Metody Probabilistyczne i Statystyka - zadania

dr Małgorzata Kuchta, na podstawie list prof. dr. hab. Michała Morayne

Lista powtórkowa

Zadanie 1. Rzucamy trzy razy kostką. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
a) w każdym rzucie wypadnie inny wynik;
b) łączna liczba oczek we wszystkich rzutach wyniesie 10;
c) liczba oczek w każdym kolejnym rzucie będzie większa o 1 niż w poprzednim.

Rozwiązanie (M.Pietrek).
$\Omega = \{\omega : \omega = (x_1, x_2, x_3) \wedge x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
$|\Omega| = 6^3 = 216$

a) $|A| = 6 * 5 * 4 = 120$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{120}{216} = 0,(5)$

b) Jeśli w dwóch pierwszych rzutach wyrzucimy łącznie mniej niż 4 oczka, na pewno nie otrzymamy już sumy 10. Podobnie gdy suma ta będzie większa od 9, końcowy wynik wynosi minimum 11. Wartość ta musi się więc mieścić w zakresie $\langle 4, 9\rangle$, a ostatni rzut jest zdeterminowany przez poprzednie. Możemy więc ograniczyć rozważania do par, jest ich $6^2 = 36$. Odrzucamy trzy pary o sumie poniżej 4 i sześć par, których suma przekracza 9. Moc zbioru A wynosi wobec tego 27.
$|A| = 27$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$

c) $A = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$
$|A| = 4$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$

Zadanie 2. Niech $A, B, C \in \Omega$ będą takimi zdarzeniami, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$ oraz $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Pokaż, że

$$\frac{1}{6} \leqslant P(A) \leqslant \frac{1}{4}$$

Rozwiązanie (J.Nigiel). Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń na prawdopodobieństwach, mamy:

$$1 = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Po podstawieniu i przekształceniu do prostszej postaci otrzymujemy

$$P(A) = \frac{1 + 3P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)}{6}$$

Wiemy również, że $P(A \cap B \cap C) \leqslant P(A \cap B)$. Stąd mamy:

$$P(A) \geqslant \frac{1 + 3P(A \cap B) - P(A \cap B)}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2P(A \cap B)}{6} \geqslant \frac{1}{6} \text{ bo } P(A \cap B) \geqslant 0$$

Z drugiej strony mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 5P(A) - P(A \cap B) \leqslant 1$$

$P(A \cap B) <= P(A)$, zatem

$$4P(A) \leqslant 5P(A) - P(A \cap B) \leqslant 1 \Rightarrow P(A) \leqslant \frac{1}{4}$$

$\square$

Zadanie 3. Pierwsza z trzech jednakowych urn zawiera 2 białe i 3 czarne kule, druga - 4 białe i 3 czarne, trzecia - 6 białych i 2 czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po losowym wybraniu urny i losowym wybraniu z niej kuli, jest ona a) biała; b) czarna? Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula została wybrana z pierwszej urny jeśli jest ona a) biała; b) czarna?

Rozwiązanie (J.Nigiel). Niech A oznacza zdarzenie wylosowania kuli białej z dowolnej urny. Niech B_i oznacza wylosowanie dowolnej kuli z i-tej urny. Zauważmy, że $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$ Oraz że zdarzenia B_i są rozłączne. Wtedy

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo mamy dalej:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{3} * (\frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{6}{8}) = \frac{241}{420}$$

Teraz naszym zadaniem jest obliczyć $P(B_1|A)$. Wystarczy podstawić do wzoru:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1) * P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5}}{\frac{241}{420}} = \frac{56}{241}$$

Przykład b liczy się analogicznie więc pozostawiam go czytelnikowi jako ćwiczenie przed kolokwium.

