Aufgabe 1. *(2 Punkte)* Es sei $t \in \mathbb{R}$ und

$$V_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid tx_1 + 2tx_2 + 3tx_3 = 0\}.$$

Man finde eine Basis von dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V_t.

Aufgabe 2. *(2 Punkte)* Es sei $t \in \mathbb{R}$ und

$$U_t = \langle (t, 1, 1-t), (1-t, 1, t) \rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Man berechne $\dim_{\mathbb{R}} U_t$ und finde eine Basis eines Komplementes zu U_t in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)* Man betrachte eine direkte Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ eines k-Vektorraumes V in Unterräume $V_i \subset V$, sowie für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Familie $(x_{ij})_{j \in J_i}$ von Elementen $x_{ij} \in V_i$. Man zeige:

(i) Die Elemente x_{ij}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in J_i$, bilden genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn für jedes $1 \in \{1, \ldots, n\}$ die Elemente x_{ij}, $j \in J_i$, ein Erzeugendensystem von V_i bilden.

(ii) Die Elemente x_{ij}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in J_i$, sind genau dann linear unabhängig in V, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Elemente x_{ij}, $j \in J_i$, linear unabhängig in V_i sind.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlich-dimensionale k-Vektorräume, sodass V_i ein Unterraum von V_{i+1} für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ist.

Man zeige: es gibt Mengen $J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_n$ und Vektoren $v_j \in V_n$, $j \in J_n$, sodass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ das System $(v_j)_{j \in J_i}$ eine Basis von V_i ist.