部分ベクトル空間

定義 0.1 (部分ベクトル空間). V をベクトル空間とする．V の空でない部分集合 W が**部分ベクトル空間**であるとは，

(i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$
(ii) $a \in F, \boldsymbol{u} \in W \Longrightarrow a\boldsymbol{u} \in W$

をみたすときをいう．それぞれ V の加法とスカラー倍について閉じているという．部分ベクトル空間を部分空間ともいう．

定理 0.2. 部分ベクトル空間自身もベクトル空間である．

定理 0.3. ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が部分ベクトル空間であるためには，V の加法とスカラー倍について閉じていることが必要十分である．すなわち

$$a, b \in F, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \Longrightarrow a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} \in W \tag{1}$$

をみたす．

Proof. W を部分ベクトル空間とする．スカラー $a, b \in F$ とベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ に対して，(ii) より $a\boldsymbol{u}, b\boldsymbol{v} \in W$ が成り立つ．(i) より $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} \in W$ がわかる．

逆に，(1) が成り立つような V の部分集合 W が部分ベクトル空間となることを示そう．スカラーを $a=b=1$ と置くと，(1) より $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ のとき $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$ が成り立つ．また $b=0$ とすると，$a\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=a\boldsymbol{u} \in W$ より，$a \in F, \boldsymbol{u} \in W$ のとき $a\boldsymbol{u} \in W$ が成り立つ．したがって，W は V の部分ベクトル空間となる． □

部分集合 $W \subset V$ が部分ベクトル空間かどうか確かめるには，(1) を確認すればよい．

命題 0.4. W_1, W_2 が V の部分ベクトル空間とする．このとき，$W_1 \cap W_2$ も V の部分ベクトル空間となる．

より一般に次が成り立つ．

命題 0.5. $W_1, W_2, \cdots, W_n$ が V の部分ベクトル空間とする．このとき，$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$ も V の部分ベクトル空間となる．

Proof. $\boldsymbol{0} \in W_k$ より $\boldsymbol{0} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n \neq \emptyset$ となる．$a, b \in F, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$ に対して，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W_k$ である．各 W_k は V の部分空間であるので，

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} \in W_k \ (k=1, \cdots, n)$$

が成り立つ．したがって $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$ が成り立つ.□

ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ において

$$W_1 = \{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mid v_1+v_2+v_3=0 \}$$
$$W_2 = \{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \mid v_1+v_2+iv_3=0 \}$$

はともに $\mathbb{C}^3$ の部分空間である．いま $W=W_1 \cap W_2$ とすると，W は定

理 0.5 によって $\mathbb{C}^3$ の部分空間である．$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W$ であるためには

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \\ v_1 + v_2 + iv_3 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つことが必要十分である．上の式から下の式を引けば $(1-i)v_3 = 0$ となるから $v_3 = 0$ である．すると $v_2 = -v_1$ となるから $v_1 = x$ と置くことにより,

$$W = \{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \}$$

となることがわかる．

部分空間の共通部分はまた部分空間となったが, 部分空間の和集合は一般には部分空間とはならない．先ほどの例において, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ とすると, $\boldsymbol{a} \in W_1, \boldsymbol{b} \in W_2$ であるが,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ i-1 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

である．

1 次結合で張られる空間

F 上のベクトル空間 V の有限個のベクトルの集合 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が与えられたとする．これらのベクトルの 1 次結合で表されるようなベクトルの全体, すなわち

$$\{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \mid a_i \in F, \boldsymbol{v}_i \in S\}$$

は V の部分空間となることがわかる．

この部分空間を S によって**張られる** (生成される) 部分空間といって,

$$\langle S \rangle = \mathrm{span}(S) = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \mid a_i \in F, \boldsymbol{v}_i \in S\}$$

と書くことにする．$\langle S \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とも表す．

張られる空間の例として, $\mathbb{E}^3$ において $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とし, 三点 O, A, B は同一直線上にないものとする．このとき $\mathrm{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ がどのような集合か考える．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 1 次結合で表されるベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を考える．

$$\vec{p} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b}$$

とし, $p_1\vec{a} = \overrightarrow{OA'}$, $p_2\vec{b} = \overrightarrow{OB'}$ とすると, A' は直線 OA 上にあり, B' は直線 OB 上にあって, P は並行四辺形 $OA'PB'$ の頂点なので, O, A', P, B' は同一平面上にあることがわかる．その平面は O, A, B が定める平面である．逆に三点 O, A, B が定める平面上の任意の点を P とすると, $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 1 次結合で表される．したがって $\mathrm{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ は O, A, B によって定まる平面とそれに平行なベクトル全体である．

次の例として，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ i\end{bmatrix}$ を $\mathbb{C}^3$ のベクトルとする．

$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ がどのような集合か考える．$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ とする．

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}c_1\\ c_1 i\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -c_2\\ c_2 i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\ c_1 i - c_2\\ c_2 i\end{bmatrix}$$

となるから $x_1 = c_1, x_2 = c_1 i - x_2, x_3 = iy_3$ となる．したがって x_1, x_2, x_3 は

$$x_1 + ix_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

をみたしている．逆に (2) をみたす x_1, x_2, x_3 を成分とするベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ を考える．

$$x_1 + ix_2 + x_3 = 0 \implies x_2 = ix_1 + ix_3$$

となっているので，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ ix_1 + ix_3\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ ix_1\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ ix_3\\ x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\ -1\\ i\end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a} - ix_2\boldsymbol{b}$$

