CURSO:

REGRESION AVANZADA
(CON ENFOQUE BAYESIANO)

PROFESOR: LUIS E. NIETO BARAJAS

EMAIL: lnieto@itam.mx

URL: http://allman.rhon.itam.mx/~lnieto

Maestría en ciencia de datos

ITAM
EXCELENCIA ACADÉMICA

Regresión Avanzada

- OBJETIVO: El estudiante conocerá los principios básicos de la inferencia bayesiana y se familiarizará con el concepto de modelado estadístico en general. Conocerá algunas de las familias de modelos más comunes y será capaz de realizar un análisis estadístico bayesiano para estos modelos.

- TEMARIO:
  1. Introducción a la inferencia bayesiana.
  2. Introducción a MCMC y medidas de ajuste bayesianas
  3. Implementación en R (Winbugs, Openbugs y JAGS)
  4. Modelos lineales generalizados
  5. Modelos dinámicos
  6. Modelos jerárquicos o multinivel
  7. Modelos espaciales (optativo)

- REFERENCIAS:

1. Bernardo, J. M. (1981). *Bioestadística: Una perspectiva Bayesiana*. Vicens Vives: Barcelona. (http://www.uv.es/bernardo/Bioestadistica.pdf)
2. Gutiérrez-Peña, E. (1997). *Métodos computacionales en la inferencia Bayesiana*. Monografía IIMAS-UNAM Vol. 6, No. 15. (http://www.dpye.iimas.unam.mx/eduardo/MCB/index.html)
3. Congdon, P. (2001). *Bayesian Statistical Modelling*. Wiley: Chichester.
4. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. & Rubin, D. (2002). *Bayesian Data Analysis*, 2a. edición. Chapman & Hall: Boca Raton.

5. Nieto-Barajas, L. E. & de Alba, E. (2014). Bayesian regression models. En *Predictive Modeling Applications in Actuarial Science*. E.W. Frees, R.A. Derrig & G. Meyers (eds.) Cambridge University Press, pp 334-366.
6. Banerjee, S., Carlin, B. P. & Gelfand, A. (2014). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, 2a. edición. Chapman & Hall: Boca Raton.

- PAQUETES ESTADÍSTICOS: Durante el curso se manejarán varios paquetes estadísticos que nos servirán para entender mejor los conceptos y para realizar análisis Bayesianos.
  1) R (http://www.r-project.org/)
     Paquetes: R2WinBUGS, R2OpenBUGS, rjags
  2) R Studio (http://www.rstudio.com/)
  3) WinBUGS (http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/)
  4) OpenBUGS (http://www.openbugs.net/)
  5) JAGS (http://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/files/JAGS/)

- EVALUACIÓN: El curso se avaluará de la siguiente manera:
  - Tarea Examen - 40%
  - Trabajo Final - 40%
  - Exposición - 20%
  - Tareas

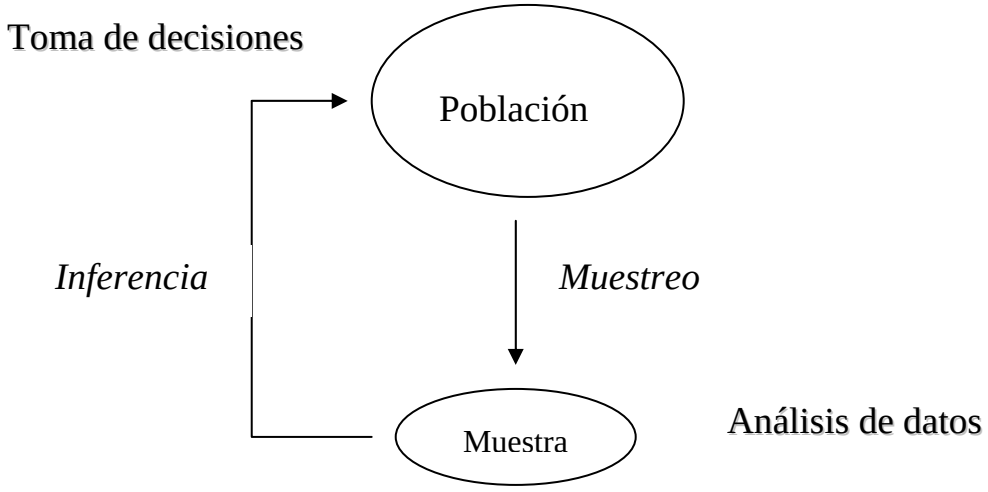
- NOTA: Tanto el trabajo final como la exposición se realizarán en equipos de a lo más 3 integrantes. El objetivo del trabajo es enfrentar al alumno a un problema real en el que tendrá que mostrar su conocimiento aprendido modelando de manera adecuada un conjunto de datos, resolviendo objetivos particulares y tomando decisiones.

