1. 单多元正态总体均值向量的检验

样本均值 $\bar{x}$
样本离差阵 V
样本协方差矩阵 $S = \frac{V}{n-1}$

- 设 $x_1, \cdots, x_n$ 来自 p 元正态总体 $N_p(\mu, \Sigma)$，$\mu \in R^p$，$\Sigma > 0$
讨论总体均值 μ 的假设检验问题：

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

其中 $\mu_0 \in R^p$ 是给定的均值向量

1.1 Σ 已知

似然比统计量为 $\lambda = \exp\{-\frac{1}{2} n(\bar{x}-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0)\}$

H_0 成立的条件下，$n(\bar{x}-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \sim \chi^2_p$

因此，取 $\underline{\chi^2 = n(\bar{x}-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu_0)}$ 为检验统计量

- 置信域（置信水平为 $1-\alpha$）：

$$D = \{\mu^* \in R^p : n(\bar{x}-\mu^*)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu^*) \le C_\alpha\}$$

C_α 表示 χ^2_p 分布的上侧 α 分位点，即 $P(\chi^2_p > C_\alpha) = \alpha$.

- $p\text{-value} = P_r(\chi^2_p \ge \underbrace{\chi^2}) \longrightarrow$ 给定样本之后即可确定.

1.2 Σ 未知

似然比统计量为 $\lambda = \left(\frac{1}{1+n(\bar{x}-\mu_0)'V^{-1}(\bar{x}-\mu_0)}\right)^{\frac{n}{2}}$

已知在 H_0 成立时，$n(n-1)(\bar{x}-\mu_0)'V^{-1}(\bar{x}-\mu_0) = n(\bar{x}-\mu_0)'S^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \sim T^2(p, n-1)$

因此，考虑统计量 $\underline{T^2 = n(\bar{x}-\mu_0)S^{-1}(\bar{x}-\mu_0)}$

Hotelling T^2 分布与 F 分布之间的转换：

$$\frac{(n-p)}{(n-1)p} T^2 \sim F_{p, n-p}$$

$$\underline{F = \frac{n(n-p)}{(n-1)p}(\bar{x}-\mu_0)S^{-1}(\bar{x}-\mu_0)}$$

- 置信域：

$$D = \{\mu^* \in R^p : \frac{n(n-p)}{(n-1)p}(\bar{x}-\mu^*)'S^{-1}(\bar{x}-\mu^*) \le C_\alpha\}$$

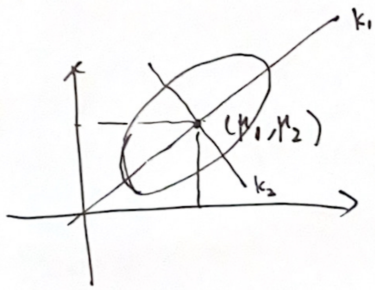
其中 C_α 表示 $F_{p,n-p}$ 分布的上侧 α 分位点，

$$P(F_{p,n-p} > C_\alpha) = \alpha$$

置信域是以$\bar{x}$为中心，椭球的轴为

$$\pm\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\cdot e_i$$

其中 $Se_i=\lambda_i e_i$，$i=1,\cdots,p$，即λ_i为S的特征值，e_i为对应的特征向量



$X\sim N_p(\mu_1,\Sigma_1)$，$Y\sim N_p(\mu_2,\Sigma_2)$

$x_1,\cdots,x_n$；$y_1,\cdots,y_m$为随机样本

2. 两正态总体均值向量比较的检验

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0 \quad vs \quad H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

2.1 $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$已知时

$$\chi^2=\frac{nm}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\bar{y})\sim\chi^2_p$$

2.2 $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$未知时

$$T^2=\frac{nm(n+m-2)}{n+m}(\bar{x}-\bar{y})'(V_1+V_2)^{-1}(\bar{x}-\bar{y})\sim T^2(p,n+m-2)$$

$$\frac{(n+m-p-1)T^2}{(n+m-2)p}=\frac{nm(n+m-p-1)}{(n+m)p}(\bar{x}-\bar{y})'(V_1+V_2)^{-1}(\bar{x}-\bar{y})\sim F_{p,n+m-p-1}$$

$$(\bar{x}-\bar{y})'\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\frac{p}{n+m-p-1}(V_1+V_2)\right]^{-1}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$=(\bar{x}-\bar{y})'\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{p(n-1)}{n+m-p-1}S_1+\frac{p(m-1)}{n+m-p-1}S_2\right)\right]^{-1}(\bar{x}-\bar{y})$$

