2 次の行列式

x, y を未知数とする連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

第 1 式に b', 第 2 式に b を掛けると,

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ a'bx + bb'y = c'b \end{cases}$$

となりそれぞれ引くと

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b$$

を得る. 同様にして,

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$$

となるから, $ab' - a'b \neq 0$ ならば, 連立方程式の解は,

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}\ ,\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

となる. この解を観察すると

- 分母分子は二つの文字の積の差
- x の分子は分母の a, a' を c, c' に入れ替えたもの
- y の分子は分母の b', b を c', c に入れ替えたもの

であることが分かる.

そこで 4 つの変数 $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ をもつ関数 $f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ を次で定義する.

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

の x, y は次のように表される.

$$x = \frac{f(c, b, c', b')}{f(a, b, a', b')}\ ,\ y = \frac{f(a, c, a', c')}{f(a, b, a', b')}$$

このように定義された関数を 2 次の行列式といって, $f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ を

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

で表す. すなわち

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

である.

3 次の行列式

x, y, z を未知数とする連立一次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

第 1 式に c', 第 2 式に c を掛けて引くと

$$(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = dc' - d'c \tag{1}$$

を得る. また, 第 2 式に c'', 第 3 式に c' を掛けて引くと

$$(a'c'' - a''c')x + (b'c'' - b''c')y = d'c'' - d''c' \tag{2}$$

を得る. また, 第 1 式に c'', 第 3 式に c' を掛けて引くと

$$(a''c - ac'')x + (b''c - bc'')y = d''c - dc'' \tag{3}$$

を得る. (1) に b'' ,(2) に b', (3) に b をそれぞれ掛けて, 全部加えると y が消去されて,

$$\begin{aligned} &(ab''c' - a'b''c + a'bc'' - a''bc' + a''b'c - ab'c'')\,x \\ &= (db''c' - d'b''c + d'bc'' - d''bc' + d''b'c - db'c'') \end{aligned}$$

となる. 両辺 -1 倍して整理すると,

$$\begin{aligned} &(ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b'')\,x \\ &= (db'c'' + bc'd'' + cd'b'' - cb'd'' - bd'c'' - dc'b'') \end{aligned} \tag{4}$$

を得る.

同様にして, y, z に関しても次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &(ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b'')\,y \\ &= (ad'c'' + dc'a'' + ca'd'' - cd'a'' - da'c'' - ac'd'') \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &(ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b'')\,z \\ &= (ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - db'a'' - ba'd'' - ad'b'') \end{aligned} \tag{6}$$

ここで 9 つの変数からなる関数

$$x_{11}x_{22}x_{33}+x_{12}x_{23}x_{31}+x_{12}x_{21}x_{32}-x_{12}x_{22}x_{31}-x_{12}x_{21}x_{33}-x_{11}x_{23}x_{32}$$

を次のように表し, 3 次の行列式という.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

(4), (5), (6) の式を行列式を使って表すと, 次のようになる.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

n 次の行列式

ここで 2 次 3 次の行列式を置換を使って表すことで, n 次の行列式をどのように定義するか考える.

まず 2 次の場合, 2 つの項からなっていて, $\pm x_{1i}x_{2j}$ なる形をしている. ここで i, j は $1, 2$ の置換 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{smallmatrix}\right)$ である. 偶置換の場合, $x_{11}x_{22}$ の符号は $+$, 奇置換の場合, $x_{12}x_{21}$ の符号は $-$ がついている. したがって, 行列式は

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)}$$

のように書ける. ここで $\sum_{\sigma \in S_2}$ は $\{1, 2\}$ のすべての置換について和をとるものとする.

次に 3 次の場合, 9 つの項からなっていて, $\pm x_{1i}x_{2j}x_{3k}$ なる形をしている. ここで i, j, k は $1, 2, 3$ の置換 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{smallmatrix}\right)$ である. 偶置換の符号は $+$, 奇置換の符号は $-$ がついている. 2 次の場合と同様に,

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} x_{3\sigma(3)}$$

のように書ける. ここで $\sum_{\sigma \in S_3}$ は $\{1, 2, 3\}$ のすべての置換について和をとるものとする.

以上より, 一般に n 次の行列式を次のように定義することにする. n^2 個の変数 $\{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}\}$ に対して, n **次の行列式**を次のように定義する.

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

n 次の行列式は, n^2 個の変数 $\{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}\}$ に関する関数である. また x_{ij} に具体的な値を代入したものも行列式という.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -7$$

定義 0.1. n 次の正方行列

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の各 (i, j) 成分を $x_{ij} = a_{ij}$ と代入して得られる行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を行列 $\mathbf{A}$ の行列式といって, $|\mathbf{A}|, \det \mathbf{A}$ あるいは $\det(a_{ij})$ と表す.

Rule of Sarrus

For 2×2 determinants,

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

For 3×3 determinants,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} &= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} \\ &\quad - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \end{aligned}$$