k ist ein Körper. Die Standardbasis von k^n wird mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnet.

Aufgabe 1. *(2 Punkte)* Man berechne die Produkte AB und BA für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(k).$$

Aufgabe 2. *(3 Punkte)* Man bestimme $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ in folgenden Fälle.

(i) $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}_2$, $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $90°$ im mathematisch positiven Sinne.

(ii) $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}_2$, $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der Geraden $y = x$.

(iii) $k = \mathbb{Q}$, $\mathcal{C} = (1, \sqrt{2})$, $R = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$, $f \colon R \to R$ Multiplikation mit $\alpha + \beta\sqrt{2}$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)* Es sei $f \colon k^3 \to k^2$ die durch $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y - z)$ definierte lineare Abbildung.

(i) Man bestimme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f)$.

(ii) Man zeige, dass $\mathcal{C} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ eine Basis von k^3 ist.

(iii) Man bestimme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(f)$.

Aufgabe 4. *(2 Punkte)* Es sei $f \colon k^2 \to k^2$ eine lineare Abbildung sodass $f \circ f = 0$. Man zeige: es gibt eine Basis $\mathcal{C}$ von k^2 sowie Skalare $a, b \in k$ sodass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$