3. 多个正态总体均值向量的检验 —— 多元方差分析

设有 r 个相互独立的 p 元正态总体 $X_k \sim N_p(\mu_k, \Sigma)$ —— 考虑 Σ 相同的情形

$\mu_k \in R^p$, $\Sigma > 0$。 $x_{k1}, \cdots, x_{kn_k}$ 是来自总体 X_k 的 n_k 个样本，$k=1,2,\cdots,r$

$n = \sum_{k=1}^{r} n_k$ ， $n \geq p+r$

考虑 r 个总体均值是否全部相等的假设检验问题：

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r \quad vs \quad H_1: \mu_1, \cdots, \mu_r \text{不全相等}$$

- $p>1$ 时，此假设检验问题称为多元方差分析
- $p=1$ 时，就是一元统计分析中熟悉的方差分析

似然比统计量为 $\lambda = \left(\dfrac{|SSA|}{|SSA+SSB|}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$= \left(\frac{|SSA|}{|SST|}\right)^{\frac{n}{2}}$$

注：总的离差阵 SST = 组内离差阵 SSA + 组间离差阵 SSB

$$SST = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x})'$$

$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki}$，第 k 个总体的样本均值

$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k+\bar{x}_k-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x}_k+\bar{x}_k-\bar{x})'$$

$V_k = \sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k)(x_{ki}-\bar{x}_k)'$ 第 k 个总体的样本离差阵

$\bar{x} = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k \bar{x}_k}{n}$

$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k)(x_{ki}-\bar{x}_k)' + \sum_{i=1}^{r} n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$$

$$= \sum_{k=1}^{r} V_k + \sum_{i=1}^{r} n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$$

$$= SSA + SSB$$

• 令 总的离差阵为 $SST=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x})'$

$$SST=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x})'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k+\bar{x}_k-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x}_k+\bar{x}_k-\bar{x})'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k)(x_{ki}-\bar{x}_k)'+\sum_{i=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}V_k+\sum_{i=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})' \quad \text{其中 } \bar{x}=\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\bar{x}_k}{n}$$
$$=SSA+SSB$$

• 总的离差阵 SST = 组内离差阵 SSA + 组间离差阵 SSB

• 关于 SST, SSA, SSB 的一些结论:

① 无论 H_0 是否成立 $SSA=\sum_{k=1}^{r}V_k\sim W_p(n-r,\Sigma)$ ✓

② 当 H_0 成立时 $SSB=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'\sim W_p(r-1,\Sigma)$

$$SSB=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$$

已知 $\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\mu)(\bar{x}_k-\mu)'$
$$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu)(\bar{x}_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu)'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'+n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'$$

proof: H_0 成立时, $\bar{x}_k\sim N_p(\mu,\frac{\Sigma}{n_k})$

$\bar{x}\sim N_p(\mu,\frac{\Sigma}{n})$

$$SSB=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k\bar{x}_k'-\bar{x}_k\bar{x}'-\bar{x}\bar{x}_k'+\bar{x}\bar{x}')$$
$$=\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'-\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\cdot\bar{x}'-\bar{x}\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k'+n\bar{x}\bar{x}' \qquad \bar{x}=\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\bar{x}_k}{n}$$

$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu$

$$=\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'-n\bar{x}\bar{x}'$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'=SSB+n\bar{x}\bar{x}'$$
$$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'+n\bar{x}\bar{x}'$$

$\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\mu)(\bar{x}_k-\mu)'$
$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu)(\bar{x}_k-\bar{x}+\bar{x}-\mu)'$
$=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'+n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'$
$=SSB+n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'$

已知 $Cov(\bar{x}_k-\bar{x},\bar{x})=Cov(\bar{x}_k,\bar{x})-Var(\bar{x})$
$$=Cov\left(\bar{x}_k,\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\bar{x}_k}{n}\right)-\frac{\Sigma}{n}$$
$$=\frac{n_k}{n}\cdot\frac{\Sigma}{n_k}-\frac{\Sigma}{n}=0$$

则 $\bar{x}_k-\bar{x}$ 与 $\bar{x}$ 相互独立, 从而 SSB 与 $n\bar{x}\bar{x}'$ 相互独立, 且 SSB 与 $n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'$ 相互独立

因为 $\bar{x}_k(k=1,\cdots,r)$ 相互独立, ~~$\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'\sim W_p(r,\Sigma)$, $\bar{x}n\bar{x}\bar{x}'\sim W_p(1,\Sigma)$~~

$\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\mu)(\bar{x}_k-\mu)'\sim W_p(r,\Sigma)$, $n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'\sim W_p(1,\Sigma)$

(用矩阵二次型与线性组合相互独立证明)

$\Rightarrow SSB=W_p(r-1,\Sigma)$ □

③ 当H_0成立时，$SST=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x})(x_{ki}-\bar{x})' \sim W_p(n-1,\Sigma)$