したがって $\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ がわかる．以上より

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\} = \{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \mid x_1 + ix_2 + x_3 = 0\}.$$

ベクトル空間 V の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ に対してそれらの和集合 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ は V の部分空間にはならない．しかし和集合によって張られる $\mathrm{span}(W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n)$ は V の部分空間である．これを $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ と書いて和 (または和空間) という．

定義 0.6. W と W' を V の部分空間とする．ベクトル空間の**和** $W + W'$ を次で定める．

$$W + W' = \{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \mid \boldsymbol{w} \in W, \boldsymbol{w}' \in W'\}$$

より一般に，ベクトル空間 V の部分空間を集めた $\{W_i \mid i \in K\}$ に対して**和** $\sum_{i\in K} W_i$ を次で定める．

$$\sum_{i\in K} W_i = \left\{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n \mid \boldsymbol{w}_j \in \bigcup_{i\in K} W_i\right\}$$

$\boldsymbol{v}$ が $W_1 + \cdots + W_n$ に属しているベクトルとする．$\boldsymbol{v}$ は $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ に属するいくつかのベクトルの 1 次結合で表される．

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r$$

各 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は $W_1, \cdots, W_n$ のどれかに属している．特に W_1 に属しているものを $\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{v}}_p$ とすると，

$$\boldsymbol{w}_1 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 + \tilde{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{v}}_p$$

とすると $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ となる．同様にして $\boldsymbol{w}_2 \in W_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ を作ると

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n$$

と $W_1, \cdots, W_n$ のベクトルの和となっている．

$\boldsymbol{v} \in W_1 + \cdots + W_n$ を $W_1, \cdots, W_n$ のベクトルの和

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n$$

で表すとき表し方は一意的ではない. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ とは異なる $\boldsymbol{w}'_1 \in W_1, \boldsymbol{w}'_2 \in W_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_n \in W_n$ が存在して,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2 + \cdots + \boldsymbol{w}'_n$$

と表せる場合がある.

$\mathbb{C}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を考える.

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

$\mathbb{C}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -(x_1 - x_2 + x_3)/2 \\ -(x_1 + x_2 - x_3)/2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1 + x_2 + x_3)/2 \\ (x_1 + x_2 + x_3)/2 \end{bmatrix}$$

とおくと $\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ であってしかも

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$$

となるから $\mathbb{C}^3$ の任意のベクトルは $W_1 + W_2$ に属していて

$$W_1 + W_2 = \mathbb{C}^3$$

である. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_1 \in W_1$ かつ $\boldsymbol{x}_2 1, \boldsymbol{x}'_2 \in W_2$ であり,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2$$

となる.

ベクトル空間 V の部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ の和 $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ においてベクトル $\boldsymbol{w} \in \sum W_i$ を W_i のベクトルの和で表すやり方が一意的であるとき, 和 $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ は**直和**であるという.

定理 0.7. V をベクトル空間とし, $W_1, W_2, \cdots, W_r$ をそれぞれ r 個の V の部分空間とする．このとき, 次の (i), (ii), (iii) は同値となる.

(i) $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ が直和である.

(ii) $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ に対して,

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \cdots = \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$$

(iii) $(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r) \cap W_i = \{\boldsymbol{0}\}$ が $i = 1, \cdots, r$ で成り立つ.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ が直和であるとする．$\boldsymbol{w}_i \in W_i$ に対して, $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$ となったとする．ここで $\boldsymbol{0} \in W$ であって, $\boldsymbol{0} = \underbrace{\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}}_{r}$ かつ $\boldsymbol{0} \in W_i$ でもある．ベクトル $\boldsymbol{0} \in W$ を部分空間のベクトルの和で表すやり方が一意的であることから, $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \cdots = \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す. $i = 1, \cdots, r$ を動く i を一つ固定して,

$$\boldsymbol{v} \in (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r) \cap W_i$$

をとる. $\boldsymbol{v} \in W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r$ であるから, $k = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r$ に対して, $\boldsymbol{w}_k \in W_k$ をとって,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_{i-1} + \boldsymbol{w}_{i+1} + \cdots + \boldsymbol{w}_r$$

を得る．また $\boldsymbol{v} \in W_i$ であるから $-\boldsymbol{v} \in W_i$ であって $-\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_i$ とおくと

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_i + \cdots + \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$$

を得る．したがって, (ii) より $\boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$. 特に $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ であるので (iii) が成り立つ.

(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す. W の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}'_r \tag{3}$$

と書けるとする．ただし $\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}'_i \in W_i, i = 1, \cdots, r$ である． $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}'_i$ とおくと $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ であって (3) より,

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

となる．したがって任意の i に対して

$$\boldsymbol{v}_i = -\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \boldsymbol{v}_{i-1} - \boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - \boldsymbol{v}_r$$

となる． 左辺は $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ となる． 右辺は $W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r$ に属するベクトルである． $\boldsymbol{v}_i \in (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r) \cap W_i$ となり, (iii) より $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ を得る．よって $\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}'_i = \boldsymbol{0}$ が任意の i に対して成り立つ．すなわち, W のベクトルを $W_1, W_2, \cdots, W_r$ のベクトルの和で表す表し方は一意的であることが示されたから

$$W = W_1 + \cdots + W_r$$

は直和である. $\square$

系 0.8. ベクトル空間 V の部分空間 W が, 二つの部分空間 W_1, W_2 の直和であるためには,

$$W = W_1 + W_2 \text{ かつ } W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$$

が成り立つときであり, $W = W_1 \dotplus W_2$ で表す.