Obliczenia naukowe. Lista nr 2. Sprawozdanie.

Kacper Szatan, nr 236478

November 17, 2019

CEL

Celem listy jest zbadanie uwarunkowań napotkanych zadań oraz stabilności zastosowanych algorytmów.
Poniżej zajmiemy się omówieniem realizacji zadań wykonanych na drugie laboratorium. Przedstawimi również wyniki zaprezentowanych eksperymentów oraz wnioski jakie można wyciągnąć.

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W zadaniu pierwszym należy zastosować cztery algorytmy sumowania, które implementowaliśmy w zadaniu piątym na liście pierwszej. Algorytmy te mamy zastosować dla podanych wektorów danych:

$$\tilde{x} = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664\sqcup, 0.301029995\sqcup]$$

$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

Różnica w danych między zadaniem piątym, a pierwszym polega na usunięciu ostatnich cyfr dla x_4 i x_5.

1.2 Realizacja

Cztery algorytmy z zadania piątego z listy drugiej:

- W przód.
- W tył.
- Od największego do najmniejszego.
- Od najmniejszego do największego.

1.3 Wyniki

Precyzja	Dane	Algorytm 1	Algorytm 2
Float32	x	-0.4999443	-0.4543457
Float32	$\tilde{x}$	-0.4999443	-0.4543457
Float64	x	1.0251881368296672e-10	-1.5643308870494366e-10
Float64	$\tilde{x}$	-0.004296342739891585	-0.004296342998713953
Prawidłowa wartość		-1.00657107000000e-11	

Table 1: Wynik sumowania przy zastosowaniu algorytmów w przód i w tył.

Precyzja	Dane	Algorytm 3	Algorytm 4
Float32	x	-0.5	-0.5
Float32	$\tilde{x}$	-0.5	-0.5
Float64	x	0.0	0.0
Float64	$\tilde{x}$	-0.004296342842280865	-0.004296342842280865
Prawidłowa wartość		-1.00657107000000e-11	

Table 2: Wynik sumowania przy zastosowaniu algorytmów od największego do najmniejszego i na odwrót.

1.4 Wnioski

Od razu widać, że modyfikacja, której dokonaliśmy nie wpłynęła w ogóle na wyniki algorytmów przeprowadzanych w arytmetyce **FLOAT32**. Jest to spowodowane małą precyzją tej arytmetyki. Po zastosowaniu funkcji bitstring okazało się, że $\tilde{x_4} = x_4$ w arytmetyce **FLOAT32**, a $\tilde{x_5}$ różni się tylko na ostatnim najmniej znaczącym bicie w stosunku do x_5. Zatem nic dziwnego, że ta zmiana nie wpłyneła na wyniki algorytmów. Jednakże w arytmetyce **FLOAT64** po tej niewielkiej modyfikacji otrzymane wyniki drastycznie różnią się od tych przed modyfikacją danych. Pozwala nam to sądzić, że być może zadanie jest źle uwarunkowane. Aby potwierdzić nasze przypuszczenia możemy policzyć względną zmianę wyników z wzoru podanego na wykładzie:

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|f(x)|}$$

Dla algorytmu w przód (pierwszej sumy) względna zmiana wyniku jest równa aż $4.19078478190021e7$ przy bardzo niewielkiej zmianie danych. Zatem nasze przypuszczenie o złym uwarunkowaniu zadania okazało się trafne.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Zadanie polegało na narysowaniu wykresu funkcji:

$$f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$$

w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie należało policzyć granicę funkcji $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Otrzymany wynik porównano z wykresami funkcji.

2.2 Realizacja

Podczas realizacji zdefiniowano w Julii zadaną funkcję, a następnię wyświetlono ją za pomocą trzech różnych "backendów" odpowiedzialnych za wizualizację. Do wyświetlenia posłużyły programy:

- PyPlot
- UnicodePlots (drukuje tekstowy wykres w konsoli)
- InspectDr

Następnie wyliczono granicę z pomocą WolframAplha oraz analitycznie.