且SSA与SSB相互独立

proof: $SSA=\sum_{k=1}^{r}V_k=\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(x_{ki}-\bar{x}_k)(x_{ki}-\bar{x}_k)'$

$SSB=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})' = \sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k' - n\bar{x}\bar{x}'$

~~$\bar{x}_k-\bar{x}=\bar{x}_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k \Rightarrow$ SSB是关于$\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_r$的函数~~

~~又V_k与$\bar{x}_k$相互独立，且$V_k(k=1,\cdots,r)$相互独立，$\bar{x}_k(k=1,\cdots,r)$相互独立~~

~~$\Rightarrow SSA=\sum_{k=1}^{r}V_k$与$SSB=\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{x}_k-\bar{x})(\bar{x}_k-\bar{x})'$相互独立~~

~~$\Rightarrow SST=W_p(n-1,\Sigma)$ □~~

因为V_k与$\bar{x}_k$相互独立，则$\sum_{k=1}^{r}V_k$与$\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'$相互独立，

又$\bar{x}=\sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\bar{x}_k}{n}$，所以$\sum_{k=1}^{r}V_k$与$\bar{x}$相互独立 $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{r}V_k$与$\sum_{k=1}^{r}n_k\bar{x}_k\bar{x}_k'-n\bar{x}\bar{x}'$独立

因此SSA与SSB相互独立（在H_0成立时）

$SSA\sim W_p(n-r,\Sigma)$，$SSB\sim W_p(r-1,\Sigma)$

$\Rightarrow SST\sim W_p(n-1,\Sigma)$ □

- 从而得到似然比为：$\lambda=\dfrac{\sup_{\mu,\Sigma}L(\mu,\cdots,\mu,\Sigma)}{\sup_{\mu_1,\cdots,\mu_r,\Sigma}L(\mu_1,\cdots,\mu_r,\Sigma)}$

$$\lambda=\frac{L(\hat{\mu}_0,\cdots,\hat{\mu}_0,\hat{\Sigma}_0)}{L(\hat{\mu}_1,\cdots,\hat{\mu}_r,\hat{\Sigma})}=\frac{|\hat{\Sigma}_0|^{-\frac{n}{2}}}{|\hat{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}}}=\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\left(\frac{|SSA|}{|SSA+SSB|}\right)^{\frac{n}{2}}$$

- 已知当H_0成立时，$SSA\sim W_p(n-r,\Sigma)$，$SSB\sim W_p(r-1,\Sigma)$

且SSA与SSB相互独立，由wilks分布的定义可知

$$\Lambda=\frac{|SSA|}{|SSA+SSB|}\sim\Lambda(p,n-r,r-1)$$

$\Rightarrow$ 取Λ为检验统计量，λ较小即Λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为H_1成立.

- 给定显著性水平为α，通过查找wilks分布分位数表得临界值C_α，使得

$$P_r(\Lambda\le C_\alpha)=\alpha$$

$\Rightarrow$ 拒绝原假设H_0的拒绝域为 $W=\{\Lambda\le C_\alpha\}$

但是!! 在工程问题中，很少提供wilks分布的分位数表，最常见的是χ^2分布，t分布，F分布

• 对于$\Lambda(p,n,m)$分布，当$p=1,2$或$m=1,2$时，Λ分布（Wilks分布）可以转化为F分布。

• 接下来讨论$p=1,2$或$r=2,3$时，将Wilks分布$\Lambda(p,n-r,r-1)$的检验统计量Λ转化为服从F分布，并计算p值。

① $p=1$时，$\Lambda \sim \Lambda(1,n-r,r-1)$

(i) Γ分布和β分布之间的转化

$X\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$，且X与Y相互独立

$$\Rightarrow \frac{X}{X+Y}\sim Beta(\alpha_1,\alpha_2)$$

(ii) χ^2分布与β分布之间的转化

$X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且X与Y相互独立

$$\Rightarrow \frac{X}{X+Y}\sim Beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$$

(iii) F分布与β分布之间的转化

$X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且X与Y相互独立

$$\Rightarrow \frac{X}{X+Y}=\frac{X/Y}{X/Y+1}=\frac{\frac{X/n}{Y/m}}{\frac{X}{Y}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n}}\triangleq\frac{F_{n,m}}{F_{n,m}+\frac{m}{n}}\sim\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F(1-\beta)=\beta\frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow F=\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{m}{n}\Rightarrow F_{m,n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}$$

