Aufgabe 1. *(2 Punkte)* Es sei $z \in \mathbb{C}$. Man zeige : $\{1, z\}$ ist genau dann eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$, wenn $z \notin \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. *(2 Punkte)* Es sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Man zeige, dass V ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist, und finde eine Basis von V.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)* Es sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man zeige: das System $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_i \notin \langle v_1, \ldots, v_{i-1} \rangle$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Es sei k ein Körper und $a, b, c, d \in k$. Man zeige: das System $\{(a, b), (c, d)\} \subset k^2$ ist genau dann eine Basis von k^2, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

$\star$ **Aufgabe 5.** *(5 Punkte)* Es sei $\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ der natürliche Logarithmus (die Umkehrfunktion von exp). Man zeige, dass das System

$$\{\ln(p) \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

linear unabhängig in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ ist.