はじめに

命題 0.1 (三角関数の導関数). 次の公式が成り立つ.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

この公式は導関数の定義から証明される．その公式を暗記して微分計算を行うのが, 私の高校での授業の内容であった．ここではこれらの公式の $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ での図形的な解釈を説明する．図形的に捉えることによって, 公式が覚えやすくなると幸いである．

注意: 図形的な説明 $\neq$ 証明

前提知識

- 平面図形の知識 (相似条件など)
- 三角比の定義
- 三角比の $\theta \to 0$ での近似

❷三角関数の近似　図の扇(おうぎ)形 OAB′, △OAB, △OA′B′ において, OA = OB′ = 1, ∠AOB = θ〔rad〕とすると

$AB = \sin\theta$,　$OB = \cos\theta$,

$A'B' = OB' \times \tan\theta = \tan\theta$,

弧 $AB' = OA \times \theta = \theta$

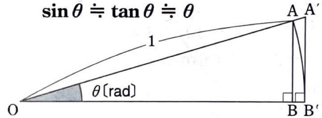
である。ここで, θ が 0 にきわめて近いとき

$OB \fallingdotseq 1$, $AB \fallingdotseq A'B' \fallingdotseq$ 弧 AB'

となるので, 次の式が成りたつ。

$\cos\theta \fallingdotseq 1$

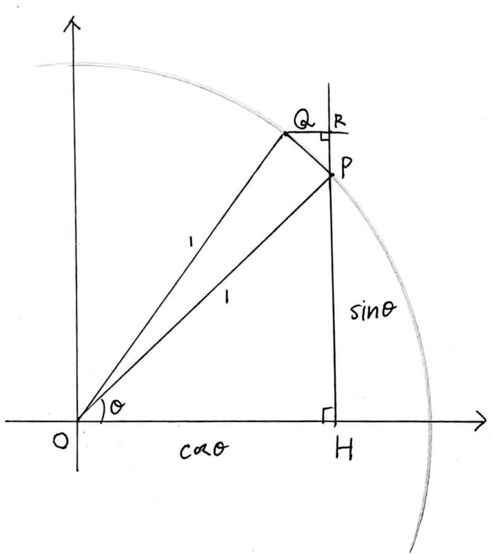
$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \theta$



(総合物理１ 数研出版から引用)

サイン・コサインの微分

単位円の上の点 $P=(\cos\theta,\sin\theta)$ を考える．底辺 $C=\cos\theta$, 高さ $S=\sin\theta$ で斜辺の長さが 1 である直角三角形 $\triangle OHP$ が出来る．



斜辺を θ からさらに $\delta\theta$ だけ傾ける． すると底辺が $C-\delta C$, 高さが $S+\delta S$, 斜辺が 1 となる三角形 $\triangle OH'Q$ が出来る．

そこで PQ を斜辺とする直角三角形を考えて, その残りの角 R とした $\triangle PQR$ を作る．$|\delta S|=PR$, $|\delta C|=QR$

$\delta\theta\to 0$ を考えると $\theta=\angle POH\approx\angle OPR$ となる．

また $\delta\theta\to 0$ のもと $PQ\approx\delta\theta$ となるから

$$\delta\theta\cos\theta=\delta S$$
$$\delta\theta\sin\theta=-\delta C$$

よって

$$\frac{\delta S}{\delta\theta}=\cos\theta$$
$$\frac{\delta C}{\delta\theta}=-\sin\theta$$

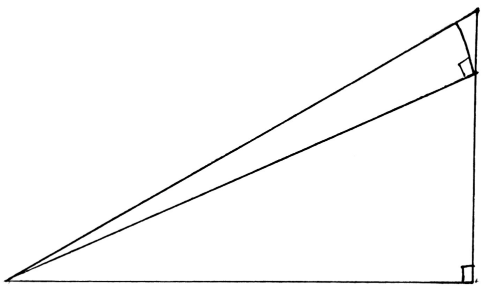
記号を改めて,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)=\cos\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta)=-\sin\theta$$

となる．

タンジェントの微分

底辺 1, 高さ $T = \tan\theta$, 斜辺 L の直角三角形を考える.



斜辺を θ からさらに $\delta\theta$ だけ傾ける. すると底辺が 1, 高さが $T + \delta T$ となる三角形が出来る. ここで図のように補助線を引くことで小さな三角形を考える.

$\delta\theta \to 0$ を考えると $\tan\theta \approx \theta$ となる. また小さな三角形とはじめの三角形が相似となる.

$$\frac{\delta T}{L\delta\theta} = \frac{L}{1}$$

整理して

$$\frac{\delta T}{\delta\theta} = L^2 = 1 + T^2 = 1 + \tan^2\theta$$

以上から, 記号を改めて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\tan\theta) = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

となる.

(ref: Visual Complex Analysis, Needham)