1. Introducción a la inferencia bayesiana

1.1 Fundamentos

- El OBJETIVO de la estadística, y en particular de la estadística Bayesiana, es proporcionar una metodología para analizar adecuadamente la información con la que se cuenta (*análisis de datos*) y decidir de manera razonable sobre la mejor forma de actuar (*teoría de decisión*).

- DIAGRAMA de la Estadística:



- Tipos de INFERENCIA:

	Clásica	Bayesiana
Paramétrica	√√√	√√
No paramétrica	√√	√

- La estadística esta basada en la TEORÍA DE PROBABILIDADES. Formalmente la probabilidad es una función que cumple con ciertas condiciones

(*axiomas de la probabilidad*), pero en general puede entenderse como una medida o cuantificación de la incertidumbre.

- Aunque la definición de función de probabilidad es una, existen varias interpretaciones dela probabilidad: clásica, frecuentista y subjetiva. La METODOLOGÍA BAYESIANA está basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes.

Reverendo *Thomas Bayes* (1702-1761).

- El enfoque bayesiano realiza *inferencia estadística* en un contexto de teoría de decisión.

- La TEORÍA DE DECISIÓN propone un método de tomar decisiones basado en unos principios básicos sobre la *elección coherente* entre opciones alternativas.

- ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN en ambiente de incertidumbre:
  Un problema de decisión se define por la cuarteta ($\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}$, $\leq$), donde:

- $\boldsymbol{D}$: Espacio de opciones.
- $\boldsymbol{E}$: Espacio de eventos inciertos.
- $\boldsymbol{C}$: Espacio de consecuencias.

- $\leq$: Relación de preferencia entre las distintas opciones.

➢ CUANTIFICACIÓN de los sucesos inciertos y de las consecuencias.

- La información que el decisor tiene sobre la posible ocurrencia de los eventos inciertos puede ser cuantificada a través de una *función de probabilidad* sobre el espacio ***E***.
- De la misma manera, es posible cuantificar las preferencias del decisor entre las distintas consecuencias a través de una *función de utilidad* de manera que $c_{ij} \leq c_{i'j'} \Leftrightarrow u(c_{ij}) \leq u(c_{i'j'})$.

➢ AXIOMAS DE COHERENCIA. Son una serie de principios que establecen las condiciones para tomar decisiones coherentemente y para aclarar las posibles ambigüedades en el proceso de toma de decisión.

o Teorema: Criterio de decisión Bayesiano.

Considérese el problema de decisión definido por $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2, ..., d_k\}$, *donde* $d_i = \{c_{ij} | E_j, j = 1, \ldots, m_i\}$, *i=1,...,k. Sea* $P(E_{ij}|d_i)$ *la probabilidad de que suceda* E_{ij} *si se elige la opción* d_i, *y sea* $u(c_{ij})$ *la utilidad de la consecuencia* c_{ij}. *Entonces, la cuantificación de la opción* d_i *es su utilidad esperada, i.e.,*

$$\bar{u}(d_i) = \sum_{j=1}^{m_i} u(c_{ij}) P(E_{ij}|d_i).$$

La decisión óptima es aquella d^* *tal que* $\bar{u}(d^*) = \max_i \bar{u}(d_i)$.

- RESUMIENDO: Si se aceptan los axiomas de coherencia, necesariamente se debe proceder de la siguiente manera:

  1) Asignar una utilidad u(c) para toda c en ***C***.

  2) Asignar una probabilidad P(E) para toda E en ***E***.

  3) Elegir la opción (óptima) que maximiza la utilidad esperada.

1.2 Proceso de aprendizaje y distribución predictiva

- La reacción natural de cualquiera que tenga que tomar una decisión cuyas consecuencias dependen de la ocurrencia de eventos inciertos ***E***, es intentar reducir su incertidumbre obteniendo más información sobre ***E***.

- LA IDEA es entonces recolectar información que *reduzca* la incertidumbre de los eventos inciertos, o equivalentemente, que mejore el conocimiento que se tiene sobre E.

- ¿De dónde obtengo información adicional?.
  Encuestas, estudios previos, experimentos, etc.

