ベクトル空間の定義

定義 0.1 (ベクトル空間). F を体とし, F の元をスカラーと呼ぶ. 空でない集合 V が F **上のベクトル空間である**とは, V の元に対して, ある 2 つの演算が定義されていてある性質を満たしているときをいう.

- 加法と呼ばれる演算が定まっていて, $+$ を用いて表し, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V \times V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ を対応させる.
- スカラー倍と呼ばれる演算が定まっていて, 並べて書き表し, $(c, \boldsymbol{u}) \in F \times V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ を対応させる.

さらに次の性質が成り立つ.

(i) 任意の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して, $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.

(ii) 任意の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(iii) V のある元 $\boldsymbol{0}$ が存在し, $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ を任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対してみたす.

(iv) 任意の元 $\boldsymbol{u} \in V$ に対して, V の元 $-\boldsymbol{u}$ が存在して, $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たす.

(v) 任意のスカラー $a, b \in F$, F の単位元 1 と任意の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \\
(a + b)\boldsymbol{u} &= a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u} \\
(ab)\boldsymbol{u} &= a(b\boldsymbol{u}) \\
1\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

- ベクトル空間のことを線形空間ともいう.
- ベクトル空間 V の元のことを**ベクトル**という.
- ベクトル空間 V に対して, F を**係数体**という.
- $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を**実ベクトル空間**といい, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を**複素ベクトル空間**という.
- 条件 (i) から (iv) は $(V, +)$ がアーベル群であるということ.

定義 0.2. U をベクトル空間 V の空でない部分集合とする. U の ***1* 次結合**とは,

$$
a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots a_n\boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i
$$

という形のベクトルである. つまり, ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in U$ をそれぞれ $a_1, \cdots, a_n \in F$ 倍したものの和である. スカラー $a_1, \cdots, a_n$ を *1* 次結合の係数という. *1* 次結合が自明であるとは, すべての係数 a_i が 0 であるときをいう.

ベクトル空間の例に関しては次回にする.

定義より簡単に得られる性質

$\mathbf{0}$ を**零ベクトル**という.

命題 0.3 (零ベクトルの一意性). ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v} \tag{1}$$

となるような V のベクトル $\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v}$ によらずにただ一つ存在する.

Proof. 一意性について示す. いまベクトル $\mathbf{0}$ と $\mathbf{0}'$ が (1) をみたすとする. 任意のベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'$ に対して, 定義 (iii) より, 次が成り立つ.

$$\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{v}'+\mathbf{0}'=\boldsymbol{v}'$$

ここで $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ は任意だったので, $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}'$ と $\boldsymbol{v}'=\mathbf{0}$ を代入して,

$$\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}'$$

を得る. □

命題 0.4. あるベクトル $\boldsymbol{x}$ が, あるベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$$

となるならば, $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となる.

Proof. $\boldsymbol{v}$ に対して $-\boldsymbol{v}$ が存在して, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ の両辺に加えることで, 左辺は

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

となり, 右辺は $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ となるので主張を得る. □

命題 0.5. 任意のスカラー $a\in F$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

(i) $0\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$

(ii) $\boldsymbol{a}\mathbf{0}=\mathbf{0}$

(iii) $(-1)\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$

Proof.

$$0\boldsymbol{v}=(0+0)\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}$$

したがって両辺 $-0\boldsymbol{v}$ を加えると,

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}$$

を得る. また, 定義から $\mathbf{0}$ は $\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$ を任意の $\boldsymbol{u}\in V$ に対してみたすので, 特に $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ とすると,

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

が成り立つ. よって

$$\boldsymbol{a}\mathbf{0}=\boldsymbol{a}(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\boldsymbol{a}\mathbf{0}+\boldsymbol{a}\mathbf{0}$$

となるから $\boldsymbol{a}\mathbf{0}=\mathbf{0}$ が成り立つ.

定義より $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ であるから,

$$\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=(1-1)\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

となるから両辺 $-\boldsymbol{v}$ を加えると,

$$(-1)\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$$

を得る. □

定理 0.6 (逆元の一意性). ベクトル空間 V の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対し，その逆元 $-\boldsymbol{a}$ はただ一つ存在する．

Proof. $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}''$ を $\boldsymbol{a}$ の逆元とする．まず

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}''$ は $\boldsymbol{a}$ の逆元だから $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{0}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}' &= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{0} \\
&= \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}'') \\
&= (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}'' \\
&= (\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{a}'' \\
&= \boldsymbol{a}''
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ および加法の推移律を用いた．したがって，一意性が成り立つ． $\square$