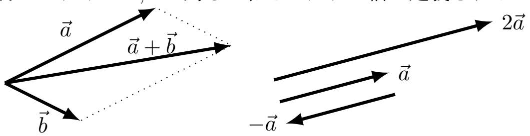
ベクトル空間の例

ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$

$\mathbb{E}^3$ を 3 次元ユークリッド空間とする．空間において, 点 A と点 B に向かう有向線分 AB を, A を始点,B を終点とするベクトルといい $\overrightarrow{AB}$ で表す．線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{AB}$ の 大きさ または 長さ といい, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ で表す．

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{A'B'}$ に関して, 向きと長さが等しいとき $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'}$ と書いてベクトルとして等しいという．ただし長さが 0 であるベクトルを $\vec{0}$ で表す．ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対して和とスカラー倍が定義される．



$\mathbb{E}^3$ は $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間となることが簡単に示せる．

(i) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{E}^3;\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.

(ii) $\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{E}^3;\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.

(iii) $\exists \vec{0} \in \mathbb{E}^3$ s.t. $\forall \vec{u} \in \mathbb{E}^3; \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$.

(iv) $\forall \vec{u} \in \mathbb{E}^3; \exists (-\vec{u}) \in \mathbb{E}^3$ s.t. $\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$.

(v) $\forall a,b \in \mathbb{R},\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{E}^3;$

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$$
$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$$
$$(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$$
$$1\vec{u} = \vec{u}.$$

数ベクトル空間

F を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき, F の n 個の元 $v_1,\cdots,v_n$ を成分とする n 次元の列ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

の全体を F^n と書く．$(n,1)$ 型の行列として和とスカラー倍が定義される．

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1+u_1 \\ \vdots \\ v_n+u_n \end{bmatrix} \in F^n$$

$$c\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix} \in F^n$$

また, 定義の条件も満たすので F^n は F 上のベクトル空間となる．このベクトル空間を n 次元の**数ベクトル空間**といい, F^n の元を数ベクトルという．

同様にして行ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1, u_2, \cdots, u_n \end{bmatrix}$$

の全体も F 上のベクトル空間となる．それは F^n の元の転置行列の全体とみなせるので, ここではそれを ${}^tF^n$ と書くことにする．

一般に ${}^tF^1 = F = F^1$ である．特に $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ であるから, $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とも考えられるが, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とも考えられる．どの F 上のベクトル空間かによって明確に区別される．

(m,n) 型の行列の全体

F の元を成分とする (m,n) 型の行列全体を $M(m,n;F)$ または $M_{m,n}$ で表す．任意の (m,n) 型の行列 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\,,\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ と任意の $c\in F$ に関して

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]\ ,\ c\boldsymbol{A}=[ca_{ij}]$$

が定まる．この演算に関して $M(m,n;F)$ は F 上のベクトル空間となる．特に $M(n,1;F)=F^n$ かつ $M(1,n;F)={}^tF^n$ がなりたつ．また $M(1,1;F)=F$ である．

実数値連続関数全体 $C^0(\mathbb{R})$

実数値連続関数の全体を $C^0(\mathbb{R})$ で表す．

$$C^0(\mathbb{R})=\big\{f \mid f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ \text{連続}\big\}$$

$f,g\in C^0(\mathbb{R})$ に対して, f,g の和を

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$

とし $c\in\mathbb{R}$ との積を

$$(cf)(t)=cf(t)$$

とする．この演算に関して $C^0(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．

$\mathbb{R}$ 係数多項式

$n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ とし, 関数 $p\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次のように定める．

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ただし $a_i\in\mathbb{R},(i=0,1,2\cdots)$ とする．p を $\mathbb{R}$ 上の x を変数とする $\mathbb{R}$ 値多項式関数という．a_i を p の係数という．n 次以下の多項式関数の全体からなる集合を考えてみよう．この集合を $\mathcal{P}_n$ と書くことにする．

$$\mathcal{P}_n=\big\{p \mid p\ \text{は}\ n\ \text{次以下の}\ \mathbb{R}\ \text{上の多項式関数}\big\}$$

任意の $p,q\in\mathcal{P}_n$ に対して, p と q の和を

$$(p+q)(x)=p(x)+q(x)$$

と定め, さらにスカラー $c\in\mathbb{R}$ に対してスカラー倍を

$$(cp)(x)=cp(x)$$

と定める．この演算によって $\mathcal{P}_n$ はベクトル空間となる．

$\mathcal{P}_n$ の元 p は 係数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ が決まれば一つ定まる．逆に, $\mathcal{P}_n$ の元 p に対して , $n+1$ 個の組 $(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)$ がただ一つ定まる．これは数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の元と多項式関数の全体 $\mathcal{P}_n$ の元が 1 対 1 に対応することを意味する．