- El problema central de la inferencia estadística es el de proporcionar una metodología que permita *asimilar* la información accesible con el objeto de mejorar nuestro conocimiento inicial.

- ¿Cómo utilizar Z para mejorar el conocimiento sobre E?.

$$P(E) \xrightarrow{\text{¿?}} P(E|Z)$$

Mediante el Teorema de Bayes.

- **TEOREMA DE BAYES**: *Sean* $\{E_j, j \in J\}$ *una partición finita de* Ω (***E***), *i.e.*, $E_j \cap E_k = \varnothing \ \forall_{j \neq k}$ y $\bigcup_{j \in J} E_j = \Omega$. *Sea* $Z \neq \varnothing$ *un evento. Entonces,*

$$P(E_i|Z) = \frac{P(Z|E_i)P(E_i)}{\sum_{j \in J} P(Z|E_i)P(E_i)}, \quad i = 1,2,...,k.$$

- Comentarios:
  1) Una forma alternativa de escribir el Teorema de Bayes es:
  $$P(E_i|Z) \propto P(Z|E_i)P(E_i)$$
  P(Z) es llamada constante de proporcionalidad.
  2) A las $P(E_j)$ se les llama probabilidades iniciales o a-priori y a las $P(E_j|Z)$ se les llama probabilidades finales o a-posteriori. Además, $P(Z|E_j)$ es llamada verosimilitud y P(Z) es llamada probabilidad marginal de la información adicional.

- Recordemos que todo esto de la cuantificación inicial y final de los eventos inciertos es para reducir la incertidumbre en un problema de decisión.

  Supongamos que para un problema particular se cuenta con lo siguiente:

  $P(E_{ij})$: cuantificación inicial de los eventos inciertos

  $u(c_{ij})$: cuantificación de las consecuencias

  Z: información adicional sobre los eventos inciertos

Teo. Bayes

$$P(E) \Longrightarrow P(E|Z)$$

En este caso se tienen dos situaciones:

1) Situación inicial (a-priori):

$P(E_{ij})$, $u(c_{ij})$, $\sum_j u(c_{ij})P(E_{ij})$ ⟵ **Utilidad esperada inicial**

2) Situación final (a-posteriori):

$P(E_{ij}|Z)$, $u(c_{ij})$, $\sum_j u(c_{ij})P(E_{ij}|Z)$ ⟵ **Utilidad esperada final**

Problema de Inferencia.

- PROBLEMA DE INFERENCIA. Sea $\boldsymbol{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$ una familia paramétrica indexada por el parámetro $\theta \in \Theta$. Sea $X_1,...,X_n$ una m.a. de observaciones de $f(x|\theta) \in \boldsymbol{F}$. El problema de inferencia paramétrico consiste en aproximar el verdadero valor del parámetro θ.

- El problema de inferencia estadístico se puede ver como un problema de decisión con los siguientes elementos:

  $\boldsymbol{D}$ = espacio de decisiones de acuerdo al problema específico

  $\boldsymbol{E} = \Theta$ (espacio parametral)

  $\boldsymbol{C} = \{(d,\theta): d \in \boldsymbol{D}, \theta \in \Theta\}$

  $\leq$: Será representado por una función de utilidad o pérdida.

- La muestra proporciona información adicional sobre los eventos inciertos $\theta \in \Theta$. El problema consiste en cómo actualizar la información.

- Por lo visto con los axiomas de coherencia, el decisor es capaz de cuantificar su conocimiento acerca de los eventos inciertos mediante una función de probabilidades. Definamos,

  $f(\theta)$ *la distribución inicial (ó a-priori)*. Cuantifica el conocimiento inicial sobre θ.

  $f(\underline{x}|\theta)$ *proceso generador de información muestral*. Proporciona información adicional acerca de θ.

  $f(\underline{x}|\theta)$ *la función de verosimilitud*. Contiene toda la información sobre θ proporcionada por la muestra $\underline{X} = (X_1, \ldots X_n)$.

- Toda esta información acerca de θ se combina para obtener un conocimiento final o a-posteriori después de haber observado la muestra. La forma de hacerlo es mediante el *Teorema de Bayes*:

$$f(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\theta)f(\theta)}{f(\underline{x})},$$

donde $f(\underline{x}) = \int_{\Theta} f(\underline{x}|\theta)f(\theta)d\theta$ ó $\sum_{\theta} f(\underline{x}|\theta)f(\theta)$.

