Aufgabe 1. Es sei $t \in \mathbb{R}$ und

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ t & 1-t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(i) Man berechne die Determinante von A_t.

(ii) Man bestimme eine Basis von $\operatorname{im}(A_t)$.

(iii) Man finde die inverse Matrix von A_t, wenn sie existiert.

Aufgabe 2. Es sei $t \in \mathbb{R}$ und

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(i) Man berechne die Determinante von B_t.

(ii) Man bestimme eine Basis von $\operatorname{im}(B_t)$.

(iii) Man finde die inverse Matrix von B_t, wenn sie existiert.

Aufgabe 3. Es sei $s, t \in \mathbb{R}$ und

$$D_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s & s^2 & s^3 \\ t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(i) Man zeige: $\det(D_{s,t}) = st(t-1)(s-1)(t-s)$.

(ii) Man finde eine Basis von $\operatorname{im}(D_{s,t})$.

Aufgabe 4. Es sei k ein Körper, $a, b \in k$ und

$$C_n = \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(k), \qquad \text{i.e. } (C_n)_{ij} = \begin{cases} a & \text{falls } i = j, \\ b & \text{falls } i + j = 2n+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Man zeige, dass $\det(C_n) = (a^2 - b^2) \cdot \det(C_{n-1})$ für $n \geq 2$.

(ii) Man berechene $\det(C_n)$ für $n \geq 1$.