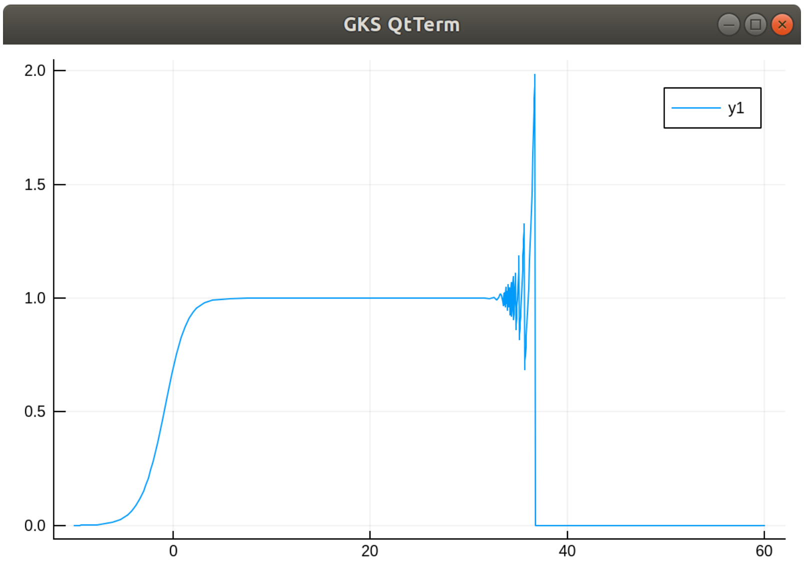
2.3 Wyniki

Wyliczenie granicy analitycznie:

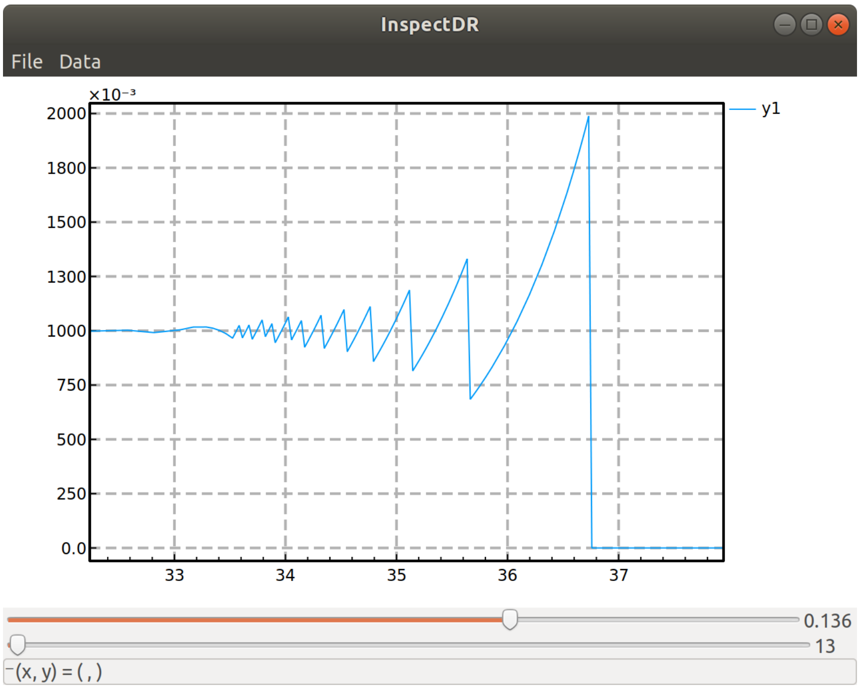
$$\lim_{x\to\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \to \frac{0}{0} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+e^{-x}))'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}(-e^{-x})}{-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

WolframAlpha również wyznacza tą granicę jako równą 1.



Wykres 1: Wykres funckji f stworzony za pomocą programu PyPlot.



Wykres 2: Wykres funckji f zbliżony w miejscu zaburzenia, stworzony za pomocą programu InspectDr.

2.4 Wnioski

Dokładna wyliczona przez nas i skonrolowana przez WolframAlpha granica wynosi 1. Niestety wykresy przez nas wygenerowane w okolicy $x = 33$ zaczynają się zaburzać, a dla x bliskich 37 i większych wykres pokazuje już tylko zero. Jest to najpewniej spowodowane pochłanianiem małych wartości e^{-x} przez jedynkę w logarytmie. To prowadzi do przybliżenia sumy w logarytmie. Następnie ten mały błąd pomnożony przez bardzo dużą liczbę e^x zwielokrotnia nam błąd wynikający z zakrągleń arytmetki. Dla większych wartości x wykresy pokazują, wartość funkcji równą 0. Dzieje się tak, bo suma w logarytmie $1 + e^{-x} = 1$ dla x bliskiego 37 i większych. Stąd mamy, że wynikiem logarytmu jest zero, a zero razy cokolwiek da nam zero. Chyba, że z x dojdziemy do takiej wartości, że $e^x = Inf$. Wtedy julia zwróci nam NaN, ponieważ 0.0 * Inf = NaN.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W zadaniu trzecim należało rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla macierzy współczynników $\mathbf{A} \epsilon \mathcal{R}^{n \times n}$ i wektora prawych stron $\mathbf{b} \epsilon \mathcal{R}^n$. Macierz $\mathbf{A}$ generowaliśmy na dwa sposoby:

- jako macierz Hilberta stopnia n.
- jako macierz losowa stopnia n i z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania c.