Como $f(\theta|\underline{x})$ es función de θ, entonces podemos escribir

$$f(\theta|\underline{x}) \propto f(\underline{x}|\theta)f(\theta)$$

Finalmente,

$f(\theta|\underline{x})$ *la distribución final (ó a-posteriori)*. Proporciona todo el conocimiento que se tiene sobre θ (inicial y muestral).

- NOTA: Al tomar θ el carácter de aleatorio, debido a que el conocimiento que tenemos sobre el verdadero valor θ es incierto, entonces la función de

densidad que genera observaciones con información relevante para θ es realmente una función de densidad condicional.

- Definición: *Llamaremos una muestra aleatoria (m.a.) de tamaño n de una población* $f(x|\theta)$*, que depende de* θ*, a un conjunto* $X_1,...,X_n$ *de variables aleatorias condicionalmente independientes dado* θ*, i.e.,*

$$f(x_1,\dots x_n|\theta)=f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta).$$

En este caso, la función de verosimilitud es la función de densidad (condicional) conjunta de la m.a. vista como función del parámetro, i.e.,

$$f(\underline{x}|\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

- DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA: La distribución predictiva es la función de densidad (marginal) f(x) que me permite determinar qué valores de la v.a. X resultan más probables.

  - Lo que conocemos acerca de X esta condicionado al valor del parámetro θ, i.e., f(x|θ) (su función de densidad condicional). Como θ es un valor desconocido, f(x|θ) no puede utilizarse para describir el comportamiento de la v.a. X.

  - *Distribución predictiva inicial*. Aunque el verdadero valor de θ sea desconocido, siempre se dispone de cierta información sobre θ (mediante su distribución inicial f(θ)). Esta información puede combinarse para poder dar información sobre los valores de X. La forma de hacerlo es:

$$f(x) = \int f(x|\theta) f(\theta) d\theta \qquad \text{ó} \qquad f(x) = \sum_{\theta} f(x|\theta) f(\theta)$$

- Supongamos que se cuenta con información adicional (información muestral) $X_1, X_2, .., X_n$ de la densidad $f(x|\theta)$, por lo tanto es posible tener un conocimiento final sobre θ mediante su distribución final $f(\theta|\underline{x})$.

- *Distribución predictiva final*. Supongamos que se quiere obtener información sobre los posibles valores que puede tomar una nueva v.a. X_F de la misma población $f(x|\theta)$. Si X_F es independiente de la muestra $X_1, X_2, .., X_n$, entonces

$$f(x_F|\underline{x}) = \int f(x_F|\theta) f(\theta|\underline{x}) d\theta \qquad \text{ó} \qquad f(x_F|\underline{x}) = \sum_{\theta} f(x_F|\theta) f(\theta|\underline{x})$$

- EJEMPLO 6: *Lanzar una moneda*. Se tiene un experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda. Sea X la v.a. que toma el valor de 1 si la moneda cae sol y 0 si cae águila, i.e., X~Ber(θ). En realidad se tiene que X|θ ~Ber(θ), donde θ es la probabilidad de que la moneda caiga sol.

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x).$$

El conocimiento inicial que se tiene acerca de la moneda es que puede ser una moneda deshonesta (dos soles).

P(honesta) = 0.95 y P(deshonesta) = 0.05

¿Cómo cuantificar este conocimiento sobre θ?

moneda honesta $\Leftrightarrow \theta = 1/2$
moneda deshonesta $\Leftrightarrow \theta = 1$
} $\theta \in \{1/2, 1\}$

por lo tanto,

$$P(\theta = 1/2) = 0.95 \quad \text{y} \quad P(\theta = 1) = 0.05$$

es decir,

$$f(\theta) = \begin{Bmatrix} 0.95, & \text{si } \theta = 1/2 \\ 0.05, & \text{si } \theta = 1 \end{Bmatrix}$$

Supongamos que al lanzar la moneda una sola vez se obtuvo un sol, i.e, X_1=1. Entonces la verosimilitud es

$$P(X_1 = 1|\theta) = \theta^1(1-\theta)^0 = \theta.$$

Combinando la información inicial con la verosimilitud obtenemos,

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X_1 = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)$$
$$= (0.5)(0.95) + (1)(0.05) = 0.525$$

$$P(\theta = 1/2|X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2)}{P(X_1 = 1)} = \frac{(0.5)(0.95)}{0.525} = 0.9047$$

$$P(\theta = 1|X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{(1)(0.05)}{0.525} = 0.0953$$

es decir,

$$f(\theta|x_1 = 1) = \begin{Bmatrix} 0.9047, & \text{si } \theta = 1/2 \\ 0.0953, & \text{si } \theta = 1 \end{Bmatrix}$$

