Seminar zur Zahlentheorie (Lehramt Gymnasium)

Olivier Haution

LMU, Sommersemester 2020

Hinweise

- Die Vortragsthemen 1 und 2 sind von einer Person überzunehmen, alle andere gemeinsam von zwei Personen. Die Noten der zwei Vortrangenden können unterschiedlich sein.
- 70–80 Minuten pro Vortrag (50–60 Minuten für die zwei ersten). Passen Sie bitte unbedingt darauf, diese Dauer nicht zu überschreiten.
- Bitte spätestens eine Woche vor dem Vortrag eine Vorbesprechung mit mir vereinbaren (per Skype, wenn es keine andere Möglichkeit besteht).
- Bitte eine schriftliche Version des Votrags zu mir aushanden, oder gescannt per email senden. Beachten Sie aber, dass nur der Vertrag für die Benotung relevant ist.
- Bitte versuchen Sie die Beweise in Ihren eigenen Worten zu erklären, und nicht den Originaltext an die Tafel zu kopieren.
- Tafel- oder Beamer-Präsentationen sind möglich.
- Die Aufgaben und die Abschnitte "Der Fall allgemeiner Zahlkörper" sollen nicht präsentiert werden. Die Bemerkungen (oder Resultate dessen Beweis erst weiter im Buch gegeben wird) können auch in meisten Fällen weggelassen werden.
- Die Schwierigkeit jedes einzelnen Themas wird für die Benotung berücksichtigt werden.

Literatur

Alexander Schmidt, Einführung in die algebraische Zahlentheorie. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

Online verfügbar unter Angabe der LMU-Benutzerkennung: `https://login.emedien.ub.uni-muenchen.de/login`.

Vortragsthemen

1 Das quadratische Reziprozitätsgesetz

§2.1, §2.2.
Hauptresultat : Reziprozitätsgesetz (2.2.1).

2 Quadratische Reste und Quadratsummen

§2.3, §2.4 (nur 2.4.5, 2.4.6).
Hauptresultate :

- Jede Zahl ist quadratischer Rest modulo unendlich viele Primzahlen (2.3.3).
- Jede Nichtquadratzhal ist nichtquadratischer Rest modulo unendlich viele Primzahlen (2.3.6).
- Vier-Quadrate-Satz von Lagrange (2.4.5).

3 Diophantische Gleichungen

§3.2, §3.3, §3.4 (3.4.3 und 3.4.4 sind optional).
Hauptresultate :

- Lineare Gleichungssysteme (3.2.1, 3.2.3, 3.2.4)
- Satz von Chevalley–Warning (3.3.2).
- Lösungen modulo Primpotenzen (3.4.2).

4 Die Gaußschen Zahlen

§4.3 (nur ab 4.3.6), §4.4 (außer 4.4.2), §4.5, §4.6.
Hauptresultate :

- Zerlegungsgesetz für Gaußschen Zahlen (4.3.8).
- Zwei-Quadrate-Satz (4.4.1).
- Euklidizität von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (4.6.2).

Bemerkung : Sie müßen nicht die Resultate über die Gaußsche Zahlen, die schon von der Zahlentheorie-Vorlesung bekannt sind, ausführlich wiederholen.

5 Ganze algebraische Zahlen

§5.3 (außer 5.3.2 und 5.3.3), 5.4.13.

Hauptresultate :

- Charakterisierung ganz-algebraischer Zahlen (5.3.6).
- Ganz algebraische Zahlen bilden einen Teilring (5.3.7).
- Minimalpolynom einer algebraischen Zahl (5.3.10).
- 5.4.13 (wird später benutzt).

Bemerkung : §5.4 über Kreisteilungspolynome soll nicht ausführlich erklärt werden, bitte nur die relevante Begriffe von der Zahlentheorie-Vorlesung kurz wiederholen. Nur Korollar 5.4.13 soll beweist werden, und Sie können dafür Theorem 5.4.12 ohne Beweis verweden, sowie andere Resultate und Definitionen von der Zahlentheorie-Vorlesung §13.

6 Quadratische Zahlkörper

§6.1, §6.2, §6.3 (nur bis 6.3.8).

Hauptresultate :

- Ganzheitskriterium (6.1.7).
- Beschreibung von ganzen Zahlen (6.1.8).
- Der Ganzheitsring ist Noethersch (6.2.16).
- Nichtnulle Primideale von dem Ganzheitsring sind maximal (6.3.8).

Bemerkung : Ein großer Anteil von §6.2 (und auch §6.3) wurde schon in der Zahlentheorie-Vorlesung erklärt und muß nicht unbedingt wiederholt werden. Man muß jedoch zeigen, daß $\mathcal{O}_K$ Noethersch ist (6.2.8, 6.2.16).

7 Gebrochene Ideale

6.3.9, 6.3.10, §6.4
Hauptresultate :

- Nichtnulle gebrochene Ideale bilden eine Gruppe (6.4.4).
- Primidealzerlegungsatz (6.4.7).

8 Das Zerlegungsgesetz

§6.5, nur bis 6.5.22.
Hauptresultate :

- Norm eines Ideales (6.5.4).
- Multiplikativität der Norm (6.5.10).
- Träge, zerlegte, verweigte Primzahle (6.5.14).
- Zerlegungsgesetz (6.5.18).
- Endlichkeitsatz (6.5.22).

9 Die Idealklassengruppe eines quadratischen Zahlkörper

§6.6 (nur bis 6.6.12)
Hauptresultate :

- Faktorialität und Hauptideale (6.6.2).
- Minkowskischer Gitterpunktsatz (6.6.8).
- Endlichkeit der Idealklassengruppe (6.6.11).

10 Einheiten in quadratischen Zahlkörper, Pellsche Gleichung

§6.7 (nur bis 6.7.6), 6.8.2
Hauptresultate :

- Einheiten in imaginär-quadratischen Zahlkörper (6.7.3).
- Grundeinheiten in reell-quadratischen Zahlkörper (6.7.6).
- Lösungen der Pellschen Gleichung (6.8.2).

11 Faktorialität und Euklidizität

§6.9, §6.10.

Hauptresultate :

- Faktorilität für quadratische Zahlkörper (6.9.3, 6.9.4).
- Bestimmung der euklidischen imaginär-quadratischen Zahlkörper (6.10.1).