Wektor $\mathbf{b}$ jest zadany jako $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ przy czym $\mathbf{x} = (1, ..., 1)^T$, żeby było znane dokładne rozwiązanie. Równanie mamy rozwiązać przy pomocy dwóch algorytmów:

- eliminacja Gaussa $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$.
- macierz odwrotna $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1} b}$

3.2 Realizacja

Wygenerowano macierze hilberta $\mathbf{H_n}$ dla stopnia $\mathbf{n} \epsilon [2, 3, ..., 20]$ za pomocą dostarczonych źródeł z hilb.jl. Plik matcond.jl pozwolił na stworzenie losowych macierzy $\mathbf{R_n^c}$ dla stopnia $\mathbf{n} \epsilon [5, 10, 20]$ i rosnącego wskaźnika uwarunkowania $\mathbf{c} \epsilon [1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}]$. Następnie rozwiązano równanie dla każdej macierzy dwoma metodami (Gauss, Inversion). Na końcu wyliczono jeszcze błąd względny uzyskanych wyników korzystając ze wzoru $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||}$. Dzięki pakietowi LinearAlgebra określano jeszcze rząd obliczonej macierzy oraz jej wskaźnik uwarunkowania.

3.3 Wyniki

Stopień	Rząd	Cond	Gauss(error)	Inversion(error)
2	2	19.28147006790397	5.661048867003676e-16	1.4043333874306803e-15
3	3	524.0567775860644	8.022593772267726e-15	0.0
4	4	15513.73873892924	4.137409622430382e-14	0.0
5	5	476607.25024259434	1.6828426299227195e-12	3.3544360584359632e-12
6	6	1.4951058642254665e7	2.618913302311624e-10	2.0163759404347654e-10
7	7	4.75367356583129e8	1.2606867224171548e-8	4.713280397232037e-9
8	8	1.5257575538060041e10	6.124089555723088e-8	3.07748390309622e-7
9	9	4.931537564468762e11	3.8751634185032475e-6	4.541268303176643e-6
10	10	1.6024416992541715e13	8.67039023709691e-5	0.0002501493411824886
11	10	5.222677939280335e14	0.00015827808158590435	0.007618304284315809
12	11	1.7514731907091464e16	0.13396208372085344	0.258994120804705
13	11	3.344143497338461e18	0.11039701117868264	5.331275639426837
14	11	6.200786263161444e17	1.4554087127659643	8.71499275104814
15	12	3.674392953467974e17	4.696668350857427	7.344641453111494
16	12	7.865467778431645e17	54.15518954564602	29.84884207073541
17	12	1.263684342666052e18	13.707236683836307	10.516942378369349
18	12	2.2446309929189128e18	9.134134521198485	7.575475905055309
19	13	6.471953976541591e18	9.720589712655698	12.233761393757726
20	13	1.3553657908688225e18	7.549915039472976	22.062697257870493

Table 3: Wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla macierzy Hilberta.

Stopień	Rząd	Cond	Gauss(error)	Inversion(error)
5	5	1.0	1.5700924586837752e-16	1.9860273225978183e-16
5	5	10.0	4.965068306494546e-17	2.482534153247273e-16
5	5	1000.0	3.8130948794063295e-14	3.3816161346438753e-14
5	5	1.0e7	2.2919927882791603e-10	2.2953311159660053e-10
5	5	1.0e12	9.930136612989092e-17	1.1819407184470875e-5
5	4	1.0e16	0.38298628154598324	0.36255387530682937
10	10	1.0	2.328823463338184e-16	4.0792198665315547e-16
10	10	10.0	2.5559253454202263e-16	2.895107444979072e-16
10	10	1000.0	1.3703768418523405e-14	1.8361356958809712e-14
10	10	1.0e7	9.753013305378921e-11	1.438359473034689e-10
10	10	1.0e12	3.932920195316686e-5	3.597703968961513e-5
10	9	1.0e16	0.7572965466871276	0.7589151128008322
20	20	1.0	5.370542509574173e-16	4.74936748511455e-16
20	20	10.0	5.600852339972845e-16	4.0183325713214166e-16
20	20	1000.0	1.476680095807448e-14	1.9246029150100703e-14
20	20	1.0e7	1.6573334702084863e-10	1.658199909023172e-10
20	20	1.0e12	2.1119180994645343e-5	1.3131648619124226e-5
20	19	1.0e16	0.4019205888419031	0.371337553547061

Table 4: Wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla macierzy losowych zadanym wskaźnikiem uwarunkowania.