Zadanie 4. Załóżmy, że wśród mężczyzn jest $a\%$ daltonistów, a wśród kobiet - $b\%$. W grupie N osób jest m mężczyzn. Wybieramy losowo osobę spośród daltonistów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

Rozwiązanie (J.Nigiel). Niech D oznacza zdarzenie wybrania z grupy N osób daltonisty. P(D) liczy się analogicznie jak w poprzednim zadaniu. Oznaczmy jako K wybranie kobiety, a jako M wybranie mężczyzny. (Oczywiście wiemy, że K i M jest rozłączne oraz $K \cup M = \Omega$)

$$P(D) = P(D \cap K) + P(D \cap M) = P(K) * P(D|K) + P(M) * P(D|M) = (1 - \frac{m}{N}) * \frac{b}{100} + \frac{m}{N} * \frac{a}{100} = \frac{Nb - mb + ma}{100N}$$

Teraz możemy podstawić do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(M|D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{m}{N} * \frac{a}{100}}{\frac{Nb - mb + ma}{100N}} = \frac{ma}{Nb - mb + ma}$$

Zadanie 5. Wszystkie wyroby wchodzące w skład jednej z dwóch partii są dobrej jakości, w drugiej z tych partii, 1/4 wyrobów to braki. Wyrób wylosowany z wybranej losowo partii okazał się dobrej jakości. Oblicz prawdopodobieństwo, że jeśli zwrócimy do swojej partii ten pierwszy wyrób, to drugi wyrób wzięty z tej samej partii będzie wybrakowany.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Prawdopodobieństwo tego zdarzenie (oznaczmy je przez A) będzie sumą dwóch rozłącznych zdarzeń: Wylosowaliśmy wybrakowany wyrób, wcześniej losując z partii pierwszej; Wylosowaliśmy wybrakowany wyrób, wcześniej losując z partii drugiej. Widzimy, że prawdopodobieństwo pierwszego ze zdarzeń jest zerem, ponieważ w pierwszej partii nie ma wybrakowanych produktów. Przyjmijmy oznaczenia zdarzeń: N - losujemy z N-tej urny, W - wyrób jest wybrakowany, D - wyrób jest dobry. Liczymy prawdopodobieństwo drugiego zdarzenia (oznaczmy je przez B):

$$P(B) = P(W|2) \cdot P(2|D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{P(D|2) \cdot P(2)}{\frac{1}{2} \cdot (P(D|1) + P(D|2))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{3}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$$

Zadanie 6. Są trzy talie kart. W pierwszej brakuje czterech asów, w drugiej - dwóch asów i dwóch waletów, w trzeciej - asa, króla, damy i waleta. Gracz wybrał losowo jedną talię i wylosował cztery karty. Wszystkie cztery były takie same (tzn. np. cztery dwójki). Jakie jest prawdopodobieństwo, że losował z pierwszej talii?

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Chcemy policzyć prawdopodobieństwo losowania z pierwszej talii (1) pod warunkiem wylosowania czterech takich samych kart (T):

$$P(1|T) = \frac{P(T|1) \cdot P(1)}{P(T)}$$

Liczymy potrzebne nam wartości:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$$

$$P(T|1) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{4}}{\binom{48}{4}}$$

$$P(T|2) = \frac{\binom{11}{1}\binom{4}{4}}{\binom{48}{4}}$$

$$P(T|3) = \frac{\binom{9}{1}\binom{4}{4}}{\binom{48}{4}}$$

$$P(T) = \frac{1}{3} \cdot (P(T|1) + P(T|2) + P(T|3)) = \frac{12 + 11 + 9}{3\binom{48}{4}} = \frac{32}{3\binom{48}{4}}$$

Podstawiamy wyliczone wartości do pierwszego wzoru:

$$P(1|T) = \frac{P(T|1) \cdot P(1)}{P(T)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

Zadanie 7. Pokaż, że następujący układ zdarzeń jest niezależny: A, B, C, gdzie przy doświadczeniu polegającym na trzykrotnym rzucie kostką, A - za pierwszym razem wypadła szóstka, B - za drugim razem wypadła liczba $\geqslant 5$, C - za trzecim razem wypadła liczba $\leqslant 2$.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Trzeba trochę pomnożyć, raczej zadanie proste, może rozwiązanie się pojawi, a może nie

Zadanie 8. Czy jeśli zdarzenia A, B, C, D są niezależne, to niezależne są też zdarzenia $A, B, C \cup D$?

