1. Rozkład to miara prawdopodobieństwa, która suma miar zbiorów, czyli prawdopodobieństwa

$\frac{1}{4} = P(X=-1) = P(2X+1=-1) = P(Y=-1)$

$\frac{3}{4} = P(X=1) = P(2X+1=3) = P(Y=3)$ $\Rightarrow$ rozkład Y

$\begin{cases} P(Y=-1) = \frac{1}{4} \\ P(Y=3) = \frac{3}{4} \end{cases}$

2. $P(X=0) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(X^2=0) \wedge P(X=-1) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(X^2=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{8}$; $P(X=-2) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(X=4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$P(X=3) = \frac{1}{16}$; $P(X=-3) = \frac{1}{16} \Rightarrow P(X^2=9) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$P(X=4) = \frac{1}{16}$; $P(X=-4) = \frac{1}{16} \Rightarrow P(X^2=16) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

Więc rozkład to

$\begin{cases} P(X^2=1) = \frac{1}{2} \\ P(X^2=4) = \frac{1}{4} \\ P(X^2=9) = \frac{1}{8} \\ P(X^2=16) = \frac{1}{8} \end{cases}$

2. $P(X=0) = 0,2 \Rightarrow P(X^2=0) = 0,2$

$P(X=1) = 0,2$; $P(X=-1) = 0,15 \Rightarrow P(X^2=1) = 0,2 + 0,15 = 0,35$

$P(X=2) = 0,3 \Rightarrow P(X^2=4) = 0,3$

$P(X=4) = 0,1 \Rightarrow P(X^2=16) = 0,1$

$P(X=8) = 0,05 \Rightarrow P(X^2=64) = 0,05$

$\Rightarrow$ rozkład $\begin{cases} P(X^2=0) = 0,2 \\ P(X^2=1) = 0,35 \\ P(X^2=4) = 0,3 \\ P(X^2=16) = 0,1 \\ P(X^2=64) = 0,05 \end{cases}$

4. a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x<1 \\ 0 & 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2} & x>3 \end{cases} \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

$F_{2X}(t) = P(2X \le t) = P(X \le \frac{t}{2}) = F_X(\frac{t}{2}) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ \frac{1}{2}(\frac{t}{2}-1) & 2 \le t \le 6 \\ 1 & t>6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ gęstość 2X to $\begin{cases} 0 & x<2 \\ \frac{1}{4} & \\ 1 & x>6 \end{cases}$

b) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 2e^{-2x} & x \ge 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ rozkład wykładniczy $\lambda = 2$

$F_{2X}(t) = P(2X \le t) = P(X \le \frac{t}{2}) = F_X(\frac{t}{2})$

$f_{2X}(t) = (F_{2X}(t))' = (\frac{1}{2}(F_X(\frac{t}{2}))' = \frac{1}{2}(F_X'(\frac{t}{2}))^* = \frac{1}{2} f_X(\frac{t}{2}) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ rozkład wykładniczy $\lambda = 1$