim W_i$$

となる. i は任意だから

$$\begin{aligned}
\dim(W_1 + \cdots + W_p) &= \dim(W_1 + \cdots + W_{p-1}) + \dim W_p \\
&= \dim(W_1 + \cdots + W_{p-2}) + \dim W_{p-1} + \dim W_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \dim W_1 + \cdots + \dim W_p
\end{aligned}$$

を得る. $\square$