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Są niezależne, ponieważ mamy:

$$P(A \cap B \cap (C \cup D) = P((A \cap B) \cap (C \cup D)) = P((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D)) =$$

$$= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D) =$$

$$= P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D) =$$

$$= P(A)P(B) \cdot (P(C) + P(D) - P(C)P(D)) = P(A)P(B)P(C \cup D)$$

Oraz dla zbioru $X \in \{A, B\}$ mamy:

$$P(X \cap (C \cup D) = P((X \cap C) \cup (X \cap D)) =$$

$$= P(X \cap C) + P(X \cap D) - P(X \cap C \cap D) = P(X)P(C) + P(X)P(D) - P(X)P(C)P(D) =$$

$$= P(X) \cdot (P(C) + P(D) - P(C)P(D)) = P(X)P(C \cup D)$$

Zadanie 9. Ilu niezależnych rozdań trzeba dokonać grając w brydża, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz czterech asów przez a) ustalonego z góry gracza, b) któregokolwiek z graczy, było nie mniejsze niż 1/2?

Rozwiązanie (A.Lasecki).
W pierwszym przypadku zdarzenie będzie polegało na wylosowaniu 4 asów oraz 9 innych kart z talii, więc prawdopodobieństwo tego zdarzenia to:

$$P_a = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = \frac{11}{4165}$$

W drugim przypadku zdarzenie będzie polegało również na wyborze jednego z graczy:

$$P_b = \binom{4}{1} \cdot P_a = 4P_a$$

Do uproszczenia poszukiwanej sumy korzystamy z faktu, że:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n$$

Teraz podstawiając P_a za p otrzymujemy warunek:

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 - (1 - \frac{11}{4165})^n = 1 - (\frac{4154}{4165})^n$$

Z tego warunku otrzymujemy odpowiedź, że dla podpunktu (a) potrzebujemy co najmniej 263 rozdań. Dla podpunktu (b) otrzymujemy warunek:

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 - (1 - \frac{44}{4165})^n = 1 - (\frac{4121}{4165})^n$$

Czyli potrzebujemy co najmniej 66 rozdań.

Zadanie 10. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu doświadczeń według schematu Bernoulliego uzyskamy a sukcesów przed uzyskaniem b porażek.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Wystarczające jest tu założenie, że w pierwszych $a+b-1$ uzyskaliśmy co najmniej a sukcesów. Uzyskanie dokładnie a sukcesów w $a+b-1$ próbach ma, oczywiście, prawdopodobieństwo równe:

$$\binom{a+b-1}{n} p^n (1-p)^{a+b-1-n}$$

Więc uzyskanie co najmniej a sukcesów będzie miało prawdopodobieństwo wyrażone wzorem:

$$\sum_{n=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{n} p^n (1-p)^{a+b-1-n}$$

Zadanie 11. Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwiem sukcesu p. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania r-tego sukcesu dokładnie w $(k+r)$-tym doświadczeniu.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Wystarczające jest tu założenie, że w pierwszych $r+k-1$ uzyskaliśmy dokładnie $r-1$ sukcesów, a w ostatniej próbie sukces. Czyli otrzymujemy wzór:

$$\binom{r+k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^k \cdot p = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$$

Zadanie 12. Rzucamy 10 razy kostką. Znajdź najbardziej prawdopodobną liczbę wyrzuconych szóstek.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Korzystamy ze wzoru na wartość najbardziej prawdopodobną w schemacie Bernoulliego:

$$X = np = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6}$$

Czyli najbardziej prawdopodobną liczbą szóstek jest 1.

Zadanie 13. Urna zawiera 2 czarne i 3 białe kule. Wyjmujemy z urny po jednej kuli tak długo, dopóki nie wyciągniemy kuli czarnej. Znajdź wartość oczekiwaną liczby losowań z urny.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Ustalamy zmienną losową X:

$$X = n$$

Gdzie n to liczba losowań. Mamy więc:

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{0}}{\binom{5}{0}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{5}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{1}} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{3}{1}} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} = \frac{1}{10}$$

Mamy więc:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{4} n \cdot P(X = n) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4)$$

Czyli otrzymujemy:

$$E(X) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 2$$

Zadanie 14. Bierzemy udział w następującej grze: wyciągamy z talii 52 kart jedną kartę. Jeżeli wyciągniemy asa, to otrzymujemy 5 zł, jeżeli jakąś figurę, to otrzymujemy 2 zł, a jeżeli wyciągniemy kartę różną od wymienionych, to płacimy 1 zł. Jaka jest wartość oczekiwana tej gry? Ile powinniśmy płacić za wyciągnięcie karty różnej od asa i figury, żeby ta gra była sprawiedliwa (tj. żeby wartość oczekiwana wygranej była równa 0)?

