0.1　行列の定義

$m \times n$ 個の数 (実数 or 複素数) や関数を, タテに m, ヨコに n 個並べたものを (m, n) 型の行列という.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{や} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

また行列を表すのに大文字の太字 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ をよく用いる.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

行列にでてくる数または関数を行列の成分という. 上から数えて i 行目, 左から数えて j 列目の成分を (i, j) 成分という.

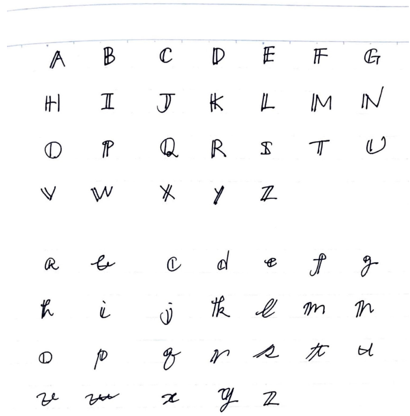

図 1　太字の手書きの例

一般に, (m,n) 型の行列を表すのに (i,j) 成分を a_{ij} と添え字で書いて, 次のように表す.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

これを省略して次のように表す.

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}$$

さらに (m,n) 型の行列であることが明らかとき

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

で表す.

行の数と列の数が等しい (n,n) 型の行列を**正方行列**という. また正方行列が (n,n) 型であることを n 次の正方行列という.

0.2 等しい行列, ゼロ行列

(m,n) 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ と, (m',n') 型の行列 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ が等しいとは, それらの型が同じで, しかも対応する成分が全て等しいときという.

$$\begin{cases} m = m', n = n' \\ a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

この条件をみたすときに限って $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ で表す. この定義によると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

数を成分に持つ行列において,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のように全ての成分が 0 である行列を**零行列**といい $\mathbf{0}$ で表す. 型が異なる零行列は等しくないので, (m,n) 型の零行列を $\mathbf{0}_{m,n}$ で表す.

0.3 転置, 共役, 随伴

行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ に対して, (i,j) 成分が a_{ji} であるような行列を $\mathbf{A}$ の**転置行列**といい, ${}^t\mathbf{A}$ と表す.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ の転置行列は, } {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

一般に, (m,n) 型の行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対して,

$${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

となる. $\mathbf{A}$ が (m,n) 型の行列ならば ${}^t\mathbf{A}$ は (n,m) 型の行列となる. 明らかに転置行列の転置は元に戻る.

$${}^t({}^t\mathbf{A}) = \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$ の第 i 行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ は, ${}^t\mathbf{A}$ の第 i 列

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

になる. 転置は行と列を入れ替える操作である.

数を成分とする行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ に対して, a_{ij} の共役複素数 $\overline{a_{ij}}$ を成分とする行列を $\mathbf{A}$ の**共役行列**といい, $\overline{\mathbf{A}}$ で表す. 明らかに $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ が成り立つ.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+i & 2-3i \\ 1-2i & 4-5i \end{bmatrix} \text{ の共役行列は, } \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3-i & 2+3i \\ 1+2i & 4+5i \end{bmatrix}$$

$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ が成り立つとき $\mathbf{A}$ の成分は全て実数である. このような行列を**実行列**という.

さらに (m,n) 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ に対して,

- 転置行列の共役行列 $\overline{({}^t\mathbf{A})}$
- 共役行列の転置行列 ${}^t(\overline{\mathbf{A}})$

はともに (n,m) 型の行列で成分は $\overline{a_{ji}}$ となり一致する. この行列 $\overline{{}^t\mathbf{A}}$ を $\mathbf{A}$ の**随伴行列**あるいは**エルミート行列**といい, $\mathbf{A}^*$ で表す. この場合も $(A^*)^* = A$ が成り立つ.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+i & 2-3i \\ 1-2i & 4-5i \end{bmatrix} \text{ の随伴行列は, } \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3-i & 1+2i \\ 2+3i & 4+5i \end{bmatrix}$$

0.4 対角行列, 単位行列

行の数と列の数が等しい (n,n) 型の行列を n 次の正方行列といった. 正方行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の左上から右下への斜めの成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を $\mathbf{A}=(a_{ij})$ の対角成分といい, a_{ii} で表す. 対角成分の和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_i a_{ii}$ を正方行列 $\mathbf{A}$ の**トレース**といい, $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ で表す.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ のトレースは, } \operatorname{tr}\mathbf{A}=-2+4+5=7$$

n 次の正方行列において, 対角成分以外の成分が 0 であるような行列を**対角行列**という.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

特に, 対角成分以外の成分が 0 で対角成分がすべて 1 であるような n 次正方行列を**単位行列**といい, $\mathbf{I}_n$ で表す.

$$\mathbf{I}_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}_n$ の (i,j) 成分は δ_{ij} で表し, **クロネッカーのデルタ**という.

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

単位行列のトレースは簡単に求まる.

$$\operatorname{tr}\mathbf{I}_n=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ii}=1+1+\cdots+1=n$$

特に 1 行だけからなる $(1,n)$ 型の行列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

は n 次元の**行ベクトル**という. 同様に 1 行だけからなる $(m,1)$ 型の行列

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

は n 次元の**列ベクトル**という. 行ベクトルや列ベクトルを表すのに小文字の太字を用いることとする.

$$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

0.5　小行列, ブロック行列

行列 $\mathbf{A}$ から, いくつかの行と列をとりのぞいて得られる行列を $\mathbf{A}$ の小行列という.

例えば $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ の第 3 行と第 2 列を除くと, 小行列 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ が得られる.

(m,n) 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ において第 j 列以外のすべての列を除くと, 小行列である列ベクトル $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ が得られる. このように得られる列ベクトルを $\mathbf{A}$ の列ベクトルという. 同様に, $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ は第 i 列からなる $\mathbf{A}$ の行ベクトルという.

(m,n) 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ の全ての列ベクトルを考える.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{A}$ はこれらの列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ を横に並べたものと考えられるので,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

と表す場合もある.

同様にして, (m,n) 型の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ の全ての行ベクトルを考える.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}'_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ &\cdots\cdots \\ \mathbf{a}'_n &= (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

行列 $\mathbf{A}$ はこれらの列ベクトル $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \cdots, \mathbf{a}'_n$ を縦に並べたものと考えられるので,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{bmatrix}$$

と書く.

一般には $\mathbf{A}$ をいくつかの部分に区分けして出来る小行列を並べて書き表すことがある.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 7 \\ \hdashline 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

のように区分けしたとき, 小行列

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を使って次のように書ける.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&4&2\end{bmatrix}$$ とするとき,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{0}_{3,2}&\mathbf{I}_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:ccc}1&2&3&1&1\\0&1&2&4&2\\\hdashline 0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

となる.

一般に行列 $\mathbf{A}$ を小行列で

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1q}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2q}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{p1}&A_{p2}&\cdots&A_{pq}\end{pmatrix}$$

と表したとき, 同じ行に並んだ小行列 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{iq}$ の行の数はすべて等しく, 同じ列に並んだ小行列 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{pj}$ の列の数はすべて等しいようにする.

たとえば

$$\left[\begin{array}{cc:c}1&2&5\\\hdashline -3&1&4\\\cdashline{3-3} -2&3&3\end{array}\right]$$

のように区分けしたうえ, 小行列を

$$\mathbf{B}=[1,2]\ ,\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-3&1\\-2&3\end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{E}=[3]$$

とするとき,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{D}\\\mathbf{C}&\mathbf{E}\end{bmatrix}$$

のような表し方はしない