3.4 Wnioski

Analizując wyniki łatwo zauważyć, że wielkość błędu względnego jest mocno skorelowana z wskaźnikiem uwarunkowania macierzy. Im większy wskaźnik tym większy błąd jest popełniany dlatego zadania w których operujemy na macierzach z wysokim wskaźnikiem uwarunkowania są źle uwarunkowane. Ponadto można zauważyć, że wskaźnik uwarunkowania macierzy Hilberta rośnie bardzo szybko wraz z wzrostem ich stopnia (rozmiaru). Przy obliczaniu zadań, w których mamy doczynienia z macierzą Hilberta, powinniśmy stosować algorytm eliminacji Gaussa, który popełnia mniejszy błąd niż alogrytm odwracający macierz.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Zadanie polegało na obliczeniu 20 miejsc zerowych wielomianu P, który jest wielomianem Wilkinsona w postaci naturalnej. Wielomian Wilkinsona będziemy oznaczać przez p. Następnie należało sprawdzić wyliczone pierwiastki $z_k : k\epsilon[1, 2, ..., 20]$ przez obliczenie $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ oraz $|z_k - k|$. Powstałe rozbieżności omówić. W drugim podpunktcie należło przerpowadzić eksperyment jeszcze raz, ale tym razem dla lekko zmodyfikowanego wielomianu P i wyjaśnić powstałe różnice.

4.2 Realizacja

Za pomocą pakietu Polynomials utworzono wielomian P korzystając z funkcji *Poly*. Utworzono też wielomian Wilkinsona p za pomocą funkcji *poly*. Policzono miejsca zerowe wielomianu P za pomocą funkcji roots. Następnie funkcja *polyval* posłużyła do wyliczenia wartości wielomianów P i p w wyliczonych wcześniej miejscach zerowych. Obliczono również błąd bezwzględny między obliczonymi miejscami zerowymi, a ich faktyczną wartością. Następnie powtórzono cały eksperyment dla wielomianu zaburzonego o wartość -2^{-23} przy wyrazie $x^1 9$.

4.3 Wyniki

Przedstawiono na tabelach 5, 6 i 7.

k	$\|P(z_k)\|$	$\|p(z_k)\|$	$\|z_k - k\|$	z_k
1	36352.0	38400.0	3.0109248427834245e-13	0.9999999999996989
2	181760.0	198144.0	2.8318236644508943e-11	2.0000000000283182
3	209408.0	301568.0	4.0790348876384996e-10	2.9999999995920965
4	3.106816e6	2.844672e6	1.626246826091915e-8	3.9999999837375317
5	2.4114688e7	2.3346688e7	6.657697912970661e-7	5.000000665769791
6	1.20152064e8	1.1882496e8	1.0754175226779239e-5	5.999989245824773
7	4.80398336e8	4.78290944e8	0.00010200279300764947	7.000102002793008
8	1.682691072e9	1.67849728e9	0.0006441703922384079	7.999355829607762
9	4.465326592e9	4.457859584e9	0.002915294362052734	9.002915294362053
10	1.2707126784e10	1.2696907264e10	0.009586957518274986	9.990413042481725
11	3.5759895552e10	3.5743469056e10	0.025022932909317674	11.025022932909318
12	7.216771584e10	7.2146650624e10	0.04671674615314281	11.953283253846857
13	2.15723629056e11	2.15696330752e11	0.07431403244734014	13.07431403244734
14	3.65383250944e11	3.653447936e11	0.08524440819787316	13.914755591802127
15	6.13987753472e11	6.13938415616e11	0.07549379969947623	15.075493799699476
16	1.555027751936e12	1.554961097216e12	0.05371328339202819	15.946286716607972
17	3.777623778304e12	3.777532946944e12	0.025427146237412046	17.025427146237412
18	7.199554861056e12	7.1994474752e12	0.009078647283519814	17.99092135271648
19	1.0278376162816e13	1.0278235656704e13	0.0019098182994383706	19.00190981829944
20	2.7462952745472e13	2.7462788907008e13	0.00019070876336257925	19.999809291236637

Table 5: Wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla wielomianu Wilkinsona.

4.4 Wnioski

Analizując jedynie kolumnę z błędem bezwzględnym możemy dojść do mylnego przekonania, że pierwiastki wielomianu zostały prawidłowo wyliczone gdyż popełniony błąd jest niewielki. Jednakże gdy popatrzymy na wartości wielomianów w obliczonych miejscach zerowych to okaże się, że są one dalekie od 0. W pewnym momencie przekraczają one nawet bilion. Gwałtowny wzrost odchylenia w wyliczeniach $P(z_k)$ i $p(z_k)$ jest spowodowany tym, że nawet małe odchylenie w wyliczeniu pierwiastka jest mnożone przez bardzo duży czynnik wielkości 19!. Błąd przy wyliczeniach miejsc zerowych powodowany jest przez to, że współczynniki w wielomianie Wilkinsona mają nawet 19 cyfr znaczących, a w języku julia, w arytmetyce Float64 jesteśmy wstanie dokładnie reprezentować od 15 do 17 cyfr w systemie dziesiętnym.

Wielomian p wyliczany za pomocą funkcji *poly* (forma iloczynowa) jest nieznacznie dokładniejszy gdyż daje wyniki bliższe zeru niż wielomian P jednakże są one tego samego rzędu. Zatem jest to niezbyt znacząc różnica.