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Ustalamy zmienną losową X:

$$X = n$$

Gdzie n to kwota wygrana w grze. Mamy więc:

$$P(X = 5) = \frac{4}{52}$$

$$P(X = 2) = \frac{12}{52}$$

$$P(X = -1) = \frac{36}{52}$$

Niech $V = \{-1, 2, 5\}$. Wtedy mamy:

$$\sum_{v \in V} v \cdot P(X = v) = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + (-1) \cdot 36}{52} = \frac{2}{13}$$

Żeby gra była sprawiedliwa musielibyśmy płacić takie n, że:

$$5 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + (-n) \cdot 36 = 0$$

Więc:

$$n \cdot 36 = 20 + 24$$
$$n = \frac{44}{36} \approx 1.22$$

Wtedy wartość oczekiwana wyniesie 0.08zł

Zadanie 15. Gracz rzuca kostką. Jeżeli wypadnie szóstka, to rzuca jeszcze raz. Oblicz wartość oczekiwaną liczby uzyskanych oczek.

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Ustalamy zmienną losową X:

$$X(n) = n$$

Gdzie n to liczba wyrzuconych oczek. Przy wykonaniu k rzutów liczba oczek będzie równa $6(k-1)+x$, gdzie $x \in \{1, \ldots, 5\}$. Zauważmy, że prawdopodobieństwo uzyskania każdej z wartości x jest takie samo i wynosi $\frac{1}{6}$. W takim razie prawdopodobieństwo uzyskania liczby oczek n będzie równe prawdopodobieństwu wyrzucenia odpowiedniej liczby szóstek tj. $[\frac{n}{6}]$ szóstek oraz wyrzucenia liczby $n \ mod \ 6$. Prawdopodobieństwo tego pierwszego wynosi $6^{-[\frac{n}{6}]}$, a tego drugiego $\frac{1}{6}$. Czyli oczekiwana liczba oczek wynosi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{6 \cdot 6^{[\frac{n}{6}]}} - \sum_{n=1}^{\infty} 6n \cdot \frac{1}{6 \cdot 6^{n}} = 4.44 - 0.24 = 4.2 \approx 4$$

Co daje nam 4 rzuty.

Zadanie 16. Gracz rzuca dwiema kostkami. Jeżeli wypadną dwie szóstki, to rzuca jeszcze raz Oblicz wartość oczekiwaną liczby uzyskanych łącznie oczek.

Zadanie 17. Na płaszczyźnie poprowadzono proste równoległe odległe o 2a. Na płaszczyznę tę rzucamy w sposób przypadkowy monetę o promieniu r < a. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że moneta nie przetnie żadnej prostej

Rozwiązanie (A.Lasecki).
Gęstością prawdopodobieństwa nazywamy taką nieujemną, borelowską funkcję rzeczywistą dla której całka przy odpowiednich granicach daje prawdopodobieństwo odpowiadającego granicom zdarzenia losowego. Funkcję tą wykorzystujemy do dokładniejszego modelowania zdarzeń. Np. Jeśli mamy odcinek AB, a nad jego środkiem trzymamy piłkę, to chcemy móc pokazać fakt, że po jej upuszczeniu, prawdopodobieństwo tego, że spadnie na środek odcinka jest większe niż tego, że spadnie na któryś z jego końców.
Oznaczmy przez x odległość środka monety do najbliższej prostej. Widzimy, że zdarzenie z treści zadania zachodzi gdy $x \in (r, a)$. Wyznaczamy gęstość prawdopodobieństwa. Mamy:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{a} : x \in (0, a) \\ 0 : oth \end{cases}$$

Liczymy prawdopodobieństwo poprzez odpowiednią całkę:

$$P = \int_{r}^{a} \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \cdot \int_{r}^{a} dx = \frac{a-r}{a}$$