La distribución predictiva inicial es

$$P(X = 1) = P(X = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)$$
$$= (0.5)(0.95) + (1)(0.05) = 0.525$$

$$P(X = 0) = P(X = 0|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1)$$
$$= (0.5)(0.95) + (0)(0.05) = 0.475$$

es decir,

$$f(x)=\begin{Bmatrix}0.525, & \text{si } x=1\\ 0.475, & \text{si } x=0\end{Bmatrix}$$

La distribución predictiva final es

$$\begin{aligned}P(X_F=1|x_1=1)&=P(X_F=1|\theta=1/2)P(\theta=1/2|x_1=1)+P(X_F=1|\theta=1)P(\theta=1|x_1=1)\\&=(0.5)(0.9047)+(1)(0.0953)=0.54755\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_F=0|x_1=1)&=P(X_F=0|\theta=1/2)P(\theta=1/2|x_1=1)+P(X_F=0|\theta=1)P(\theta=1|x_1=1)\\&=(0.5)(0.9047)+(0)(0.0953)=0.45235\end{aligned}$$

es decir,

$$f(x_F|x_1=1)=\begin{Bmatrix}0.548, & \text{si } x_F=1\\ 0.452, & \text{si } x_F=0\end{Bmatrix}.$$

- EJEMPLO 7: *Proyectos de inversión*. Las utilidades de un determinado proyecto pueden determinarse a partir de la demanda (θ) que tendrá el producto terminal. La información inicial que se tiene sobre la demanda es que se encuentra alrededor de $39 millones de pesos y que el porcentaje de veces que excede los $49 millones de pesos es de 25%.

  De acuerdo con la información proporcionada, se puede concluir que una distribución normal modela "adecuadamente" el comportamiento inicial, entonces

$$\theta \sim N(\mu,\sigma^2),$$

donde $\mu=E(\theta)$=media y $\sigma^2=Var(\theta)$=varianza. Además

Demanda (θ) alrededor de 39 ⇨ **μ=39**

P(θ > 49) = 0.25 ⇨ **σ=14.81**

¿Cómo?

$$P(\theta > 49) = P\left(Z > \frac{49-39}{\sigma} \right) = 0.25 \;\Rightarrow\; Z_{0.25} = \frac{49-39}{\sigma},$$

$$\text{como } Z_{0.25} = 0.675 \text{ (valor de tablas)} \Rightarrow\; \sigma = \frac{10}{0.675}$$

Por lo tanto, $\theta \sim N(39, 219.47)$.

Para adquirir información adicional sobre la demanda, se considerarán 3 proyectos similares cuyas utilidades dependen de la misma demanda. Supongamos que la utilidad es una variable aleatoria con distribución Normal centrada en θ y con una desviación estándar de σ=2.

$$X|\theta \sim N(\theta, 4) \quad y \quad \theta \sim N(39, 219.47)$$

Se puede demostrar que la distribución predictiva inicial toma la forma

$$X \sim N(39, 223.47)$$

¿Qué se puede derivar de esta distribución predictiva?

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60-39}{\sqrt{223.47}} \right) = P(Z > 1.4047) = 0.0808,$$

lo cual indica que es muy poco probable tener una utilidad mayor a 60.

Suponga que las utilidades de los 3 proyectos son: x_1=40.62, x_2=41.8, x_3=40.44.

Se puede demostrar que si

$$X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2) \quad y \quad \theta \sim N(\theta_0, \sigma_0^2) \Rightarrow \theta|\underline{x} \sim N(\theta_1, \sigma_1^2)$$

donde, $\theta_1 = \dfrac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{1}{\sigma_0^2}\theta_0}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}$ y $\sigma_1^2 = \dfrac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}$.

Por lo tanto,

$\bar{x}$=40.9533, θ_0 = 39, σ^2 = 4, σ_0^2 = 219.47, n=3

θ_1 = 40.9415, σ_1^2 = 1.3252 $\therefore$ $\theta|\underline{x} \sim N(40.9415, 1.3252)$

1.3 Distribuciones iniciales informativas, no informativas y conjugadas

- Existen diversas clasificaciones de las distribuciones iniciales. En términos de la cantidad de información que proporcionan se clasifican en *informativas* y *no informativas*.