Gdy eksperyment przeprowadzono po małej modyfikacji współczynnika, części miejsc zerowych była liczbami zespolonymi.

k	$\|P(z_k)\|$	$\|p(z_k)\|$	$\|z_k - k\|$
1	20992.0	22016.0	1.6431300764452317e-13
2	349184.0	365568.0	5.503730804434781e-11
3	2.221568e6	2.295296e6	3.3965799062229962e-9
4	1.046784e7	1.0729984e7	8.972436216225788e-8
5	3.9463936e7	4.3303936e7	1.4261120897529622e-6
6	1.29148416e8	2.06120448e8	2.0476673030955794e-5
7	3.88123136e8	1.757670912e9	0.00039792957757978087
8	1.072547328e9	1.8525486592e10	0.007772029099445632
9	3.065575424e9	1.37174317056e11	0.0841836320674414
10	7.143113638035824e9	1.4912633816754019e12	0.6519586830380406
11	7.143113638035824e9	1.4912633816754019e12	1.1109180272716561
12	3.357756113171857e10	3.2960214141301664e13	1.665281290598479
13	3.357756113171857e10	3.2960214141301664e13	2.045820276678428
14	1.0612064533081976e11	9.545941595183662e14	2.5188358711909045
15	1.0612064533081976e11	9.545941595183662e14	2.7128805312847097
16	3.315103475981763e11	2.7420894016764064e16	2.9060018735375106
17	3.315103475981763e11	2.7420894016764064e16	2.825483521349608
18	9.539424609817828e12	4.2525024879934694e17	2.454021446312976
19	9.539424609817828e12	4.2525024879934694e17	2.004329444309949
20	1.114453504512e13	1.3743733197249713e18	0.8469102151947894

Table 6: Wyniki przeprowadzonych eksperymentów dla **zaburzonego** wielomianu Wilkinsona.

z_k
0.9999999999998357 + 0.0im
2.0000000000550373 + 0.0im
2.99999999660342 + 0.0im
4.000000089724362 + 0.0im
4.99999857388791 + 0.0im
6.000020476673031 + 0.0im
6.99960207042242 + 0.0im
8.007772029099446 + 0.0im
8.915816367932559 + 0.0im
10.095455630535774 - 0.6449328236240688im
10.095455630535774 + 0.6449328236240688im
11.793890586174369 - 1.6524771364075785im
11.793890586174369 + 1.6524771364075785im
13.992406684487216 - 2.5188244257108443im
13.992406684487216 + 2.5188244257108443im
16.73074487979267 - 2.812624896721978im
16.73074487979267 + 2.812624896721978im
19.5024423688181 - 1.940331978642903im
19.5024423688181 + 1.940331978642903im
20.84691021519479 + 0.0im

Table 7: Miejsca zerowe **zaburzonego** wielomianu Wilkinsona.

Omówione odkształcenia wynikiów potwierdzają iż poroblem obliczania miejsc zerowych wielomianu Wilkinsona jest zadaniem źle uwarunkowanym (mała modyfikacja danych doprowadziła do dużego odkształcenia wyników).

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

W zadaniu piątym mieliśmy poddać rozważaniu model logistyczny wzrostu populacji.

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), n = 0, 1, ...$$

W modelu tym r jest pewną daną stałą, a $r(1-p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji. Natomiast p_0 jest wielkością populacji stanowiąca procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska. Przeprowadzono dwa eksperymenty polegające na wykonaniu 40 iteracji rekurencyjnego wyrażenia opisującego nasz model. W pierwszym eksperymencie zastosowano obcięcie wyniku do 3 cyfr po przecinku po 10 iteracji. Ekspeyment pierwszy prowadzony był w arytmetyce **Float32**, a eksperyment drugi w **Float32** i **Float64**. W naszych eksperymentach stała $r = 3$, a $p_0 = 0.01$.

5.2 Realizacja

Opracowano funkcje, która umożliwia przeprowadzenie obu eksperymentów. Gdy podamy odpowiednią flagę w jej argumencie pozwala ona na opcjonalne obcięcie cyfr znaczących po dziesiątej iteracji. Funkcja ta zapewnia prawidłowe wykonywanie operacji w zadanej arytmetyce.

