正則行列と連立 1 次方程式

n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ に対して, n 次の正方行列 $\mathbf{X}$ で,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n \tag{1}$$

をみたすものが存在するとき, $\mathbf{A}$ を**正則**であるといい, (1) をみたす $\mathbf{X}$ を $\mathbf{A}$ の**逆行列**という.

> **定理 0.1.** n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ が正則であるためには, $\mathbf{A}$ の行列式 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ であることが必要十分である. このとき $\mathbf{A}$ の行列式は唯一つ存在して, それを $\mathbf{A}^{-1}$ と書くと,
>
> $$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad , \quad \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})^{-1}$$
>
> が成り立つ.

Proof. まず $\mathbf{A}$ が正則であるとすると, (1) をみたす $\mathbf{X}$ が存在して,

$$\det(\mathbf{AX}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1$$

となる. したがって $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ であり, $\det(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$ が成り立つ.

逆に $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ とする. 行列 $\mathbf{A}$ の (i,j) 余因子 A_{ij} を (i,j) 成分とする行列 $\mathbf{B}$ を考えると,

$$\mathbf{A}{}^t\mathbf{B} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}_n \Longrightarrow \mathbf{A}\frac{{}^t\mathbf{B}}{\det(\mathbf{A})} = \mathbf{I}_n$$

となる. $\mathbf{C} ={}^t \mathbf{B}\det(\mathbf{A})^{-1}$ とすることで $\mathbf{A}$ は正則である. さらに

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$$

が成り立つ.

ここで $\mathbf{A}$ が正則の場合, 逆行列が $\mathbf{C}$ 以外に存在すると仮定する. $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ をみたす行列 $\mathbf{X}$ に対して, 左から $\mathbf{C}$ をかけて

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{AX}\right) = \mathbf{CI}_n$$

が成り立つ. 左辺より

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{AX}\right) = \left(\mathbf{CA}\right)\mathbf{X} = \mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{X}$$

右辺は

$$\mathbf{CI}_n = \mathbf{C}$$

以上より

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

が成り立ち, 逆行列は唯一つ存在する. □

$\mathbf{A}$ が正則であるとき, $\mathbf{A}$ の (i,j) 余因子を A_{ij} で表すと, $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めるには, 次を考えればよい.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

右辺の行列は (i,j) 成分が A_{ji} である.

特に $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則のとき

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

定理 0.2 (逆行列の性質). n 次の正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が正則であるとき, 次が成り立つ.

(i) 逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ も正則で, $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.
(ii) 転置行列 ${}^t\mathbf{A}$ も正則で, $\left({}^t\mathbf{A}\right)^{-1} = {}^t\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$.
(iii) 行列の積 $\mathbf{AB}$ も正則で, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Proof. $\mathbf{A}^{-1}$ は $\mathbf{A}$ の逆行列であるので

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

この等式は逆行列の逆行列が $\mathbf{A}$ であるとみなせる.
　また両辺の転置を取ることで

$${}^t(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = {}^t(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = {}^t\mathbf{I}_n$$

$${}^t\mathbf{A}\,{}^t\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = {}^t\left(\mathbf{A}^{-1}\right){}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

　行列の積 $\mathbf{AB}$ の右から $(\mathbf{BA})^{-1}$ をかけると,

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

となる. よって $\mathbf{AB}$ は正則で $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ となる. □

　次に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

ここで a_{ij} は実数または複素数とする. ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

とおくと連立方程式は

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

と簡潔に書くことができる. $\mathbf{A}$ のことを連立方程式の**係数行列**という.
　特に $x_1 = \cdots = x_n = 0$, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は明らかに連立方程式の解である. この解を**自明な解**という. 問題は「自明な解ではない解が存在するかどうか」,「存在するための条件は何か」ということである.

定理 0.3. 連立 *1* 次方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ が自明でない解を持つためには, 係数の作る正方行列 $\mathbf{A}$ が正則でないことが必要十分である. もし $\mathbf{A}$ が正則でない実行列ならば実数の範囲で自明でない解が存在する.

Proof. $\mathbf{A}$ を正則とする. 連立方程式の任意の解 $\mathbf{x}$ に対して,

$$\mathbf{x}=\mathbf{I}_n\mathbf{x}=\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{Ax}\right)=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

となるから, 連立方程式の解は自明なものしか存在しないことがわかる. したがって自明でない解が存在すれば $\mathbf{A}$ は正則でない.

次に $\mathbf{A}$ は正則でないとき, 解で自明なものが存在し, しかも $\mathbf{A}$ が実行列ならば, それが実数の範囲で存在することを n に関する数学的帰納法により証明しよう.

$n=1$ のとき $\mathbf{A}$ が正則でないということは $\mathbf{A}=(a_{11})=(0)$ なることであって, 連立方程式は

$$0x_{11}=0$$

なる方程式となり, 任意の x_{11} に対して成り立つので自明でない解をもつ. しかも実数の範囲で自明でない解がある.