- DISTRIBUCIONES INICIALES INFORMATIVAS: Son aquellas distribuciones iniciales que proporcionan información relevante e importante sobre la ocurrencia de los eventos inciertos θ.

- DISTRIBUCIONES INICIALES NO INFORMATIVAS: Son aquellas distribuciones iniciales que no proporcionan información relevante o importante sobre la ocurrencia de los eventos inciertos θ.

- Existen varios criterios para definir u obtener una distribución inicial no informativa:

1) *Principio de la razón insuficiente*: Bayes (1763) y Laplace (1814, 1952). De acuerdo con este principio, en ausencia de evidencia en contra, todas las posibilidades deberían tenerla misma probabilidad inicial.
   - En particular, si θ puede tomar un número finito de valores, digamos m, la distribución inicial no informativa, de acuerdo con este principio es:

$$f(\theta) = \frac{1}{m} I_{\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}}(\theta)$$

- ¿Qué pasa cuando el número de valores (m) que puede tomar θ tiende a infinito?

$$f(\theta) \propto \text{cte.}$$

En este caso se dice que f(θ) es una distribución inicial impropia, porque no cumple con todas las propiedades para ser una distribución inicial propia.

2) *Distribución inicial invariante*: Jeffreys (1946) propuso una distribución inicial no informativa invariante ante reparametrizaciones, es decir, si $\pi_\theta(\theta)$ es la distribución inicial no informativa para θ entonces, $\pi_\varphi(\varphi) = \pi_\theta(\theta(\varphi))|J_\theta(\varphi)|$ es la distribución inicial no informativa de φ = φ(θ). Esta distribución es generalmente impropia.

- La regla de Reffreys consiste en lo siguiente: Sea $\boldsymbol{F} = \{f(x|\theta): \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \Re^d$ un modelo paramétrico para la variable aleatoria X. La distribución inicial no informativa de Jeffreys para el parámetro θ con respecto al modelo $\boldsymbol{F}$ es

$$\pi(\theta) \propto |\det\{I(\theta)\}|^{1/2}, \ \theta \in \Theta,$$

donde $I(\theta) = -E_{X|\theta}\left\{\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right\}$ es la matriz de información de Fisher

- EJEMPLO 9: Sea X una v.a. con distribución condicional dado θ, Ber(θ), i.e., $f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$.

$$\log f(x|\theta) = x\log(\theta) + (1-x)\log(1-\theta) + \log I_{\{0,1\}}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\left(x|\theta\right)=\frac{x}{\theta}-\frac{1-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f\left(x|\theta\right)=-\frac{x}{\theta^2}-\frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I(\theta)=-E_{X|\theta}\left\{-\frac{X}{\theta^2}-\frac{1-X}{(1-\theta)^2}\right\}=\frac{E(X|\theta)}{\theta^2}+\frac{1-E(X|\theta)}{(1-\theta)^2}=\cdots=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\pi(\theta)\propto\left\{\frac{1}{\theta(1-\theta)}\right\}^{1/2}=\theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\therefore\ \pi(\theta)=\text{Beta}\left(\theta|1/2,1/2\right).$$

3) *Criterio de referencia*: Bernardo (1986) propuso una nueva metodología para obtener distribuciones iniciales mínimo informativas o de referencia, basándose en la idea de que los datos contienen toda la información relevante en un problema de inferencia.
   - La distribución inicial de referencia es aquella distribución inicial que maximiza la distancia esperada que hay entre la distribución inicial y la final cuando se tiene un tamaño de muestra infinito.
   - Ejemplos de distribuciones iniciales de referencia se encuentran en el formulario.

- DISTRIBUCIONES CONJUGADAS: Las distribuciones conjugadas surgen de la búsqueda de cuantificar el conocimiento inicial de tal forma que la distribución final sea fácil de obtener de "manera analítica". Debido a los avances tecnológicos, esta justificación no es válida en la actualidad.

- Definición: Familia conjugada. *Se dice que una familia de distribuciones de* θ *es conjugada con respecto a un determinado modelo probabilístico* $f(x|\theta)$ *si para cualquier distribución inicial perteneciente a tal familia, se obtiene una distribución final que también pertenece a ella*.