5.3 Wyniki

Iteracja	Zmodyfikowany **Float32**	**Float32**	**Float64**
0	0.01	0.01	0.01
1	0.0397	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173	0.15407173000000002
3	0.5450726	0.5450726	0.5450726260444213
4	1.2889781	1.2889781	1.2889780011888006
5	0.1715188	0.1715188	0.17151914210917552
6	0.5978191	0.5978191	0.5978201201070994
7	1.3191134	1.3191134	1.3191137924137974
8	0.056273222	0.056273222	0.056271577646256565
9	0.21559286	0.21559286	0.21558683923263022
10	**0.722**	0.7229306	0.722914301179573
11	1.3241479	1.3238364	1.3238419441684408
12	0.036488414	0.037716985	0.03769529725473175
13	0.14195944	0.14660022	0.14651838271355924
14	0.50738037	0.521926	0.521670621435246
15	1.2572169	1.2704837	1.2702617739350768
16	0.28708452	0.2395482	0.24035217277824272
17	0.9010855	0.7860428	0.7881011902353041
18	1.1684768	1.2905813	1.2890943027903075
19	0.577893	0.16552472	0.17108484670194324
20	1.3096911	0.5799036	0.5965293124946907
21	0.09289217	1.3107498	1.3185755879825978
22	0.34568182	0.088804245	0.058377608259430724
23	1.0242395	0.3315584	0.22328659759944824
24	0.94975823	0.9964407	0.7435756763951792
25	1.0929108	1.0070806	1.315588346001072
26	0.7882812	0.9856885	0.07003529560277899
27	1.2889631	1.0280086	0.26542635452061003
28	0.17157483	0.9416294	0.8503519690601384
29	0.59798557	1.1065198	1.2321124623871897
30	1.3191822	0.7529209	0.37414648963928676
31	0.05600393	1.3110139	1.0766291714289444
32	0.21460639	0.0877831	0.8291255674004515
33	0.7202578	0.3280148	1.2541546500504441
34	1.3247173	0.9892781	0.29790694147232066
35	0.034241438	1.021099	0.9253821285571046
36	0.13344833	0.95646656	1.1325322626697856
37	0.48036796	1.0813814	0.6822410727153098
38	1.2292118	0.81736827	1.3326056469620293
39	0.3839622	1.2652004	0.0029091569028512065
40	1.093568	0.25860548	0.011611238029748606

Table 8: Wyniki iteracji modelu logistycznego w dwóch przeprowadzonych eksperymentach.

5.4 Wnioski

Porównując wyniki rekurencji zmodyfikowanej i tej niezmodyfikowanej w arytmetyce **Float32** można zaobserwować, że po zastosowaniu obcięcia zaczynają one się "rozjeżdżać". Jako, że mamy doczynienia z problemem, w którym wyjście jednej iteracji stanowi wejście następnej to nie należy się dziwić "wzrostem" różnicy w wynikach w kolejnych iteracjach. Mimo, że początkowy błąd powodowany przez obcięcie jest niewielki to w każdej iteracji jest on powiększany. Z tych samych powodów podczas drugiego eksperymentu wyniki we **Float64** są tak bardzo różne od **Float32**. Tylko, że w eksperymencie drugim popełniamy ciągły błąd przez różnicę w długości mantys tych arytmetyk. Już dla trzeciej iteracji otrzymujemy różne dane na wejściu, stąd tak duże rozbieżności w wynikach, w późniejszych iteracjach. Tak na prawdę, żadna z arytmetyk nie daje nam pewności co do dobrych wyników. Jak wiemy z poprzedniego zadania we **Float64** dokładne jest maksymalnie 17 cyfr w systemie dziesiętnym. A niektóre wyniki są dłuższe. Zatem i tak popełniamy błąd zapisu, a następnie przekazujemy ten błędny wynik jako wejście kolejnej itertacji gdzie zostatenie on powiększony. Zatem możemy powiedzieć, że ten algorytm jest niestabilny.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

W ostatnim zadaniu należało rozważyć równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} := x_n^2 + c, n = 0, 1, ...$$

Należało przeprowadzić 40 iteracji tego równania dla następujących warunków:

