## 0.1 行列の和

$\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ を同じ $(m,n)$ 型の行列とするとき行列の和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ が定義される．

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{ij}+b_{ij})$$

異なる型の行列の和が定義されない．行列の和の計算例は次の通りである．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列の和に関して, 次の性質が成り立つ．

**命題 0.1.** 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を任意の $(m,n)$ 型の行列とする．

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
(ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
(iii) $\mathbf{A}+\mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{A}$
(iv) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に対して, $\mathbf{B}+\mathbf{X} = \mathbf{A}$ をみたすような $(m,n)$ 型の行列 $\mathbf{X}$ が唯一つ存在する．

*Proof.* $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}), \mathbf{C} = (c_{ij})$ とおくと,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = \mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

また,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{0}_{m,n} = (a_{ij}+0) = \mathbf{A}.$$

ここで $\mathbf{X} = (a_{ij}-b_{ij})$ とおくと, $\mathbf{B}+\mathbf{X} = \mathbf{A}$ をみたす．逆に $\mathbf{B}+\mathbf{X} = \mathbf{A}$ をみたす $\mathbf{X} = (x_{ij})$ とおくと,

$$b_{ij}+x_{ij} = a_{ij}$$

より $\mathbf{X} = (x_{ij}) = (a_{ij}-b_{ij})$ である． □

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対して, $\mathbf{B}+\mathbf{X} = \mathbf{A}$ をみたすような行列 $\mathbf{X}$ を

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}-\mathbf{B}$$

とする．これによって行列の差が定義できた．特に $\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m,n}$ とすると,

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = -\mathbf{B}.$$

## 0.2 行列のスカラー倍

行列やベクトルを考えるとき, $(1,1)$ 型の行列, つまりただの実数, 複素数または関数を**スカラー**という．$(m,n)$ 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ と, 任意のスカラー $c$ とするとき, $ca_{ij}$ を $(i,j)$ 成分とする $(m,n)$ 型の行列 $c\mathbf{A} = (ca_{ij})$ と書いて, $\mathbf{A}$ のスカラー倍という．

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -16 \\ -4 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

この行列のスカラー倍に関して, 次の性質が成り立つ．

**命題 0.2.** 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を任意の $(m,n)$ 型の行列, $c, d$ をスカラーとする．

(i) $c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$
(ii) $(c+d)\mathbf{A} = c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$
(iii) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$
(iv) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ また $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$

## 0.3 行列の乗法

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ を $(m,n)$ 型の行列, $\mathbf{B} = (b_{kl})$ を $(n,p)$ 型の行列とするとき,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

と $c_{ij}$ を定義する. ただし $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$ を動く. $(m,p)$ 型の行列を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の積といって $\mathbf{AB}$ と書く.

$$\mathbf{AB} = (c_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq p} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)$$

成分ごとに書くと

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}$$

となる. $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の間に積 $\mathbf{AB}$ が定義できるのは, $\mathbf{A}$ の列の数と $\mathbf{B}$ の行の数とが等しい時に限る. $\mathbf{AB}$ が定義できたとしても $\mathbf{BA}$ が定義できるとは限らない. さらに $\mathbf{AB}$ と $\mathbf{BA}$ が定義できたときに

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

が成り立つとは限らない.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ の間に積 $\mathbf{AB}$ が定義できる. $\mathbf{BA}$ は定義できない.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 5 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 6 & 19 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ とすると $\mathbf{AB}$,$\mathbf{BA}$ が定義できる.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + (-2)\cdot 4 & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 4 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 & 3\cdot(-2) + 1\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot(-2) + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

行列の積に関して, 次の性質が成り立つ.

**命題 0.3.** 次が成り立つ

(i) 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ をそれぞれ, $(m,n),(n,p),(p,q)$ 型の行列とする.

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

(ii) $\mathbf{A}$ を $(m,n)$ 型, $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ を $(n,p)$ 型の行列とする.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

(iii) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を $(m,n)$ 型, $\mathbf{C}$ を $(n,p)$ 型の行列とする.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

(iv) $\mathbf{A}$ を $(m,n)$ 型とする.

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

*Proof.* (i) いま $\mathbf{AB} = (a'_{ij})$, $\mathbf{BC} = (b'_{ij})$ とすると, $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$,$\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ の $(i,j)$ 成分はそれぞれ

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \left(\sum_{l=1}^{p} a'_{il}c_{lj}\right),\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b'_{kj}\right)$$

ここで

$$a'_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}$$

$$b'_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p} a'_{il}c_{lj} &= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b'_{kj}.\end{aligned}$$

したがって $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ を得る.

(ii),(iii) の証明も同様にできる.

(iv) $\mathbf{I}_m\mathbf{A}$ の $(i,j)$ 成分を考える. $\mathbf{I}_m = (\delta_{ij})$ より

$$\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{i1}a_{1j} + \delta_{i2}a_{2j} + \cdots + \delta_{im}a_{mj}$$

$\delta_{ii} = 1$ でそれ以外は 0 なので,

$$\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

よって $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$ を得る. $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ の証明も同様にできる. □

行列の場合, 乗法の逆演算としての除法は一般には定義できない. 行列 $\mathbf{A}$ と 行列 $\mathbf{B}$ に対して, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ をみたすような行列 $\mathbf{X}$ が一意的に存在するかというと, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であっても存在するとは限らない. また仮に存在したとしても一意的であるとは限らない. $\mathbf{A}$ が $(m, n)$ 型の行列であるとき, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ をみたす $\mathbf{X}$ が存在するためには, まず $\mathbf{B}$ は $(m, p)$ 型でなければならない. しかし $(m, p)$ 型であることだけでは十分ではない.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする. $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ をみたすような行列 $\mathbf{X}$ が存在するとして, $(2, 1)$ 型のはずだから, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおく.

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix}$$

$2 + 1 = 3 \neq 4$ よりそのような $\mathbf{X}$ は存在しない.

また, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ とする. ここで $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると

$$\mathbf{AC} = \mathbf{B} = \mathbf{AD}$$

が成り立つ. したがって, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ をみたすような行列 $\mathbf{X}$ が 2 つ存在する.

行列の加法, 乗法, スカラー倍, 転置行列に関して, 次の性質がある.

**命題 0.4.** 次が成り立つ

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が $(m, n)$ 型の行列ならば, ${}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

(ii) 任意の行列 $\mathbf{A}$ と任意のスカラー $c$ に対して, ${}^t(c\mathbf{A}) = c\,{}^t\mathbf{A}$

(iii) 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の積 $\mathbf{AB}$ が定義できるとき, 転置行列 ${}^t\mathbf{A}, {}^t\mathbf{B}$ の積 ${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ も定義出来て.

$$ {}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} $$

が成り立つ.

*Proof.* (iii) 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ をそれぞれ任意の $(m, n), (n, p)$ 型の行列とする. このとき行列 ${}^t\mathbf{A}, {}^t\mathbf{B}$ はそれぞれ $(n, m), (p, n)$ 型の行列となり積 ${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ が定義できる. いま

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}), \mathbf{AB} = (c_{ij})$$

とすると, 積の定義より

$$ {}^t(\mathbf{AB}) = (c_{ji}) = \left( \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \right) $$

であるが, これは

$$ {}^t\mathbf{A} = (a_{ji}), {}^t\mathbf{B} = (b_{ji}) $$

の積 ${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ と一致する. よって ${}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ を得る. □