- EJEMPLO 10: Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una m.a. de Ber(θ). Sea θ~Beta(a,b) la distribución inicial de θ. Entonces,

$$f(\underline{x}|\theta) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}\prod_{i=1}^{n} I_{\{0,1\}}(x_i)$$

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\Rightarrow f(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{a+\sum x_i-1}(1-\theta)^{b+n-\sum x_i-1}I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\therefore f(\theta|\underline{x}) = \frac{\Gamma(a_1+b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)}\theta^{a_1-1}(1-\theta)^{b_1-1}I_{(0,1)}(\theta),$$

donde $a_1 = a + \sum x_i$ y $b_1 = b + n - \sum x_i$. Es decir, $\theta|\underline{x} \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$.

- Más ejemplos de familias conjugadas se encuentran en el formulario.

1.4 Problemas de inferencia paramétrica

- Los problemas típicos de inferencia son: estimación puntual, estimación por intervalos y prueba o contraste de hipótesis.

- ESTIMACIÓN PUNTUAL. El problema de estimación puntual visto como problema de decisión se describe de la siguiente manera:
  - $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = \Theta$.
  - $v(\tilde{\theta}, \theta)$ la pérdida de estimar mediante $\tilde{\theta}$ el verdadero valor del parámetro de interés θ. Considérense tres funciones de pérdida:

1) *Función de pérdida cuadrática*:

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = a\,(\tilde{\theta} - \theta)^2, \text{ donde } a > 0$$

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada es

$$\tilde{\theta} = E(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *cuadrática* es *la media* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

2) *Función de pérdida absoluta*:

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = a\,|\tilde{\theta} - \theta|, \text{ donde } a > 0$$

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada es

$$\tilde{\theta} = \text{Med}(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *absoluta* es *la mediana* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

3) *Función de pérdida vecindad*:

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = 1 - I_{B_\varepsilon(\tilde{\theta})}(\theta),$$

donde $B_\varepsilon(\tilde{\theta})$ denota una vecindad (bola) de radio ε con centro en $\tilde{\theta}$.

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada cuando $\varepsilon \to 0$ es

$$\tilde{\theta} = \text{Moda}(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *vecindad* es *la moda* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

- EJEMPLO 11: Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una población Ber(θ). Supongamos que la información inicial que se tiene se puede describir mediante una distribución Beta, i.e., $\theta \sim$ Beta(a,b). Como demostramos en el ejemplo pasado, la distribución final para θ es también una distribución Beta, i.e.,

$$\theta|\underline{x} \sim \text{Beta}\left(a + \sum_{i=1}^{n} X_i,\ b + n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

La idea es estimar puntualmente a θ,

1) Si se usa una función de pérdida cuadrática:

$$\tilde{\theta} = E(\theta|\underline{x}) = \frac{a + \sum x_i}{a + b + n},$$

2) Si se usa una función de pérdida vecindad:

$$\tilde{\theta} = \text{Moda}(\theta|\underline{x}) = \frac{a + \sum x_i - 1}{a + b + n - 2}.$$

- ESTIMACIÓN POR INTERVALO. El problema de estimación por intervalo visto como problema de decisión se describe de la siguiente manera:
  - $\boldsymbol{D} = \{D : D \subset \Theta\}$,

    donde, D es un *intervalo de probabilidad* al (1-α) si $\int_D f(\theta)d\theta = 1 - \alpha$.

Nota: para un $\alpha \in (0,1)$ fijo no existe un único intervalo de probabilidad.

- $\boldsymbol{E} = \Theta$.
- $v(D,\theta) = \|D\| - I_D(\theta)$ la pérdida de estimar mediante D el verdadero valor del parámetro de interés θ.

  Esta función de pérdida refleja la idea intuitiva que para un α dado es preferible reportar un intervalo de probabilidad D^* cuyo tamaño sea mínimo. Por lo tanto,

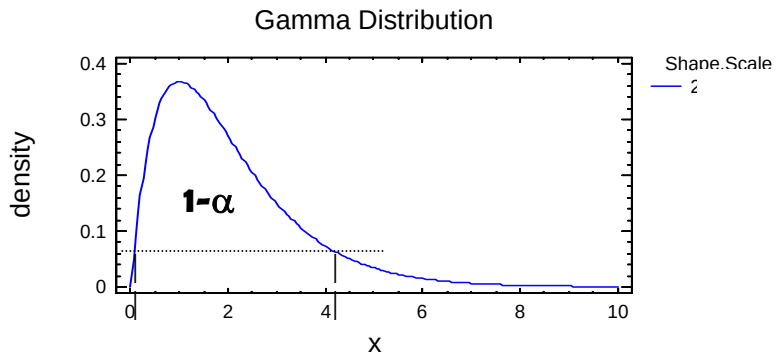
La mejor estimación por intervalo de θ es el intervalo D^* cuya longitud es mínima.

