行列式の性質

この節では行列式の性質について述べる.

定理 0.1 (行列式の転置不変性). 行列式においては, その行と列とを入れ替えても行列式の値は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

正方行列の転置を用いると $|{}^t\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|$.

Proof. (n,n) 型行列 $A = (a_{ij})$ に対して, (1) の左辺より,

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

このとき次が成り立つ.

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

また σ が S_n 上全体を動くとき, σ^{-1} も S_n 上全体を動くので,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \det(a_{ji}) = |{}^t\mathbf{A}| \end{aligned}$$

よって主張が示せた. □

定理 0.1 より, 行列式においては行と列の対称性があり, 行 (または列) について成り立つ性質は列 (または行) についても成り立つ. したがって, 以降の定理は行または列についてのみ証明することにする.

また, この定理から分かるように行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

と定義しても良いことが分かる. 例えば $n = 2$ では

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$$

を意味する.

行ベクトルと列ベクトルを用いて簡潔に表すことがある.

$$\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) \ , \ \mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

定理 0.2 (行列式の交代性). 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{vmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_n n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \cdots & a_{k_n n} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\,(\sigma) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

が成り立つ.

Proof. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ とし $a_{k_i j} = b_{ij}$ とする.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{k_1 \tau(k_1)} a_{k_2 \tau(k_2)} \cdots a_{k_n \tau(k_n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) b_{1\tau(k_1)} b_{2\tau(k_2)} \cdots b_{n\tau(k_n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) b_{1\tau(\sigma(1))} b_{2\tau(\sigma(2))} \cdots b_{n\tau(\sigma(n))} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\tau\sigma(2)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) b_{1\tau\sigma(2)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} \end{aligned}$$

である. τ が S_n 上全体を動くとき, $\tau\sigma$ は S_n 上全体を動くので, $\tau\sigma$ を改めて σ と置きなおすと,

$$\begin{aligned} \det(a_{ij}) &= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) b_{1\tau\sigma(1)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \det(b_{ij}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \det(a_{k_i j}) \end{aligned}$$

両辺 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 倍すると与式を得る. □

定理 0.2 より, 以下が成り立つ.

系 0.3. *1.* 行列式の *2* つの行を入れ替えると符号が変わる.
2. 行列式の *2* つの行が一致してれば行列式の値は 0 である.

定理 0.2 の σ が互換 (ij) であるとき,

$$\begin{array}{c} \\ \\ 第i行 \\ \\ 第j行 \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

また第 j 行目が第 i 行目と一致すれば, $\det(\mathbf{A}) = 0$ が分かる.

$$\begin{array}{c} \\ \\ 第i行 \\ \\ 第j行 \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 0.4 (行列式の線型性). 行列式の第 i 列を列ベクトル $\mathbf{a}_i$ で表す.

(i) 列の和は行列式の和に分解できる.

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \cdots \mathbf{a}_n| \\
&\qquad = |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n| + |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i' \cdots \mathbf{a}_n|
\end{aligned}
$$

(ii) 一つの列を定数倍 c すると, もとの行列式の c 倍になる.

$$
|\mathbf{a}_1 \cdots c\mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n| = c|\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n|
$$

Proof. 行列式の定義と和の線型性から示される.

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a}_1 \cdots\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \cdots \mathbf{a}_n| \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (a_{\sigma(i)i} + a_{\sigma(i)i}') \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i}' \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n| + |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i' \cdots \mathbf{a}_n|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a}_1 \cdots c\mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n| \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots ca_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= c|\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n|
\end{aligned}
$$

□

定理 0.5. 行列式は一つの列に他の列の定数倍を加えても値は変わらない.

$$
|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第}i\text{列}}{\mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j} \cdots \overset{\text{第}j\text{列}}{\mathbf{a}_j} \cdots \mathbf{a}_n| = |\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第}i\text{列}}{\mathbf{a}_i} \cdots \overset{\text{第}j\text{列}}{\mathbf{a}_j} \cdots \mathbf{a}_n|
$$

Proof. 線型性と系 0.3 より,

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| \\
&= |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| + |\mathbf{a}_1 \cdots c\mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| \\
&= |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| + c|\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| \\
&= |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n| + c \cdot 0 \\
&= |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n|
\end{aligned}
$$

□

定理 0.6 (行列式の積). $\mathbf{A},\mathbf{B}$ を (n,n) 型の正方行列とする.

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

Proof. $\mathbf{A}=(a_{ij}),\mathbf{B}=(b_{ij})$ と表すと,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

とすると

$$\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1k}b_{k1} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \sum a_{2k}b_{k1} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum a_{nk}b_{k1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

k を k_1 に直すと

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{k_1=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{2k_1} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk_1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} b_{k_1 1}$$

となる. これを各列で繰り返すことで次を得る.

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{vmatrix} b_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n}$$

この右辺で, $k_1,k_2,\cdots,k_n$ の中に等しいものがあるときは, 系 0.3 より

$$\begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{vmatrix} = 0$$

である. その他のときは, 行列式の交代性より,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} |\mathbf{A}| \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| &= \sum \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} |\mathbf{A}| b_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n} \\ &= |\mathbf{A}| \sum \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} b_{k_1 1}b_{k_2 2}\cdots b_{k_n n} \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

$k_1,\cdots k_n$ のうち等しいものがないように $1,\cdot,n$ のどれかの値を取る場合,

$$\{1,\cdots,n\} \to \{k_1,\cdots,k_n\}$$

の一対一対応を考えるのと同じ. □