(iv) Λ分布和β分布之间的转化

$p=1$时，$\Lambda(1,n,m)=\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$

$\Lambda\triangleq\frac{|W_1|}{|W_1+W_2|}$，$p=1$时，$W_1\sim\chi^2(n)$，$W_2\sim\chi^2(m)$，$W_1$与$W_2$相互独立

$$\Rightarrow\Lambda\sim\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$$

$\Lambda=\Lambda(1,n-r,r-1)\sim\beta\left(\frac{n-r}{2},\frac{r-1}{2}\right)\triangleq\dfrac{F}{F+\frac{r-1}{n-r}}$，其中$F\sim F_{n-r,r-1}$

$$\Rightarrow F\Lambda+\frac{r-1}{n-r}\Lambda=F$$

$$\Rightarrow (1-\Lambda)F=\frac{r-1}{n-r}\Lambda\Rightarrow\frac{1}{F}=\boxed{\frac{(1-\Lambda)}{\Lambda}\cdot\frac{n-r}{r-1}}\triangleq F_{New}\sim F_{r-1,n-r}$$

• p值为 $P\text{-}Value=Pr\left(F_{r-1,n-r}>\frac{(1-\Lambda)}{\Lambda}\cdot\frac{n-r}{r-1}\right)$

$p=1$时，$\Lambda=\frac{SSA}{SSA+SSB}\Rightarrow\frac{(1-\Lambda)}{\Lambda}\cdot\frac{n-r}{r-1}=\frac{SSB/(r-1)}{SSA/(n-r)}\triangleq\frac{\chi^2_{r-1}/r-1}{\chi^2_{n-r}/n-r}\sim F_{r-1,n-r}$

此时检验统计量可以写为 $F_{New}=\frac{(1-\Lambda)}{\Lambda}\cdot\frac{n-r}{r-1}$

$$=\frac{SSB/(r-1)}{SSA/(n-r)}$$ → 这就是一元统计分析中熟悉的方差分析的F统计量。

② $r=2$ 时，$\Lambda \sim \Lambda(p, n-2, 1)$

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n-2, 1) \triangleq \Lambda(1, n-p-1, p) \triangleq \beta\left(\frac{n-p-1}{2}, \frac{p}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\Lambda}{\Lambda} \cdot \frac{n-p-1}{p} \triangleq F_{p, n-p-1}$$

• 检验的 p 值为：$p\text{-Value} = Pr\left(F_{p, n-p-1} \geq \frac{1-\Lambda}{\Lambda} \cdot \frac{n-p-1}{p}\right)$

③ $p=2$ 时，$\Lambda \sim \Lambda(2, n-r, r-1)$

$$\Lambda \sim \Lambda(2, n-r, r-1) \triangleq \beta^2(n-r-1, r-1) \Rightarrow \sqrt{\Lambda} \sim \beta(n-r-1, r-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \frac{n-r-1}{r-1} \triangleq F_{2(r-1), 2(n-r-1)}$$

• 检验的 p 值为：$p\text{-Value} = Pr\left(F_{2(r-1), 2(n-r-1)} \geq \frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \frac{n-r-1}{r-1}\right)$

④ $r=3$ 时，$\Lambda \sim \Lambda(p, n-3, 2)$

$$\Lambda \sim \Lambda(p, n-3, 2) = \Lambda(2, n-p-1, p) = \beta^2(n-p-2, p)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Lambda} \sim \beta(n-p-2, p)$$

$$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \frac{n-p-2}{p} \triangleq F_{2p, 2(n-p-2)}$$

• 检验的 p 值为：$p\text{-Value} = Pr\left(F_{2p, 2(n-p-2)} \geq \frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} \cdot \frac{n-p-2}{p}\right)$

⑤ 当 $p \neq 1,2$ 或 $r \neq 2,3$ 时，可以根据似然比统计量的极限分布定理，在原假设 H_0 成立时，

$$-2\ln\lambda = -n\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{(r-1)p}$$

（注：χ^2 分布的自由度为 $\hat{\mu}_1, \cdots, \hat{\mu}_r, \hat{\Sigma} - \hat{\mu}_0, \hat{\Sigma}_0$

$$= \left[rp + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2}\right] - \left[p + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2}\right]$$

$$= (r-1)p$$

$$\lambda = \left(\frac{|SSA|}{|SSA+SSB|}\right)^{\frac{n}{2}} = \Lambda^{\frac{n}{2}}$$

）

• Wilks 分布 Λ 检验的渐近 p 值为：$p\text{-Value} = Pr\left(\chi^2_{(r-1)p} \geq -n\ln\Lambda\right)$ → 收敛速度较慢，进行修正

Bartlett (1938) 给出了修正后的似然比检验的精度为 n^{-2} 的渐近 p 值

$$p\text{-value} = Pr\left(\chi^2_{(r-1)p} \geq -\left(n-1-\frac{p+r}{2}\right)\ln\Lambda\right) + O(n^{-2})$$