ここでは光が重力場から脱出するときにエネルギーを失うという事実を利用して、「重力は時間を遅らせる」ということを数式で確認してみる.

1　公式

光子のエネルギー

光子のエネルギー ϵ は, プランク定数 h と振動数 ν により、次のように表される.

$$\epsilon = h\nu \tag{1}$$

（光子のエネルギー）＝（プランク定数）×（振動数）

振動数, 波数, 時間の関係

振動数 ν のとき、n 個の（波の）山が 一定時間 δT の間に発生するとする.

$$n = \nu\delta T \tag{2}$$

（山の数）＝（振動数）×（一定時間）

2　重力場からの脱出による光の振動数の減少

光源 (Emitter) が位置 E で $\epsilon_E = h\nu_E$ のエネルギーで光を放出しているとする. このとき,
観察者 (Observer) が位置 O で $\epsilon_O = h\nu_O$ のエネルギーを持つ光を観察できるとする.
位置 E の重力ポテンシャルが, 位置 O の重力ポテンシャルに比べて大きい負の値のとき, 光はエネルギーを失って E から O に移動したこととなる. つまり発光直後の方がエネルギーが大きいので

$$\epsilon_E > \epsilon_O$$

すなわち、

$$\nu_E > \nu_O \tag{3}$$

が成り立つ.

3　時間膨張 time dilation

いま、位置 E において n 個の光の波の山が 一定時間 δT_E の間に発生したとする. そして位置 O において n 個の光の波の山が 一定時間 δT_O の間に観測されたとする (山の数は不変). このとき、

$$\nu_E\delta T_E = \nu_O\delta T_o$$

が成り立つ. 両辺を $\nu_E > 0$ で割ると

$$\delta T_E = \frac{\nu_O}{\nu_E}\delta T_o \tag{4}$$

(4) の式は Time dilation の式である. なぜなら、(3) より

$$\frac{\nu_O}{\nu_E} < 1 \tag{5}$$

なので、位置 E での時間 δT_E は、位置 O での時間 δT_O の $\frac{\nu_O}{\nu_E}$ 倍と等しいからである. 結論として、重力の強い（重力ポテンシャルの大きい）場所では、時計は遅く進む.

参考文献

[1] L.P.Hughston and K.P.Tod, An Introducton to General Relativity, Cambridge

[2] Timothy Clifton, Gravity A Very Short Introduction, Oxford Univ Pr