0.1 置換

一般に集合 M から M 上への 1 対 1 対応 σ を M の**置換**という．すなわち, σ は M の元 a に M のある元 $\sigma(a)$ を対応させるもので,

- $a \neq b$ ならば $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ であり,
- M の任意の元 x に対して, $\sigma(a) = x$ となる M の元 a が必ず存在する

ようなものである．ここでは M が有限集合の場合を考える．$M = a, b, \cdots, z$ であるとき, M の置換 σ を次のように表す.

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & z \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \cdots & \sigma(z) \end{pmatrix}$$

上段には定義域 M の元, 下段にはその置換の対応する値を並べて表す.

例えば $M = \{a, b, c\}$ のとき, M の置換は全部で 6 個ある.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

M を有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ とする．このとき置換 σ に対して，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の並べ替えである．逆に $\{1, 2, \cdots, n\}$ の一つの並び替え $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき,

$$\sigma(1) = a_1, \sigma(2) = a_2, \cdots, \sigma(n) = a_n$$

は一つの置換となる．つまり $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換は全部で $n!$ 個 (並べ替えの数, 順列の数) ある.

$\sigma(i) = i$ となるとき i は σ で不変であるという.

置換 σ が $1, 2, \cdots, n$ のうちのいくつかを不変とするとき, 例えば $\sigma(n) = n$ として n を不変とする．すると σ は $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ の置換と考えることが出来る．逆に, $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ の置換は n を不変とする $\{1, 2, \cdots, n-1, n\}$ の置換と考えることが出来る．一般に, $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ とし, 残りの文字の集合を $\{j_1, j_2, \cdots, j_{n-p}\}$ で表す．$i_1, i_2, \cdots, i_p$ の並べ替えの一つを $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_p)$ とすると,

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \\ \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_p) & j_1 & \cdots & j_{n-p} \end{pmatrix}$$

と同一視する.

σ, τ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換としたとき, i に対して $\tau(i)$ はまた $1, 2, \cdots, n$ のどれかであり, さらに σ によって, $\sigma(\tau(i))$ に移る．このとき i に対して, $\sigma(\tau(i))$ を対応させる対応はまた一つの置換となり, この置換を σ と τ の積といって $\sigma\tau$ で表す.

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

このとき, 積は次のようになる.

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

0.2　対称群

σ, τ, ρ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換としたとき, 任意の i に対して,

$$((\rho\tau)\rho)(i) = (\sigma\tau)(\rho(i)) = \sigma(\tau(\rho(i))) = \sigma((\tau\rho)(i)) = (\rho(\tau\rho))(i)$$

が成り立つ. すなわち置換の **積の結合律**

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

が成り立つ. しかし交換律は成り立たない. 例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるから $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ となる.

次に任意の i に対して, i を対応させる置換を**恒等置換**といい ι と書くことにする.

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

任意の置換 σ に対して,

$$\iota\sigma = \sigma\iota = \sigma$$

が成り立つ.

最後に置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

とするとき

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を σ の**逆置換**といい σ^{-1} と書くことにする.

任意の i に対して,

$$(\sigma\sigma^{-1})(i) = (\sigma^{-1}\sigma)(i) = i$$

が成り立ち,

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota$$

となる. 逆に置換 σ に対して置換 τ が $\sigma\tau = \iota$ をみたしたとすると, 両辺に σ^{-1} を掛けると,

$$\sigma^{-1}(\sigma\tau) = \sigma^{-1}\iota$$

となる. 左辺の結合律を考えて,

$$\sigma^{-1}(\sigma\tau) = (\sigma^{-1}\sigma)\tau = \iota\tau = \tau$$

となり, 右辺は

$$\sigma^{-1}\iota = \sigma^{-1}$$

と一致する. すなわち $\tau = \sigma^{-1}$ が成り立つ. 同様にして $\tau\sigma = \iota$ に対しても, $\tau = \sigma^{-1}$ が成り立つ. 以上より逆置換の一意性がなりたつ.

また明らかに

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$$

である. (involution, 対合性)

以上より, 置換全体は群の構造を持つ.

定義 0.1. 自然数 n に対して, $\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への置換全体を**対称群**といい, S_n で表す.

