問 0.1. 互いに相似な正方行列の固有方程式, 最小多項式は一致する. 逆に固有方程式, 最小多項式が一致する 2 つの正方行列は相似か？

以下, とある人*[1]に教えてもらった解答.

$\mathbb{C}$ の元を成分とした正方行列を考える. $n \leq 3$ までは正しい (why?). $n > 3$ では正しくない. 例えば $n = 4$ の例を挙げると,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

は異なるジョルダン行列である. A, B の固有多項式は $(t-\lambda)^4$ と最小多項式 $(t-\lambda)^2$ となる. 任意の行列はあるジョルダン行列に相似であるが, ジョルダン行列が異なれば相似の推移性よりもとの行列同士は相似ではない.

この場合 A の固有空間の次元は $\dim = 3$ なのに対して, B は $\dim = 2$ なので,「固有空間の次元が同じであること」を条件に付け加えればジョルダン標準形が一意的に定まります.

以下, 私のまとめ.

つまり 2 つの行列 A, B が相似であるための条件は, ジョルダン標準形が等しいときである. A と B のジョルダン標準形を求められるだけの情報がなければ, 相似かどうか判定できない.

あたりまえと思われるかも知れないが, ジョルダン標準形の威力を理解できた.

---

*[1] Sachi Y さん