- El intervalo D^* de longitud mínima satisface la propiedad de ser un *intervalo de máxima densidad*, es decir

$$\text{si } \theta_1 \in D^* \text{ y } \theta_2 \notin D^* \Rightarrow f(\theta_1) \geq f(\theta_2)$$

- ¿*Cómo* se obtiene el intervalo de mínima longitud (máxima densidad)?

  Los pasos a seguir son:
  - Localizar el punto más alto de la función de densidad (posterior) de θ.
  - A partir de ese punto trazar líneas rectas horizontales en forma descendiente hasta que se acumule $(1-\alpha)$ de probabilidad.



θ

- CONTRASTE DE HIPÓTESIS. El problema de contraste de hipótesis es un problema de decisión sencillo y consiste en elegir entre dos modelos o hipótesis alternativas H_0 y H_1. En este caso,
  - $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = \{H_0, H_1\}$
  - $v(d,\theta)$ la función de pérdida que toma la forma,

v(d,θ)	**H_0**	**H_1**
H_0	v_{00}	v_{01}
H_1	v_{10}	v_{11}

donde, v_{00} y v_{11} son la pérdida de tomar una decisión correcta (generalmente $v_{00} = v_{11} = 0$),

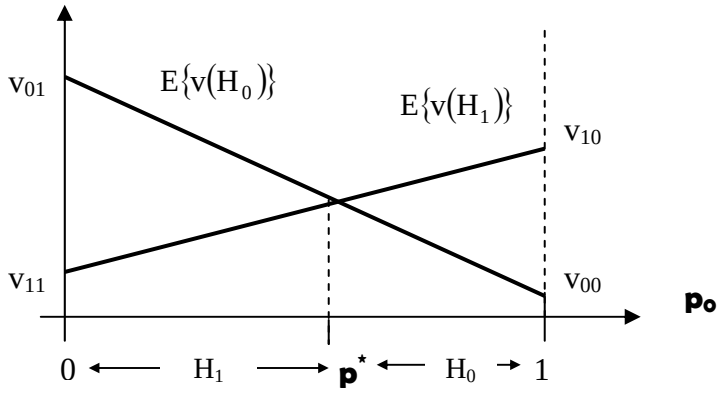
v_{10} es la pérdida de rechazar H_0 (aceptar H_1) cuando H_0 es cierta y

v_{01} es la pérdida de no rechazar H_0 (aceptar H_0) cuando H_0 es falsa.

Sea $p_0 = P(H_0)$ = probabilidad asociada a la hipótesis H_0 al momento de tomar la decisión (inicial o final). Entonces, la pérdida esperada para cada hipótesis es:

$$E\{v(H_0)\} = v_{00}p_0 + v_{01}(1-p_0) = v_{01} - (v_{01} - v_{00})p_0$$
$$E\{v(H_1)\} = v_{10}p_0 + v_{11}(1-p_0) = v_{11} - (v_{11} - v_{10})p_0$$

cuya representación gráfica es de la forma:



donde, $p^* = \dfrac{v_{01} - v_{11}}{v_{10} - v_{11} + v_{01} - v_{00}}$.

Finalmente, la solución óptima es aquella que minimiza la pérdida esperada:

$$\text{si } E\{v(H_0)\} < E\{v(H_1)\} \Leftrightarrow \frac{p_0}{1-p_0} > \frac{v_{01} - v_{11}}{v_{10} - v_{00}} \Leftrightarrow p_0 > p^* \Rightarrow \mathbf{H_0}$$

H_0 si p_0 es suficientemente grande comparada con $1-p_0$.

$$\text{si } E\{v(H_0)\} > E\{v(H_1)\} \Leftrightarrow \frac{p_0}{1-p_0} < \frac{v_{01} - v_{11}}{v_{10} - v_{00}} \Leftrightarrow p_0 < p^* \Rightarrow \mathbf{H_1}$$

H_1 si p_0 es suficientemente pequeña comparada con $1-p_0$.

$$\text{si } p_0 = p^* \Rightarrow \mathbf{H_0} \text{ ó } \mathbf{H_1}$$

Indiferente entre H_0 y H_1 si p_0 no es ni suficientemente grande ni suficientemente pequeña comparada con $1-p_0$.