0.3　互換

$\{1,2,\cdots,n\}$ の置換で,

- i を j にうつす
- j を i にうつす
- i,j 以外を不変にする

ような置換を i と j の**互換**といって (ij) で表す.

$$(ij)=\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

σ が互換ならば σ^{-1} も互換であって, $\sigma^{-1}=\sigma$ がなりたつ.

定理 0.2. 任意の置換は互換の積で表すことができる.

Proof. n 個の文字の置換に対して, n に関する数学的帰納法を用いて示す.

$n=2$ のとき置換は $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ の 2 つである. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ はそれ自身互換であり, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ であり主張をみたす.

次に $n\geq 3$ とし, $n-1$ 個の文字 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ の置換に対して, 定理が成り立つと仮定する. σ を $\{1,2,\cdots,n\}$ の置換とする.

もし $\sigma(n)=n$ ならば, σ は $\{1,2,\cdots,n-1\}$ の置換となり, 仮定より σ は互換の積で表せる.

$\sigma(n)=i\neq n$ とする. 互換 $\sigma_0=(in)$ を考えると $\sigma'=\sigma_0\sigma$ は $\{1,2,\cdots,n-1\}$ の置換となるので, と互換の積で表される.

$$\sigma'=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p$$

したがって,

$$\sigma=\sigma_0^{-1}\sigma'=\sigma_0\sigma'=\sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p$$

と互換の積で表される. □

置換を互換の積で表わす方法は一意的ではない. $\sigma=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ とすると,

$$\sigma=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)=(14)(24)(34)$$

であるが, また

$$\begin{aligned}\sigma&=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\\&=(34)(12)(23)(12)(23)\end{aligned}$$

とも書ける.

0.4　置換の偶奇性

σ を $\{1,2,\cdots,n\}$ の置換とし, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の多項式とするとき, この多項式の変数の添え字を入れ替えたものを次のように表す.

$$f_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})$$

例えば, 置換 $\sigma=(12)$ に対して,

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2$$

のとき

$$f_\sigma(x_1,x_2)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})=f(x_2,x_1)=x_2^2+x_2x_1$$

二つの置換 σ,τ に対して, $y_i = x_{\sigma(i)}$ とすれば $y_{\tau(i)} = x_{\sigma\tau(i)}$ であるから,

$$\begin{aligned} f_{\sigma\tau}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= f(x_{\sigma\tau(1)},x_{\sigma\tau(2)},\cdots,x_{\sigma\tau(n)}) \\ &= f(y_{\tau(1)},y_{\tau(2)},\cdots,y_{\tau(n)}) \\ &= f_\tau(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ &= f_\tau(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)}) \\ &= (f_\tau)_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}$$

を得る.

いま $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の差積

$$\begin{aligned} \Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \Pi_{i<j}(x_i-x_j) \\ = (x_1-x_2)&(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n) \\ &\times(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\times(x_{n-1}-x_n) \end{aligned}$$

を考える. Δ は多項式である. $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ において二つの変数を入れ替えると符号が変わるので σ_0 を互換とすると

$$\Delta_{\sigma_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

となる.

したがって一般に置換 σ が p 個の互換の積であるならば

$$\Delta_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (-1)^p\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

が成り立つことがわかる.

もし置換 σ が p 個の互換の積であり, q 個の互換の積でも表されるとき,

$$\Delta_\sigma(x_1,\cdots,x_n) = (-1)^p\Delta(x_1,\cdots,x_n) = (-1)^q\Delta(x_1,\cdots,x_n)$$

であるから

$$(-1)^p = (-1)^q$$

となる. すなわち, この値は σ を互換の積で表す方法によらずに σ だけで決まり, p が偶数ならば q も偶数で, p が奇数ならば q も奇数である.

定理 0.3. 置換 σ を互換の積で表したとき, その互換の個数が偶数であるか奇数であるかは, その表し方によらない.

偶数個の互換で表される置換を**偶置換**という. 奇数個の互換で表される置換を**奇置換**という. 置換 σ に対して, その**符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を次のように定める.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1 & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

定理 0.4. 置換 σ,τ, 恒等置換 ι, 逆置換 σ^{-1} に対して, 次が成り立つ.

(i) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$

(ii) $\mathrm{sgn}(\iota) = 1$

(iii) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$