Aufgabe 1. *(2 Punkte)* Man bestimme alle $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. *(2 Punkte)* Es sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung und $T \subset U$ eine Teilmenge. Man zeige:

$$\langle f(T) \rangle = f(\langle T \rangle).$$

Aufgabe 3. *(3 Punkte)* Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, y + 2z)$ definierte lineare Abbildung. Man bestimme $\ker f$ und zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)* Es seien V, W endlich-dimensionale k-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Man zeige $W \oplus \ker f \simeq V$.

$\star$ **Aufgabe 5.** *(5 Punkte)* Es sei V ein k-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{Hom}_k(V, V)$ heißt *idempotent*, falls die Gleichung $f \circ f = f$ gilt.

(i) Es sei f ein idempotenter Endomorphismus. Man zeige $\ker f \oplus \operatorname{im} f = V$.

(ii) Es sei $I \subset \operatorname{Hom}_k(V, V)$ die Teilmenge der idempotenten Endomorphismen. Es sei $S \subset \mathfrak{P}(V) \times \mathfrak{P}(V)$ die Teilmenge der Paare von Unterräume (U, W) sodass $U \oplus W = V$. Man zeige: die durch $f \mapsto (\ker f, \operatorname{im} f)$ definierte Abbildung $I \to S$ ist bijektiv.

$\star$ **Aufgabe 6.** *(5 Punkte)* Der Dualraum $\operatorname{Hom}_k(W, k)$ eines k-Vektorraumes W wird mit W^* bezeichnet. Es sei V ein k-Vektorraum. Man betrachte die durch $\chi(v)(\varphi) = \varphi(v)$ definierte Abbildung $\chi\colon V \to (V^*)^*$ (d.h. für jedes $v \in V$ ist $\chi(v)$ eine lineare Abbildung $V^* \to k$, welche durch $\varphi \mapsto \varphi(v)$ definiert ist).

Man zeige:

(i) Die Abbildung χ ist injektiv.

(ii) Die Abbildung χ ist genau dann surjektiv, wenn V endlich-dimensional ist.