a) $c = -2$ i $x_0 = 1$

b) $c = -2$ i $x_0 = 2$

c) $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$

d) $c = -1$ i $x_0 = 1$

e) $c = -1$ i $x_0 = -1$

f) $c = -1$ i $x_0 = 0.75$

g) $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

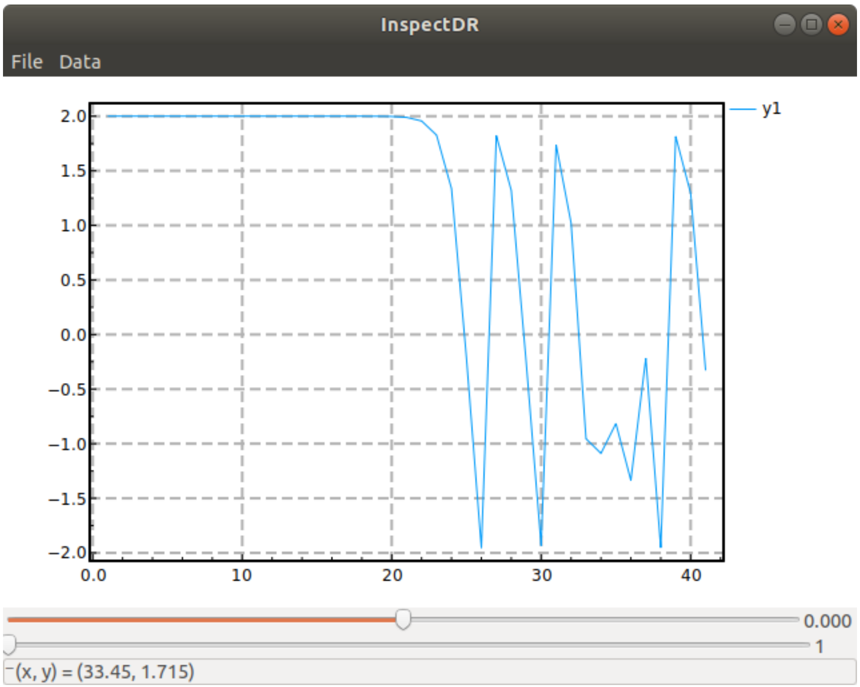
6.2 Realizacja

Obliczenia prowadzono w arytmetyce **Float64**. Skonstruowano funkcje rekurencyjną, która pozwala na 40 iteracji i zapisuje wyniki do podanej tablicy aby można je było łatwo odczytać. Skorzystano też z InspectDR aby zwizualizować wylilczone ciągi. Poniżej podano wykresy dla ciągu *c, f i g*.