次に $n-1$ のときに, $n-1$ 次正方行列 $\mathbf{X}$ に対して, 次が成り立つと仮定する.

$$\mathbf{X}\text{が正則でない}\Rightarrow\begin{cases}\text{自明でないかいが存在する. しかも,}\\ \mathbf{X}\text{が実行列ならば実数の範囲で存在する.}\end{cases}$$

$\mathbf{A}$ を n 次の正則でない正方行列とする. $\mathbf{A}=0$ ならば明らかになりたつので, $\mathbf{A}\neq 0$ として $a_{nn}\neq 0$ とする. ここで $n-1$ 次の正方行列

$$\mathbf{A}'=[a'_{ij}]=\left[a_{ij}-\frac{a_{in}}{a_{nn}}a_{nj}\right]_{1\le i,j\le n-1}$$

$\mathbf{A}$ が実行列ならば, $\mathbf{A}'$ も実行列となる.

$\mathbf{A}$ の行列式 $\det(\mathbf{A})$ において, 第 n 行に $-a_{in}/a_{nn}$ を掛けたものを, 第 i 行に加えると,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A})&=\begin{vmatrix}a_{11}-\frac{a_{1n}}{a_{nn}}a_{n1} & a_{12}-\frac{a_{1n}}{a_{nn}}a_{n2} & \cdots & a_{1n}-\frac{a_{1n}}{a_{nn}}a_{nn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1\,1}-\frac{a_{n-1\,n}}{a_{nn}}a_{n1} & a_{n-1\,2}-\frac{a_{n-1\,n}}{a_{nn}}a_{n2} & \cdots & a_{n-1\,n}-\frac{a_{n-1\,n}}{a_{nn}}a_{nn}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a'_{n-1\,1} & a'_{n-1\,2} & \cdots & a'_{n-1\,n-1} & 0\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}\\ &=a_{nn}\begin{vmatrix}a'_{11} & \cdots & a'_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a'_{n-1\,1} & \cdots & a'_{n-1\,n-1}\end{vmatrix}=a_{nn}\det(\mathbf{A}')\end{aligned}$$

となる. $\mathbf{A}$ は正則でないから, $\det(\mathbf{A})=0$ で, a_{nn} より $\det(\mathbf{A}')=0$ を得る. したがって $\mathbf{A}'$ も正則でないので, 帰納法の仮定より自明でない解が存在する.

少なくとも1つは0ではない $n-1$ 個の実数 $c'_1, \cdots, c'_{n-1}$ で

$$\begin{gathered} a'_{11}c'_1 + \cdots + a'_{1\,n-1}c'_{n-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n-1\,1}c'_1 + \cdots + a'_{n-1\,n-1}c'_{n-1} = 0 \end{gathered}$$

すなわち $1 \leq i \leq n-1$ のとき, i 行目の方程式は

$$\sum_{j=1}^{n-1} a'_{ij}c'_j = 0$$

となる.

そこで $c_1 = c'_1, \cdots, c_{n-1} = c'_{n-1}$ とし $c_n = -\left(\sum_{j=1}^{n-1} a'_{nj}c'_j\right)/a_{nn}$ とおくと, 少なくとも1つは0ではない. $1 \leq i \leq n-1$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}c_j + a_{in}c_n \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}c'_j - \frac{a_{in}}{a_{nn}} \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}c'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{ij} - \frac{a_{in}}{a_{nn}}a_{nj}\right) c'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a'_{ij}c'_j = 0 \end{aligned}$$

であり, また $i = n$ のときに

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}ac_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}c'_j + a_{nn}c_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}c'_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}c'_j = 0$$

となるから $c_1, \cdots, c_n$ は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をみたす. すなわち $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots x_n = c_n$ は $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の自明でない解である.

もし $\mathbf{A}$ が実行列のときは $\mathbf{A}'$ も実行列だから $c'_1, \cdots, c'_{n-1}$ をすべて実数にとったとしてよい. そのとき $c_1, c_2, \cdots, c_n$ も明らかに実数となり, 実数の範囲で自明でない解をもつ. $\square$

次に一般に n 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

を考える.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

とおくと (2) は

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$

と書ける. $\mathbf{A}$ が正則ならば, (3) の両辺に $\mathbf{A}^{-1}$ を左から掛けて

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

を得るが, これは確かに (3) の階である.

$\mathbf{A}$ の (i, j) 余因子を A_{ij} で表すと, $\mathbf{A}^{-1}$ と行列の乗法の定義より,

$$x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{kj}}{\det(\mathbf{A})} b_k = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{j=1}^{n} b_k A_{kj}$$

を得る. $\sum_{j=1}^{n} b_k A_{kj}$ は行列 $\mathbf{A}$ の第 j 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列の行列式である. したがって次の定理を得る.

定理 0.4 (クラメルの公式). 連立方程式 *(2)* の係数の作る行列 $\mathbf{A}$ が正則であるとき, *(2)* は唯一組の解をもち,

$$x_j = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \vee & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

で表される.