余因子

n 次の行列式から第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の行列式に $(-1)^{i+j}$ を書けたものを, もとの行列式の (i,j) 余因子という. 同様に正方行列の第 i 行と第 j 列を取り除いた小行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものをもとの正方行列の (i,j) 余因子という.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&0&2\\3&7&4\end{bmatrix}$$

の (i,j) 余因子を A_{ij} とすると,

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&2\\7&4\end{vmatrix}=-14\ ,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&2\\3&4\end{vmatrix}=10$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&0\\3&7\end{vmatrix}=-7.$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&5\\7&4\end{vmatrix}=27\ ,\ A_{12}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&5\\3&4\end{vmatrix}=-11$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1&0\\3&7\end{vmatrix}=-1.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&5\\0&2\end{vmatrix}=-4\ ,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&5\\-1&2\end{vmatrix}=-7$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=2.$$

n 次の行列式 $\Delta=\det(x_{ij})$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすると定義より,

$$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1j-1}&x_{1j+1}&\cdots&x_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{i-1\,1}&\cdots&x_{i-1\,j-1}&x_{i-1\,j+1}&\cdots&x_{i-1\,n}\\x_{i+1\,1}&\cdots&x_{i+1\,j-1}&x_{i+1\,j+1}&\cdots&x_{i+1\,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{n1}&\cdots&x_{n\,j-1}&x_{n\,j+1}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}$$

である.

命題 0.1. 行列式 $\det(x_{ij})$ において, $x_{21}=x_{31}=\cdots=x_{n1}=0$ としてみると,

$$\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\0&x_{22}&\cdots&x_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}=x_{11}\begin{vmatrix}x_{22}&\cdots&x_{2n}\\\vdots&\cdots&\cdots\\x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}$$

Proof. $\sigma\in S_n$ に対し, $\sigma(1)\neq 1$ ならば $\sigma(k)=1$ となる $k\neq 1$ が存在する. 仮定より $x_{k\sigma(k)}=x_{k1}=0$ で

$$x_{1\sigma(1)}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{k\sigma(k)}\cdots x_{n\sigma(n)}=0$$

である. つまり $\sigma(1)=1$ 以外の項は 0 である.

$$\det(x_{ij})=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{11}x_{2\sigma(2)}\cdots x_{k\sigma(k)}\cdots x_{n\sigma(n)}$$
$$=x_{11}\begin{vmatrix}x_{22}&\cdots&x_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}$$

□

一般に Δ において, $x_{i1}=0,\ \cdots,\ x_{i\ j-1}=0,\ x_{i\ j-1}=0,\ \cdots, x_{in}=0$ (i 行の (i,h) 成分以外を 0) とする．行と列を入れ替えることで x_{ij} を $(1,1)$ 成分の位置に移動できる.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{第}j\text{列} \\
\text{第}i\text{行} & \begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & x_{ij} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}
x_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
x_{1j} & x_{11} & \cdots & x_{1\ j-1} & x_{1\ j+1} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{i-1\ j} & x_{i+1\ 1} & \cdots & x_{i-1\ j-1} & x_{i-1\ j+1} & \cdots & x_{i-1\ n} \\
x_{i+1\ j} & x_{i+1\ 1} & \cdots & x_{i+1\ j-1} & x_{i+1\ j+1} & \cdots & x_{i+1\ n} \\
\cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{nj} & x_{n1} & \cdots & x_{n\ j-1} & x_{n\ j+1} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

余因子の定義と命題 0.1 によって,

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{第}j\text{列} \\
\text{第}i\text{行} & \begin{vmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & x_{ij} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
= x_{ij}\Delta_{ij}
$$

列についても同様に成り立つ.

一般の行列式に対して

$$
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & x_{i2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
+\cdots+
\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & x_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= x_{i1}\Delta_{i1} + x_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + x_{in}\Delta_{in}
$$

となる.

定理 0.2 (余因子展開). 行列式 $\Delta = \det(x_{ij})$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすると, 任意の i 行または j 列に対して,

$$
\Delta = x_{i1}\Delta_{i1} + x_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + x_{in}\Delta_{in} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\Delta_{ik}
$$

$$
\Delta = x_{1j}\Delta_{1j} + x_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + x_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{k=1}^{n} x_{kj}\Delta_{kj}
$$

それぞれ行列式 Δ の第 i 行に関する展開, 第 j 列に関する展開という. ラプラス展開ともいう.

定理 0.3. 行列式 $\Delta = \det(x_{ij})$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とすると，$i \neq j$ に対して，

$$x_{i1}\Delta_{ji} + x_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + x_{in}\Delta_{jn} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\Delta_{jk} = 0$$

$$x_{1i}\Delta_{1j} + x_{2i}\Delta_{2j} + \cdots + x_{ni}\Delta_{nj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}\Delta_{kj} = 0$$

Proof. 定理 0.2 より Δ を第 j 行に関して展開すると

$$\Delta = x_{j1}\Delta_{j1} + x_{j2}\Delta_{j2} + \cdots + x_{jn}\Delta_{jn}$$

となる．ここで，$\Delta_{j1}, \cdots, \Delta_{jn}$ の中には $x_{j1}, \cdots, x_{jn}$ は含まれていないので，$x_{j1}, \cdots, x_{jn}$ を $x_{i1}, \cdots, x_{in}$ で置き換えても $\Delta_{j1}, \cdots, \Delta_{jn}$ の値は変わらずに

$$\begin{array}{r} \\ \\ 第i行 \\ \\ 第j行 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_{ij}\Delta_{jk}$$

となる．置き換えることで右辺は示したい多項式に，右辺は第 i 行目と第 j 列目が一致して行列式の値は 0 である． □

行列式の値を計算するのに余因子展開は役に立つ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 7(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

行列の成分で 0 が多い行や列に着目して余因子展開するのが有効である．

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

定理 0.4. n 次の正方行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ の (i,j) 余因子を A_{ij} とし，A_{ij} を (i,j) 成分とする n 次の正方行列を $\mathbf{B}$ とすると，

$$\mathbf{A}{}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & & & \mathbf{0} \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n$$

Proof. $\mathbf{A}{}^t\mathbf{B}$ の (i,j) 成分を c_{ij} とし，${}^t\mathbf{B}$ の (i,j) 成分を b_{ij} とするとき，定義より $b_{ij} = A_{ji}$ である．定理 0.2 より

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = |A|$$

である．定理 0.3 より $i \neq j$ のときは，

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$$

である． □

系 0.5. 同様にして

$${}^t\mathbf{B}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n$$

が成り立つ．