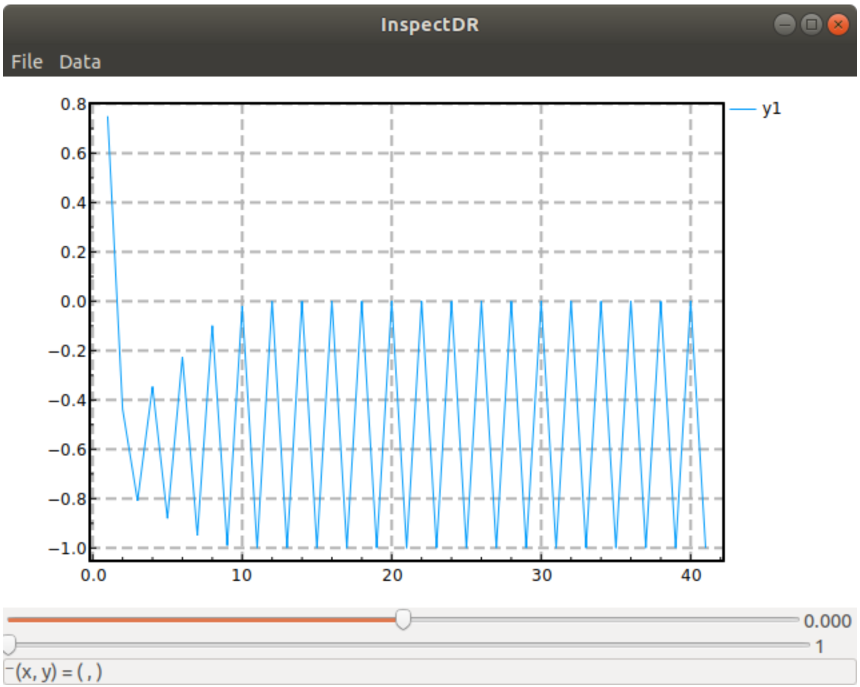
6.3 Wyniki

iteracja	$c = -2$			$c = -1$			
x_0 =>	1.0	2.0	1.99999999999999	1.0	-1.0	0.75	0.25
1	-1.0	2.0	1.99999999999996	0.0	0.0	-0.4375	-0.9375
2	-1.0	2.0	1.9999999999998401	-1.0	-1.0	-0.80859375	-0.12109375
3	-1.0	2.0	1.9999999999993605	0.0	0.0	-0.3461761474609375	-0.9853363037109375
4	-1.0	2.0	1.999999999997442	-1.0	-1.0	-0.8801620749291033	-0.029112368589267135
5	-1.0	2.0	1.9999999999897682	0.0	0.0	-0.2253147218564956	-0.9991524699951226
6	-1.0	2.0	1.9999999999590727	-1.0	-1.0	-0.9492332761147301	-0.0016943417026455965
7	-1.0	2.0	1.999999999836291	0.0	0.0	-0.0989561875164966	-0.9999971292061947
8	-1.0	2.0	1.9999999993451638	-1.0	-1.0	-0.9902076729521999	-5.741579369278327e-6
9	-1.0	2.0	1.9999999973806553	0.0	0.0	-0.01948876442658909	-0.9999999999670343
10	-1.0	2.0	1.999999989522621	-1.0	-1.0	-0.999620188061125	-6.593148249578462e-11
11	-1.0	2.0	1.9999999580904841	0.0	0.0	-0.0007594796206411569	-1.0
12	-1.0	2.0	1.9999998323619383	-1.0	-1.0	-0.9999994231907058	0.0
13	-1.0	2.0	1.9999993294477814	0.0	0.0	-1.1536182557003727e-6	-1.0
14	-1.0	2.0	1.9999973177915749	-1.0	-1.0	-0.9999999999986692	0.0
15	-1.0	2.0	1.9999892711734937	0.0	0.0	-2.6616486792363503e-12	-1.0
16	-1.0	2.0	1.9999570848090826	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
17	-1.0	2.0	1.999828341078044	0.0	0.0	0.0	-1.0
18	-1.0	2.0	1.9993133937789613	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
19	-1.0	2.0	1.9972540465439481	0.0	0.0	0.0	-1.0
20	-1.0	2.0	1.9890237264361752	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
21	-1.0	2.0	1.9562153843260486	0.0	0.0	0.0	-1.0
22	-1.0	2.0	1.82677862987391	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
23	-1.0	2.0	1.3371201625639997	0.0	0.0	0.0	-1.0
24	-1.0	2.0	-0.21210967086482313	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
25	-1.0	2.0	-1.9550094875256163	0.0	0.0	0.0	-1.0
26	-1.0	2.0	1.822062096315173	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
27	-1.0	2.0	1.319910282828443	0.0	0.0	0.0	-1.0
28	-1.0	2.0	-0.2578368452837396	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
29	-1.0	2.0	-1.9335201612141288	0.0	0.0	0.0	-1.0
30	-1.0	2.0	1.7385002138215109	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
31	-1.0	2.0	1.0223829934574389	0.0	0.0	0.0	-1.0
32	-1.0	2.0	-0.9547330146890065	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
33	-1.0	2.0	-1.0884848706628412	0.0	0.0	0.0	-1.0
34	-1.0	2.0	-0.8152006863380978	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
35	-1.0	2.0	-1.3354478409938944	0.0	0.0	0.0	-1.0
36	-1.0	2.0	-0.21657906398474625	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
37	-1.0	2.0	-1.953093509043491	0.0	0.0	0.0	-1.0
38	-1.0	2.0	1.8145742550678174	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
39	-1.0	2.0	1.2926797271549244	0.0	0.0	0.0	-1.0
40	-1.0	2.0	-0.3289791230026702	-1.0	-1.0	-1.0	0.0

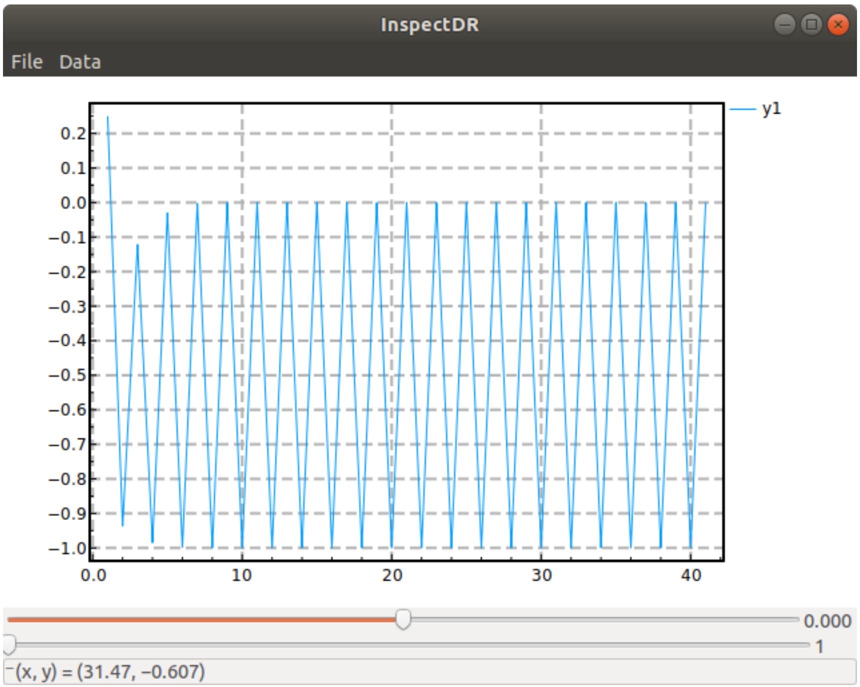
Table 9: Wyniki 40 iteracji dla 7 opisanych przypadków startowych.



Wykres ciągu c.



Wykres ciągu f.



Wykres ciągu g.

6.4 Wnioski

Dla ciągów a, b, d, e iteracje zachowują się stabilnie. Natomiast ciągi c, f, g kumulują błedy w kolejnych iteracjach. Przy operacji podnoszenia do kwadratu część cyfr znaczących zostaje utracona. W przypadku ciągu c wartości oscylują między -2, a 2, ale nigdy nie występują na tyle blisko tych liczb, żeby zostać do nich zaokrąglone. Ciągi f, g są dosyć podobne. Wartości oscylują między -1, a 0. i w pewnym momencie zostaje popełniony błąd zaokrąglenia x_n do -1. Wtedy ciągi wpadają w pętlę na zmiane zer i minus jedynek.