Aufgabe 1. Es sei $a \in \mathbb{N}$. Man zeige durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, dass $a^n - 1$ durch $a - 1$ teilbar ist.

Aufgabe 2. Es sei $a \in \mathbb{N}$. Man zeige durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, dass

$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{i=0}^{n-1} a^i,$$

wobei

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = 1 + \cdots + a^{n-1}.$$

Aufgabe 3. Es sei $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(i) Man zeige, dass die durch

$$a \sim b \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ \text{sodass } a = b + nk)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

(ii) Die Faktormenge $\mathbb{Z}/\!\sim$ wird mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet. Man zeige:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], \ldots, [n-1]\}$
- $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$

(Hinweis : Division mit Rest).

Aufgabe 4. Man zeige, dass die Addition (bzw. Multiplikation) auf $\mathbb{Z}$ eine Verknüpfung auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ induziert (das heisst, dass eine Verknüpfung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sodass $([a],[b]) \mapsto [a+b]$ (bzw. $([a],[b]) \mapsto [ab]$) existiert).

$\star$ **Aufgabe 5.** Es sei $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von m. Die Klasse in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (bzw. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) eines Elementes $a \in \mathbb{Z}$ wird in dieser Aufgabe mit $[a]_n$ (bzw. $[a]_m$) bezeichnet.

(i) Man zeige, dass es eine Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

sodass $f([a]_m) = [a]_n$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$ existiert.

(ii) Man berechne die Kardinalität der Menge $f^{-1}\{[0]_n\}$.